Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Gergely Nagy

Řízení podnikového rizika

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Studijní program: Finanční a pojistná matematika

2011

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce Doc. RNDr. Janu Hurtovi CSc. za vedení práce a cenné připomínky.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 20.7.2011 Gergely Nagy

Obsah

Název práce: Řízení podnikového rizika
Autor: Gergely Nagy
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
e-mail vedoucího: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme jednotlivá rizika, kterým podnik je neustále vystaven. Zaobíráme se ohodnocením rizik z různých pohledů, největší důraz je však kladen na nejmodernější typ míry rizik: Value at Risk. Studujeme různé možnosti, jak tuto hodnotu odhadnout na základě historických dat. V další části se zaobíráme nejdůležitějšími typy rizik, a to tržním rizikem, rizikem likvidity, kreditním rizikem a riziky operačními. Pro ilustraci a usnadnění výpočtů je práce provázena ukázkovými příklady a procedurou naprogramovanou v systému Mathematica.

Klíčová slova: riziko, Value at Risk, řízení rizik

Title: Company risk control
Author: Gergely Nagy
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Supervisor's e-mail address: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we study the most common risks a company faces every day. We deal with risk valuation from different points of view, but mostly the most modern risk measure, the Value at Risk is discussed. We study different ways of VaR estimation based on historical data. Further, we study the most common types of risks, market risk, liquidity and credit risk, and operational risks. This work is accompanied with sample examples and a procedure, programmed in the system Mathematica, for illustration and computational purposes.

Keywords: risk, Value at Risk, risk management

1 Úvod

Cílem podnikání je přinášet hodnotu - zisk pro majitele. Řízení rizik slouží k navýšení této hodnoty a stabilizování místa podniku na trhu.

Řízení rizik je komplexní proces, který má za úkol identifikovat oblasti podnikání, které jsou vystaveny nějakým rizikům, tato rizika rozpoznat a ohodnotit a zavést opatření, která vedou buď k eliminaci daného rizika, nebo k jeho snížení na přijatelnou úroveň.

Procesy řízení rizik jsou poměrně novými součástmi podniků, zavádějí se kvůli nátlaku konkurence a rychle se měnících tržních podmínek. Převratem v této oblasti bylo zavedení míry rizika zvané *Value at Risk* (hodnota v riziku), které nejenže ulehčilo kvantifikaci rizik, ale také jejich chápání. Řízení rizik se tím rozšířilo po celém světě a dnes je součástí každého podniku.

V této práci se zaměříme na charakterizaci měr rizik a analýzu nejdůležitějších rizik, se kterými se podnik může setkat. Popíšeme klasické metody řízení těchto rizik a zavedeme postupy, které kombinují matematické postupy s ekonomickými ukazateli výkonnosti podniku. Vybrané výsledky budeme ilustrovat pomocí systému Mathematica.

1.1 Riziko

Rizikem se většinou rozumí nebezbečí vzniku škody, ztráty, poškození či zničení, popřípadě nezdaru při podnikání. Nicméně neexistuje všeobecně uznávaná definice, jednotlivé vysvětlení tohoto pojmu závisí na oblasti ve kterém se použije. Riziko je:

pravděpodobnost nebo možnost vzniku ztráty;

odchylka mezi očekávanými a skutečnými výsledky;

nebezpečí chybného rozhodnutí;

hladina nejistoty budoucích čistých výnosů;

střední hodnota ztrátové funkce;

pravděpodobnost vzniku odlišného výsledku než se očekávalo.

Ve finančním a ekonomickém prostředí se však riziko chápe jako volatilita náhodné veličiny představující zkoumanou finanční veličinu. Tedy riziko vyjadřuje kolísavost finanční veličiny (zisku) vzhledem k očekávané hodnotě v důsledku změn okolností.

Na riziko se nejvíce hledí jako na hrozbu a nejistotu, ale pro podnik, který se specializuje na její management, představuje příležitost.

1.2 Klasifikace rizik

Neexistuje pevně daná, všeobecně uznávaná terminologie řízení rizik, jejich členění je ještě rozpačitější. Zde rizika budeme členit do čtyř skupin:

Finanční rizika:

- cenové riziko (ovlivněné úrokovými mírami, zahraničnými měnami),
- riziko likvidity,
- kreditní riziko,
- inflace a jiné.

Operační rizika:

- rizika spojená s obchodní činností,
- riziko informačních technologií a jiné.

Hazardní rizika:

- riziko přírodních katastrof,
- riziko požáru a dalších poškození,
- riziko krádeže a jiné.

Strategická rizika:

- technologické inovace,
- ztráta reputace,
- regulace a politické trendy,
- konkurence a jiné.

Řízení podnikových rizik pokrývá všechny tyto 4 skupiny rizik a všechny rizikové faktory, které mohou ovlivnit hodnotu podniku.

1.3 Obecný postup řízení rizik

V dalš9m výkladu budeme vycházet z [1]. Řízení rizik je neustále se opakující proces, který má zpravidla tyto fáze:

1. *Stanovení souvislostí*
   V této fáze se definuje vztah podniku k okolí, analyzují se silné a slabé stránky podniku prostřednictvím SWOT (Strengths - Weaknesses - Opportunities - Threats) analýzy, identifikují se podílníky a strategie firmy.

2. *Identifikace rizik*
   Tato fáze se zaměřuje na identifikaci hrozeb, které jsou zdrojem rizika pro podnik. Na této fázi by měli participovat všichni zaměstnanci, aby se identifikovala rizika ze všech oblastí podnikání.

3. *Analýza a kvantifikace rizik*
   Jedná se o kalibraci rizik a - pokud je to možné - o stanovení pravděpodobnostního rozdělení.

4. *Vyhodnocení rizik*
   Posouzení důležitosti a seřazení jednotlivých rizik s cílem vytvořit podklady pro rozhodování.

5. *Ošetřování a využití rizik*
   V této fáze se rozhoduje o strategii zpracování rizik - pojištění, využití, redukce nebo transfer rizika.

6. *Kontrola*
   Kontroluje se celkový proces řízení rizik a hodnotí se zásahy managementu, což je vlastně základem pro první krok.

V podstatě existují dvě možnosti, jak řídit rizika:

Finanční opatření - tato možnost zahrnuje různé typy pojištění, zajištění pomocí finančních derivátů, sjednání záruk, prodej rizikového aktiva a - asi nejběžnější způsob - vytváření rezerv.

Technicko-organizační opatření - zahrnuje preventivní opatření, vypracování různých směrnic a krizových plánů.

Nicméně, některé rizika s nezávažnými důsledky se někdy vyplatí jen nést, protože náklady na jejich řízení mohou být o hodně větší než případná ztráta. Přitom toto platí i pro některá závažnější rizika (např. politické riziko apod.).

2 Analýza rizik

Existují dva základní přístupy analýzy rizik: kvalitativní a kvantitativní. *Kvalitativní* metody popisují efekt případného dopadu jevu, jehož riziko výskytu analyzujeme a někdy též pravděpodobnost takovéto události. Rozsah rizik je přitom vyjádřen číselnou charakteristikou (např. 1 ... 7), nebo popsán slovně (např. zanedbatelné, mírné, nezanedbatelné, podstatné, kritické). Nicméně tento postup je spíše subjektivní, neposkytuje finanční ohodnocení a používá se jako doplnění kvantitativní analýzy.

Kvantitativní metody analyzují průběh výskytu škodných událostí. Poskytují číselné charakteristiky rizik většinou ve finančních termínech, které tvoří základ k dalším podnikatelským rozhodnutím.

Použití obou metod závisí na dostupnosti dat a také osobních zkušenostech analytika. V praxi se často používají jejich kombinace, protože dávají číselné charakteristiky rizik a nepožadují předpoklady, které kvantitativní metody vyžadují. V dalším se budeme zabývat pouze kvantitatiavními metodami, které se jeví jako zajímavější.

2.1 Míry rizik

Míry rizik můžeme rozdělit do dvou základních skupin: míry, které jsou spjaté s úrovní solventnosti společnosti, a míry, které se vztahují ke kolísavosti výkonu podniku.

Míry vztahující se k solventnosti podniku - tyto míry vycházejí z chvostu rozdělení a slouží k stanovení ekonomického kapitálu:

- *riziko ztráty (shortfall risk* - SFR*)* - pravděpodobnost, že hodnota nějaké náhodné veličiny (představující např. zisk) bude menší než stanovená mez. Nechť X je náhodná veličina představující ztrátu a nechť X_i, $i = 1,\dots,n$, $n \in \mathbb{N}$ jsou jeho pozorované hodnoty. Pak empirickou pravděpodobnost ztráty můžeme vyjadřit jako

$$\mathrm{SFR} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,H]}(X_i),$$

  kde H je cílená hodnota finanční veličiny a $I_{(-\infty,H]}(X_i)$ je indikátor X_i, tj. pro $X_i \le H$ je $I_{(-\infty,H]}(X_i) = 1$ jinak je nulový.
- *hodnota v riziku (Value at Risk)* - VaR_α^t - maximální možná ztráta, která může postihnout společnost, za normálních tržních podmínek, přes dané časové období délky t a na dané konfidenční úrovni α. VaR můžeme interpretovat jako veličninu H v předchozí rovnici, při známé SFR. V podnikatelském protředí se používá v podobě *zisku v riziku* - PaR (Profit at Risk) a *peněžního toku v riziku* - CFaR (Cash Flow at Risk).

- *podmíněná hodnota v riziku (Conditional Value at Risk* - CVaR*)* - tato míra rizika vypovídá o situaci, když hodnota v riziku je překročena. Jedná se o střední hodnotu ztráty za předpokladu překročení VaR.

Míry vztahující se ke kolísavosti výkonu podniku - tyto míry se vážou k části pravděpodobnostního rozdělení kolem střední hodnoty a jsou podstatné při určování variability kolem očekávaných hodnot.

- *Rozptyl* - měří variabilitu finanční veličiny X,

$$\mathrm{var}(X) = \sigma^2(X) = EX - (EX)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

  kde $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$.
- *Směrodatná odchylka (volatilita)* - nejběžnější míra rizik, je definována jako druhá odmocnina rozptylu. Směrodatnou odchylku můžeme interpretovat jako rozsah, ve kterém zkoumaná veličina se může odchýlit od očekávané hodnoty.
- *Poloviční rozptyl* (${}^s\sigma^2(X)$) a *Dolní směrodatná odchylka* (${}^s\sigma(X)$) - jedná se o modifikaci rozptylu a směrodatné odchylky, při kterých bereme v úvahu jen nepříznivé deviace:

$${}^s\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\min[0,(X_i - H)])^2},$$

  kde H je cílená hodnota finanční veličiny, X_i jsou pozorované hodnoty veličiny X a n je počet pozorování. ${}^s\sigma(X)$ je vlastně vylepšení směrodatné odchylky, udává rozsah, do kterého se zkoumaná veličina může odchýlit směrem dolů pod specifikovanou hranici H.
- *Variační koeficient* - $\rho(X) = \frac{\sigma(X)}{EX}\cdot 100[\%]$.
- *Šikmost* - vyjadřuje míru asymetrie rozdělení hodnot náhodné veličiny kolem střední hodnoty. Symetrické rozdělení má koeficient šikmosti 0, doprava sešikmená rozdělení mají šikmost kladnou, doleva sešikmená mají tento koeficient záporný. Pro náhodnou veličinu X šikmost definujeme jako

$$\gamma_3 = \frac{E(X - EX)^3}{\mathrm{var}(X)^{3/2}}.$$

- *Špičatost* - vyjadřuje koncentrovanost hodnot náhodné veličiny kolem střední hodnoty. Čím špičatější je rozdělení, tím míň hodnot je soustředěno kolem střední hodnoty a konce rozdělení jsou těžší. Tedy příliš špičaté rozdělení přináší větší pravděpodobnosti extrémních hodnot. Koeficient špičatosti definujeme jako

$$\gamma_4 = \frac{E(X - EX)^4}{\mathrm{var}(X)^2}.$$

Příklad 2.1. Investor rozhoduje o koupi akcií firmy A a B. Musíme posoudit, která varianta je výhodnější. Z tabulky 1[1] vidíme, že akcie firmy A jsou výnosnější a také méně rizikovější (směrodatná odchylka i dolní směrodatná odchylka jsou menší pro akcii A) než akcie B, proto investor by měl koupit akcie podniku A. Riziko ztráty pod úroveň středního výnosu je v obou případech zhruba 1/2, což odpovídá tomu, že data pro výpočet byla generována z normálního rozdělení. □

Charakteristika	akcie A	akcie B
Střední výnos	0.16 %	0.09 %
Směrodatná odchylka	0.017	0.019
Dolní směrodatná odchylka	0.012	0.013
Riziko deficitu pod úroveň středního výnosu	0.496	0.492

Tabulka 1: Číselné charakteristiky akcií A a B

2.2 Value at Risk

Value at Risk je maximální možná ztráta za určité časové období, která může nastat s danou pravděpodobností způsobenou nepříznivým vývojem rizikového faktoru. Nechť X je náhodná veličina reprezentující ztrátu. VaR na konfidenční úrovni α, za období délky t můžeme zavést vztahem

$$P(X < \mathrm{VaR}_\alpha^t(X)) = \alpha, \tag{1}$$

tedy chceme, aby ztráta překročila $\mathrm{VaR}_\alpha^t(X)$ za časový horizont délky t jen s malou pravděpodobností $1-\alpha$.

Je-li F distribuční funkce veličiny X, pro $u \in (0,1)$ můžeme definovat kvantilovou funkci X následujícím způsobem:

$$F^{-1}(u) = \inf\{x, F(x) \geq u\}.$$

VaR_α^t na úrovni $\alpha \in (0,1)$ definujeme jako α - kvantil rozdělení X předpisem

$$\mathrm{VaR}_\alpha^t(X) = F^{-1}(\alpha),$$

neboli

$$1-\alpha = \int_{\mathrm{VaR}_\alpha^t(X)}^{\infty} f(x)dx,$$

kde $f(x)$ je hustota rozdělení X.

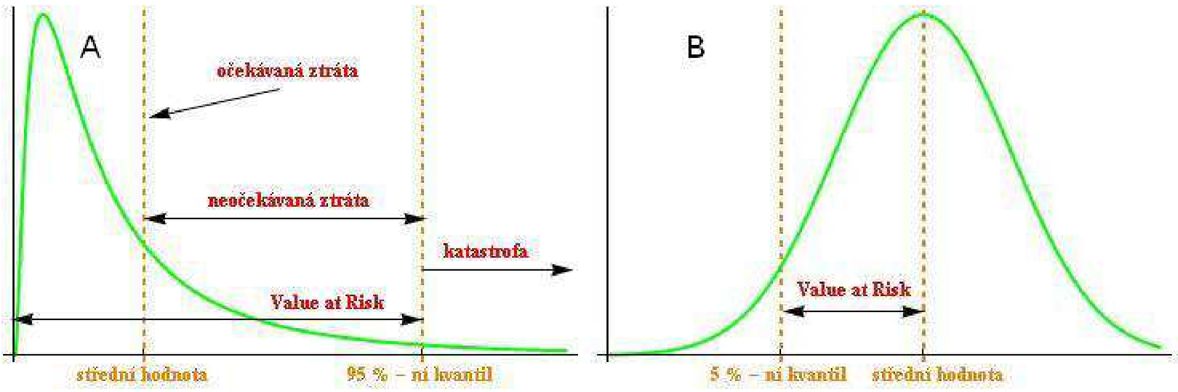
Takto definovaná hodnota v riziku se vztahuje k jednomu časovému období, mohli bychom psát VaR_α^1 nebo jednoduše VaR_α. Ale podstatné je si uvědomit, že pro jiný časový úsek dostaneme jinou hodnotu. Například pro měření tržního rizika se používá časové období 1 den, nebo 10 (obchodních) dní; pro operační a kreditní riziko 1 rok.

[1] Výpočet v přiloženém souboru `Rizeni_podnikoveho_rizika.nb`

Hlavní argument pro použití právě takových časových období je dostupnost dat, na základě kterých se VaR počítá, a také možnost reagovat na její měnící se hodnotu. V případě tržního rizika máme k dispozici většinou denní hodnoty instrumentů (denní měnové kurzy, ceny akcií) a během jednoho dne se můžeme rozhodovat na základě VaR a můžeme se zbavit např. příliš rizikových aktiv. Naproti tomu např. u operačního rizika implementace protiopatření trvá většinou týdny až měsíce.

Důležitá je i různá interpretace VaR:

Příklad 2.2. $\mathrm{VaR}_{0.95}^{1\,rok} = 1\ 000\ 000$ znamená, že s pravděpodobností 95 % ztráty vzniklé v důsledku zkoumaného rizika nepřekročí 1 000 000 během jednoho roku (obrázek 1 A). Tedy během 100 let za nezměněných podmínek by ztráta 1 000 000 by měla být překročena 5 krát. Ale v případě tržního rizika $\mathrm{VaR}_{0.95}^{1\,den} = 1\ 000\ 000$ znamená, že s pravděpodobností 95 % zítřejší hodnota našeho portfolia nějakých aktiv nebude nižší o více než 1 000 000 oproti zítřejší očekávané hodnotě portfolia (obrázek 1 B). □



Obrázek 1: VaR na úrovni 95 % pro náhodnou veličinu s rozdělením $LN(0,1)$ a $N(0,1)$

Kromě $\mathrm{VaR}_{\alpha}^{t}(X)$ nás budou zajímat dvě další důležité veličiny:

očekávaná ztráta - $\mathrm{EL}(X)$ *(Expected Loss)* - střední hodnota ztrát,

neočekávaná ztráta - $\mathrm{UL}(X)$ *(Unexpected Loss)* - výše ztráty nad $\mathrm{EL}(X)$, tj. $\mathrm{UL}(X) = \mathrm{VaR}_{\alpha}^{t}(X) - \mathrm{EL}(X)$.

Výhody Value at Risk:

je snadno spočítatelná a interpretovatelná, neboť se jedná o jedinou hodnotu, která je většinou vyjádřena v peněžních jednotkách,

je použitelná v podstatě k měření libovolného typu rizika.

Nevýhody Value at Risk:

je odhadováno na základě historických pozorování a proto nedokáže předpovědět budoucí extrémní ztráty (příkladem by mohla být finanční krize z roku 2008), není koherentní[2] mírou rizika, neboť není subaditivní (a proto není možné používat VaR např. pro hodnocení efektu diverzifikace portfolia). *Koherentní míra rizika* je reálná funkce f definovaná na množině náhodných veličin $L(\Omega, A, P)$, taková, že $\forall\ X, Y \in L, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ platí

- $X \leq Y s.j \ \Rightarrow\ f(X) \leq f(Y)$, (monotonnost)
- $f(X+Y) \leq f(X) + f(Y)$, (subaditivita)
- $f(\alpha X) = \alpha f(X)$, (pozitivní homogenita)
- $f(\alpha + X) = \alpha + f(X)$, (translační invariance).

udává pouze hodnotu, která nebude překročena s danou pravděpodobností a o výši překročení neříká nic.

2.2.1 Conditional Value at Risk

Řešením některých problemů s VaR je *podmíněná hodnota v riziku* (Conditional Value at Risk - CVaR), která udává, jaká bude výše ztráty ve střední hodnotě, pokud hodnota v riziku bude překročena,

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = E(X|X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)).$$

Nicméně CVaR jen teoreticky řeší problém překročení VaR, neboť ve většině případů neexistují vhodná data pro určení relevantního odhadu. Na rozdíl od VaR je však koherentní mírou rizika.

Je-li X ztráta s hustotou $f(x)$, pak podmíněnou VaR, jak je uvedeno v [13], lze vyjadřit jako

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = E(X|X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X))dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{P(X \leq x, X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X))}{P(X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X))} dx = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}^{\infty} x f(x) dx.$$

2.2.2 Další varianty Value at Risk

Kvantilová hodnota v riziku (Quantile Value at Risk - QVaR)

Kvantilová hodnota v riziku na konfidenční úrovni α a β je definovaná, jak je uvedeno v [13], jako hodnota v riziku na konfidenční úrovni β náhodné veličiny s podmíněním rozdělením $\{X|X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)\}$. $\mathrm{QVaR}_{\alpha,\beta}(X)$ tedy poskytuje informaci

[2]Jednoduchý příklad na ilustraci, proč VaR není subaditivní: Nechť investor A a B mají portfolio, kde pravděpodobnost zisku je 0.97. Tedy VaR na úrovni 95 % je v obou případech zhruba 0. Ale kombinované portfolio má pravděpodobnost kladného výdělku $0.97^2 \approx 0.94$. Z toho vidíme, že VaR na úrovni 95 % zde již není triviální, a tím jsme našli protipříklad subaditivity.

o situaci, když $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ je překročena. Pravděpodobnost ztráty nad $\mathrm{QVaR}_{\alpha,\beta}(X)$, pokud $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ je překročena, je

$$P(X \geq \mathrm{QVaR}_{\alpha,\beta}(X) | X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = \frac{P(X \geq \mathrm{QVaR}_{\alpha,\beta}(X),\ X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X))}{P(X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X))} = 1 - \beta,$$

protože

$$P(X \geq \mathrm{QVaR}_{\alpha,\beta}(X),\ X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = P(X \geq \mathrm{QVaR}_{\alpha,\beta}(X)) = (1-\alpha)(1-\beta).$$

Z tohto vyplývá, že

$$P(X < \mathrm{QVaR}_{\alpha,\beta}(X)) = 1 - (1-\alpha)(1-\beta) = \alpha + \beta - \alpha\beta,$$

a tudíž $\mathrm{QVaR}_{\alpha,\beta}(X)$ je $(\alpha + \beta - \alpha\beta)$ kvantil X.

Peněžní tok v riziku (Cash Flow at Risk - CFaR)

Peněžní tok v riziku je varianta VaR, která předpovídá, jaká velká bude deviace mezi plánované a skutečné peněžní toky. Odhaduje se na základě cash flow schém.

Zisk v riziku (Earnings at Risk - EaR)

Zisk v riziku měří, jak skutečný čistý zisk se bude lišit od plánovaného v důsledku změn rizikových faktorů.

