Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

Libor Koudela

O pojetí křivky

Matematický ústav UK

Vedoucí disertační práce:	doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecné otázky matematiky a informatiky

Praha 2011

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Pardubicích dne 8. srpna 2011.   Podpis autora

Název práce: O pojetí křivky

Autor: Libor Koudela

Katedra: Matematický ústav UK

Vedoucí disertační práce: doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc., Matematický ústav UK

Abstrakt: Pojem křivky hrál důležitou úlohu v historii matematického myšlení. Tato práce je zaměřena na pojetí křivky v analýze, teorii množin a topologii. Teorie rektifikace a pojem délky oblouku jsou studovány v souvislosti s vývojem analýzy od prvopočátků ve starověku po začátek 20. století. „Měření velikosti křivek“ je diskutováno i z hlediska teorie míry a popsány jsou různé definice lineární míry a neceločíselné dimenze. Rozebírány jsou dva základní způsoby, jak chápat křivky. Jordan definoval křivku jako spojitý obraz intervalu. Jeho definice se však ukázala být příliš širokou, neboť jí vyhovují i objekty typu Peanovy křivky. V teorii bodových množin byla křivka chápána jako jednorozměrné kontinuum. Teorie dimenze a teorie kontinua, jejichž matematická podoba se začala utvářet v průkopnickém díle Bolzana, byly do značné míry motivovány snahou podat přesnou definici křivky, plochy atd. Mezi „patologickými“ křivkami, uváděnými často jako protipříklady ve vývoji moderní analýzy, najdeme první příklady fraktálů. Teorie fraktálů byla podnětem k dalšímu studiu matematických vlastností těchto křivek na konci 20. století, jako soběpodobnosti nebo autoafinity.

Klíčová slova: křivka, rektifikace, kontinuum, lineární míra, fraktální křivky

Title: On the Conception of a Curve

Author: Libor Koudela

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: The notion of a curve played important role in the history of mathematical thought. This dissertation is focused on the conception of a curve in analysis, point set theory and topology. The rectification of curves and the notion of arc length are considered in connection with the history of analysis from antiquity to the beginning of the 20th century. “Measurement of curves” is also discussed from the measure–theoretic viewpoint and various definitions of linear measure and fractional dimension are described. Historically, there are two main approaches to understanding curves. Jordan defined a curve as a continuous image of a closed interval. However, his definition appeared to be too wide, since it was met by objects such as the Peano curve. In the point set theory, a curve is considered to be a one-dimensional continuum. The development of the dimension theory and the continuum theory, starting with the pioneering work of Bolzano, was motivated by the search for rigorous topological definition of a curve, a surface etc. Among “pathological” curves, that were often introduced as counterexamples in the development of modern analysis, we can find early examples of fractals. The fractal theory motivated further study of mathematical properties of these curves in the late 20th century, such as self-similarity and self-affinity.

Keywords: curve, rectification, continuum, linear measure, fractal curves

Předmluva

Několikrát se mi v uplynulých letech stalo, že když jsem v rozhovoru zmínil téma své disertační práce, první reakcí byla otázka „A o tom se dá napsat práce?" Tazatelé by byli jistě překvapeni, kdyby viděli seznam knih a článků, napsaných výlučně o křivkách. Tato práce je věnována tomu, jak se vyvíjelo pojetí křivky v analýze, teorii množin a topologii. Před několika lety shodou okolností obhájila disertační práci na podobné téma Lenka Lomtatidze na Masarykově univerzitě. Její práce byla věnována historickému vývoji pojmu křivka a její těžiště bylo v geometrii. Věřím, že moje práce, jejíž obsahový průnik s prací Lenky Lomtatidze je minimální, bude brána jako doplnění a rozšíření jejího textu.

Tato práce si neklade za cíl poskytnout systematický výklad žádné partie matematiky, o níž pojednává, nýbrž zaměřuje se na vznik a vývoj myšlenek, které se při vývoji dotyčných partií uplatňovaly. Z tohoto důvodu nemá text formální strukturu obvyklou v učebnicích matematiky, tedy členění na definice, věty apod. Pokud jsou definice a věty zvýrazněny a odděleny od ostatního textu, je to především tehdy, když se jedná o důležité stavební kameny výkladu.

