

Posudek vedoucího diplomové práce:

ANALYSIS OF ATTRACTORS FOR GENERALIZED NEWTONIAN FLUIDS IN 3D DOMAINS

autor práce: Josef Žabenský

Téma, obsah práce:

Východiskem práce je tzv. model Ladyženské pro nestlačitelné neneutonské proudění tekutiny v omezené 3d oblasti. Jde o Navier-Stokesovy rovnice s dodatečnou nelineární disipací ve tvaru r -laplaciánu. Je známo, že pro r jen o málo větší než 2 má model Ladyženské z matematického hlediska řadu velmi dobrých vlastností: řešení jsou jednoznačná, a pro velké časy jsou exponenciálně rychle přitahována atraktorem konečné dimenze. Poznamenejme, že pro samotný Navier-Stokesův systém jsou tyto problémy stále otevřené.

Zajímavým a z hlediska aplikací důležitým problémem je explicitní (v závislosti na datech rovnice) odhad dimenze zmiňovaného atraktoru. Dosud dokázané odhady jsou příliš velké. Daly by se podstatně vylepšit, kdybychom mohli použít metodu Ljapunovských exponentů. K tomu bychom potřebovali ukázat, že řešení jsou diferencovatelná vůči počáteční podmínce. To naráží na problém nedostatečné regularity řešení (připomínám, že jsme ve 3d oblasti.)

Bližší zkoumání problému ukazuje, že vyšší regularita řešení je pouze „formální“ překážkou: potřebujeme ji toliko k ospravedlnění aplikace metody Ljapunovských exponentů; vlastní dimenze atraktoru závisí jen na odhadech, které dokázány jsou. To souvisí s faktem, že problematický člen (r -laplacián) sice možná není diferencovatelný, ale je správným způsobem monotónní.

Cílem práce bylo matematicky podložit předchozí úvahy. Model Ladyženské se „perturbuje“ členem $\varepsilon\Delta^3u$. Ten zaručí vyšší regularitu a tedy velmi dobré odhady dimenze atraktoru; je však třeba ověřit, že odhady nezávisí na libovolně malém $\varepsilon > 0$.

Hodnocení práce:

Jedná se o netriviální kompilaci několika různých postupů (existence řešení, vyšší regularita řešení a jeho diferencovatelnost vůči počáteční podmínce, odhad Ljapunovských exponentů a konečně konstrukce exponenciálního atraktoru), které bylo třeba aplikovat na dosud nestudovaný systém. Velmi oceňuji přístup studenta, který pracoval téměř naprosto samostatně a navíc se nechtěl spokojit pouhým přebíráním postupů z literatury, nýbrž usiloval i o jejich zevrubné pochopení a vlastní zpracování. Výsledkem je velmi pěkně napsaná a detailně promyšlená práce.

Nepodařilo se sice dosáhnout ideálního cíle, čímž by byla platnost vylepšených odhadů dimenze i pro $\varepsilon = 0$, tj. pro původní model Ladyženské, ovšem to je dle mého názoru problém řádově obtížnější a vyžadující patrně ještě nějaký nový nápad.

Práce (psaná anglicky) má vynikající jazykovou a typografickou úroveň.

Práci doporučuji uznat jako diplomovou; navrhuji hodnocení známkou

V Praze dne 16.8.2011

Dalibor Pražák