2.2.3 Parametrický Value at Risk

V dalším výkladu vycházíme z [2]. Předpokládejme, že distribuční funkce náhodné veličiny X, která představuje možnou ztrátu, má tvar

$$F(x) = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \tag{2}$$

kde μ je střední hodnota X a nazývá se parametr polohy, a σ je volatilita X, která se označuje jako parametr měřítka. Do této rodiny distribučních funkcí patří například normální rozdělení. Potom podle (1) a (2) máme

$$P(X < \mathrm{VaR}^t_\alpha(X)) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mathrm{VaR}^t_\alpha(X)-\mu}{\sigma}\right) = G\left(\frac{\mathrm{VaR}^t_\alpha(X)-\mu}{\sigma}\right) = \alpha,$$

$$\frac{\mathrm{VaR}^t_\alpha(X)-\mu}{\sigma} = G^{-1}(\alpha),$$

a proto

$$\mathrm{VaR}^t_\alpha(X) = \mu + \sigma u_\alpha, \tag{3}$$

kde u_α je příslušný α - kvantil.

Takto spočítaný VaR se vztahuje k jednomu období (většinou dni). Pro jiné období musíme uvážit, že volatilita a střední hodnota se může v čase měnit. Podle [2] máme 2 situace. Nejprve uvažujme, že střední hodnota se časem nemění a rozptyl se mění proporcionálně. Pak rozptyl pro časový úsek délky T je

$$\sigma_T^2 = T\sigma^2.$$

Z toho vyplývá, že

$$\mathrm{VaR}_\alpha^T(X) = \mu + \sqrt{T}\sigma u_\alpha.$$

Pokud uvažujeme, že střední hodnota se také mění časem proporcionálně, pak máme

$$\mathrm{VaR}_\alpha^T(X) = T\mu + \sqrt{T}\sigma u_\alpha.$$

Výše uvedené vzorce platí, předpokládáme-li, že změny hodnot X jsou normálně rozdělené s nulovou střední hodnotou. Jinak platí jako aproximace.

2.2.4 Neparametrický Value at Risk

Neparametrický VaR je založen na větším množství historických dat, kde místo teoretického kvantilu se použije empirický. Nechť máme pozorované třeba denní ztráty $X_1, \dots, X_T$. Seřazením těchto hodnot dostáváme seřazený náhodný výběr $X_{[1]} \le \dots \le X_{[T]}$ z neznámého rozdělení. Potom empirický α - kvantil $\tilde{u_\alpha}$ podle [2] můžeme definovat jako:

$$\widehat{\mathrm{VaR}_\alpha^T(X)} = \tilde{u_\alpha} = \begin{cases} X_{[[T\alpha]+1]} & T\alpha \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(X_{[T\alpha]} + X_{[T\alpha+1]}) & T\alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tedy pro $\alpha \in (0,1)$ pravděpodobnost, že ztráta bude větší než $\tilde{u_\alpha}$ je $1-\alpha$.

2.2.5 Portfolio VaR

Nechť máme jen jedno aktivum, s rozdělením výnosu $N(0,\sigma^2)$. Tento předpoklad je často uvažován, a i když není stále splněn, používá se, neboť střední hodnota výnosů bývá zanedbatelná oproti volatilitě. Pak Value at Risk (uvažujeme jedno časové období) dle (3) lze spočítat pomocí vzorce

$$^P\mathrm{VaR}_\alpha = I_0 u_\alpha \sigma, \tag{4}$$

kde I_0 je počáteční hodnota portfolia a u_α je příslušný kvantil. Máme-li v portfoliu více aktiv, při výpočtu VaR musíme uvážit vzájemnou interakci mezi jednotlivými aktivy, tedy diverzifikační efekt.

Nechť máme portfolio N aktiv. Nechť r_i značí (očekávaný) výnos i-tého aktiva za jedno období, tj.

$$r_i = \frac{P_i(t_1) - P_i(t_0)}{P_i(t_0)},$$

kde $P_i(t_0)$ a $P_i(t_1)$ jsou ceny i-tého aktiva na začátku po sobě následujících obdobích. Obecněji: r_i je faktor rizika, který vstupuje do výnosu portfolia lineárně. Nechť w_i je váha i-tého aktiva v portfoliu, tedy $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$. Pak celkový výnos portfolia je

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} w_i r_i = \mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{r},$$

kde $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N)^\mathsf{T}$ a $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_N)^\mathsf{T}$. Potom rozptyl výnosu portfolia je

$$\sigma(\mathbf{r})^2 = \mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{N} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j,$$

kde σ_i^2 je rozptyl výnosů i-tého aktiva, ρ_{ij} je korelační koeficient mezi výnosy i-tého a j-tého aktiva a

$$\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^{N}$$

je kovarianční matice, σ_{ij} je kovariance výnosů i-tého a j-tého aktiva.

Předpokládáme-li normální rozdělení výnosů jednotlivých aktiv se střední hodnotou 0, pak výnos celkového portfolia, jakožto lineární kombinace těchto výnosů, má rovněž normální rozdělení. Tedy VaR celého portfolia podle (4) je

$${}^{P}\mathrm{VaR}_\alpha = I_0\sigma(\mathbf{r})u_\alpha,$$

kde I_0 je počáteční hodnota portfolia a u_α je příslušný kvantil normovaného normálního rozdělení.

2.3 Metody výpočtu VaR

Přímo spočítat VaR lze jen v případě, že známe rozdělení rizikového faktoru. V takovém případě VaR je příslušný kvantil rozdělení rizikového faktoru. V praxi tomu tak většinou není, a proto se používají metody založené na historických datech. Každá metoda založená na pozorovaných datech má však nevýhodu v tom, že předpokládá že budoucnost se bude vyvíjet stejně jako minulost. A to nemusí být vždy pravda, proto při rozhodování na základě VaR (a i ostatních rizikových ukazatelů) by měly být posouzeny i vnější okolnosti. V dalším budeme vycházet z [8].

2.3.1 Historická simulace absolutní

Nechť hodnota portfolia je dána jako funkce $V(\mathbf{X})$, kde $\mathbf{X}$ je vektor faktorů, na kterých hodnota portfolia závisí. Funkce $V(\mathbf{X})$ může být například součet cen akcií nebo součet cen akcií vynásobené měnovým kurzem apod. Chceme odhadnout VaR na základě dat dostupných z posledních N dní.

Nechť máme hodnoty faktorů ovlivňujících hodnotu portfolia za posledních N dní, tj. vektory $X_1, \ldots, X_N$. Spočteme hodnoty $V(X_1), \ldots, V(X_N)$. Máme tedy N

hypotetických hodnot portfolia za uplynulé období délky N. Následně se určí mezidenní změny v hodnotě portfolia $\Delta V(X_n) = V(X_n) - V(X_{n-1})$, $n = 2, \ldots, N$. Z těchto hodnot se pak hledané VaR určí metodou neparametrického VaR.

Takto získaný VaR říká, že zítřejší očekávaná hodnota portfolia nebude nižší o víc než VaR (na dané konfidenční úrovni). Přičemž zítřejší očekávanou hodnotu portfolia můžeme určit jako

$$E(V(X_{N+1})) = V(X_N) + \frac{1}{N-1}\sum_{i=2}^{N} \Delta V(X_i),$$

tedy je to součet dnešní ceny portfolia a odhadu střední hodnoty mezidenních změn.

2.3.2 Historická simulace relativní

Podobně jako u asolutní simulace předpokládejme znalost rizikových faktorů $X_{i,j}$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1 \ldots K$, kde index i značí příslušnost ke dni a j je pořadí tohoto faktoru. Při této simulaci se odhadnou hodnoty rizikových faktorů pro následující den na základě historických mezidenních procentuálních změn:

$$\widehat{{}_{N+1}X_{i,j}} = \frac{X_{i,j}}{X_{i-1,j}} X_{N,j},\ j = 1, \ldots, K,\ i = 2, \ldots, N.$$

Vektor $\widehat{{}_{N+1}X_n} = (\widehat{{}_{N+1}X_{n,1}}, \ldots, \widehat{{}_{N+1}X_{n,K}})^\mathsf{T}$ nazveme $(n-1)$.–ní scénář. Pro každý scénář se vypočte hodnota portfolia a odečte se od ní jeho dnešní hodnota:

$$V(\widehat{{}_{N+1}X_n}) - V(X_N),\ n = 2, \ldots, N.$$

Tým jsme spočítali $N-1$ odhadů změn hodnoty portfolia, ze kterých se hledaný VaR opět vybere metodou neparametrického VaR.

2.3.3 Monte Carlo simulace

Tato metoda spočívá v generování velkého počtu možných hodnot portfolia. Předpokládáme, že hodnota portfolia je funkcí rizikových faktorů $X_1, \ldots, X_k$, které ji ovlivňují a změny hodnot těchto parametrů mají normální resp. logaritmicko-normální rozdělení. Dále předpokládáme, že střední hodnota mezidenních změn hodnoty portfolia je nulová. Postup Monte Carlo simulace pak je následující:

1. Spočte se dnešní hodnota portfolia $V(\mathbf{X}) = V(X_1, \ldots, X_k)$.
2. Pro rizikové faktory se vygeneruje vektor korelovaných hodnot z normálního, resp. logaritmicko-normálního rozdělení $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_k)$, dostaneme tak vlastně možné změny rizikových faktorů.
3. Z vygenerovaných hodnot se určí možná hodnota portfolia jako $V(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = V(X_1 + Y_1, \ldots, X_k + Y_k)$.
4. Stanoví se možná změna hodnoty portfolia jako $V(\mathbf{X}) - V(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

5. Kroky 2 až 4 se opakují N - krát, pro N dostatečně velké.

6. Potom z N možných hodnot VaR určíme opět metodou neparametrický VaR.

Zbývá určit vektor možných změn rizikových faktorů $\mathbf{Y}$. Z historických dat se odhadne varianční matice $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^{k}$ změn hodnot jednolivých rizikových faktorů, kde σ_{ij} je kovariance složek X_i a X_j, tj. $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = E(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)$. Kovariance můžeme odhadnout pomocí výběrové kovariance, která je nestranným a konzistentním odhadem původní kovariance a pro náhodné veličiny A a B s realizacemi A_i, B_i, $i = 1, \dots, n$ je definovaná jako

$$\hat{\sigma}_{A,B} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (A_i - \overline{A})(B_i - \overline{B}).$$

Pak zřejmě matice $\mathbf{\Sigma}$ je symetrická a předpokládáme-li, že je pozitivně definitní, tj. $\mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{\Sigma} \mathbf{x} > 0$ pro všechny nenulové vektory $\mathbf{x}$ příslušného typu, pak můžeme tuto matici rozložit na horní a dolní trojúhelníkovou matici, přičemž platí, že jedna je transpozicí druhé, tj. $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Upsilon}^\mathsf{T} \mathbf{\Upsilon}$, kde $\mathbf{\Upsilon}$ je horní trojúhelníková matice. Tento rozklad matice se nazývá Choleského dekompozice.

Dále se vygeneruje vektor hodnot nekorelovaných náhodných veličin $\mathbf{e}$ s normovaným normálním rozdělením. Pak platí, že varianční i korelační matice

$$\sigma^2(\mathbf{e}) = E(\mathbf{e} - E\mathbf{e})(\mathbf{e} - E\mathbf{K})^\mathsf{T} = E(\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}) = \mathbf{I}$$

je jednotková matice. Položíme-li $\mathbf{Y} = \mathbf{\Upsilon}^\mathsf{T} \mathbf{e}$, pak variační matice $\mathbf{Y}$ je

$$\sigma^2(\mathbf{Y}) = E(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\mathsf{T}) = E(\mathbf{\Upsilon}^\mathsf{T} \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T} \mathbf{\Upsilon}) = \mathbf{\Upsilon}^\mathsf{T} E(\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}) \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{\Upsilon}^\mathsf{T} \mathbf{I} \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{\Sigma},$$

a tedy i korelační matice $\mathbf{Y}$ se shoduje s korelační maticí změn rizikových faktorů.

Jiná možnost jak odhadovat změny rizikových faktorů je použít mnohorozměrné rozdělení. Jestliže veličina $\mathbf{X}$ má rozdělení $\mathscr{L}(\mathbf{X}) = N_k(\mu, \mathbf{\Sigma})$ a $\mathbf{Y}$ má rozdělení $\mathscr{L}(Y) = N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k)$ pak platí, že $\mathscr{L}(\mu + \mathbf{\Sigma}^{1/2} \mathbf{Y}) = \mathscr{L}(\mathbf{X})$.

2.4 Back testing

Pro posouzení adekvátnosti odhadu VaR se používají různě metody, jako je Stress testing nebo back testing. Vychází se z vlastností VaR, které jsme požadovali při jeho stanovení, tedy relevantní je konfidenční úroveň α a časový úsek (počet pozorování) T, pro který máme VaR odhadnuté.

2.4.1 Metoda založená na CLV

Máme-li $\text{VaR}_\alpha^T(X)$, pak tato hodnota je spolehlivá, pokud ji pozorovaná ztráta za období délky T prekročí v $1 - \alpha$ % případů. Nicméně musíme brát v úvahu, že každou novou pozorovanou hodnotou se odhad $\text{VaR}_\alpha^T(X)$ bude odlišovat od předchozí hodnoty. Následující úvaha je založená na přednášce 2 z [8]. Nechť

$$X_1, X_2, \dots, X_T \tag{5}$$

jsou pozorované ztráty, a

$$^{0}\mathrm{VaR}_{\alpha}^{T}(X),^{1}\mathrm{VaR}_{\alpha}^{T}(X),\dots,^{T-1}\mathrm{VaR}_{\alpha}^{T}(X) \tag{6}$$

jsou příslušné hodnoty v riziku, kde $^{i}\mathrm{VaR}_{\alpha}^{T}(X)$ je VaR pro i-té období, počítané na základě dostupných dat z $(i-1)$.-ního období. Označme

$$L_i = I_{(-\infty,X_i]}(^{i-1}\mathrm{VaR}_{\alpha}^{T}(X)),\ i \geq 1, \tag{7}$$

tedy $L_i = 1$ pro $X_i \geq^{i-1} \mathrm{VaR}_{\alpha}^{T}(X)$ a $L_i = 0$ pro $X_i <^{i-1} \mathrm{VaR}_{\alpha}^{T}(X)$. Potom

$$N = \sum_{i\geq 1} L_i$$

je počet překročení odhadnuté hodnoty pozorovanou ztrátou. Naše metoda odhadu VaR je tedy spolehlivá, pokud $N \approx (1-\alpha)T$. Budeme tedy testovat

$$H_0 : N = (1-\alpha)T \quad vs. \quad H_1 : N \neq (1-\alpha)T.$$

Jestliže naše metoda při zvolené hladině spolehlivosti p odhaduje VaR správně, pak veličina η, která je součtem T nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením $Alt(1-\alpha)$, má binomické rozdělení s parametry T a $(1-\alpha)$. Tedy

$$E\eta = T(1-\alpha),\ \mathrm{Var}(\eta) = T\alpha(1-\alpha)$$

a tudíž veličina

$$Z = \frac{\eta - T(1-\alpha)}{\sqrt{T\alpha(1-\alpha)}} \tag{8}$$

podle Moivre-Laplaceovy věty má pro $T \gg 1$ přibližně rozdělení, jako veličina s rozdělením $N(0,1)$, neboli

$$\lim_{n\to\infty} P(Z \leq z) = \Phi(z), \quad z \in \mathbb{R}^1.$$

Označíme-li $\hat{Z} = Z$ po dosazení v (7) realizaci N za η, pak hypotézu H_0 zamítáme na hladině spolehlivosti p, když

$$|\hat{Z}| > u_{1-\frac{p}{2}},$$

kde $u_{1-\frac{p}{2}}$ je $(1-\frac{p}{2})$ - kvantil normovaného normálního rozdělení.

Příklad 2.3. *Výpočet VaR a posouzení vhodnosti modelu retrospektivně*. Podnik zvažuje dovážet na území EU nějaký produkt z Japonska ode dne 1.10.2009. Stanovíme VaR pro možné ztráty vzniklé v důsledku měnového rizika a otestujeme vhodnost modelu na hladině 99 %. Použijeme kurzovní lístek Evropské centrální banky pro období 30.9.2008 až 30.9.2010 (v přiloženém souboru `prbacktesting.xls`). Za ztrátu budeme považovat událost, když aktuální kurz EUR/JPY je vyšší než kurz ze dne 1.10.2009, který bereme jako základní kurz pro celý následující rok. Ke každému dni spočteme příslušný denní neparametrický $\mathrm{VaR}_{0.99}^{1den}$ na základě předchozích 250 hodnot denních kurzů. [3] Počet překročení je 2, tedy

$$Z = \frac{2-2.5}{\sqrt{2.5\cdot 0.99}} = -0.3178.$$

Přičemž $u_{0.975} = 1.95996$, což znamená, že test nezamítnul správnost modelu.

[3] Podrobný výpočet v přiloženém souboru `Rizeni_podnikoveho_rizika.nb`.

2.5 Stanovení rozdělení rizikových faktorů

Pro stanovení statistických charakteristik náhodných veličin a modelování jejich vývoje v budoucnu je ve většině případů nejlepší mít jejich rozdělení. V oblasti řízení rizik se můžeme setkat se dvěma přístupy: stanovení rozdělení založené na expertních názorech a odhady pravděpodobnostních rozdělení na základě pozorovaných dat.

2.5.1 Stanovení rozdělení rizikových faktorů na základě expertních názorů

V případě, že nejsou dostupná data, na základě kterých by se dalo odhadnout pravděpodobnostní rozdělení, jsme odkázáni na odhad expertů. V takovém případě, jak je uvedeno v [3], se používají tyto typy rozdělení:

Rovnoměrné rozdělení - je použitelné pouze v případech, kdy známe jen odhady maximálních a minimálních možných hodnot. Disponuje však s velkou mírou nejistotou, stejnou pro všechny hodnoty.

$$X \sim R(a,b) \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x);\; x,\; a,\; b \in \mathbb{R},\; a < b.$$

Trojúhelníkové rozdělení - je nejpoužívanější typ rozdělení pro modelování expertních odhadů, od rovnoměrného rozdělení se liší v tom, že zde se některá hodnota z intervalu (minimum, maximum)=(a,b) považuje za nejpravděpodobnější (c). Hustota trojúhelníkového rozdělení má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \le x \le c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c \le x \le b, \quad a, b, c, x \in \mathbb{R}. \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Někdy je možné místo minima a maxima zadat kvantily a tím se eliminuje problém, že *odhadnuté* minimum, resp. maximum může být překročeno.

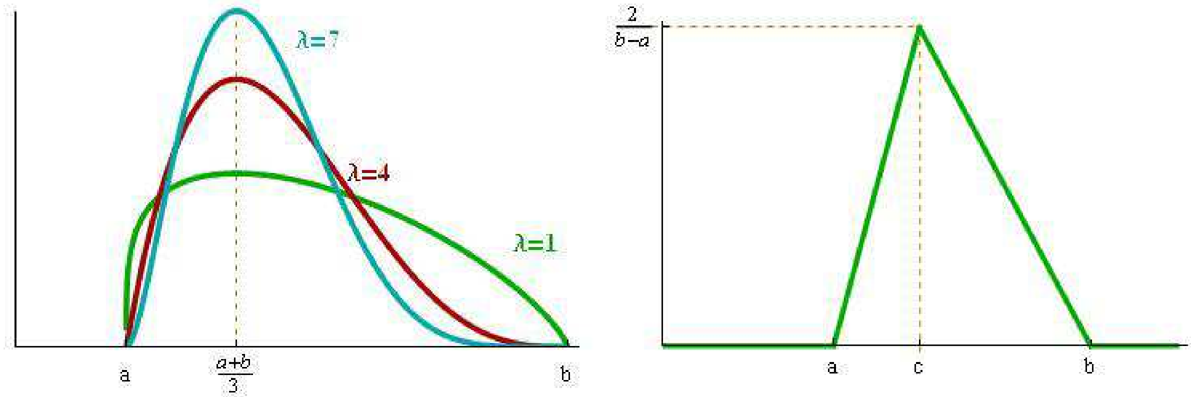
BetaPERT rozdělení[4] - toto rozdělení je speciální typ beta rozdělení, je podobné trojúhelníkovému, předpokládá znalost minimální, maximální a nejpravděpodobnější hodnoty, ale na rozdíl od trojúhelníkového nemá tak těžké chvosty a má větší koncentraci pravděpodobných hodnot kolem nejpravděpodobnější hodnoty. Jak je uvedeno v [15], je založen na beta rozdělení, které má hustotu tvaru:

$$f(x)^{\beta} = \begin{cases} \frac{1}{\beta(w+1,v+1)} x^{w}(1-x)^{v} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\beta(v+1, w+1) = \int_0^1 t^v (1-t)^w dt$, v a w jsou parametry tvaru, které se odvodí ze tří zadaných hodnot. Zavádí se další, váhový parametr λ, který udává, jakou

[4]PERT je zkratkou pro Program Evaluation and Review Technique, což je model pro projektový management, který byl vyvynutý v roce 1957 ve Spojených Státech pro podporu programu jaderných ponorek. BetaPERT rozdělení získalo svůj název kvůli podobné struktuře.

váhu přisuzujeme nejpravděpodobnější hodnotě. Výchozí hodnotou tohto parametru je $\lambda = 4$[5]. Různé volby λ ilustruje obrázek 2.



Obrázek 2: Hustota BetaPERT rozdělení pro různé λ a hustota trojúhelníkového rozdělní

Střední hodnota pak je

$$\mu = \frac{a + b + \lambda c}{2 + \lambda},$$

a parametry v a w se počítají jako

$$v = \frac{\lambda(c - a)}{(b - a)}, \; w = \lambda - v.$$

Pak hledaná hustota BetaPERT rozdělení je

$$f^{PERT}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} f^{\beta}\left(\frac{x-b}{a-b}\right) & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jiná možnost jak určit rozdělení je odhadnout jednotlivé kvantily, přičemž nejdříve odhadujeme medián, potom 25 a 75% kvantily a získané 4 intervaly opět rozdělíme na půl. Získanými kvantily proložíme křivku, která je vlastně hledanou distribuční funkcí, jejíž derivace je pak hledaná hustota. Nicméně získané funkce jsou velmi citlivé na změny jednotlivých hodnot a nepřesnosti přináší také druh interpolační funkce.