Práce se dotýká některých partií matematiky, v nichž dosud není zcela ustálena česká terminologie. Za cenné rady při hledání českých termínů v teorii fraktálů děkuji Jiřímu Fialovi, který přeložil do češtiny Mandelbrotovu knihu *Fraktály. Tvar, náhoda a dimenze* (Praha: Mladá fronta, 2003). Topologickou terminologii jsem volil podle existující české literatury (užitečným pro mne byl např. Čechův překlad Knasterova článku o nerozložitelných kontinuích [1]).

Při přepisu cizích jmen do češtiny jsem přihlížel k ustáleným zvyklostem. Český tvar řeckých jmen se řídí pravidly uvedenými ve *Slovníku antické kultury* (Praha: Svoboda, 1974). Za rady týkající se přepisu japonských jmen děkuji Petru Vrbovi. Překlady citátů, není-li uvedeno jinak, jsou moje vlastní. Děkuji nicméně Annemarii Enneperové za pomoc s latinskými texty.

[1] KNASTER, B. Přehled teorie nerozložitelných kontinuí. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky.* 1933, sv. 62, č. 8, s. 310–337.

Jsem si vědom toho, že na přechylování cizích ženských příjmení jsou různé názory a že v běžné řeči i v odborné literatuře se můžeme poměrně často setkat s jejich nepřechýlenými podobami. V této práci nicméně respektuji doporučení Miloslavy Knappové v knize *Naše a cizí příjmení v současné češtině* (Liberec: Tax az kort, 2002) a ženská příjmení uvádím v přechýleném tvaru (s výjimkou bibliografických údajů).

U některých (zpravidla méně známých) autorů jsem považoval za užitečné připojit stručné biografické údaje. Děje se tak zpravidla na místě, kde je poprvé zmiňováno dílo daného autora. Čerpal jsem přitom ze slovníku *Biographical Dictionary of Mathematicians* (New York: Charles Scribner and Sons, 1991) a z internetových zdrojů *The MacTutor History of Mathematics archive* [2] a *The Mathematics Genealogy Project* [3].

Každá kapitola tvoří víceméně uzavřený celek, proto je literatura uváděna v závěru každé kapitoly a ne až na konci práce. Výjimku tvoří úvod a závěr, kde jsou citace uváděny v poznámkách pod čarou. Jména matematiků, jejichž dílo je v dané kapitole rozebíráno či zmiňováno, uvádím nejprve v plném znění a připojuji roky narození a úmrtí.

Text je doprovázen četnými ilustracemi. Všechny jsem vyhotovil sám pro účely této práce (většinou pomocí programu Grapher, distribuovaném jako součást operačního systému Mac OS X), a to i tehdy, když mají co nejvěrněji reprodukovat ilustrace z citovaných děl. Jedinou výjimkou je obrázek 3.15 Mengerovy univerzální křivky na s. 101, který jsem převzal z Wikimedia Commons v souladu s GNU Free Documentation License.

Sazbu jsem provedl v systému LaTeX, s přihlédnutím k šabloně uveřejněné na stránkách MFF UK a s využitím volně dostupné předlohy „LaTeX Thesis Template“, jejímž autorem je Sunil Patel [4].

Největší díky jsem si nechal na závěr. Děkuji celé své rodině a zejména své ženě Janě za veškerou podporu a trpělivost, se kterou snášela omezení vyplývající z mého doktorského studia. Svému školiteli Jiřímu Veselému bych chtěl poděkovat za citlivé vedení, za pečlivé čtení rukopisu, za mnoho rad a doporučení, které k němu připojil a za veškerý čas, který mé práci věnoval.

[2] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk
[3] http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu
[4] http://www.sunilpatel.co.uk

Obsah

Úvod

Pojem křivky hrál v určitých obdobích vývoje matematiky roli, kterou lze bez nadsázky označit jako klíčovou. V 17. století např. studium vlastností křivek představovalo důležitou motivaci při vzniku infinitezimálního počtu. Pojem křivky měl od počátku blízko k pojmu funkce, ústřednímu pojmu matematické analýzy. Na přelomu 19. a 20. století přispělo zkoumání křivek k přesnému vymezení pojmů kontinua a dimenze v teorii bodových množin.