V případě, že máme k dispozici historická data, můžeme konstruovat pravděpodobnostní rozdělení na jejich základě, a to buď parametrickými, nebo neparametrickými metodami.

2.5.2 Neparametrické metody

Existuje několik neparametrických metod na určení rozdělení rizikových faktorů, z nich nejjednodušší je *bootstrap*, který generuje možné hodnoty faktoru právě ze

[5]Původní betaPERT rozdělení mělo tuto hodnotu zafixovanou, později David Vose zavedl modifikaci, která se dnes běžně používá, ve které tento parametr již zafixován není.

známých historických dat. Velkou výhodou této metody je právě fakt, že není nutný žádný předpoklad o rozdělení dat.

V dalším textu vycházíme z publikace [7]. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s neznámou distibuční funkcí F. Chceme odhadnout nějakou charakteristiku této distribuční funkce $\theta = \theta(F)$.

Nechť $S_n = S_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je statistika pro odhad parametru θ. Metoda bootstrap spočívá v tom, že neznámou d.f. F nahradíme empirickou distribuční funkcí:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x]}(X_i).$$

Je-li tedy $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_n$ náhodný výběr z F_n (tzv. bootstrapový výběr), každá z nich nabývá hodnoty $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s pravděpodobností $1/n$. Nahradíme-li původní výběr bootstrapovým a d.f. F empirickou d.f., dostaneme odhad $\hat{\theta} = \theta(F_n)$. Vygenerováním mnoha bootstrapových výběrů získáváme odhad rozdělení původních dat.

V procesu řízení rizik nás bude hlavně zajímat odhad střední hodnoty, volatility a nějakého kvantilu, neboli VaR. Pro odhad střední hodnoty se použije *výběrový průměr*:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

pro odhad rozptylu *výběrový rozptyl*

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2.$$

Pro odhady kvantilů pro $\alpha \in (0,1)$ zavedeme *výběrový kvantil* jako:

$$\hat{x_\alpha} = \hat{F_n}^{-1}(\alpha) = \inf\{x : \hat{F}_n(x) \geq \alpha\},$$

tj. pro pozorovaná nebo generovaná data se jedná o analogii neparametrického VaR.

Výsledné pravděpodobnostní rozdělení popisuje nahodilost, jak tato data byla generována. Při odhadu parametrů, které odhadujeme z těchto generovaných dat, jsme vystavěni značné míře nejisoty. Tato nejistota vychází právě z hledání bodových odhadů. Představu o této nejistotě získame generováním rozdělení jednotlivých parametrů:

1. Budeme předpokládat, že soubor pozorování $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_n$ je náhodným výběrem z rozdělení, ze kterého data pocházejí.

2. Ze souboru $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_n$ mnohokrát provádíme výběry s vracením.

3. Z každého výběru s vracením určíme statistickou charakteristiku.

Tímto postupem získame rozdělení odhadnutých parametrů, ze kterého můžeme určit např. 90% intervalový odhad jako (5% kvantil, 95% kvantil). Intervalový odhad, resp.

rozdělení doplňuje bodový odhad a udává jakési měřítko toho, jak se skutečná hodnota může lišit od očekávané[6].

Jistá modifikace této metody spočívá v tom, že se k naměřeným hodnotám expertně stanoví minimum, které je menší než všechny pozorované hodnoty, a maximum, které je větší než všechny hodnoty. Tímto způsobem se částečně eliminuje problém, že napozorovaná data nemusí pokrývat všechny možné hodnoty zkoumaného faktoru rizika.

2.5.3 Parametrické metody

Při parametrických metodách se předpokládá, že pozorovaná data pochází z nějakého známého rozdělení s neznámými parametry, které se na základě těchto dat odhadují. Správnost volby konkrétního rozdělení se následně testuje, např. χ^2 testem dobré shody (pro testování rozdělení dat viz sekci 4.2). Nejčastěji použité typy rozdělení:[7]

Normální rozdělení - má důležitý význam v oblasti řízení rizik, neboť se jim řídí (alespoň "přibližně") mnoho náhodných veličin. Je jednoznačně určeno střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Hustota normálního rozdělení má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in (-\infty, \infty).$$

Logistické rozdělení - je dáno střední hodnotou μ, ale místo rozptylu se zavádí parametr měřítka β. Rozptyl pak je $\frac{\pi^2\beta^2}{3}$ a hustota je

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}{\beta\left(e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} + 1\right)^2},\ x \in (-\infty, \infty).$$

Při stejných parametrech má logistické rozdělení těžší chvosty než normální rozdělení.

Logaritmicko - normální rozdělení - Nechť náhodná veličina ξ má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Potom veličina $X = e^\xi$ má logaritmicko-normální rozdělení $LN(\mu, \sigma^2)$ se střední hodnotou $e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$, rozptylem $\left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu+\sigma^2}$ a s hustotou

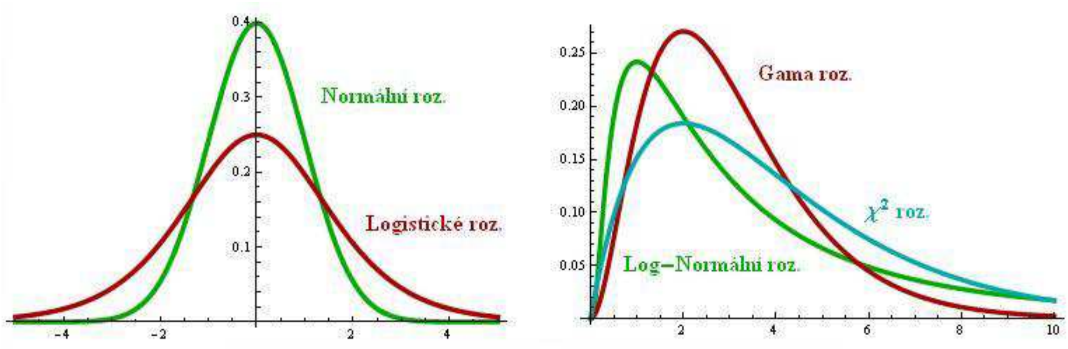
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in (0, \infty).$$

Gama rozdělení - s parametry $\alpha > 0$ a $p > 0$ je dáno hustotou

$$f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x},\ x \geq 0,$$

[6] Příklad použití bootstrapu viz v kapitole 4.

[7] Podrobný popis některých ze zmíněných rozdělení lze nalézt např. v [15].



Obrázek 3: Hustota $N(0,1)$ rozdělení a logistického roz. s parametry 0 a 1; hustota $LN(1,1)$ roz., gama roz. s parametry 3 a 1, hustota χ^2 roz. se 4 stupni volnosti

kde

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Má střední hodnotu p/α a rozptyl p/α^2. Pro p celočíselné gama rozdělení vzniká jako součet p nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem α a hustotou $f(x) = \alpha e^{-\alpha x},\ x \geq 0$.
χ^2 *rozdělení* s ν stupni volnosti vzniká jako součet kvadrátu ν náhodných veličin s rozdělením $N(0,1)$. Má střední hodnotu ν a rozptyl 2ν a je dán hustotou

$$f(x) = \frac{e^{-x/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} 2^{-\nu/2} x^{\frac{\nu}{2}-1},\ x \geq 0.$$

Paretovo rozdělení - je dáno distribuční funkcí

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha},\ \alpha > 0,\ a > 0,\ x \geq a.$$

Nevýhodou tohoto rozdělení je neexistence momentů pro obecné α. Pro $\alpha > 1$ střední hodnota je $a^2\alpha/(\alpha-1)$, a pro $\alpha > 2$ rozptyl je $a^2\alpha/(\alpha-2)(\alpha-1)^2$. K řešení problému neexistenci momentů lze využít d.f. *cenzorovaného Paretova rozdělení*

$$F_C(x) = \frac{F(x)}{F(M)},\ a \leq x \leq M,$$

což je d.f. podmíněného rozdělení $P(X \leq x | X \leq M)$ pro $a \leq x < M$.

2.6 Analýza citlivosti

Analýza citlivosti, jak je uvedeno v [3], určuje citlivost finančního kritéria podniku (zisk, tržby) nebo nějakého projektu na změny hodnot faktorů rizika, které na toto kritérium mají vliv. Cílem je rozdělit rizika do dvou skupin: rizika, které nemají velký vliv na dané kritérium, a proto je můžeme považovat za nepodstatné, a rizika, která ovlivňují naše kritérium do také výše, že s nimi musíme dále pracovat.

Takovéto rozdělení je však většinou subjektivní a závisí na analytikovi.

Nejjednodušší formou analýzy citlivosti je jednofaktorová analýza, neboli analýza "ceteris paribus", kdy se zjišťuje dopad na dané kritérium při změnách pouze jednoho faktoru rizika. Většinou se vychází z expertních odhadů, historických dat nebo tržního průzkumu. Stanoví se různé scénáře vývoje jednotlivých faktorů, pro které se propočítají hodnoty kritéria, nebo se provedou propočty kritéria pro nějaké dané procentní odchylky od nejpravděpodobnějších hodnot faktorů rizika. Následně se posoudí význam jednotlivých faktorů.

Příklad 2.4. Podnik zvažuje importovat z Maďarska a dále distribuovat na území Slovenska jistý produkt. Chceme posoudit význam rizikových faktorů, které ovlivňují čistý roční zisk z tohoto projektu.
Čistý roční zisk získáme například jako

$$\Pi = (\mathrm{S} \cdot \mathrm{SP} - \mathrm{S} \cdot \mathrm{PP} \cdot \mathrm{FX} - \mathrm{FN}) \cdot (1 - \mathrm{DPH}),$$

kde

Π	roční čistý zisk [EUR],
S	prodeje [kus],
SP	prodejní cena produktu [EUR],
PP	kupní cena produktu [HUF],
FX	měnový kurz eura vůči forintu [EUR/HUF],
FN	fixní náklady [EUR],
DPH	daň z přidané hodnoty, vyjádřeno jako desetinné číslo.

Pro každou z těchto veličin na základě tržního průzkumu byla stanovena nejpravděpodobnější hodnota: $\mathrm{S} = 250, \mathrm{SP} = 100, \mathrm{PP} = 70, \mathrm{FX} = 1/285, \mathrm{FN} = 150, \mathrm{DPH} = 0.19$. Hodnota čistého ročního zisku tedy vychází zhruba na 5 953 EUR[8].

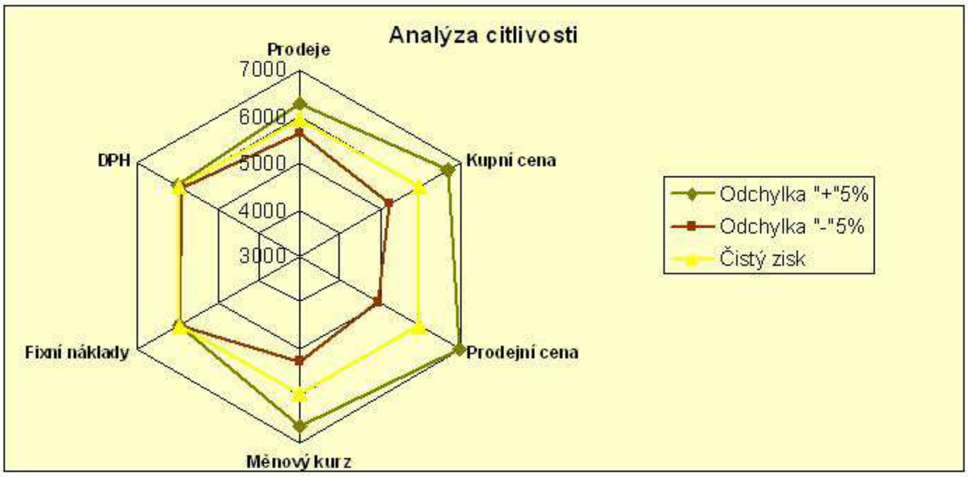
Rizikový faktor	Nejpravděpodobnější hodnota	Odchylka 5 %	Absolutní změna
Prodeje	250	237.5	-5.1 %
Kupní cena	19950	20947.5	-11.9 %
Prodejní cena	100	95	-17 %
Měnový kurz	0.003508	0.00368	-11.9 %
Fixní náklady	150	157.5	-0.1 %
DPH	0.19	0.1995	-1.17 %

Tabulka 2: Analýza citlivosti

Uvažujme teď změnu hodnot jednotlivých faktorů ±5 % od jejich nejpravděpodobnějších hodnot a pro každý faktor zvlášť spočtěme čistý zisk. Výsledky pro změnu hodnot v negativním směru shrnuje tabulka 2 a celkové výsledky obrázek 4.

[8]Podrobnější výpočet v přiloženém excelovském souboru `analyzacitlivosti.xls`.

Jak vidíme, největší vychýlení je působeno změnou prodejní ceny, kupní ceny a měnového kurzu. Pokles čistého zisku s poklesem prodeje je proporcionální, a zbylé dva rizikové faktory jsou nepodstatné.



Obrázek 4: Analýza citlivosti

Analýza citlivosti je jednoduchý nástroj na posouzení významnosti rizikových faktorů investičních příležitostí a umožňuje si vytvořit základní a srozumitelnou představu o vlivu jednotlivých faktorů. Má však nedostatky, mezi které patří například nerespektování vzájemné závislosti rizikových faktorů. Tento problém lze z části eliminovat použitím dvoufaktorové nebo vícefaktorové analýzy, kde se sledují změny kritéria při změnách dvou nebo více faktorů.

3 Typy rizik

Než se dostaneme k analýze jednotlivých typů rizika, uvedeme základní finanční indikátory výkonnosti podniku. V dalším textu budeme vycházet z [1].

3.1 Měření výkonnosti podniku

Měření výkonnosti podniku je jedním ze základních úloh vedení daného subjektu. Výsledky této analýzy jsou základnou pro další rozhodování, a proto je důležité, aby se této problematice věnovalo dostatek pozornosti.

Měřit výkonnost podniku lze různými způsoby, přičemž většina je založena na subjektivním rozhodování. Finanční ukazatelé však poskytují základnu pro matematické metody. Nejjednoduššími ukazateli jsou velikost majetku nebo hospodářský výsledek za účetní období, ale tyto indikátory nejsou vhodné pro rozhodování, protože neobsahují informace o tom, jaké náklady podnik vynaložil na jejich dosažení. Základním nástrojem finanční analýzy jsou *poměrové ukazatele*. Lze je roztřídit do několika skupin, přičemž každá skupina se váže k jinému aspektu finančního stavu organizace. Jsou to ukazatele likvidity, rentability, aktivity a solventnosti. Zde uvádíme z každé skupiny jen některé, ty důležitější.

Ukazatele krátkodobé likvidity

Likvidita je schopnost podniku splácet své krátkodobé závazky včas a v plné výši. Jinak řečeno, likvidita je míra obtížnosti transformovat majetek do likvidní formy, tedy peněz. Aby podnik byl neustále platebně schopný, musí si hlídat svoji likviditu, například přes následující ukazatele:

> *Běžná likvidita (*CR - *current ratio)* vyjadřuje, jaká část krátkodobých závazků je krytá pohledávkami a finančním majetkem v případě, že dojde k prodeji zásob.
>
> $$\mathrm{CR} = \frac{\text{oběžná aktiva}}{\text{krátkodobé závazky}}.$$
>
> *Pohotová likvidita (*QR - *quick ratio)* vyjadřuje, jaká část krátkodobých závazků je krytá pohledávkami a finančním majetkem v případě, že nedojde k prodeji zásob.
>
> $$\mathrm{QR} = \frac{\text{oběžná aktiva} - \text{zásoby}}{\text{krátkodobé závazky}}.$$
>
> *Okamžitá likvidita (*CAR - *cash ratio)* vyjadřuje, jaká část krátkodobých závazků je krytá pouze finančním majetkem.
>
> $$\mathrm{CAR} = \frac{\text{krátkodobý finanční majetek}}{\text{krátkodobé závazky}}.$$

Čistý pracovní kapitál (net working capital - NWC*)/Celková aktiva* - TA jedná se o část majetku, která je financována jinak než krátkodobými zdroji, je to tedy kapitál potřebný k běžnému provozu.

$$\mathrm{NWC/TA} = (\text{oběžná aktiva} - \text{krátkodobá pasiva})/\text{celková aktiva}.$$

Zpravidla platí, čím větší je daný ukazatel, tím je na tom podnik lépe.

Ukazatele dlouhodobé likvidity

Total debt ratio - ukazuje na schopnost podniku splatit své závazky.

$$\text{Total debt ratio} = (\text{celková aktiva} - \text{vlastní kapitál})/\text{celková aktiva}.$$

Debt equity ratio (DER) - vyjadřuje výši dluhu podniku na jednu korunu vlastního kapitálu.

$$\mathrm{DER} = (\text{celkové závazky}/\text{vlastní kapitál}).$$

Equity multiplier (EM) - vyjadřuje výši aktiv na jednu korunu vlastního kapitálu.

$$\mathrm{EM} = (\text{celková aktiva}/\text{vlastní kapitál}).$$

Ukazatele rentability

Rentabilita (ziskovost) je měřítkem schopnosti podniku vytvářet nové zdroje, dosahovat zisku použitím investovaného kapitálu. Na základě těchto ukazatelů se často rozhoduje o vyloučení nějakých aktivit z podnikatelské činnosti, nebo naopak na jakou aktivitu se zaměřit při business plánech.

*Rentabilita celkových aktiv (*ROA - *return on assets)* poukazuje na efektivitu využití majetku.

$$\mathrm{ROA} = \frac{\mathrm{EBIT}}{\text{celková aktiva}},$$

kde EBIT (Earnings Before Interest and Taxes) je hospodářský výsledek (HV) před zdaněním a úroky[9].

*Rentabilita kmenového jmění (*ROE - *return on equity)* vyjadřuje efektivitu využití investovaného kapitálu.

$$\mathrm{ROE} = \frac{\text{Čistý zisk}}{\text{vlastní kapitál}}$$

[9] Někdy se místo EBIT používá veličina nazvaná EBITDA (Earnings Before Interest, Taxes, Depreciation and Amortization) - jedná se o EBIT mínus odpisy.

*Rentabilita tržeb (*ROS - *return on sales)* vyjadřuje jaký výnos je generován na jednotku tržeb.

$$\mathrm{ROS} = \frac{\mathrm{EBIT}}{\text{tržby}}$$

*Výnosnost celkového investovaného kapitálu (*ROCE - *return of capital employed)*- je výnos na celkový investovaný kapitál. Podíl ROE/ROCE se nazývá *index finanční páky*, která by měla být větší než 1, jinak se nevyplatí používat cizí kapitál k dosahování zisku.

Ukazatele solventnosti, resp. zadluženosti

*Ukazatel solventnosti (*SR - *Solvency ratio)* ukazuje na schopnost podniku splácet své dlouhodobé závazky. Podnik je považován za zdravý ve smyslu solventnosti s SR > 20 %.

$$\mathrm{SR} = \frac{\text{zdaněný výnos} + \text{odpisy}}{\text{krátkodobé závazky} + \text{dluohodobé závazky}}.$$

Ukazatele aktivity

Doba obratu aktiv $= \frac{\text{celková aktiva}}{\text{tržby}/365}$,

Doba obratu zásob materiálu $= \frac{\text{celkové zásoby materiálu}}{\text{spotřeba materiálu}/365}$,

Doba obratu pohledávek $= \frac{\text{pohledávky}}{\text{tržby}/365}$.

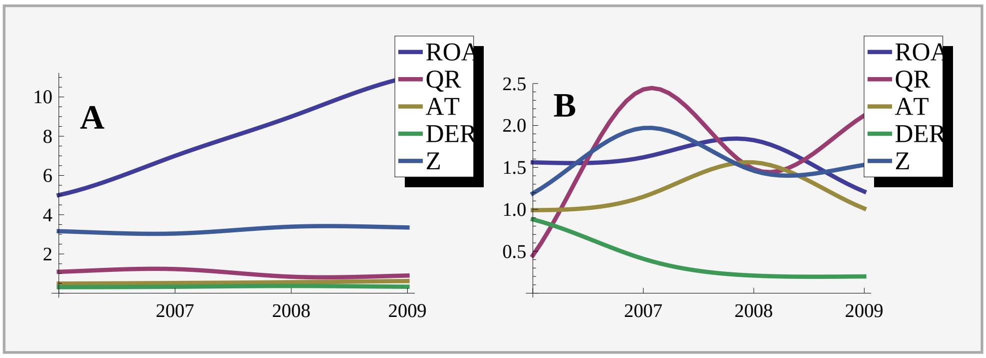
Všechny tyto ukazatele jsou svým způsobem rizikovými indikátory. Nejsou většinou definovány hraniční hodnoty, mimo které se podnik považuje za finančně nezdravý a problémový. Jejich využití spočívá ve sledování meziročních (nebo půlročních, měsíčních) změn. Výraznější výkyvy indikují problémy s hospodařením, a požadují zásah managementu.

3.1.1 Riziko bankrotu

Asi nejznámějším rizikovým indikátorem, který kombinuje různé finanční ukazatele je *Altmanovo Z-score*. Pro soukromé podniky, jak je uvedeno v [1], má tvar

$$Z = 0.717 \cdot \frac{\mathrm{NWC}}{\mathrm{TA}} + 0.847 \cdot \frac{\text{nerozdělený zisk}}{\mathrm{TA}} + 3.107 \cdot \mathrm{ROA} + 0.42 \cdot \frac{1}{\mathrm{DER}} + 0.998 \cdot \frac{\mathrm{ROA}}{\mathrm{ROS}}.$$

Při původních testech se tento model ukázal být přesný při odhadu dvouletého horizontu bankrotu v 72 % případů, chyby typu II (predikce bankrotu, který nenastane) tvořily jen 6 % případů. V následujících letech po početních testech se ukázalo, že Z-score predikuje jednoletý horizont bankrotu správně v 80 - 90 % případů, s chybami typu II přibližně 15 - 20 %.



Obrázek 5: Finanční ukazatele

Podle Altmana podniky s hodnotou $Z > 2.99$ jsou vystaveny minimálnímu riziku bankrotu, při hodnotách $Z < 1.23$ čelí podstanému riziku bankrotu. Pro zbylé hodnoty nelze jednoznačně předpovědět budoucnost.

Na obrázcích 5.A a 5.B vidíme vývoj vybraných finančních ukazatelů dvou podniků. Obrázek 5.A ukazuje finančně zdravý podnik s konstantním růstem ROA. Na obrázku 5.B jsou ukazatele firmy s většími problémy - je to typické pro začínající firmy. Jak vidíme, v obou případech největší kolísání nastalo v době finanční krize, avšak následky pro finančně zdravý podnik byly skoro nepoznatelné, pro druhý podnik skoro fatální.

Kromě Altmanova modelu existuje řada dalších: Kralickův rychlý test, Taflerův bankrotní model, index důvěryhodnosti a další. Není však důležité, který model použijeme, ale jeho konzistentní použití.

3.2 Tržní riziko

Tržní riziko vyjadřuje možnost situace, že skutečný hospodářský výsledek bude odlišný od očekávaného v důsledku tržních změn(například změn úrokových sazeb nebo měnových kurzů).

3.2.1 Riziko úrokových sazeb

Toto riziko vyplývá z pohybu tržních úrokových sazeb. Nejlepším měřítkem tohoto rizika je VaR, popsaný v druhé kapitole. Jiný výsledek může dát metoda zvaná Stress testing, tedy metoda, která je založena na analýze scénářů. Hledá odpovědi na otázky typu: Co se stane, když se zvednou úrokové sazby o 1 % ? Je to tedy podobné analýze citlivosti.

Získame-li nějaké číselné ohodnocení rizika, můžeme se rozhodnout, zda toto riziko chceme nést, nebo podniknout nějaké protiopatření. Obecně pro tržní rizika platí, že zbavit se jich není jednoduché. Většinou firma musí podniknout nějaké kroky k tomu, aby neprospěšné vlivy, alespoň z části eliminovala. Jednou takou metodou je imunizace.

Řízení aktiv a pasiv, Imunizace

Řízení aktiv a pasiv (Asset and Liability Management - ALM) je jednou ze základních metod řízení rizika. Koordinace aktiv a pasiv je jedním z nejdůležitějších předpokladů úspěšné firmy. Sladění aktiv a pasiv ve smyslu imunizace uchrání peněžní toky před změnami v úrokových sazbách a tím snižuje riziko likvidity vzniklé v důsledku načasování cash flow. A při vhodném výběru obchodních partnerů snižuje také kreditní riziko vzniklé v důsledku prodeje na odběratelský úvěr.

Imunizace shrnuje postupy, které umožní ochránit peněžní toky před změnami v úrokových sazbách. Jedním z nejdůležitějších pojmů teorie imunizace je **durace**, neboli střední doba do splatnosti. Durace je charakteristika finančního toku, je mírou elasticity současné hodnoty toku vzhledem ke změnám v úrokových sazbách. Teorie imunizace se používá nejen jako nástroj na eliminování efektu změny úrokových sazeb na peněžní toky, ale také na řízení rizika likvidity.

Nechť máme diskrétní finanční tok $\mathrm{CF} = \{\mathrm{CF}_{t_1}, \ldots, \mathrm{CF}_{t_n}\}$, k platbám dochází v časech $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$. Současná hodnota toku CF je definovaná jako součet všech plateb diskontovaných k počátku, tj.:

$$\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{CF}_{t_i} v^{t_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}, \tag{9}$$

kde v je diskontní faktor odvozený od úrokové míry i: $v = 1/(1+i)$, a δ je intenzita úročení: $\delta = \log(1+i)$. Durace (též Macaulayova durace) toku CF je definována jako

$$D(\mathrm{CF}, i) = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \mathrm{CF}_{t_i} v^{t_i}}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{CF}_{t_i} v^{t_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}}. \tag{10}$$

Durace je tedy váženým průměrem dob splatnosti jednotlivých diskontovaných plateb. Uvažujeme-li spojitý finanční tok s intenzitou plateb $\delta(t)$, $t \in (0, T)$, pak NPV toku CF je $\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i) = \int_0^T \delta(t) v^t dt$ a duraci můžeme definovat jako

$$D(\mathrm{CF}, i) = \frac{\int_0^T t\delta(t) v^t dt}{\int_0^T \delta(t) v^t dt}.$$

Dosadíme-li (9) do (10), dostaneme tvar pro duraci

$$D(\mathrm{CF}, \delta) = \frac{-\frac{\partial}{\partial \delta}\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)} = -\frac{\partial}{\partial \delta} \log \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta), \tag{11}$$

tedy durace je směrnice tečny ke křivce $\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)$. Pomocí durace (použitím Taylorova rozvoje) můžeme vyjádřit relativní změnu současné hodnoty při malé změně intenzity úročení z δ na $\delta + \Delta\delta$:

$$\frac{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta + \Delta\delta) - \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)} = \frac{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta + \Delta\delta) - \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)}{\Delta\delta} \cdot \frac{\Delta\delta}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)} \approx$$

$$\approx \mathrm{NPV}'(\mathrm{CF}, \delta) \cdot \frac{\Delta\delta}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)} = -D(\mathrm{CF}, \delta) \cdot \Delta\delta, \tag{12}$$

vzhledem k tomu, že

$$\lim_{\Delta\delta \to 0} \frac{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta + \Delta\delta) - \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)}{\Delta\delta} = \mathrm{NPV}'(\mathrm{CF}, \delta).$$

Vyjádření (12) pomocí úrokové míry má tvar

$$\frac{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i + \Delta i) - \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i)}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i)} \approx -D(\mathrm{CF}, i)\frac{\Delta i}{1+i}. \tag{13}$$

Výraz (12) je prvním členem Taylorova rozvoje relativního přírůstku současné hodnoty:

$$\frac{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta + \Delta\delta) - \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)} = \frac{\mathrm{NPV}'(\mathrm{CF}, \delta)}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)}\Delta\delta + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{NPV}''(\mathrm{CF}, \delta)}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)}(\Delta\delta)^2. \tag{14}$$

Vlastnosti durace shrnuje následující tvrzení, které lze nalézt v [9]:

Věta 3.1. *Pro finanční tok* CF *s platbami* $\mathrm{CF}_{t_j} \geq 0$ *v časech* $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *platí:*

i) $0 \leq D \leq t_n$;
ii) $D = t_n \Leftrightarrow \mathrm{CF}_{t_j} = 0$ *pro* $j = 1, \ldots, n-1 \wedge \mathrm{CF}_{t_n} \neq 0$;
iii) durace je klesající funkcí intenzity úročení δ.

Důkaz. i)Vyjdeme ze vzorce pro duraci (10). Vzhledem k tomu, že všechny platby jsou nezáporné podle předpokladu a že exponenciela je kladná funkce, nerovnost $0 \leq D$ je jasná. Protože $t_i < t_n$ pro $\forall i = 1, \ldots, n-1$ podle předpokladu,

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}}{\sum_{i=1}^n \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n t_n \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}}{\sum_{i=1}^n \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}} = \frac{t_n \sum_{i=1}^n \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}}{\sum_{i=1}^n \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}} = t_n.$$

ii) " $\Rightarrow$ ": $t_n = D \Rightarrow \sum_{i=1}^n \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i} t_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i} t_i$ podle (10). A toto je jedině možné, pokud $t_i = t_n$ pro $\forall i = 1, \ldots, n-1$, ale vzhledem k tomu, že $t_i < t_j \ \forall i < j$ dle předpokladu, musí být $\mathrm{CF}_{t_i} = 0 \ \forall \ i < n$.

" $\Leftarrow$ " Z (10)

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}}{\sum_{i=1}^n \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}} = \frac{t_n \mathrm{CF}_{t_n} e^{-\delta t_n}}{\mathrm{CF}_{t_n} e^{-\delta t_n}} = t_n.$$

iii) Vyjdeme opět z tvaru pro duraci (10). Pak

$$D' = \frac{-\sum_{i=1}^n \mathrm{CF}_i e^{-\delta t_i} t_i^2 \cdot \sum_{j=1}^n CF_j e^{-\delta t_j} + \sum_{i=1}^n \mathrm{CF}_i e^{-\delta t_i} t_i \cdot \sum_{j=1}^n \mathrm{CF}_j e^{-\delta t_j} t_j}{(\sum_{i=1}^n \mathrm{CF}_i e^{-\delta t_i})^2}.$$

Po úpravách dostaneme tvar

$$\frac{-\mathrm{CF}_1\mathrm{CF}_2 e^{-\delta(t_1+t_2)}(t_1-t_2)^2 - \mathrm{CF}_1\mathrm{CF}_3 e^{-\delta(t_1+t_3)}(t_1-t_3)^2 - \ldots - \mathrm{CF}_n\mathrm{CF}_{n-1} e^{-\delta(t_n+t_1)}(t_n-t_1)^2}{(\sum_{i=1}^n \mathrm{CF}_i e^{-\delta t_i})^2},$$

který, vzhledem k předpokladu o nezápornosti jednotlivých plateb, je záporný, a tudíž v tomto případě durace je klesající funkcí intenzity úroku δ. □

Výše definovaná durace má několik modifikací. Jednou z nich je tzv. *modifikovaná durace*:

$$D_{\mathrm{Mod}}(\mathrm{CF}, i) := \frac{D(\mathrm{CF}, i)}{1+i} = -\frac{\partial \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i)}{\partial i} \cdot \frac{1}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i)}. \tag{15}$$

Macaulayova a modifikovaná durace se pro malé úrokové sazby liší jen málo. Další variantou je *dolarová durace*:

$$D\ (\mathrm{CF}, i) := \frac{\partial \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i)}{\partial i} = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathrm{CF}_{t_i} v^{t_i}. \tag{16}$$

Změnu NPV použitím modifikované, resp. dolarové durace, podobně jako výše, můžeme vyjádřit vzorci:

$$\Delta \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i) \cong -D_{\mathrm{Mod}}(\mathrm{CF}, i) \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i) \Delta i,$$

$$\Delta \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i) \cong D\ \Delta i.$$

Durace je veličina odvozená pomocí první derivace NPV (resp. ceny nějakého instrumentu), a proto, jak již bylo zmíněno výše, změnu v NPV aproximuje přímkou. Durace je tedy vhodné používat v případě, když se úroková sazba změní jen o málo. Při větších změnách však můžeme do aproximace zahrnout člen druhého řádu, tj. veličinu nazývanou *konvexita*, určenou pomocí druhé derivace NPV podle úrokové míry (resp. intenzity úročení). Konvexita vyjadřuje relativní křivost cenové křivky a můžeme ji definovat jako:

$$C(\mathrm{CF}, i) := \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) \mathrm{CF}_{t_i} v^{t_i}}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{CF}_{t_i} v^{t_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{CF}_{t_i} e^{-\delta t_i}}. \tag{17}$$

Zderivováním NPV dvakrát a dosazením do druhého členu Taylorova rozvoje v (14) dostaneme

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{NPV}''(\mathrm{CF}, \delta)}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)} \cdot (\Delta\delta)^2 = \frac{1}{2} \cdot (C(\mathrm{CF}, \delta) - D(\mathrm{CF}, \delta)) \cdot (\Delta\delta)^2. \tag{18}$$

Aproximace relativní změny současné hodnoty se tedy změní na

$$\frac{\Delta \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, \delta)} = -D(\mathrm{CF}, \delta) \cdot \Delta\delta + \frac{1}{2} (C(\mathrm{CF}, \delta) - D(\mathrm{CF}, \delta)) \cdot (\Delta\delta)^2. \tag{19}$$

Jednodušší formuli má výraz s úrokovou sazbou:

$$\frac{\Delta \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i)}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i)} = -D(\mathrm{CF}, i) \frac{\Delta i}{1+i} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+i)^2} \cdot C(\mathrm{CF}, i) \cdot (\Delta i)^2. \tag{20}$$

Podobně jako u durace i zde můžeme definovat *modifikovanou konvexitu* vzorcem

$$C_{\mathrm{Mod}}(\mathrm{CF}, i) := \frac{\mathrm{NPV}''(\mathrm{CF}, i)}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i)} = \frac{C(\mathrm{CF}, i)}{(1+i)^2}, \tag{21}$$

a (20) můžeme převést na tvar

$$\frac{\Delta \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i)}{\mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i)} = -D_{\mathrm{Mod}}(\mathrm{CF}, i) \cdot \Delta i + \frac{1}{2} C_{\mathrm{Mod}}(\mathrm{CF}, i) \cdot (\Delta i)^2. \tag{22}$$

Na závěr této části ještě uvedeme vzorec pro výpočet durace a konvexity portfolia. Označíme-li D_i durace i-té složky portfolia, w_i podíl i-té složky na celkové investici, pak vzorec pro duraci portfolia má tvar

$$D_P = w_1 D_1 + \ldots + w_n D_n. \tag{23}$$

Podobný vzorec platí pro konvexitu portfolia

$$C_P = w_1 C_1 + \ldots + w_n C_n, \tag{24}$$

kde C_i je konvexita i-té složky. Tyto vzorce jsou přesné pro plochou výnosovou křivku s paralelními posuny, pro obecný případ jde o prakticky použitelné odhady.

Imunizace

Portfolio podniků se většinou skládá z aktiv a pasiv, které jsou citlivé na změnu úrokových sazeb (úvěry na pohyblivé úrokové míry, dluhopisy, pohledávky a závazky z obchodních vztahů, různé deriváty). Je jasné, že aby podnik mohl ufinancovat své pasiva, musí mít aktiva alespoň se stejnou současnou hodnotou. V případě, že by se úrokové míry neměnily, tento předpoklad zaručil bezproblémový chod podniku. Jinak se hodnota aktiv a pasiv nemusí měnit o stejnou hodnotu. Imunizace je metoda, která pomáha vytvořit si takové portfolio, které je ochráněno alespoň vůči malým změnám v úrokových sazbách. V dalším budeme vycházet z [9].

Uvažujme finanční tok $\mathrm{CF} = \{\mathrm{CF}_i\}_{i=1}^{n}$; $\mathrm{CF}_i > 0\ \forall i = 1, \ldots, n$. Nechť i_0 (resp. δ_0) je stávající úroková sazba (resp. intenzita úročení). Uvažujme možné změny úrokové sazby na $i_1 < i_0$ a $i_2 > i_0$. Hodnota toku v čase 0 je

$$V_0(i_0) = \mathrm{NPV}(\mathrm{CF}, i_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{CF}_j}{(1 + i_0)^j}.$$

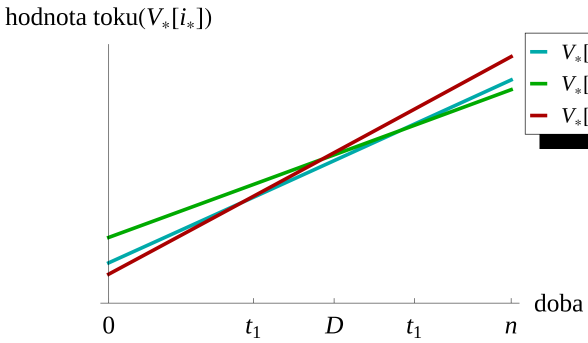
Pak hodnotu toku v libovolném čase t označme $V_t(i_0) = V_0(i_0) \cdot (1 + i_0)^t$. Vezměme si teď všechny tři funkce najednou ($V_t(i_0)$, $V_t(i_1)$, $V_t(i_2)$) a budeme hledat jejich průsečíky abychom nalezly bod, kde hodnota toku je nejnižší právě v i_0, tj $V_t(i_0) < V_t(i_1) \wedge V_t(i_0) < V_t(i_2)$. Existence takového bodu (resp. bodů) je zaručena tím, že když $V_0(i)$ je klesající funkce úrokové sazby,

$$V_n(i) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{CF}_j \cdot (1 + i)^{n-j}$$

je rostoucí funkce (viz obrázek 6).

Průsečíky najdeme vyřešením soustavy rovnic

$$V_{t_j}(i_j) = V_{t_j}(i_0),\ j = 1, 2.$$



Obrázek 6: Durace

$$\begin{aligned} V_0(i_j)\cdot(1+i_j)^{t_j} &= V_0(i_0)\cdot(1+i_0)^{t_j}, \\ \frac{V_0(i_0)}{V_0(i_j)} &= \frac{(1+i_0)^{t_j}}{(1+i_j)^{t_j}}, \\ \log V_0(i_j) - \log V_0(i_0) &= -t_j\cdot(\log(1+i_j) - \log(1+i_0)), \\ t_j = -\frac{\log V_0(i_j) - \log V_0(i_0)}{\log(1+i_j) - \log(1+i_0)} &= \frac{\log \mathrm{NPV}(\delta_j) - \log \mathrm{NPV}(\delta_0)}{\delta_j - \delta_0}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{\delta_j \to \delta_0} t_j = -\frac{\partial}{\partial \delta} \log \mathrm{NPV}(\delta)|_{\delta=\delta_0},$$

podle (11) dostaneme $D(\delta)$. Lze ukázat[10], že čas $D = D(\delta)$ je takový, že hodnota toku $V_D(\delta) > V_D(\delta_0)$, $\forall \delta \neq \delta_0$. To znamená, že ať se úroková sazba pohne dolů nebo nahoru, náš tok je imunizován proti změnám v úrokových sazbách, protože její hodnota bude větší než očekávaná.

Příklad 3.1. Uvažujme, že podnik má za tři roky zaplatit 5 milionů korun. Peníze do té doby může investovat, má k dispozicidva dluhopisy - A a B, s parametry uvedenými v tabulce 5. Uvažujeme konstantní úrokovou sazbu 10 %.

Dluhopis	Nominál	Roční kupon	Cena	Durace
A	10 000	500	8 415 CZK	3,96
B	20 000	800	17 917 CZK	1,96

Tabulka 3: Dluhopisy

Kdyby se všechny peníze investovaly do dvouletých dluhopisů, podnik by za dva roky čelil reinvestičnímu riziku v případě snížení úrokových sazeb. Kdyby se všechno investovalo do čtyřletých dluhopisů, pak podnik může prodělat v případě, že ceny dluhopisu budou za tři roky nižší než požadovaná částka. Musíme tedy najít správný

[10]viz např. LOISTL, O. (1996). Computergestütztes wertpapiermanagement. Oldenbourg, München.

poměr investic tak, aby za tři roky případné výkyvy v úrokových sazbách měly za důsledek vyrušení vlivů (toto nastává právě v případě (viz úvaha výše), že portfolio aktiv má duraci tři roky, tedy shodné s durací pasiva (durace jedné platby je právě splatnost platby - věta o vlastnosti durace, bod *ii)*)) a hodnota portfolia byla 5 milionů. Tato úvaha vede k soustavě rovnic:

$$D_A w_A + D_B w_B = 3 \wedge w_A + w_B = 1,$$

kde w_A a w_B jsou váhy investic do jednotlivých dluhopisů. Řešením této soustavy je $w_A = 0.6$, $w_B = 0.4$. To znamená, že 60 % (2 253 944) z původní investice, což je současná hodnota platby za 3 roky NPV = $5\,000\,000 \cdot \frac{1}{(1+0.1)^3} = 3\,756\,574$, se má investovat do dluhopisu A a 40 % (1 502 630) do dluhopisu B.

Nyní si ukážeme, že hodnota portfolia za tři roky bude zhruba požadovaná a v případě jak zvýšení, tak i snížení úrokových sazeb bude vyšší než očekávaná.

Uvažujme tedy, že za jeden rok původní sazba 10 % p. a. se změní buď na 11 % nebo na 9 %. Předpokládejme, že tato sazba již zostane nezměněná do konce třetího roku[11]. Celkový výpočet je zdlouhavý a proto shrneme jen výsledky v tabulce 4. Výsledky nejsou přesné z důvodu zaokrouhlení, ale je vidět, že hodnota portfolia při změněných sazbách je vyšší než očekávaná hodnota, kterou jsme požadovali.

Úroková sazba	9 %	10 %	11 %
Hodnota reinvestovaných kuponů z času 1 (A+B)	239 046	243 452	247 898
Hodnota reinvestovaného dluhopisu B z času 1	1 904 448	1 921 920	1 939 392
Hodnota reinvestovaných kuponů z času 2	146 060	147 400	148 740
Hodnota kuponů na konci 3. roku	134 000	134 000	134 000
Prodejní cena dluhopisů A	2 581 651	2 558 182	2 535 135
Hodnota portfolia na kocni 3. roku	**5 005 205**	**5 004 954**	**5 005 166**

Tabulka 4: Hodnota portfolia pro různé scénáře

Postup v příkladě 3.1 navrhnul britský aktuár Frank M. Redington již v roce 1952 a dnes je znám jako imunizace. Ukážeme si teď zobecněný přístup, přičemž vycházíme z [4].

[11] Samozřejmě tento zjednodušující předpoklad není reálný. V praxi by se za rok měl celý výpočet zopakovat a v případě nutnosti by se měly upravit váhy jednotlivých investic prodejem, nebo koupí nových dluhopisů.