Pojem křivky vznikl na základě běžné zkušenosti. Tak jako je napnuté vlákno předobrazem přímky (úsečky), je uvolněné nebo stočené vlákno předobrazem křivky. Eukleidés (asi 330 – 260 př. n. l.) ve svých *Základech* charakterizuje čáru (linii) v definici 2 jako „délku bez šířky“, v definici 6 jako „okraj plochy“. Protože v definici 4 je definována přímka jako „čára, která se svými body táhne rovně“ [1], lze uvedené formulace považovat za první známý pokus definovat křivku. Mezi čarami však Eukleidés věnuje pozornost prakticky výlučně kružnici a přímce (úsečce).

Přímka a kružnice, příp. geometrické objekty sestrojené pomocí kružítka a pravítka, hrály v geometrii starověkého Řecka z různých důvodů privilegovanou úlohu. V Aristotelově mechanice jsou kružnice a přímka základními typy drah pohybujících se těles. Uvádí-li Aristotelés křivost a přímost jako protikladné a doplňující se vlastnosti linie, pak nositeli těchto vlastností jsou kružnice resp. přímka. Řecká filosofie od Pýthagorových dob nadřazovala jednoduché složitému. Rovnoměrný pohyb po kružnici byl v představách Pýthagora a Platóna přisuzován nebeským tělesům. Toto pojetí bylo dále rozpracováno v Eudoxově, Appoloniově, Hipparchově a Ptolemaiově systému, které se musely vyrovnat s nepravidelnostmi v pohybu nebeských těles po obloze (nesoulad mezi pozorovanými drahami planet a představou jejich rovnoměného kruhového pohybu kolem Země byl vysvětlován skládáním více pohybů), a přetrvalo v astronomii až do Koperníkovy doby.

Neznamená to, že v té době nebyly jiné „čáry“ známy a studovány; objevy nových křivek byly úzce spojeny s tzv. klasickými problémy starověké geometrie, tedy kvadraturou

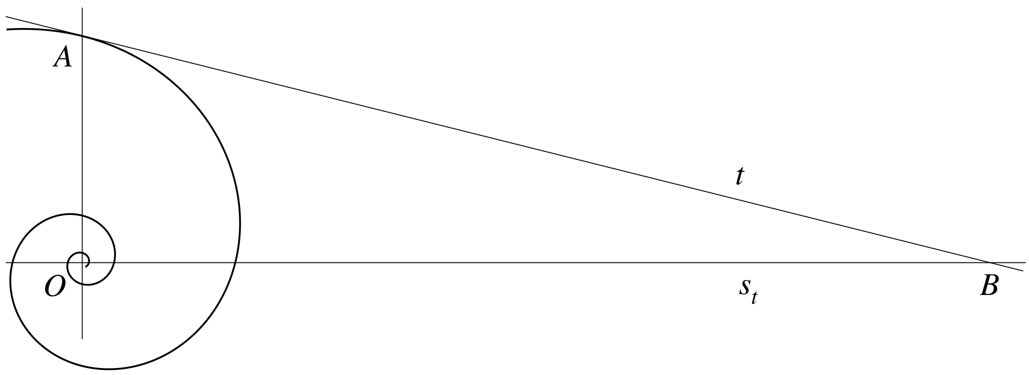
[1] EUKLEIDÉS. Základy. Knihy I–IV. Nymburk : OPS, 2008, s. 41.

kruhu, trisekcí úhlu a zdvojením krychle. K jejich konstrukci byly používány složitější mechanické prostředky než kružítko. Některé křivky sloužily i k řešení více problémů.

Pappos (asi 290 – 350), jeden z posledních velkých představitelů alexandrijské matematiky, popsal ve čtvrté knize pojednání známého jako *Sbírka* rozdělení úloh geometrie na úlohy rovinné, jež jsou řešitelné pomocí přímek a kružnic, úlohy tělesové, k jejichž řešení se využívá kuželoseček, a úlohy lineární (křivkové), které jsou řešitelné pomocí křivek vznikajících ze složitějších ploch a komplikovanějších pohybů. S tím souvisí i rozdělení křivek na rovinné, představované přímkou a kružnicí, tělesové, kterými jsou kuželosečky, a lineární, mezi něž řadil např. Hippiovu kvadratrix, Archimédovu spirálu, Nikomédovu konchoidu apod.