Redingtonova teorie imunizace

Nechť $\{l_j\}$ jsou čistá pasiva podniku splatná v časech $\{w_j\}$ a nechť $\{a_k\}$ jsou čistá aktiva v časech $\{t_k\}$, kterými se mají financovat pasiva. Nechť $\delta(t)$, $t \geq 0$ je intenzita úročení. Pro podnik by bylo nejvýhodnější, kdyby $a_i = l_i$, $\forall i$. To je ale nereálné, a proto se uvažuje rovnost současných hodnot aktiv a pasiv:

$$\sum_k a_k \cdot e^{-\int_0^{t_k} \delta(u)du} = \sum_j l_j \cdot e^{-\int_0^{w_j} \delta(u)du}. \tag{25}$$

Uvažujme změnu intenzity úročení z $\delta(t)$ na $\delta(t) + \eta(t)$. Abychom dosáhli imunizace, požadujeme, aby

$$\sum_k a_k \cdot e^{-\int_0^{t_k} (\delta(u)+\eta(u))du} \geq \sum_j l_j \cdot e^{-\int_0^{w_j} (\delta(u)+\eta(u))du}. \tag{26}$$

Označíme-li

$$A_k = \mathrm{NPV}(a_k, \delta(t)) = a_k \cdot e^{\int_0^{t_k} \delta(u)du},$$
$$L_j = \mathrm{NPV}(l_j, \delta(t)) = l_j \cdot e^{\int_0^{w_j} \delta(u)du},$$
$$\epsilon(t) = e^{-\int_0^{t} \eta(u)du},$$

pak (25) můžeme přepsat jako

$$\sum_k A_k = \sum_j L_j \tag{27}$$

a (26) výrazem

$$\sum_k A_k \epsilon(t_k) \geq \sum_j L_j \epsilon(w_j). \tag{28}$$

Je-li $\eta(t) = \eta$ konstanta, pak pro funkci $\epsilon(t)$ platí

$$\epsilon(t) = e^{-\eta t} \approx 1 - \eta t + \frac{\eta^2 \cdot t^2}{2}$$

a dosazením do (28) dostaneme

$$\sum_k A_k \epsilon(t_k) = \sum_k A_k (1 - \eta t_k + \frac{\eta^2 t_k^2}{2}) = \sum_k A_k - \eta \sum_k A_k t_k + \frac{\eta^2}{2} \sum_k A_k t_k^2 \geq$$

$$\geq \sum_j L_j \epsilon(w_j) = \sum_j L_j (1 - \eta w_j + \frac{\eta^2 w_j^2}{2}) = \sum_j L_j - \eta \sum_j L_j w_j + \frac{\eta^2}{2} \sum_j L_j w_j^2.$$

Použijeme-li (27), a budeme předpokládat platnost podmínek

$$\sum_k A_k t_k = \sum_j L_j w_j, \tag{29}$$

$$\sum_k A_k t_k^2 \geq \sum_j L_j w_j^2, \tag{30}$$

které jsou původními předpoklady Redingtona, pak za předpokladu malých změn v úrokových sazbách je tato nerovnost slpněna. Přepíšeme-li (29) pomocí (27), dostaneme známý tvar obsahující duraci aktiv a pasiv:

$$\frac{\sum_k A_k t_k}{\sum_k A_k} = \frac{\sum_j L_j w_j}{\sum_j L_j} \Leftrightarrow D_A = D_L. \tag{31}$$

Imunizace s jedním závazkem

Uvažujme závazek ve výši l splatný v čase u a aktiva $\{a_k\}$. Nechť L je současná hodnota l a A_k je současná hodnota a_k. Pak (27) a (31) můžeme napsat ve tvarech

$$\sum_k A_k = L, \tag{32}$$

$$\frac{\sum_k A_k t_k}{L} = u. \tag{33}$$

Fisher a Weil dokázali, že podmínky (32) a (33) zaručují platnost nerovnosti (28):

$$\sum_k A_k e^{-\eta t_k} \geq L e^{-\eta u}, \tag{34}$$

neboli že podnik v čase u bude mít přostředky alespoň ve výši l. Tento výsledek můžeme zobecnit:

Věta 3.2. *Nechť f je konvexní funkce a nechť platí (32) a (33). Pak platí*

$$\sum_k A_k f(t_k) \geq L f(u). \tag{35}$$

Důkaz. Definujme náhodnou veličinu X předpisem $P(X = t_k) = \frac{A_k}{L}$, což je vzhledem k (32) dobře definované. Použitím Jensenovy nerovnosti dostaneme

$$\sum_k \frac{A_k}{L} f(t_k) = E(f(X)) \geq f(EX) = f\left(\sum_k \frac{A_k t_k}{L}\right) = f(u).$$

□

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x) = e^{-\eta x}$ je konvexní, (34) je speciálním případem (35).

Obecný případ imunizace

Nejjednodušší možnost jak imunizovat peněžní tok s více závazky je zvlášť imunizovat všechny. Pro obecný případ ale platí i věta 3.3 uvedený v [9].

Věta 3.3. *Nechť A_k a L_j jsou definovány jako výše. Označme $V_A(\delta) = \sum_k A_k$*

a $V_L(\delta) = \sum_j L_j$*, dále nechť je* $V(\delta) = V_A(\delta) - V_L(\delta)$*. Nechť jsou splněny následující podmínky:*

$$(1)\ \ V_A(\delta_0) = V_L(\delta_0),$$

$$(2)\ \ V_A'(\delta_0) = V_L'(\delta_0),$$

$$(3)\ \ V_A''(\delta_0) > V_L''(\delta_0).$$

Pak má funkce $V(\delta)$ *v bodě* δ_0 *lokální minimum a* $V(\delta_0) = 0$.

Důkaz. Z podmínky (1) je jasné, že $V(\delta_0) = 0$. Z podmínky (2) vidíme, že $V'(\delta_0) = 0$, tedy má funkce $V(\delta)$ v bodě δ_0 lokální extrém. Protože V' je spojitá, z (3) plyne, že $V''(\delta_0) > 0$, tudíž V je konvexní na okolí δ_0, a proto má v tomto bodě lokální minimum. □

Podmínka (1) ve větě 3.3 znamená rovnost současných hodnot aktiv a pasiv a spolu s podmínkou (2) požadují rovnost jejich durací.

Jak jsme viděli v příklě 3.1, měli jsme jedinou možnost jak sestavit imunizované portfolio. Není tomu tak v případě, kdy na výběr máme větší množství investičních příležitostí. V takových případech máme následující možnosti:

vybrat portfolio s největším průměrným výnosem do doby splatnosti,

vybrat portfolio, kde doby do splatnosti aktiv jsou nejvíce sladěny s dobami do splatnosti pasiv,

vybrat nejméně rizikové dluhopisy (státní dluhopisy, korporátní obligace s vysokým ratingem a pod.).

Stochastický model imunizace

Uvažujme nejběžnější případ imunizace - sladění aktiv a pasiv na základě durace a konvexity, a abychom nalezly jediné řešení, uvažujme, že k dispozici máme 3 aktiva.

Nechť $\mathbf{l} \in \mathbb{L}^{T+1}$ je vektor závazků, který chceme imunizovat, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{L}^{T+1}$ je třídimenzionální podmnožina dostupných aktiv. Nechť $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, matice typu $(T+1)\times 3$, je báze $\mathbb{A}$. Pak $\forall a \in \mathbb{A}$ můžeme psát ve tvaru $a = \mathbf{Ew}$, kde $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ je vektor vah. Uvažujme, že platby probíhají vždy na konci každého roků. Definujeme vektory

$$\mathbf{d}_j = \frac{\partial j}{\partial \delta^j}(1, e^{-\delta}, \ldots, e^{-T\delta})^\mathsf{T}|_{\delta=\delta_0},\ j = 0, 1, 2.$$

Vektor $\mathbf{d}_j$ je j-tá derivace diskontních faktorů pro jednotlivá období, $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$. Pak podmínky

$$\mathrm{NPV}(\mathbf{a}, \delta_0) = \mathrm{NPV}(\mathbf{l}, \delta_0),$$

$$D(\mathbf{a}, \delta_0) = D(\mathbf{l}, \delta_0),$$

$$C(\mathbf{a}, \delta_0) = C(\mathbf{l}, \delta_0)$$

můžeme psát ve tvaru

$$\left\{\mathbf{d}_j^\mathsf{T}\mathbf{a} = \mathbf{d}_j^\mathsf{T}\mathbf{l},\ j = 0,1,2\right\} \Leftrightarrow \mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{a} = \mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{l}.$$

Dosazením $a = \mathbf{Ew}$ dostaneme soustavu 3 lineárních rovnic $\mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{Ew} = \mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{l}$ jejímž řešením je $\mathbf{w} = (\mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{E})^{-1}\mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{l}$, pokud inverzní matice existuje.

Uvažujme teď, že intenzita úročení δ je náhodná veličina, a $\mathbf{d} = (1, e^{-\delta}, \ldots, e^{-T\delta})^\mathsf{T}$ je vektor diskontních faktorů. Pak přebytek

$$S = \mathrm{NPV}(\mathbf{a}, \delta) - \mathrm{NPV}(\mathbf{l}, \delta) = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{d} - \mathbf{l}^\mathsf{T}\mathbf{d} = (\mathbf{a} - \mathbf{l})^\mathsf{T}\mathbf{d}$$

je také náhodná veličina a očekávaný přebytek můžeme vyjádřit jako $ES = (\mathbf{a} - \mathbf{l})^\mathsf{T}E\mathbf{d}$. Abychom získali imunizované portfolio, budeme minimalizovat střední čtvercovou odchylku:

$$ES^2 = E(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{d} - \mathbf{l}^\mathsf{T}\mathbf{d})^2 = E((\mathbf{Ew} - \mathbf{l})^\mathsf{T}\mathbf{dd}^\mathsf{T}(\mathbf{Ew} - \mathbf{l})) = (\mathbf{Ew} - \mathbf{l})^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mathbf{Ew} - \mathbf{l}),$$

pro $\mathbf{V} = E\mathbf{dd}^\mathsf{T}$. Vzhledem k tomu, že tato funkce je konvexní ve w, minimum najdeme položením gradientu nule:

$$\frac{\partial ES^2}{\partial \mathbf{w}} = 2\mathbf{E}^\mathsf{T}\mathbf{VEw} - 2\mathbf{E}^\mathsf{T}\mathbf{Vl} = 0 \Rightarrow \mathbf{w} = (\mathbf{E}^\mathsf{T}\mathbf{VE})^{-1}\mathbf{E}^\mathsf{T}\mathbf{Vl}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{E}(\mathbf{E}^\mathsf{T}\mathbf{VE})^{-1}\mathbf{E}^\mathsf{T}\mathbf{Vl},$$

pokud inverzní matice existuje. Tento postup je převzatý z [2], kapitola 6. □

Jedním z měřitelných cílů řízení aktiv a pasiv podle [10] je zajištění růstu ekonomického ukazatele zvaného *rizikový index* (risk index), který je definován jako

$$\mathrm{RI} = \frac{E(\mathrm{ROA}) + \mathrm{EM}^{-1}}{\sigma(\mathrm{ROA})},$$

kde $E(\mathrm{ROA})$ je očekávaná výnosnost aktiv a $\sigma(\mathrm{ROA})$ je volatilita výnosnosti aktiv. Čím větší je RI, tím je menší riziko nesolventnosti ve smyslu účetní hodnoty (tj. účetní hodnota aktiv < účetní hodnota pasiv). Pravděpodobnost této situace, jak je uvedeno v [10], je $1/2\mathrm{RI}^2$.

Finanční deriváty

Jiná možnost jak se uchránit proti změnám v úrokových sazbách, jak je uvedeno v [5], je použít *finanční deriváty*. Finanční deriváty jsou instrumenty finančních trhů, jejichž hodnota je odvozena od ceny podkladového aktiva (měny, úrokové sazby, cenné papíry a jiné). Podle typu obchodu rozlišujeme *termínové obchody* - obchod proběhne v budoucnu za cenu známou teď; a *opce* - právo prodat nebo koupit podkladové aktivum v budoucnu za cenu známou teď. Podle místa obchodu rozlišujeme *burzovní obchody* a *OTC (over the counter)* - tzv. přes přepážku. Oba tyto typy mají své výhody i nevýhody. Obchodování na burze probíhá podle přesně daných pravidel obchodování, kótování a vypořádání, ale na druhou stranu jde o likvidní obchody a v podstatě bez kreditního rizika. OTC obchody jsou flexibilnější a závisí jen na dohodě dvou stran. Zato riziko selhání protistrany je neporovnatelně vyšší.

Dle způsobu vypořádání rozlišujeme deriváty *s fyzickým dodáním* - tedy podkladové aktivum se předá v předem dohodnutou dobu a za předem dohodnutou cenu; a *deriváty bez fyzického dodání* - vypořádají se pouze rozdíly mezi dohodnutou cenou a realizační cenou podkladového aktiva. Tento typ derivátů se také používá pro zajišťování.

Úrokové forwardy

Úrokový forward je dohoda mezi dvěma stranami na výměnu pevné sumy na finanční aktivum s doposud neznámou hodnotou (tj. peníze, úvěr, obligace apod.). Forwardový obchod ilustrujeme na následujícím příkladě.

Příklad 3.3. Vedení podniku ví, že za jeden rok bude potřebovat přostředky ve výši 5 000 000 na další rok, které nemá. Uvažuje půjčit si od banky, ale předpokládá se nárůst úrokových sazeb, a proto si chce zajistit stejné (nebo aspoň podobné) podmínky pro získání úvěru. Aktuální úroková sazba na podobné úvěry je 10 % p. a., takže kdyby podnik dostal úvěr za rok s tímto úrokem, tak by za 2 roky splatil zpátky 5 500 000. Zajistit tuto sazbu může podnik vstupem do forwardového kontraktu na tuto sazbu. Možnosti:

> úroková sazba u banky za rok bude 8 % - při půjčce budeme splácet 5 400 000.
>
> úroková sazba u banky za 6 měsíců bude 12 % - při půjčce budeme splácet 5 600 000.

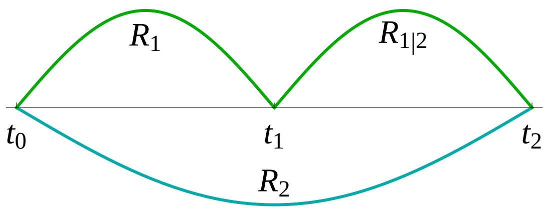
Z forwardového kontraktu (jestli vypořádání proběhne v čase získání úvěru) máme:

> je-li aktuální úrok 8 % - doplatíme diskontovanou hodnotu rozdílu mezi forwardovým obchodem a splátky úvěru, tj. $\frac{5\,500\,000 - 5\,400\,000}{(1+0.08)} = 92\,592$,
>
> je-li aktuální úrok 12 % - získáme diskontovanou hodnotu rozdílu mezi splátkami úvěru a forwardovým obchodem, tj. $\frac{5\,600\,000 - 5\,500\,000}{(1+0.12)} = 89\,285$.

V obou případech se dostaneme zhruba na požadovanou sazbu 10 %. Jestliže vypořádání forwardového obchodu proběhne v momentě splacení úvěru, doplatí se, nebo inkasují jen příslušné rozdíly (100 000) bez diskontování. □

Tento typ popsaného forwardového obchodu je vždy výhodný jen pro jednu stranu. Proto obchodník s forwardy bude poskytovat jinou sazbu pro klienta, který se obává růstu úrokových sazeb, a jinou pro toho, kdo se obává poklesu sazeb (tedy vyšší sazba bude pro toho, kdo podobně jako v příkladě 3. 3. si chce půjčit peníze a obává se vzrůstu sazeb, a pro klienta, který si chce např. uložit peníze v bance a nechce přijít o část úroků, bude sazba nižší). Zbývá otázka, jak určit tuto střední sazbu, neboli *forwardovou sazbu.*

Forwardová sazba se určí tak, aby na trhu neexistoval arbitráž (tj. aby nešlo vydělat bez vkladu a bez rizika). Určí se tak, aby byla rovnováha mezi spotovým (spotová, okamžitá sazba - sazba, která je platná právě teď na určité období) a forwardovým trhem (sazba, která bude platit za nějaký čas na nějakí období). To znamená, že vklad (obrázek 7) na období $t_0 - t_2$ (spotová sazba R_2) se musí rovnat kombinovanému vkladu za období $t_0 - t_1$ (spotová sazba R_1) a $t_1 - t_2$ (forwardová sazba $R_{1|2}$), tj. $(1+R_2)^{t_2} = (1+R_1)^{t_1}(1+R_{1|2})^{t_2-t_1}$.



Obrázek 7: Forwardové a spotové sazby

Z tohoto vyplývá vztah mezi spotovou a forwardovou sazbou:

$$R_{1|2} = \left(\frac{(1+R_2)^{t_2}}{(1+R_1)^{t_1}}\right)^{\frac{1}{t_2-t_1}} - 1 \Rightarrow \delta_{1|2} = \frac{\delta_2 t_2 - \delta_1 t_1}{t_2 - t_1}, \tag{36}$$

kde $\delta_{1|2}$ je forwardová intenzita úročení platná v období $t_1 - t_2$, δ_1, δ_2 jsou spotové intenzity. A podobně platí vzorec pro obecný čas t

$$R_{t-1|t} = \frac{(1+R_t)^t}{(1+R_{t-1})^{t-1}} - 1,$$

a obecný vzorec

$$R_{t-k|t} = \left(\frac{(1+R_t)^t}{(1+R_{t-k})^{t-k}}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Vraťme se ještě na chvíli k příkladu 3. 3. Abychom získali forwardovou sazbu 10 %, potřebujeme mít jednoletou spotovou sazbu 8 % a dvouletou 9 % (tyto sazby splňují rovnici (36). Ve skutečnosti by si tedy podnik mohl půjčit teď za 9 % na jeden rok, ale vzhledem k tomu, že peníze potřebuje až za rok a obává se vzrůstu sazeb, uzavře forwardový obchod se sazbou 10.5 % (10 %+0.5 % provize za zprostředkování obchodu). Možnosti:

úroková sazba u banky za rok bude 8 %, při půjčce budeme splácet 5 400 000.

úroková sazba u banky za rok bude 11 %, při půjčce budeme splácet 5 550 000.

Z forwardového kontraktu (proběhne-li vypořádání za 2 roky) máme:

je-li aktuální úrok 8 % - doplatíme rozdíl mezi forwardovým obchodem a splátky úvěru, tj. 125 000(= $1.105 \cdot 5\,000\,000 - 5\,400\,000$).

je-li aktuální úrok 11 % - získame rozdíl mezi splátky úvěru a forwardovým obchodem, tj. 25 000(= $5\,550\,000 - 1.105 \cdot 5\,000\,000$).

V obou případech končíme na částce 5 525 000. □

Úrokové swapy

Swap je dohoda mezi dvěma stranami na výměnu cash flow v budoucnosti. Dohoda specifikuje, kdy a jak se tyto toky vymění. Swapy můžeme též chápat jako složení několika úrokových forwardů do jednoho instrumentu.

Nejčastěji se používají na transformaci úvěrů s proměnlivou úrokovou sazbou na úvěr s fixní sazbou.

Příklad 3.4. Uvažujme, že 2.3.2007 podnik A si půjčil od 10 000 000 na 3 roky, s tím, že ke konci každého pololetí zaplatí úrok spočítaný se sazbou PRIBOR 6M[12] (platný k 2.3 resp 2.9 daného roku)+ 2 % a na konci třetího roku splatí i nominál (půjčka ve tvaru kupónového dluhopisu). Přitom podnik A uzavře swap s podnikem B tak, že podnik A bude platit 3 % z nominálu 10 000 000 ve výše uvedených datech a dostane za to PRIBOR 6M ze samotného nominálu. Pak podnik A má následující peněžní toky:

PRIBOR 6M + 2 % platí bance za půjčku,

3 % podniku B v rámci swapu,

dostává PRIBOR 6M v rámci swapu.

Výsledkem pro podnik A je platba vždy ve výsi 5 % z nominálu 10 000 000, tj. 500 000. Uvažujeme-li, že podnik B si půjčil peníze se sazbou 3.2 %, pak pro něj výsledkem tohoto obchodu je transformace půjčky transformace půjčky s pevnou sazbou na proměnlivou sazbu PRIBOR 6M + 2 %.

Transformace proměnlivé sazby na pevnou má několik výhod pro podnik A:

předem známá částka platby - podnik se může připravit na provedení všech plateb, a tak nevzniká riziko likvidity

vzniklá úroková sazba je zaručená na celou dobu trvání půjčky nezávisle na sazbě PRIBOR 6M.

Jak vidíme z tabulky 5, podnik A si v tomto případě polepšil, protože zaplatil celkem 12 500 000, což je méně, než by zaplatil jen za půjčku (12 676 000). Kdyby se PRIBOR 6M pohyboval v opačném směru, podnik A by na transakci něco prodělal, ale stále

[12]PRIBOR 6M - Prague InterBank Offered Rate - 6měsíční úroková sazbu, za kterou si banky navzájem poskytují úvěry na českém mezibankovním trhu

Datum	PRIBOR 6M	Pohyblivá platba od B	Fixná platba B	Platba úvěru	Čistý cash flow
2.3.2007	2.65				
2.9.2007	3.6	265	300	465	500
2.3.2008	4.08	360	300	560	500
2.9.2008	3.79	408	300	608	500
2.3.2009	2,64	379	300	579	500
2.9.2009	2,15	10 264	10 300	10 464	10 500

Tabulka 5: Peněžní toky v ´000 CZK

by měl zafixované platby.

Aby se eliminovalo kreditní riziko vznikající mezi dvěma stranami při uzavření swapu, v praxi se tyto obchody zprostředkovávají nějakými finančními institucemi, samozřejmě za nějaký poplatek. Ve skutečnosti by tak podnik A skončil s platbami zhruba ve výši 5.1 % z nominálu. □

Podobným způsobem se swapy dají použít k transformaci nějakých aktiv vynášejících fixní sazbu (např. nějaké obligace) na aktiva s pohyblivými sazbami.

Výše popsaný swap se nazývá *plain vanilla*, neboli swap, který mění fixní sazbu za pohyblivou. Existují i jiné typy (fixní za fixní a pod.), základní myšlenka je však u všech stejná.