V souvislosti se snahou vyřešit kvadraturu kruhu se objevila potřeba určit délku kružnice (tedy kružnici rektifikovat; tento pojem se ale začal používat až v 17. století). Eukleidova geometrie neposkytovala prostředky k provedení rektifikace kružnice ani jakékoliv jiné křivky. Postuláty, na jejichž základě bylo možné porovnávat délky oblouků různých křivek, formuloval Archimédés (asi 287 – 212 př. n. l.) v knize *O kouli a válci* a tyto postuláty byly základem úvah o rektifikaci až do 19. století.

Určení délky oblouku křivky bylo důležitou úlohou, jejíž řešení vypovídalo i o samotné povaze křivky. Do jaké míry lze považovat rovnou a křivou čáru za různorodé objekty? Lze z aproximace usuzovat na přesné řešení? Jaké prostředky jsou k dosažení výsledku legitimní? Odpovědi na tyto otázky se v průběhu vývoje měnily. Rektifikace a rektifikovatelnost oblouků křivek jsou důležitými tématy této práce; první kapitola nazvaná *Problém rektifikace* pojednává o historii těchto úloh od starověku do druhé poloviny 19. století.



OBR. 1: Logaritmická spirála byla po kružnici první rektifikovanou křivkou. Délka oblouku spirály mezi bodem A a pólem O je rovna vzdálenosti průsečíku B tečny t a polární subtangenty s_t od bodu A.

Renesance přinesla obrovský zájem o geometrii, ale žádná nová křivka nebyla v tomto období studována. Jedinou možnou výjimkou je cykloida, kterou podle některých zdrojů popsal již Mikuláš Kusánský (1401 – 1464). Největším vědeckým přínosem renesance je nepochybně revoluce v astronomii, kterou přineslo slavné dílo *De Revolutionibus orbium coelestium libri VI* Mikuláše Koperníka (1473 – 1543), vydané poprvé v roce 1543. Kruhový pohyb, který v řecké astronomii měl výsadní postavení, byl i v Koperníkově heliocentrickém systému považován za jediný možný pohyb nebeských těles. Teprve Johannes Kepler (1571 – 1630) rozpoznal, že tvar dráhy Marsu má blíže k elipse než ke kružnici a dal tak nový podnět ke studiu kuželoseček.

Mimořádným zájmem o křivky byl provázen vývoj matematiky v 17. století. René Descartes (1596 – 1650) použil algebraické prostředky k řešení geometrických problémů a položil tak základ novému oboru – analytické geometrii. Descartes v podstatě převzal antické dělení křivek na geometrické a mechanické, ale hranici mezi oběma skupinami posunul. Geometrickou křivkou nazývá Descartes takovou křivku, kterou lze popsat algebraickou rovnicí s neznámými x a y představujícími souřadnice bodů křivky. Např. kisoida se tak přesunula z kategorie mechanických křivek mezi křivky geometrické. Příklady mechanických křivek podle Descartovy klasifikace byly křivky generované dvěma nezávislými pohyby: kvadratrix, Archimédova spirála a šroubovice. Zatímco dříve byla konstrukce sestávající z konečného počtu úkonů kritériem existence, v Descartově době tuto roli do jisté míry převzala rovnice. Podle stupně polynomu v rovnici popisující křivku pak byly geometrické (dnes nazývané algebraické) křivky dále klasifikovány jako křivky prvního stupně, křivky druhého stupně atd.

Úlohy související s křivkami a jejich vlastnostmi patřily mezi základní motivační úlohy při formulování základů infinitezimálního počtu. Diferenciální a integrální počet spojujeme dnes zejména se zkoumáním vlastností funkcí, v 17. století se však pojem funkce v dnešním smyslu ještě nepoužíval a nová teorie sloužila především k řešení úloh spojených s křivkami (výpočtu plochy obrazce ohraničeného obloukem křivky, určení délky oblouku křivky, stanovení tečny ke křivce apod.). V tomto období byla popsána celá řada nových křivek a Lenka Lomtatidze právem nazývá období 1650 – 1750 „stoletím křivek“.[2]

Chápání křivky se v 18. století příliš nelišilo od chápání křivky ve starověku. Diderotova *Encyclopédie* z poloviny 18. století v podstatě pouze opakuje, že linie je „veličina, která je rozlehlá v délce, ale ne v šířce ani v hloubce“. Uvádí se zde, že existují dva druhy linií, křivé a přímé. Křivka je pak definována vágně jako „linie, která má v různých bodech různý směr“.