Hodnotu swapového obchodu můžeme jednoduše spočítat, když na něj pohlížíme jako na obligace. Hodnota obligace s fixní kuponovou sazbou bude

$$O_{\text{fix}} = \sum_{i=1}^{n} p v^{t_i} + N v^{t_n},$$

kde p jsou fixní platby, t_i jsou okamžiky plateb, v je diskontní sazba odvozená od aktuální úrokové sazby(např. běžná míra zhodnocení kapitálu, nebo bezriziková sazba), N je nominální hodnota. Hodnota obligace s flexibilní sazbou nyní, na základě [5], je hodnota této obligace těsně před následující platbou, tj.

$$O_{\text{poh}} = (N + \hat{p}) v^t,$$

kde $\hat{p}$ je pohyblivá platba, která nyní je už známa, t je čas do následující platby. Tedy hodnota swapu, kde pohyblivá sazba se platí a získame fixní sazbu, má hodnotu

$$V_{\text{swap}} = O_{\text{fix}} - O_{\text{poh}}.$$

Příklad 3.5. Spočtěme hodnotu swapu k 2.6.2008 s úrokovoou sazbou 10 %.

$$O_{\text{fix}} = 300\,000 \left(\frac{1}{1+0.1}\right)^{3/12} + 300\,000 \left(\frac{1}{1+0.1}\right)^{9/12} + 10\,300\,000 \left(\frac{1}{1+0.1}\right)^{15/12} = 9\,435\,226,$$

$$O_{\text{poh}} = 10\,408\,000 \left(\frac{1}{1+0.1}\right)^{3/12} = 10\,162\,934 \;\Rightarrow$$

$$V_{\text{swap}} = O_{\text{fix}} - O_{\text{poh}} = 9\,435\,226 - 10\,162\,934 = -727\,708.$$

Kdyby se platila fixní sazba a získávala se pohyblivá, hodnota swapu by byla 727 708. □

3.2.2 Měnové riziko

Měnové riziko vzniká v důsledku různé citlivosti aktiv a pasiv podniku na změnu měnových kurzů. Tomuto riziku jsou vystaveny všechny podniky, které dovážejí nebo vyvážejí nějaké produky nebo služby do zemí s jinou než domácí měnou. Nepřímo mohou být vystaven i firmy, které sice obchodní vztah se zahraničním partnerem nemají, ale jejich dodavatelé nebo odběratelé ano. Pro zajištění, podobně jako u rizika úrokových sazeb, se nejvíce používají finanční deriváty.

Měnový forward

Měnový forward je dohoda mezi dvěma stranami na nákup nebo prodej jedné měny za druhou za kurz předem dohodnutý(forwardová cena). Tento kurz se určí tak, aby na trhu neexistvala arbitráž. To znamená, že jedna koruna uložená na domácím trhu na období t za toto období musí vynášet stejně, jako kdybychom tuto korunu na počátku uložili v cizí měně a pak ji převedli forwardovou sazbou, tj.

$$(1+r)^t = \frac{1}{\mathrm{FX}_S}(1+r_f)^t \cdot \mathrm{FX}_F \Rightarrow \mathrm{FX}_F = \frac{(1+r)^t}{(1+r_f)^t}\mathrm{FX}_S, \tag{37}$$

kde r je domácí (bezriziková) úroková sazba, r_f je sazba v cizí měně, FX_S je spotový kurz cizí měny a FX_F je forwardový kurz cizí měny. Použití forwardového kontraktu je podobné jako u forwarda na úrokové sazby:

Příklad 3.6. V příkladě (2.3) jsme zjistili, že investice je citlivá na změnu úrokových sazeb. Zajistíme se pomocí měnového forwardu. Aktuální kurz je 285 forintů za jedno euro. Podnik se obává, že forint posilí a nákupy budou dražší. Uvažujme časový horizont jednoho roku. Příslušné úrokové sazby nechť jsou $r = 3.6$ % a $r_f = 4.5$ %. Pak podle (37) forwardový kurz je 282.54 HUF/EUR. Řekneme že zprostředkovatel obchodu si účtuje 2.54 forintů za každé změněné euro, takže skutečný forwardový kurz bude 280 HUF/EUR. Možnosti

> kurz vyšplhá na 288 HUF/EUR - podnik prodělá[13] na každém euru 8 forintů, končí na 280 HUF/EUR
>
> kurz se sníží na 275 HUF/EUR - podnik získá za každé euro 275 HUF, a 5 HUF od protistrany ve forwardovém obchodu, končí opět na 280 HUF/EUR.

Hodnota forwardového kontraktu (v dlouhé pozici) na počátku je nulová, později může mít kladnou nebo zápornou hodnotu. Nechť t je zbývající doba do splatnosti kontraktu. Pak hodnota kontraktu je

$$P = (\mathrm{FX}_F - K)v^t, \tag{38}$$

[13] Podnik, který používá forwardový obchod na zajištění, bere to jako náklad na zajištění a přitom je uchráněn před takou velkou změnou v kurzech, které by mohly způsobit finanční problémy. V případě, že podnik používal tento obchod na spekulaci, tak de facto prodělá.

kde K je dohodnutý kurz, v je diskontní sazba odvozená od r_f. K na počátku je položena rovnou FX_F, a proto $P = 0$ na počátku. Po čase FX_F a s ním i hodnota kontraktu se změní.
Hodnota kontraktu z příkladu 3.4 po půl roce bude:

> zvýší-li se spotový kurz např. na 286 HUF/EUR, pak nová forwardová sazba bude $(\frac{1.036}{1.045})^{1/2} \cdot 286 = 284.76$ a hodnota kontraktu bude $(284.76 - 282.54)(\frac{1}{1.045})^{1/2} = 2.17$ HUF na jedno euro.
>
> sníží-li se spotový kurz např. na 283 HUF/EUR, pak nová forwardová sazba bude $(\frac{1.036}{1.045})^{1/2} \cdot 283 = 281.77$ a hodnota kontraktu bude $(281.77 - 282.54)(\frac{1}{1.045})^{1/2} = -0.75$ HUF na jedno euro. □

Dalším nástrojem na snížení rizika měnových kurzů jsou *měnové swapy*. Je to dohoda mezi dvěma stranami na výměnu cash flow v jedné měně na cash flow v jiné měně. Peněžní toky většinou mají tvar úvěru, tj. nominál úrokové platby, přičemž nominály i úrokové sazby pro obě měny jsou specifikovány při uzavření obchodu.

Příklad 3.7 Podobně jako úrokový swap, i měnový swap lze použít k transformaci úvěru. Zde však transformuje úvěr v jedné měně na úvěr v jiné měně. Uvažujme podnik A, který 2.3.2011 emitoval dluhopisy s nominální hodnotou 100 milionů korun, s kupónovou sazbou 5 % a se splatností 5 let. Podnik B emitoval dluhopisy s nominálem 4 miliony eur, kupónem 6 % a splatností 5 let. Uzavření swapu mezi podnikem A a B dne 2.3.2011 má následující peněžní toky:

Datum	CZK cash flow	EUR cash flow
2.3.2011	-100 000	4 000
2.3.2012	5 000	-240
2.3.2013	5 000	-240
2.3.2014	5 000	-240
2.3.2015	5 000	-240
2.3.2016	105 000	-4 240

Tabulka 6: Peněžní toky podniku A v tisících

Podnik A může podobný instrument využít například v případě, kdy exportuje určité zboží, má tedy tržby v eurech (ale náklady v CZK) a potřebuje si půjčit peníze v korunách. Po uzavření swapu jednotlivé platby úvěru hradí z tržeb v eurech a nemusí se obávat vývoje měnového kurzu.

Podobně jako úrokový swap můžeme ocenit i měnový swap. Hodnota swapu v korunách v čase t, kde dostáváme koruny, ale platíme jinou měnou, je

$$V_{\text{swap}} = O_{\text{dom}} - \mathrm{FX}_S O_{\text{fx}},$$

kde O_{dom} je diskontovaná hodnota všech zbývajících plateb v korunách k času t, FX_S je spotový kurz v čase t a O_{fx} je diskontovaná hodnota všech zbývajících plateb v jiné měně k času t. Podobně, když domácí měnou platíme, ale dostávame jinou, hodnota swapu je

$$V_{\text{swap}} = \text{FX}_S O_{\text{fx}} - O_{\text{dom}}.$$

Příklad 3.7. (Pokračování). Hodnota swapu k 2.3.2013 (v tisících) z příkladu 3. 5, uvažujeme-li domácí úrokovou sazbu 8 % a cizí sazbu 7 % a spotový kurz $\text{FX}_S = 23.5$ CZK/EUR je

$$O_{\text{dom}} = 5\,000\frac{1}{1.08} + 5\,000\frac{1}{1.08^2} + 105\,000\frac{1}{1.08^3} = 92\,269,$$

$$O_{\text{fx}} = 240\frac{1}{1.07} + 240\frac{1}{1.07^2} + 4\,240\frac{1}{1.07^3} = 3\,895 \Rightarrow$$

$$V_{\text{swap}} = 92\,269 - 23.5 \cdot 3\,895 = 737.$$

Opce

Opce dává právo na koupi (*call opce*) nebo prodej (put opce) nějakého podkladového aktiva ve specifikovaném termínu a za specifikovanou cenu. Podkladovým aktivem může být v podstatě cokoliv, nejčastěji jsou to akcie, burzovní indexy, měny nebo futures kontrakty[14]. Výplata opcí v long pozici pak je:

$$\max(0, S_T - K), \qquad \text{pro call opce,}$$

$$\max(0, K - S_T), \qquad \text{pro put opce,}$$

kde S_T je cena podkladového aktiva v čase T, K je *realizační cena* (cena, za kterou se podkladové aktivum koupí/prodá).

Opce dává právo na koupi nebo prodej nějakého aktiva, tudíž ne v každém případě dojde k vypořádání. Tato skutečnost má za následek, že na rozdíl od forwardů a futures kontraktů vstup do kontraktu s opcemi není bezplatný. Pro ocenění opcí existuje řada metod, nejznámější je Black - Scholesova formule, která se nejvíc používá na ocenění opcí. Podle této formule cena call opce je

$$c = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

a cena put oce je

$$p = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}, \; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

kde S_0 je cena podkladového aktiva v čase 0, Φ je d.f. normovaného normálního rozdělení, σ^2 je volatilita ceny podkladového aktiva a r je bezriziková úroková míra.

[14] *Futures kontrakt* je standardizovaný forward, tzn. že tyto deriváty na rozdíl od forwardů jsou obchodované na burzách a mají specifikované parametry.

Odvození této formule lze najít např. v [5] kapitola 11.

Zajišťovacích strategií, které využívají opce, je celá řada, jejich výčet lze najít např. v [5] kapitola 9. Pro zajištění proti výkyvům cizích měn se používa *měnová opce*. Na rozdíl od měnového forwardu dává právo koupit (nebo prodat) jednu měnu za druhou, přičemž tato operace je zpoplatněna.

3.2.3 Další typy tržních rizik

Další důležité typy tržních rizik jsou:

Komoditní riziko - riziko vzniklé v důsledku neustálého vývoje cen vlastněných komodit.

Akciové riziko - je riziko plynoucí z kolísání cen držených akcií.

Měření těchto rizik, podobně jako ostatních tržních rizik, se provádí nejlépe pomocí VaR. Nicméně v každém případě si musíme uvědomit, že hodnoty získané z historických dat předpokládají, že budoucnost bude stejná jako minulost. Proto je vždy nutné uvážit i aktuální situaci na trhu a podle typu rizika i v politice.

Pro zajištění komoditního rizika slouží:

Komoditní forward - Sjedná se pevná forwardová cena komodity, která je porovnána s uzavírací cenou komodity v datech dohodnutých při sjednání obchodu. Rozdíl cen je hrazen stranou v nevýhodné pozici.

Komoditní swap - Sjedná se pevná forwardová cena komodity, která je porovnána s denními uzavíracími cenami (nebo s nějakým dohodnutým cenovým průměrem). Rozdíl cen je hrazen stranou v nevýhodné pozici.

Komoditní opce - Jedná se o opci na směnu plateb ze sjednané pevné ceny komodity za platby odvislé od aktuální ceny či dohodnutého průměru cen komodity.

K zajištění akciového rizika lze použít

Akciový forward - Forwardový obchod na výměnu pevné částky za akcii k určitému datu za předem určenou (forwardovou) cenu.

Akciový swap - U akciového swapu probíhají výměny pevných, předem dohodnutých částek hotovosti za akcie či akciové indexy k určitým okamžikům v budoucnosti.

Opce na akcie - Je opce na prodej nebo koupi akcie za předem dohodnutou cenu.

3.3 Riziko likvidity a kreditní riziko

Riziko likvidity a kreditní riziko jsou pro podniky úzce spjaté. Je to kvůli faktu, že podnik (hlavně menší podniky) hradí své závazky z inkasovaných pohledávek, což je i smyslem obchodu: nakoupit/vyrobit a pak prodat. Samozřejmě podnik může držet cenné papíry, které mu poskytují pravidelné výnosy, ale tyto určitě nebudou (jestli budou) stačit na pokrytí závazků. To znamená, že likvidita podniku na straně závazků je ohrožena kreditním rizikem na straně pohledávek.

Kreditní riziko - je riziko, že protistrana nedostojí svému závazku včas a v plné výši.

Likvidita je schopnost podniku dostát svým závazkům včas a v plné výši. Rozlišujeme tři typy:

krátkodobá ($\leq$ 1 měsíc)

střednědobá (1 měsíc - 1 rok)

dlouhodobá ($\geq$ 1 rok).

Riziko likvidity vyjadřuje možnost situace, kdy podnik ztratí schopnost splatit své závazky v termínu jejich splatnosti. Toto riziko vzniká v důsledku načasování peněžních toků na straně aktiv (zejména pohledávek) a pasiv (závazků). Na měření rizika likvidity se používají dva základní přístupy: operativní a strategické měření.

Operativní měření rizika likvidity je zaměřeno na krátkodobý horizont, většinou několik dnů. Cílem je sladit příchozí a odchozí peněžní toky. Základem je schéma cash flow, tedy souhrn (plánovaných) příchozích a odchozích plateb. V případě, že podnik má přebytek likvidity ve sledovaném období, může využít například bankovní depozita jako investiční příležitost. Naopak na doladění nedostatku peněz se nejčastěji používá kontokorentní úvěr.

Strategické měření rizika likvidity má za cíl zajistit dlouhodobou likviditu podniku a to identifikací rozdílů mezi likviditou aktiv a pasiv. Základním nástrojem strategického měření likvidity je *gapová analýza.*

3.3.1 Gapová analýza

Gapová analýza, jak je uvedeno v [10], je roztřídění pohledávek nebo závazků podniku do jednotlivých časových pásem dle jejich splatnosti - vytvoří se věková struktura. Počet časových pásem se většinou pohybuje od 5 do 10, závisí na typu podnikání. Nejčastější časové intervaly podle počtu dní od splatnosti jsou: i) ve splatnosti; ii) 0 až 30 dnů; iii) 31 až 60 dnů; iv) 61 až 90 dnů; v) 91 až 180 dnů; vi) 181 až 365 dnů a vii) nad 366 dnů. Sledují a vyhodnocují se čisté likviditní pozice, tedy přebytky nebo nedostatky likvidity. Při analýze se mimo jiné musí brát v úvahu i podrozvahové položky (například nějaké garance nebo některé finanční deriváty), pokud mají vliv na likviditu.

3.3.2 Metoda založená na ukazatelích likvidity

Gapová analýza je souhrnem závazků a (plánovaných) pohledávek. Pravděpodobně podnik hradí většinu svých závazků realizovanými pohledávkami. Nikdo však nezaručuje, že tyto pohledávky budou včas (pokud vůbec) a v plné výši uhrazené.

Na posouzení likvidity podniku lze jednoduše použít ukazatele likvidity vyjmenované v části 3.1. Jiný přístup získáme na základě předchozí úvahy. Za předpokladu, že odběratelé budou včas plnit své závazky a pomocí gapové analýzy si uhlídáme sladění pohledávek a závazků, podnik by neměl mít problémy s likviditou. Tedy pokud jsou likvidní, budou plnit své závazky. Takže na základě ukazatelů likvidity a platební historie odběratelů můžeme zkonstruovat odhady pravděpodobností jejich defaultu, podle nichž si může podnik upravit schéma pohledávek tak, aby s co největší pravděpodobností pokrývaly veškeré závazky. Tyto pravděpodobnosti určíme pomocí logistické regrese. Tato idea byla zavedená v [6]. V dalším budeme vycházet ze [12].

Uvažujme vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$, který obsahuje informace o tom, zda i-tý klient selhal $Y_i = 1$, nebo neselhal ve splacení $Y_i = 0$. Za selhání budeme považovat situaci, kdy odběratel nesplní svůj závazek za specifikovaný počet dnů po splatnosti pohledávky. Chceme určit pravděpodobnosti selhání na základě ukazatelů likvidity. Označme tedy $\pi(\boldsymbol{x}_i) = P(Y_i = 1)$ pravděpodobnost selhání, kde $\boldsymbol{x}_i$ je vektor ukazatelů i-tého odběratele (budeme uvažovat různé kombinace ukazatelů), pak pravděpodobnost toho, že klient neselže je $1 - \pi(\boldsymbol{x}_i)$. Taková veličina, která nabývá hodnotu 1 s pravděpodobností $\pi(\boldsymbol{x}_i)$ a hodnotu 0 s pravděpodobností $1 - \pi(\boldsymbol{x}_i)$ má obecně alternatívní rozdělení $Alt(\pi(\boldsymbol{x}_i))$ neboli binomické rozdělení s parametry 1 a $\pi(\boldsymbol{x}_i)$, tj. $Bi(1, \pi(\boldsymbol{x}_i))$. Odhad hledaných pravděpodobností pomocí lineární regrese by byl

$$\pi(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x},$$

kde $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k)^{\mathsf{T}}$ je vektor odhadnutých parametrů. Nicméně lineární regese má nevýhodu, že odhadovanými hodnotami proloží přímku, jejíž některé hodnoty mohou být mimo interval $[0,1]$ a tudíž je nepoužitelná k odhadu pravděpodobností. Proto provedeme následující transformaci. Zavedeme funkci odds:

$$\text{odds}(\boldsymbol{x}_i) = \frac{P(Y_i = 1)}{P(Y_i = 0)} = \frac{\pi(\boldsymbol{x}_i)}{1 - \pi(\boldsymbol{x}_i)}. \tag{39}$$

Hodnoty této funkce leží v intervalu $[0, \infty)$ Abychom získali hodnoty mezi 0 a 1, provedeme ještě jednu transformaci zavedením funkce logit

$$\text{logit}(\boldsymbol{x}_i) = \ln(\text{odds}(\boldsymbol{x}_i)). \tag{40}$$

Položíme-li $\text{logit}(\boldsymbol{x}_i) = \pi(\boldsymbol{x}_i)$, dostaneme konečný tvar pro logistickou regresi

$$\pi(\boldsymbol{x}_i) = \frac{e^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x}_i}}{1 + e^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x}_i}}. \tag{41}$$

Odhad parametrů

Odhad neznámých parametrů se provádí metodou maximální věrohodnosti. Nechť n je počet pozorování a k je počet vysvětlujících proměnných, $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ vektor vysvětlovaných proměnných a $\mathbf{X} = (X_{i1}, \ldots, X_{ik})$ jsou vektory vysvětlujících proměnných. Zkonstruuje se věrohodnostní funkce. Vyjdeme z pravděpodobností $\pi(\boldsymbol{x}_i) = (Y_i = 1)$. Pak hledaná podmíněná pravděpodobnost je

$$P(Y_i = y_i) = \pi(\boldsymbol{x}_i)^{y_i} \cdot (1 - \pi(\boldsymbol{x}_i))^{1-y_i}.$$

Protože předpokládame, že naše pozorování jsou nezávislá, můžeme věrohodnostní funkci definovat jako součin podmíněných pravděpodobností jednotlivých pozorování, tj.

$$l(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = y_i) = \prod_{i=1}^{n} \pi(\boldsymbol{x}_i)^{y_i} \cdot (1 - \pi(\boldsymbol{x}_i))^{1-y_i}.$$

Zpravidla je vhodnější pracovat s logaritmem věrohodnostní funkce

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \ln(l(\boldsymbol{\beta})) = \sum_{i=1}^{n} y_i \ln(\pi(\boldsymbol{x}_i)) + (1 - y_i) \cdot (1 - \pi(\boldsymbol{x}_i)).$$

Abychom dostali hledané maximum vzhledem k vektoru $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0,\ \beta_1, \ldots, \beta_k)$, položíme parciální derivace funkce $L(\boldsymbol{\beta})$ podle $\beta_0,\ \beta_1, \ldots, \beta_k$ rovny 0 a vyřešíme vzniklé rovnice. Tím získame vektor odhadnutých parametrů $\boldsymbol{\beta}$. Po zderivování $L(\boldsymbol{\beta})$ dostáváme soustavu věrohodnostních rovnic tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \pi(\boldsymbol{x}_i)) = 0, \tag{42}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} (y_i - \pi(\boldsymbol{x}_i)) = 0,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ k, \tag{43}$$

kde x_{ij} je j-tá složka vektoru $\boldsymbol{x}_i$. Soustava (42), (43) se pak řeší numericky. Jako řešení dostaneme vektor $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, maximální věrohodný odhad $\boldsymbol{\beta}$ a hledané pravděpodobnosti $\pi(\boldsymbol{x}_i)$ mají tvar

$$\pi(\boldsymbol{x}_i) = \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ik}}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ik}}} = \frac{1}{1 + e^{-(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ik})}}. \tag{44}$$

V systému Mathematica celý popsaný postup lze obejít příkazem `LogitModelFit`.

Příklad 3.8. Metodu popsanou výše ilustrujeme na reálných datech. Predikci pravděpodobností defaultu spočteme pro různé kombinace ukazatelů likvidity a různé definice defaultu.

Podnik X měl v letech 2008 - 2010 19 odběratelů. Na základě ukazatelů likvidity odběratelů z konce roku 2008 a jejich kreditní historie v roce 2009 odhadneme vektor $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Pak pomocí $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a ukazatelů likvidity z roku 2009 odhadneme pravděpodobnosti defaultu v roce 2010 (vzorec (44)) a porovnáme výsledky se skutečností. Budeme

Skupina	α	β	γ
Počet podniků	7	6	3

Tabulka 7: Počet defaultů v 2009

uvažovat 3 možnosti: default nastane 30 (typ α), 60 (β), 90 (γ) dnů po splatnosti pohledávky.

Výsledky shrnuje tabulka 8. Písmenem **N** jsou označovány podniky, které splatily své závazky včas podle aktuální definice defaultu, písmenem **D** podniky, které nesplatily svůj dluh včas. Ohodnocení ✓, resp. × znamenají správnost resp. nesprávnost výsledku a vychází z toho, že výsledné pravděpodobnosti byly tak blízko 0, resp. 1, že můžeme předpokládat, že dojde ke splacení, resp. defaultu. Ve spodní části tabulky je číselné a procentuální ohodnocení správných odhadů a souhrn chyb typu I (model predikuje **N**, ale podnik selhá ve splacení) a chyb typu II (model predikuje **D**, ale podnik splatí své závazky). Chyby typu I jsou pro náš podnik X nákladné, protože "podnik poskytne úvěr někomu, kdo jej nesplatí". Chyby typu II nevyústí v majetkovou škodu, jen ve ztrátu příležitosti.