Pojem křivky měl blízko k pojmu funkce. Křivka byla chápána jako graf funkce a některé vlastnosti křivek byly přenášeny na funkce a obráceně. Předpokládalo se např., že křivka má v každém bodě (s možnou výjimkou konečného počtu bodů) tečnu a tudíž i funkce

[2] LOMTATIDZE, L. *Historický vývoj pojmu křivka.* Brno : CERM, 2007, s. 129.

musí být všude (až na případný konečný počet bodů) diferencovatelná. Nutně pak vyvstala otázka, zda lze hovořit o křivce např. i v případě grafu Weierstrassovy funkce.

Rozvoj mechaniky zdůraznil chápání křivky jako dráhy pohybujícícho se bodu. Ukázalo se, že pro kinematické pojetí rovinné křivky je výhodné považovat souřadnice x a y pohybujícího se bodu za funkce času t. Rovinná křivka tak byla popsána dvojicí rovnic

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad t \in [a, b],$$

přičemž parametr t nemusel nutně mít pouze význam času. Všechny křivky, algebraické stejně jako transcendentní, bylo možné popsat tímto způsobem. Tento přístup byl v osmdesátých letech 19. století vyjádřen v definici křivky, kterou formuloval Camille Jordan (1838 – 1922).

Podle Jordanovy definice je křivka spojitým obrazem úsečky (intervalu). Brzy se však ukázalo, že této definici vyhovují i objekty, které jsou velmi vzdálené intuitivní představě čáry. Někteří autoři se proto označení „křivka“ v tomto kontextu raději vyhýbají. O Jordanově definici, Jordanových křivkách jakož i o významu tzv. patologických křivek pojednává druhá kapitola nazvaná *Křivka jako obraz intervalu.*

Patrně prvním, kdo byl schopen představit si pod pojmem linie objekty odchylující se od běžné představy, byl Bernard Bolzano (1781 – 1848). Bolzano si položil otázku, kdy ještě lze množinu bodů považovat za linii a jaké vlastnosti jsou pro linii podstatné. Dlouho před vznikem teorie množin a topologie se pokusil formulovat obecnou geometricko-topologickou definici linie (a také plochy a tělesa). Jeho úsilí předběhlo vývoj matematiky o více než půlstoletí.

Tak, jako může být spojitým obrazem intervalu např. čtverec nebo trojúhelník, existují na druhé straně objekty, které intuitivně mají charakter linie a přesto nejsou obrazem intervalu. Klasickým příkladem je množina $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y = \sin(1/x), 0 < x \leq 1\} \cup$ $\cup \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$, která hrála v ujasňování představ o křivkách důležitou roli. Dvě zásadní otázky týkající se křivek stály před matematiky zabývajícími se teorií bodových množin na přelomu 19. a 20. století: jaké (topologické) vlastnosti charakterizují křivku a které geometrické objekty mohou být spojitým obrazem intervalu. Odpověď na druhou otázku dali nezávisle Hans Hahn (1879 – 1934) a Stefan Mazurkiewicz (1888 – 1945) a opírali se přitom o pojem lokální souvislosti.

Uspokojivou odpověď na první z uvedených otázek našli až ve dvacátých letech 20. století, opět nezávisle, Pavel Uryson (1898 – 1924) a Karl Menger (1902 – 1985). Křivka byla v podstatě v duchu Eukleidovy definice chápána jako jednorozměrné kontinuum. Formulování topologické definice křivky předpokládalo přesné vymezení pojmů kontinuum a dimenze. Teorie kontinua a teorie dimenze tak byly do značné míry motivovány studiem křivek. O pojetí křivky v teorii množin a topologii pojednává třetí kapitola nazvaná *Křivka jako kontinuum.*

Vývoj představ o křivce do značné míry přispěl ke změně nazírání na patologické objekty, uváděné většinou jako protipříklady k intuitivně očekávaným tvrzením. Tyto objekty už nebyly chápány jako výjimky a okrajové případy, nýbrž jako důležité příklady vyznačující směr dalších úvah. Byla to ovšem logika a nikoliv intuice, která otevřela těmto „monstrům“ dveře do světa matematiky.