Kromě kombinací ukazatelů, které jsou shrnuty v tabulce 8, byly provedeny výpočty použitím jen ukazatelů krátkodobé likvidity a zvlášť pro ukazatele dlouhodobé likvidity. V těchto dvou případech výsledné pravděpodobnosti **D**, resp. **N** nejsou tak jednoznačné, dávají méně přesné, ale porovnatelné výsledky.

Jak vidíme z tabulky 8, nejlepšího výsledku v případě použití ukazatelů likvidity jsme dosáhli v případě, kdy default uvažujeme 60 dní po splatnosti pohledávky. I zbylé dva případy dávají porovnatelný výsledek, co se týče procenta úspěšnosti správných odhadů, ale zde je příliš velký počet chyb I. druhu, které mohou být pro podnik nákladné.

V případě, že k modelování přidáme ukazatel solventnosti, dostáváme lepší výsledky, alespoň co se týče chyb prvního typu. Avšak chyby druhého typu příliš fluktuují. Nejlepšího výsledku dosáhneme v případě defaultu typu α, ale v praxi toto kritérium nebude příliš směrodatné, neboť zmeškání v platbě 30 dnů může být způsobeno mnoha okolnostmi, které ještě nenaznačují problémy s likviditou.

□

Postup popsaný výše umožňuje podniku rozhodovat, kterému odběrateli poskytne odběratelský úvěr, a může tak omezit počet nesplacených pohledávek. V dnešních tržních podmínkach je však málo pravděpodobné (jen v případech, že daný podnik má vážné finanční těžkosti, které jsou známé), že odběratel, i kdyby měl zpožděné závazky, by nedostal další odběratelský úvěr. Kromě toho zpoždění v zaplacení také může mít i jiné důvody než likviditní problémy. Běžným případem je situace, kdy odběratel je zároveň i dodavatelem a nesplacení z jedné strany má za důsledek nesplacení z druhé strany (přitom problémy s likviditou má jen první podnik). Nicméně odhad pravděpodobností defaultu může podnik využít k tomu, aby lépe naplánoval své cash flow, aby se připravil na to, že někteří odběratelé nezaplatí včas, a tím snížil své riziko likvidity.

	Ukazatele likvidity						Ukazatele likvidity a solventnosti					
Podnik	α	OK	β	OK	γ	OK	α	OK	β	OK	γ	OK
A	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓
B	D	✓	D	×	D	×	D	✓	D	×	D	×
C	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓
D	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓
E	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	D	×	N	×
F	D	×	D	×	N	✓	D	×	D	×	N	✓
G	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓
H	D	×	D	×	D	×	D	×	D	×	D	×
I	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	D	×	N	✓
J	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓
K	N	✓	N	✓	N	✓	D	×	D	×	D	×
L	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	D	×	N	✓
M	D	✓	D	✓	N	×	D	✓	D	✓	D	✓
N	D	✓	D	✓	N	×	D	✓	D	✓	D	✓
O	N	×	D	✓	N	×	D	✓	D	✓	D	✓
P	N	×	D	✓	N	✓	D	✓	D	✓	D	✓
Q	N	×	N	×	N	✓	D	✓	N	×	N	✓
R	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓
S	N	✓	N	✓	N	✓	N	✓	D	×	D	×
Celkem		14		15		14		16		10		14
%		73		79		73		84		52		73
Chyby: typu I		3		1		3		0		1		1
typu II		2		3		1		3		8		4

Tabulka 8: Věková struktura pohledávek v 2009

Zajistit se pro případ nesplacení pohledávky se podnik může například použitím *faktoringu*, nebo *forfaitingu.* V dalším textu budeme vycházet z kapitoly 11 v [10].

Faktoring je odkup krátkodobých pohledávek faktoringovou společností (bankou) bez požadování dalších garancí. Z účetního hlediska se jedná o postoupení pohledávek. Používá se hlavně v případech, kdy podnik dodává zboží či služby stejnému subjektu pravidelně. Faktoring může být *bezregresní*, tj. riziko nezaplacené pohledávky na sebe bere faktoringová společnost (kreditní riziko ze strany odběratele se tímto v podstatě eliminuje), nebo *regresní*, tj. riziko nezaplacené pohledávky spadá zpět na dodavatele, resp. se dělí mezi dodavatele a faktoringovou společnost. Částka, kterou za pohledávku výši P podnik od faktoringové společnosti dostane, je:

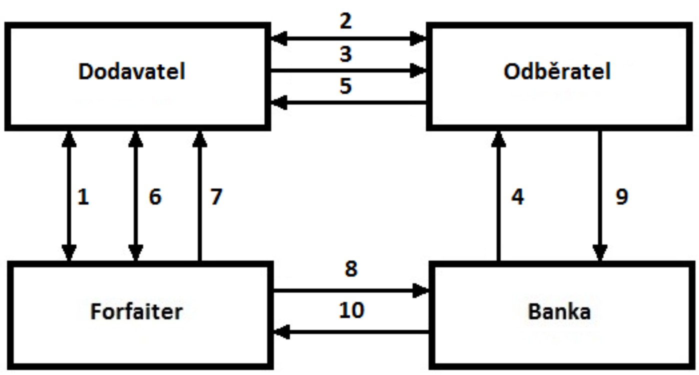
$$\mathrm{FP} = F_{\mathrm{popl}} + \frac{P + \mathrm{RN}}{(1 + r_F)^n},$$

kde n je doba do splatnosti pohledávky, F_{popl} je poplatek za faktoring, RN jsou refinanční náklady a r_F vnitřní míra výnosnosti faktoringové společnosti. Zřejmě tato míra bude v případě regresního faktoringu o dost vyšší než pro bez regresní faktoring.

Forfaiting je odkup střednědobých až dlouhodobých pohledávek forfaiterem (bankou). Používá se hlavně při importu zboží či služeb s dlouholetou splatností plateb. Jedná se o pohledávky, které jsou nějakým způsobem zajištěny např. bankovní zárukou nebo směnkou avalovanou bankou. Důsledkem toho je, že forfaiter přebírá veškerá rizika od dodavatele. Cena za tuto službu je většinou dána diskontem D z nominální hodnoty pohledávky P, tj.

$$D = \frac{P \cdot n \cdot r_d}{360}$$

kde r_D je roční diskontní sazba, přičemž tato sazba obsahuje jak náklady forfaitera, tak i rizikovou přirážku. Schéma forfaitingu znázorňuje obrázek 8. Postup:
1. Uzavření smlouvy mezi dodavatelem a forfaiterem,
2. Smlouva mezi dodavatelem a odběratelem - prodej,
3. Dodání zboží,
4. Poskytnutí garance bankou odběratele,
5. Odběratel dodá garanční dokumenty od banky dodavateli,



Obrázek 8: Schéma forfaitingu

6. Dodavatel prodá garanční dokumenty forfaiterovi,
7. Platba snížená o diskont,
8. Forfaiter potvrdí bance platbu a požaduje zaplacení,
9. Platba v čase splatnosti,
10. Platba forfaiterovi.

3.4 Operační a hazardní riziko

Operační a hazardní[15] riziko je riziko vzniku ztráty v důsledku provozních nedostatků, lidských chyb nebo vnějších událostí. Pokrývá širokou škálu rizik, které vznikají v každém segmentu podnikání. Většina těchto rizik má za následek jen nemateriální škodu. Důležité je proto vymezit, která rizika bude podnik jen nést a kterými se bude dál zabývat.

Operační riziko se objevuje všude v podnikání, proto do identifikace musí být zahrnuti pracovníci z každé oblasti. Následně se musí zkategorizovat, např. do těchto kategorií:

lidské chyby - krádeže, havárie, ztráta dokumentů

chyby systémů a zařízení - porucha strojů, smazání dat, požáry

vnější události - havárie, výpadek elektřiny, krádeže

Počet kategorií není dán a každý podnik si je určuje sám, důležité ale je, aby zařazení každého rizika do kategorie bylo jednoznačné.

Na měření operačního rizika se nejlépe používá VaR. Pokud máme dostatek pozorování, můžeme VaR určit metodou neparametrického VaR, popsaného v části 2.2.2., nebo ho nasimulovat pomocí metod popsaných v kapitole 2. Jiná možnost je určit celkové rozdělení ztrát kolektivním modelem rizika pro jednotlivé kategorie, a pak VaR určit jako kvantil tohoto rozdělení. V následujícím výkladu vycházíme z [8].

Nechť jsou velikosti ztrát způsobené jednotlivými riziky v jedné kategorii za jeden rok $X_1, \ldots, X_N$. Pak celková ztráta za jeden rok je

$$L = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Rozdělení počtu škod N budeme předpokládat Poissonovo[16]. Rozdělení jednotlivých ztrát X_i se předpokládá Gama, Weibullovo, Log-normální nebo Paretovo. V případě příliš odlehlých pozorování k určení typu rozdělení můžeme použít teorii extrémních hodnot. Předpokládejme, že hodnoty $X_k, \ldots, X_N$ ze všech pozorování prekročily velkou mez M. Definujeme $U_j = X_{k-1+j} - M,\ j = 1, \ldots, N-k+1$. Je-li M dostatečně velké, lze ukázat, že limitní rozdělení veličin U_j je zobecněné Paretovo rozdělení[17]. Předpokládáme-li například, že $X_1, \ldots, X_{k-1}$ mají Paretovo rozdělení, pak můžeme rovněž použít cenzorované Paretovo rozdělení na intervalu (a, M) a d.f. veličin X_i bude mít tvar:

$$F(x) = \begin{cases} c\frac{1-(\frac{x}{a})^{-\alpha}}{1-(\frac{M}{a})^{-\alpha}} & a \le x < M,\ a > 0.\ \alpha > 0 \\ 1 - p(1 + \xi\frac{x-M}{\omega})^{-1/\xi} & x \ge M,\ \xi \ne 0, \end{cases}$$

[15] Někde se na tyto dva typy rizik odkazuje společně pod názvem operační riziko.

[16] Poissonovo rozdělení nemusí být vhodné v každém případě, protože jeho střední hodnota a rozptyl jsou stejné a skutečná data tuto vlastnost nemusí mít. V takových případech je možné použít negativně-binomické rozdělení.

[17] Jedná se o Balkema - de Haan - Pickandsovu větu.

kde $p = P(X_i > M)$, c je konstanta určená tak, aby naše funkce byla spojitá v bodě M a neklesající, tj. $c = 1 - p$.

Volba cenzorovaného Paretova rozdělení řeší některé nevýhody (jako neexistence momentů) Paretova rozdělení:

1. horní mez M můžeme chápat jako mez, nad kterou zahrneme pozorování do modelu, tj. vynecháme malé ztráty,

2. omezení M pro hodnoty ztrát zaručuje existenci momentů.

Chybějící parametry můžeme odhadnout metodou maximální věrohodnosti na základě všech pozorování z T let, přičemž předpokládáme, že jednotlivá pozorování jsou nezávislá a stejně rozdělená s hustotou $f(x) = F'(x)$.

K odhadu VaR zbývá provést simulaci:

předpokládame, že ztráty X_i mají rozdělení s d.f. $F(x)$,

předpokládame, že počet událostí N za jeden rok má Poissonovo rozdělení, jehož parametr odhadneme jako průměr pozorovaných počtů škod za T let,

předpokládame nezávislost veličin N, $X_1, \ldots, X_N$.

Postup simulace:

1. generujeme náhodné číslo n s rozdělením veličiny N (Poissonovo),

2. generujeme n veličin X_i s rozdělením s d.f. $F(x)$,

3. spočteme úhrn škod pro generovaná data $L = \sum_{i=1}^{n} X_i$,

4. postup opakujeme dostatečně mnohokrát ($= P$).

Máme tedy P scénářů, z nich si hledané VaR vybereme metodou neparametrického VaR popsanou v 2.3. Očekávanou ztrátu za následující rok můžeme odhadnout jako průměr všech simulací, tj.

$$\hat{\mathrm{EL}} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{P} L_i,$$

Odhad UL za stejné období je $\hat{\mathrm{UL}} = \mathrm{VaR} - \hat{\mathrm{EL}}$.

Problémem podobných modelů může být nedostatek dat k nasimulování vhodných rozdělení. Tam, kde je malý počet ztrát v důsledku operačního rizika, je jednodušší takové riziko nést, resp. každou událost řešit zvlášť. Nicméně u operačních rizik běžně platí, že je jednodušší jim předejít jasně definovanými interními směrnicemi, dodržováním bezpečnostních předpisů a samozřejmě kontrolou výše uvedených. Základem toho je sledování rizikových indikátorů - tyto jsou většinou specifické pro jednotlivé podniky, mezi ně patří např. aktuální teploty (pro zemědělce), kriminalita v okolí, počet výpadků energie, kvalifikace zaměstnanců, počet poruch stroje a mnoho dalších. Dále je důležité mít definované krizové plány pro případ, že nějaká nečekaná událost nastane. Možnosti řízení operačních rizik:

Finanční opatření

- pojištění proti požáru, krádeži,
- finanční deriváty - např. deriváty na počasí,
- katastrofické dluhopisy (pro případ zemetřesení, hurikánů, atd.),
- vytváření rezerv,
- prodej rizikového aktiva (nebo nákup jiných aktiv na eliminaci rizik s původním aktivem) a další.

technicko-organizační opatření

- vnitřní směrnice,
- požárně-poplachové směrnice,
- krizové plány a další.

Při vytváření směrnic a implementaci opatření proti operačním rizikům by se mělo směřovat ke kontinuitě podnikání. Měly by se zajistit podmínky pro pokračování činnosti v případě, že nastane nečekaná událost.

3.5 Jiné typy podnikových rizik

Rizik, kterým každý podnik musí čelit, je mnoho, kromě výše uvedených jsou to například:

Technologické riziko - je riziko vzniklé v důsledku nedokonalosti technických systémů a jejich morální stárnutí. Závažnější je ten druhý fakt - staré a opotřebené stroje ani zdaleka nedosáhnou na nové technologie, většími náklady na výrobu nutí majitele držet cenovou hladinu hotových výrobků výš než podnik s novým strojem. Toto je riziko, kterému čelí každý podnik, a lze řešit jen stálou implementací nových technologií.

Projektové riziko - je riziko vzniklé v důsledku nesprávného řízení libovolného projektu. Za následek může mít buď jen časové zpoždění projektu, nebo jeho selhání, v každém případě se však jedná o nákladné důsledky.

Reputační riziko - je riziko vzniku ztrát z důvodu snížení dobré pověsti podniku. Vztahuje se hlavně k podnikům, které poskytují různé služby.

Riziko nepříznivého počasí - je riziko vzniku ztráty v důsledku nepříznivého vývoje počasí. Tomuto riziku jsou nejvíce vystaveny energetické podniky a zemědělci, ale určitým způsobem se týká každého podniku. Na zajištění proti tomuto riziku se používají deriváty na počasí (viz kapitola 4.).

Riziko konkurence - je riziko, které je zčásti obsažené již v technologickém riziku a vyjadřuje možnost ztráty v důsledku vstupu konkurence na trh. Je to riziko, které se většinou jen nese, protože vyplývá z takých skutečností, ke kterým podnik přístup nemá.

Rizika řízení rizik - je riziko nesprávného vyhodnocení rizikových ukazatelů. Tzn. že příslušné ohodnocení riziko podhodnotí, nebo nadhodnotí, přičemž oba případy mohou pro podnik být nákladné.

Řízení těchto a dalších rizik kromě metod uváděných výše lze provést např. vhodnou volbou zaměstnanců (a to jak na řídících pozicích, tak v nižších vrstvách) a jejich neustálým školením a vzděláváním, tvorbou rezerv na neočekávané události, pojištěním a zbytečným neriskováním.

4 Řízení rizik v systému Mathematica

Systém Mathematica poskytuje širokou škálu funkcí použitelných ke statistické a finanční analýze. Navíc poskytuje excelentní rozhraní pro realizaci složitějších úloh a jejich grafické znázornění. V tomto systému jsem naprogramoval proceduru (soubor `Rizeni_podnikoveho_rizika.nb`) pro některé výpočty a simulace spojené s řízením rizik. Jimi jsou:

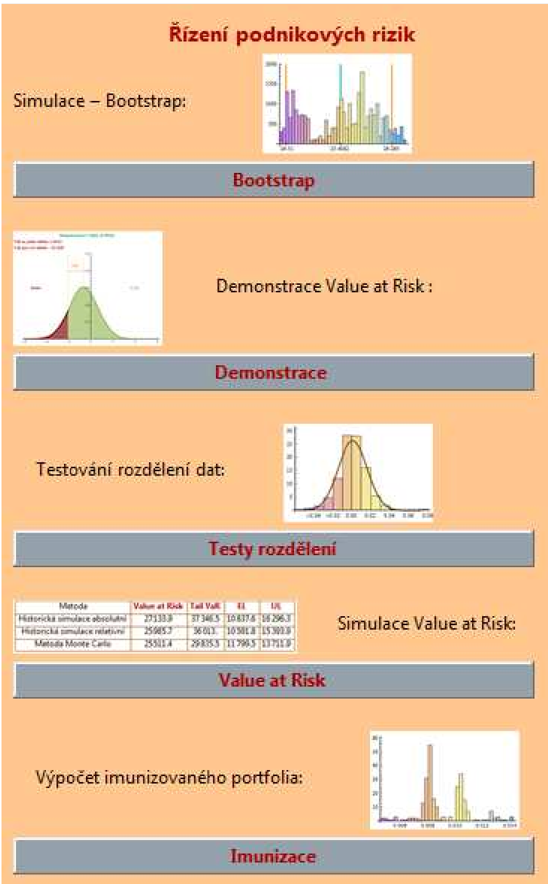
Bootstrap - simulace rozdělení pomocí bootstrapových výběrů,

Demonstrace Value at Risk

Testy rozdělení dat - testování nejpoužívanějších typů rozdělení v řízení rizik,

Value at Risk - simulace VaR pomocí historické simulace absolutní a relativní, Monte Carlo simulace,

Imunizace - výpočet imunizovného portfolia s omezeným počtem aktiv.



Obrázek 9: Základní panel procedury

V částech, kde se nahráva nějaký soubor, předpokláda se excelovský soubor typu `.xls` nebo `.xlsx`, jehož název se zadá ve tvaru "`nazev.xls`", resp. "`nazev.xlsx`". Data musí být uložena po jednotlivých sloupcích a soubor musí být uložen v adresáři, kde je uložen i notebook. Propočítání výsledků proběhne automaticky po zadání názvu nového souboru, resp. hodnot do políčok. Všechny původní hodnoty jsou nastaveny podle následujících příkladů.

4.1 Bootstrap

Sekce Bootstrap slouží k simulaci rozdělení dat pomocí bootstrapu[18]. Lze použít klasický bootstrap a bootstrap s přidaným minimem a maximem (tj. k datům se přidá expertně stanovené minimum a maximum).

Po zadání názvu souboru se zadá požadovaný počet simulací (základní nastavení je 100 simulací). Model podporuje jednoduché transformace dat, např. násobení nějakou konstantou ("Násobitel") nebo přičtení nějaké konstanty ("Sčítanec"). Na závěr se vybere požadovaný kvantil (základní nastavení je 95% kvantil).

Obrázek 10: Bootstrap: simulace rozdělení kurzu EUR/CZK, data z období 16.11.2009 - 16.11.2010 jsou uložena v souboru `prboot.xls`

[18] Demonstrace na podobné témata lze nalézt například na webové stránce http://demonstrations.wolfram.com/search.html?query=bootstrap.

Model simuluje rozdělení ve dvou dimenzích. Jednak simuluje samotný histogram rozdělení a nejistotu jeho parametrů. Jako výsledek dostaneme následující histogramy:

histogram původních dat,

histogram simulovaných dat,

histogramy středních hodnot, volatilit a vybraných kvantilů.

V histogramech se simulovanými daty je vyznačena střední hodnota (modrá svislá čára) dále 5 a 95% kvantily (oranžové svislé čáry). Na závěr je přidáno shrnutí statistických charakteristik simulovaných dat.

Deriváty na počasí (wheather derivatives)

Deriváty na počasí začaly vznikat na konci 90. let, dnes jsou již obchodovány na mnoha burzách. Ocenění těchto derivátů, jak je uvedeno v [11], vychází z denních teplot, resp. jejich transformací. Definujeme

$$\mathrm{HDD} = \max(0,\ \textit{základní teplota} - \textit{denní průměrná teplota}),$$

$$\mathrm{CDD} = \max(0,\ \textit{denní průměrná teplota} - \textit{základní teplota}),$$

kde *základní teplota* byla stanovena při prvotním použití derivátů na počasí na 65°F, resp. 18°C, která byla empiricky určená jako zlomová teplota v Severní Americe (Tato hodnota není pevně dána, v regionech s vyššími průměrnými teplotami je tato hodnota vyšší.). HDD (heating degree days) je počet stupňů, o kolik je průměrná denní teplota pod základní teplotou. Podobně CDD (cooling degree days) je počet stupňů, o kolik je průměrná denní teplota nad základní teplotou. *Denní průměrná teplota* je jednoduše určená jako aritmetický průměr nejnižší a nejvyšší teploty za daný den.