Hahn, významný představitel Vídeňského kroužku, se v přednášce *Die Krisis der Anschauung* [3] z roku 1933 vyjádřil skepticky o relevantnosti intuice v matematice a vyslovil požadavek vyloučení intuice z matematických úvah a úplné formalizace matematiky. Hahnův logicistický postoj je do jisté míry završením programu, který o sto let dříve začal uskutečňovat Bolzano. Na nespolehlivost intuice při formulování definic a tvrzení týkajících se křivek, ploch a těles upozorňoval i Gordon T. Whyburn (1904 – 1969) v článku z roku 1942, příznačně nazvaném *What is a Curve?* [4].

Čtvrtá kapitola *Délka, míra, dimenze* se vrací k tématu délky oblouku křivky. Je v ní věnována pozornost otázkám platnosti známého vzorce vyjadřujícího délku grafu funkce a existence integrálu v něm obsaženého z hlediska teorie integrálu, kterou na přelomu 19. a 20. století vytvořil Henri Lebesgue (1875 – 1941). Budou diskutovány i další prostředky, které lze místo délky oblouku použít k vyjádření toho, jak „velkou“ část prostoru daná křivka zaujímá. Constantin Carathéodory (1873 – 1950) se zabýval zobecněním pojmu délky křivky z hlediska teorie míry a roku 1914 publikoval pojednání o jednorozměrné míře ve vícerozměrných eukleidovských prostorech. Na Carathéodoryho práci navázal Felix Hausdorff (1868 – 1942), který definoval obecnou teorii p-dimenzionální míry v n-rozměrném eukleidovském prostoru, která připouštěla i neceločíselné hodnoty p. Hausdorffova dimenze se stala základním prostředkem pro posuzování „velikosti“ tzv. fraktálů.

Výše uvedené Hahnovy myšlenky o vyloučení intuice z matematických úvah se rozšířily poté, co byl anglický překlad jeho přednášky zařazen do třetího svazku knihy *The World of Mathematics*[5]. Jedním z kritiků Hahnova postoje byl Benoît Mandelbrot (1922 – 2010), který v polovině 70. let minulého století zavedl pojem fraktálu. Mandelbrot shromáždil doklady o tom, že patologické objekty v matematice mají řadu společných znaků s tvary, které nacházíme v přírodě. Intuice podle Mandelbrota není

[3] HAHN, H. Die Krisis der Anschauung. In *Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften.* Leipzig und Wien : Franz Deuticke, 1933, s. 41–64.

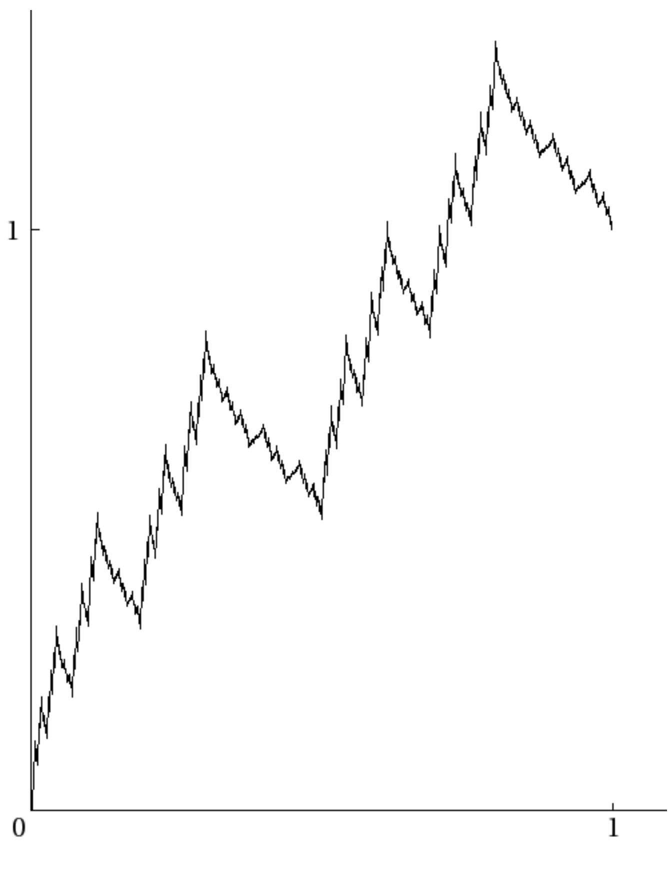
[4] WHYBURN, G. T. What is a Curve? *The American Mathematical Monthly.* 1942, vol. 49, no. 8, s. 493–497.

[5] NEWMAN, J. R. (ed.). *The World of Mathematics*, vol. 3. New York : Simon and Schuster, 1956.

neměnná, ale vztahuje se k naší zkušenosti. Představa hladké křivky není podle něj intuitivně přijatelnější než představa křivky, která v nemá v žádném bodě tečnu. Příkladem přírodního jevu, na který lze pohlížet jako na jev fraktální povahy, je Brownův pohyb.

Mandelbrot charakterizoval fraktály pomocí Hausdorffovy dimenze, ale pokusům o formální definici se spíše vyhýbal. Teorie fraktálů měla do jisté míry módní charakter, znamenala však rovněž stimulaci zájmu o matematické vlastnosti těchto objektů. Tomuto tématu je věnována poslední kapitola *Fraktální křivky.*

Práce zdaleka nemůže vyčerpat všechny aspekty daného tématu; některé zůstaly bez povšimnutí, jiné jsou zmíněny jen okrajově. Řazení témat je víceméně chronologické. Těžiště spočívá v období konce 19. a začátku 20. století, kdy krystalizování představ o křivkách bylo úzce spojeno s vývojem topologie a teorie množin.



OBR. 2: Aproximace grafu Bolzanovy funkce, který je historicky prvním popsaným fraktálem

Kapitola 1

Problém rektifikace

Rektifikací rozumíme určení délky oblouku křivky. Je to úloha, která vznikla z přirozené představy: chceme-li změřit délku křivky, musíme ji nejprve „narovnat“ (rektifikovat).[1] V úvodních kurzech analýzy na vysokých školách se studentům zpravidla dokazuje, že pokud funkce f má v intervalu $[a, b]$ spojitou derivaci, lze délku křivky $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, vypočítat pomocí vzorce

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{1.1}$$

Příkladů, na nichž se dá tato aplikace určitého integrálu začátečníkům demonstrovat, není mnoho; rektifikace může i v případě velmi jednoduchých křivek vést na integrály, které nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Tato kapitola pojednává o historii problému rektifikace od prvních úvah o určení délky kružnice ve starověku až po teorii rektifikace v analýze konce 19. století.

1.1 Rovné a křivé

V řecké filosofii byly *přímost* a *křivost* tradičně řazeny mezi základní protivy, které jsou počátkem jsoucna. Aristotelés (384 př. n. l. – 322 př. n. l.), jeden z největších myslitelů starověku, v *Metafyzice* (I, 5, 986a) vyjmenovává deset základních protiv, na nichž je podle pýthagorejců založen svět. Jednu dvojici tvoří i přímé a křivé. Ačkoliv Aristotelés zjevně považoval toto pojetí za primitivní, i on byl přesvědčen o rozdílném ontologickém statutu přímého a křivého.

Kvadratura kruhu, jeden ze tři klasických problémů starořecké geometrie, je úlohou, která obě protivy pojí dohromady. Samotný název kvadratura kruhu v sobě obsahuje

[1] Obsah této kapitoly se z části překrývá s obsahem článku [Koudela, 2010a].

představu přeměny, transmutace křivočarého útvaru v přímočarý. Přinejmenším od 5. st. př. n. l. byla kvadratura kruhu v řeckém prostředí široce rozebírána a je zmiňována hned na několika místech Aristotelova díla.