Při obchodování s opcemi na počasí se jako podkladové aktivum bere v úvahu právě HDD nebo CDD, přičemž většinou se uvažují kumulativní hodnoty, např. součet HDD za měsíc červen apod. Výplatní funkce pro call a put opce mají tvar

$$\text{call} \qquad p(X) = v \max(0,\ X - K),$$

$$\text{put} \qquad p(X) = v \max(0,\ K - X),$$

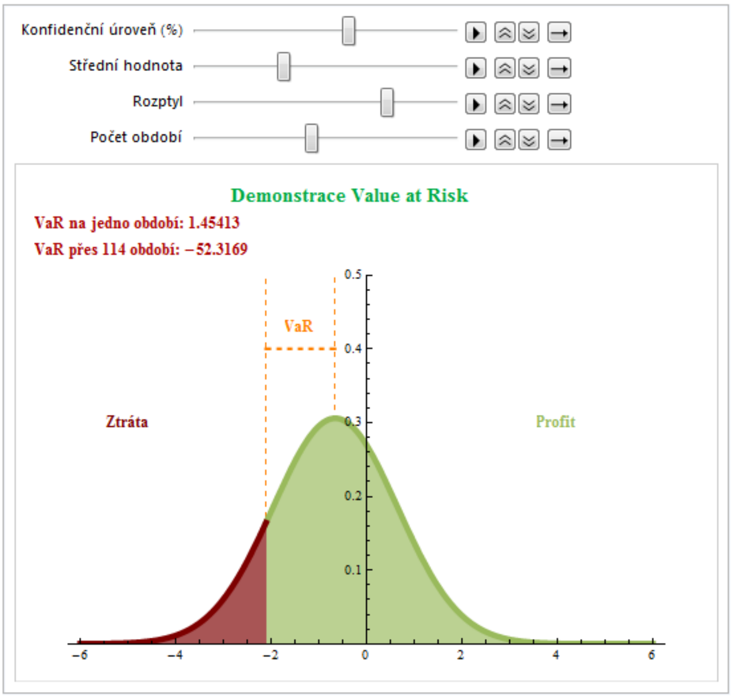
kde v je výplata na jednotku indexu, X značí aktuální index (HDD nebo CDD) a K je realizační hodnota X.

Cena takových instrumentů se nejlépe určí pomocí simulace - spočte se spravedlivá cena. Historická simulace (tzv. Burn Analysis) je založená na tom, že se spočítají teoretické výplaty za minulé období (tj. z historických teplot se spočítají HDD, resp. CDD a následně pro každý index se spočte hodnota $p(X)$) a spravedlivá cena se určí jako jejich střední hodnota. Na závěr se tato hodnota upravý tak, abychom zohlednili časovou hodnotu peněz. Jiná možnost je provést simulaci bootstrap z historických hodnot a dále pokračovat jako v případě historické simulace.

Příklad 4.1. Soubor `prweather.xls` obsahuje teoretické výplaty opce na HDD za posledních 30 let za měsíc červen. Teploty byly naměřeny v městě X, realizační hodnota byla stanovena na 700, výplata na jednotku opce nechť je 10. Zadáme-li název souboru, dostaneme odhad hustoty rozdělení výplatní funkce ve tvaru histogramu a také odhad ceny opce jakožto střední hodnotu simulovaných dat. Tuto hodnotu bychom ještě měli diskontovat aktuální úrokovou sazbou přes období do splatnosti derivátu.

4.2 Demonstrace Value at Risk

Tato sekce slouží k demonstraci Value at Risk. Demonstrace je přepracovaná verze [14] a je založena na sekci 2.2.1. Ukazuje VaR pro normální rozdělení s různými parametri a různé časové období.



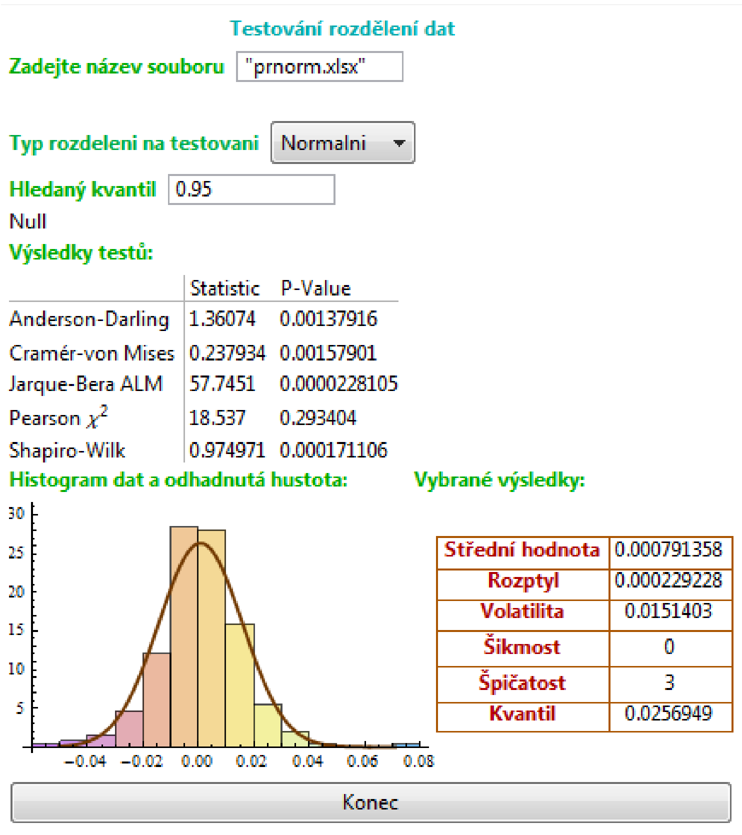
Obrázek 11: Demonstrace Value at Risk

4.3 Testování rozdělení dat

Část Testování rozdělení dat slouží k odhadu rozdělení dat. Testovat lze tyto typy rozdělení: normální, logaritmicko-normální, logistické, gama, χ^2, Paretovo a Weibullovo rozdělení.

Nejprve se zadává název souboru, dále se vybere typ rozdělení, který chceme testovat. Chceme-li znát nějaký speciální kvantil výsledného rozdělení, zadává se i hledaný kvantil.

Jako výsledek dostaneme shrnutí všech v úvahu připadajících testů - testovou statistiku a p-hodnotu. Dále se porovnává histogram dat a odhadnutá hustota rozdělení. Na závěr jsou shrnuty základní charakteristiky odhadnuté hustoty.



Obrázek 12: Testování rozdělení dat

Obrázek 12 ukazuje ilustraci použití. V přiloženém souboru `prnorm.xls` nalezneme jednodenní výnosy akcií GE (General Electric) za poslední rok. Test normality výnosů probíhá jako na obrázku 12. Jak vidíme, výsledek chi-kvadrát testu dobré shody je, že na hladině spolehlivosti např. 95 % nemůžeme zamítat normalitu dat. Grafické znázornění také podporuje tento výsledek.

4.4 VaR

Část Value at Risk slouží k simulaci VaR. Zadává se název souboru, který musí obsahovat pro každý rizikový faktor jeden sloupec hodnot.

Dále se zadává závislostní struktura mezi jednotlivými faktory ve tvaru funkce s parametry $a, b, \ldots, j$ (tj. písmeno a značí parametr, kterého hodnoty jsou obsaženy v prvním sloupci excelovského souboru, atd.). Na závěr se zadá počet simulací a hledaný kvantil (VaR).

Jako výsledek dostaneme VaR vypočtený metodami historické simulace a metodou Monte Carlo. Jako doplňující informace je zde ještě uveden CVaR, očekávaná ztráta a neočekávaná ztráta.

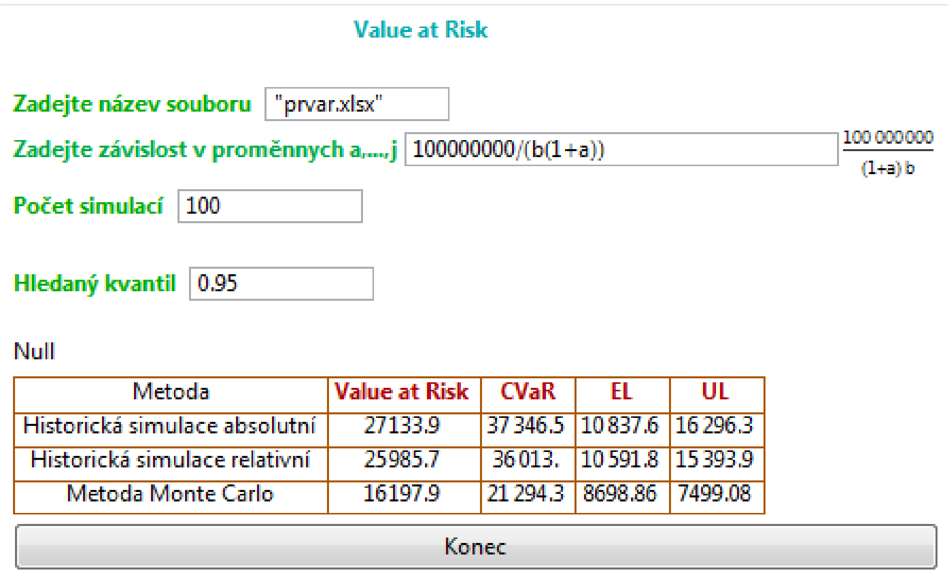
Příklad 4.2. Spočteme VaR v EUR ke dni 16.11.2010 na jeden den s intervalem spolehlivosti 95 % směnky s nominální hodnotou 100 000 000 CZK, splatné za 1 rok. Kurz CZK/EUR ČNB ke dni 16.11.2010 je $s = 24.61$, jednoletý PRIBOR je $r = 0.76$ %, 95% kvantil $N(0,1)$ je $u_{0.95} = 1.64$. Hodnotu směnky v eurech můžeme spočítat jako čistou současnou hodnotu tohoto cenného papíru, tj.

$$\mathrm{NPV}(r,s) = \frac{100,000,000}{s\cdot(1+r)}.$$

K tomuto příkladu je přiložený excelovský soubor `prvar.xls`. Po zadání názvu se zadá funkce

$$\frac{100\,000\,000}{b(1+a)}$$

vzhledem k tomu, že v souboru první sloupec je úroková sazba (parametr a) a druhý sloupec je konverzní kurz (parametr b).
Obrázek 13 ukazuje výstup po zadání všech parametrů.



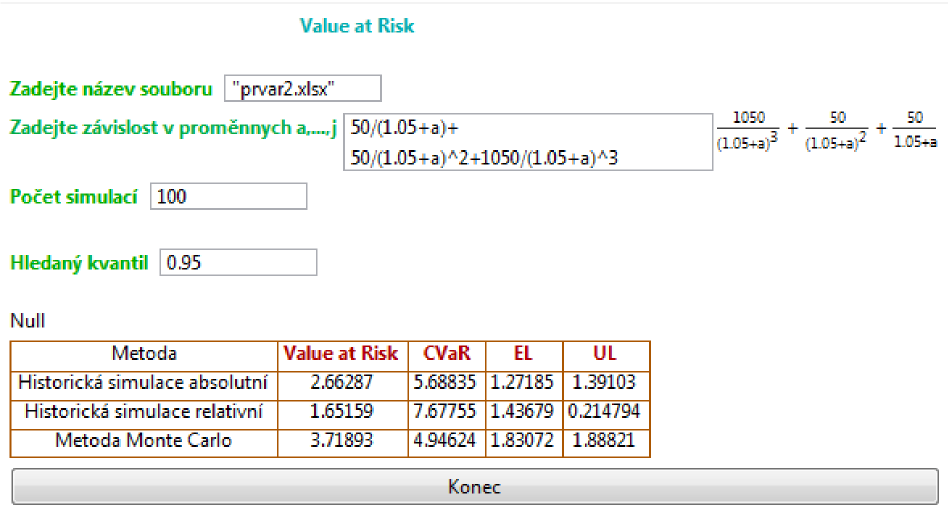
Obrázek 13: Value at Risk

Příklad 4.3. Vypočteme VaR přes jeden den k 16.11.2010 dluhopisu s nominální hodnotou 1 000, s roční kuponovou sazbou 5 %, tedy s ročním kuponem 50, se splatností za 3 roky. Hodnotící úroková sazba je 5 % + PRIBOR 1Y p. a. Soubor `prvar2.xls` obsahuje hodnoty PRIBOR 1Y za období jeden rok před referenčím datem.

Postup výpočtu je podobný jako výše, zadá se název souboru, požadovaný počet simulací a hledaný kvantil. Zadá se hodnotící funkce současné hodnoty dluhopisu ve tvaru

$$NPV = \frac{50}{(1.05 + a)} + \frac{50}{(1.05 + a)^2} + \frac{1050}{(1.05 + a)^3}.$$

Shrnutí výsledků je zobrazeno na obrázku 14.



Metoda	Value at Risk	CVaR	EL	UL
Historická simulace absolutní	2.66287	5.68835	1.27185	1.39103
Historická simulace relativní	1.65159	7.67755	1.43679	0.214794
Metoda Monte Carlo	3.71893	4.94624	1.83072	1.88821

Obrázek 14: Výstup pro výpočet VaR dluhopisu

4.5 Imunizace

Část Imunizace slouží ke stanovení imunizovaného portfólia pro dva základní případy (volba těchto případů vyplývá z existenci jednoznačného řešení):

- k imunizaci závazků máme dvě aktiva - imunizace na základě rovnosti durací (příklad 3.1),

- k imunizaci závazků máme tři aktiva - imunizace na základě rovnosti durací a konvexity.

Zadávají se jednotlivé cash flow a okamžiky jejich splatnosti. Vektory se zadávají ve tvaru $\{\mathrm{CF}_1, \ldots, \mathrm{CF}_n\}$. Na závěr se zadá referenční úroková míra ve tvaru desetinného čísla. Ve výsledku se objeví shrnutí charakteristik jednotlivých aktiv a pasiv. Další tabulka ukazuje hledané podíly investic do jednotlivých aktiv, počet kusů a celkovou hodnotu investic do těchto aktiv.

Příklad 4.4. Provedeme výpočet k příkladu 3.1. Zadáním parametů příkladu 3.1 dostaneme výsledek velmi podobný těm uvedeným ve 3. kapitole, odlišnosti jsou důsledkem zaokrouhlování k vyšší hodnotě.

Vzhledem k tomu, že se jedná o příklad se dvěma aktivy, vybere se metoda "Durace" a následovně se zadají parametry:

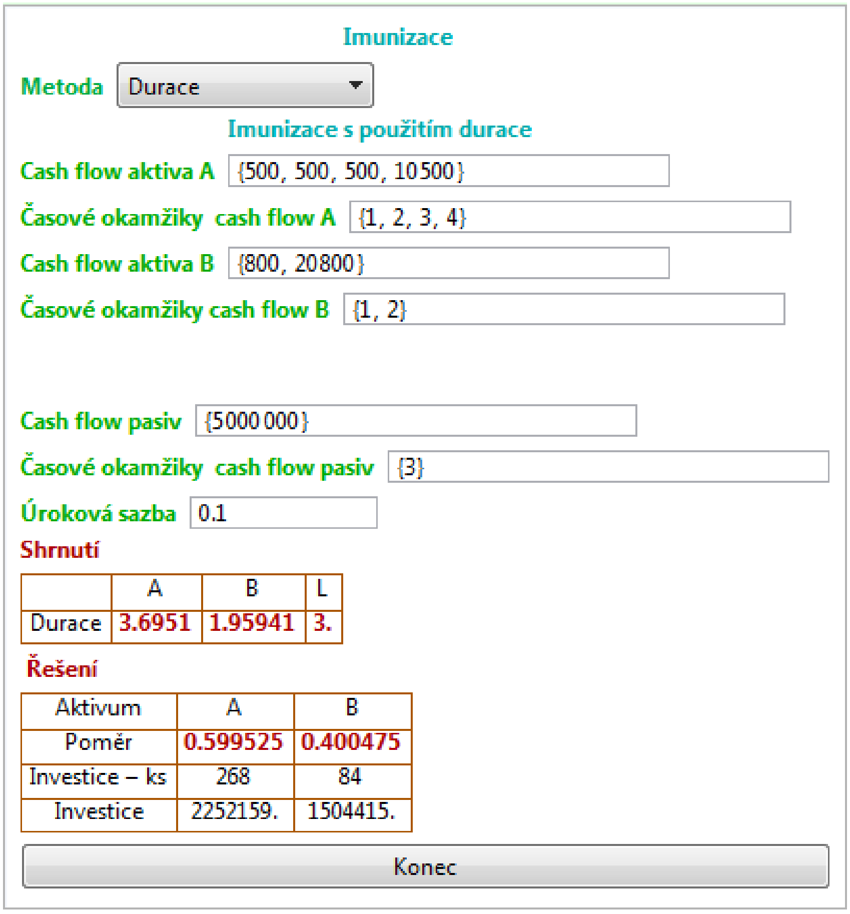
Aktivum A: cash flow $\{500, 500, 500, 10\,500\}$, časové okamžiky $\{1, 2, 3, 4\}$.

Aktivum B: cash flow $\{800, 20\,800\}$, časové okamžiky $\{1, 2\}$.

Pasiva: cash flow $\{5\,000\,000\}$, časové okamžiky $\{3\}$.

úroková sazba: 0.1.

Obrázek 15 ukazuje výstup procedury. Jak vidíme, zhruba 60 % se má investovat do aktiva A a 40 % do aktiva B, jak to bylo uvedeno i výše.



Obrázek 15: Ukázka k příkladu 3.1

5 Závěr

V této práci jsme studovali rizika, se kterými se libovolný podnik počas své existence nutně potká. Některá z těchto rizik, jako je například politické riziko, může podnik jen nést. Na druhou stranu existuje poměrně velká skupina rizik, jejichž následky jsou zmírnitelné nebo dokonce eliminovatelné. Zaměřil jsem se právě na tyto typy, na jejich měření, analýzu a řízení.

V první části jsme se zabývali stanovením statistických charakteristik rizik, jako je rozdělení rizik a charakteristiky z něj vyplývajících. Pozornost jsme věnovali modernímu nástroji měření rizik - Value at Risk, který je použitelný téměř v každém segmentu řízení rizik.

V další části práce jsme se zaměřili na nejdůležitější typy rizik, kterým podnik musí věnovat zvýšenou pozornost. V práci jsme se snažili kombinovat ekonomické ukazatele měření výkonnosti podniku se statistickou analýzou dat.

Tržní riziko - je to riziko, kterému v nějaké míře je vystaven každý podnik. Zkoumali jsme možnosti jeho měření a také řízení pomocí imunizace a použitím různých typů finančních derivátů.

Riziko likvidity a kreditní riziko - jak je zmíněno v kapitole 3, tato dvě rizika jsou úzce spjatá, neboť kreditní riziko vyústí v riziku likvidity. Pro predikování platební neschopnosti podniku jsme zavedli přístup, založený na ukazatelích likvidity odběratelů, který předpovídá jejich platební neschopnost a s tím umožňuje podniku omezit dodávky zboží problémovým odběratelům.

Operační a hazardní rizika - tato rizika mohou být pro podnik nejzávažnější, protože se neobjevují často, ale následky zato mohou být katastrofické. Uvedli jsme přístup na měření těchto rizik pomocí VaR a také možnosti řízení.

Pro ilustraci byla naprogramovaná procedura v systému Mathematica, který k příkladům, uvedeným v této práci, poskytuje výpočetní prostředky. Záměrem bylo naprogramovat proceduru pro obecné situace, v některých případech kvůli různorodosti výpočtů jsme se museli omezit na základní problémy.

Podnik kromě výše zmíněných rizik musí zvládat celou řadu dalších. V každém případě však platí, že uvažování zdravým rozumem může být efektivnější než nejsofistikovanější matematický model.

Seznam použitých zkratek

CLV	Centrální limitní věta
CZK	česká koruna
CVaR	podmíněná hodnota v riziku (Conditional Value at Risk)
ČNB	Česká národní banka
d.f.	distribuční funkce
DPH	daň z přidané hodnoty
EBIT	HV před zdaněním a úroky (Earnings Before Interest and Taxes)
EBITDA	HV před zdaněním, úroky a odpisy (Earnings Before Interest, Taxes, Depreciation and Amortization)
EL	očekávaná ztráta (Expected Loss)
EUR	euro
HUF	maďarský forint
HV	hospodářský výsledek
JPY	japonský jen
Kč	koruna
$\mathscr{L}(X)$	rozdělení X
$N(\mu, \sigma^2)$	normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2
P	pravděpodobnost (Probability)
$p.\ a.$	per annum (ročně)
PRIBOR	Prague InterBank Offered Rate
RI	rizikový index
roz	rozdělení
UL	neočekávaná ztráta (Unexpected Loss)
VaR	hodnota v riziku (Value at Risk)

Seznam použité literatury

[1] SMEJKAL V., RAIS K. (2009). *Řízení rizik ve firmách a jiných organizacích.* Grada, Praha.

[2] DUPAČOVÁ J., HURT J., ŠTĚPÁN J. (2002). *Stochastic Modeling in Financial Economics.* Kluwer, Dordrecht.

[3] HNILICA J., FOTR J. (2009). *Aplikovaná analýza rizika.* Grada, Praha.

[4] SHIU E.S.W. (1988). *Immunization of multiple liabilities.* Mathematics and Economics. **7**, 219-224.

[5] HULL J.C. (2002). *Options, Futures and Other Derivatives.* Prentice Hall, New Jersey.

[6] MRAMOR D., VALENTINCIC A. (2003). *Forecasting the liquidity of very small private companies.* Journal of Business Ventures. **18**, 745-771.

[7] PRÁŠKOVÁ Z. (2004). *Metoda bootstrap.* Robust 2004, JČMF, Praha.

[8] NĚMEČEK T. (2010). *Praktické aspekty měření a řízení finančních rizik.* Přednáška na MFF UK, Praha.

[9] ZICHOVÁ J. (2009). *Matematické metody ve financiích.* Přednáška na MFF UK, Praha.

[10] MEJSTŘÍK M., PEČENÁ M., TEPLÝ P. (2008). *Základní principy bankovnictví.* Karolinum, Praha.

[11] GARMAN M., BLANCO C., ERIKSON R. (2000). *Seeking a standard pricing model.* Environmental Finance, London.

[12] KOPA M. (2010). *Kreditní riziko v bankovnictví.* Přednáška na MFF UK, Praha.

[13] HURT J. (2010). *Risk Measures in Finance Revisited.* Wolfram Technology Conference. Dostupné z WWW: <www.wolfram.com/events/techconf2010/presentations/JanHurt.zip>.

[14] NAGY G. (2010). *Value at Risk.* Wolfram Demonstration Project. Dostupné z WWW: <demonstrations.wolfram.com/ValueAtRisk>.

[15] RiskAMP [online]. The beta-PERT Distribution. Dostupné z WWW: <http://www.riskamp.com/library/pertdistribution.php>.

[16] MANDL P., MAZUROVÁ L. (1999). *Matematické základy neživotního pojištění.* Matfyzpress, Praha.