V knize *O sofistických důkazech* (11, 172b) jmenuje Aristotelés vedle Hippokrata, který se zabýval určením obsahu obrazců ohraničených oblouky dvou kružnic (tzv. Hippokratových měsíčků), ještě sofisty Antifonta a Brysóna, kteří navrhli řešení kvadratury kruhu. Jejich důkazy uvádí jako příklady eristické (klamné) argumentace. Brysónův postup je podle Aristotela nesprávný, protože používá pro řešení geometrického problému prostředků, které nepatří do geometrie. O Antifontově metodě se na jiném místě (*Fyzika* I, 2, 185a) zmiňuje pouze v tom smyslu, že zabývat se jí není úkolem matematika. O vlastní povaze postupu obou sofistů se více dozvídáme od Aristotelových pozdějších komentátorů Simplikia (*In Phys.* 55, 20 a n.) a Themistia (*In Phys.* 4, 2 a n.).

Antifontův postup je založen na postupných aproximacích obsahu kruhu pomocí obsahů vepsaných pravidelných mnohoúhelníků. Začneme např. s vepsaným čtvercem (jak ukazuje Simplikios). V dalším kroku zkonstruujeme nad každou stranou čtverce rovnoramenný trojúhelník s vrcholem uprostřed menšího oblouku kružnice nad příslušnou stranou, čímž dostaneme vepsaný osmiúhelník. Stejným způsobem pokračujeme dále. Postupné zvětšování počtu stran vepsaného mnohoúhelníku povede až k jeho splynutí s kruhem; tak budeme schopni najít čtverec, jehož obsah je roven obsahu kruhu.

Antifontova metoda předpokládá úplné vyčerpání plochy oddělující obvod kruhu od vepsaných mnohoúhelníků a vychází zřejmě z aplikace atomistických představ v geometrii [Knorr, 1986, s. 28]. Protože splynutí kruhu a mnohoúhelníku nemohlo být dosaženo konečným počtem kroků, není podle Aristotela tato metoda předmětem zájmu matematiky. Heath [1921, s. 222] naproti tomu staví Antifonta na čestné místo v historii matematiky, neboť u něj se poprvé setkáváme s představou vyčerpání obsahu pomocí posloupnosti vepsaných mnohoúhelníků, která je základem Eudoxovy exhaustivní metody a která byla později virtuózně používána Archimédem. Knorr [1986, s. 28] o původnosti Antifontova postupu pochybuje; Hippokratova metoda také předpokládá aplikaci nějaké formy limitního procesu a není pravděpodobné, že by geometr Hippokratés převzal techniku výpočtu od sofisty Antifonta. Podle Knorra je spíše pravděpodobné, že Antifón si pro svoje sofisma vypůjčil techniku, která byla v té době alespoň do jisté míry rozšířená.

Brysónovo řešení je založeno na předpokladu, že to, co může být větší nebo menší než něco jiného, může být také stejné. Existuje-li čtverec s obsahem větším, než má daný kruh (např. čtverec opsaný kruhu) a čtverec s obsahem menším (např. vepsaný čtverec), pak musí existovat i čtverec, který má stejný obsah jako daný kruh. Podle Aristotela se Brysón „odvolává na obecné mínění těch, kteří nevědí, co je možné a nemožné v daném oboru“ [Aristotelés, 1978, s. 43].

Výklady Brysónova pojetí kvadratury se u různých komentátorů poměrně liší [Knorr, 1986, s. 76–77]. Zjednodušený výklad vede např. k představě čtverce, jehož obsah je roven aritmetickému či geometrickému průměru obsahů vepsaného a opsaného čtverce. Podle některých autorů Brysón anticipoval Archimédovu metodu kvadratury založenou na posloupnosti vepsaných a opsaných mnohoúhelníků. I když nebudeme zapomínat, že Brysón byl, stejně jako Antifón, sofista, můžeme připustit, že jeho myšlenka stojí někde na počátku cesty, která mnohem později vedla v analýze k formulování věty o Darbouxově vlastnosti spojitých funkcí.

Není úplně jisté, zda Aristotelés sám připouštěl možnost kvadratury kruhu; k Antifontově, Brysónově i Hippokratově metodě se stavěl kriticky, avšak podle některých zmínek se zdá, že v zásadě považoval úlohu za řešitelnou (*Kategorie* VII, 7b). Rektifikaci kružnice, tedy nalezení úsečky stejné délky jako obvod daného kruhu, což (jak bylo později dokázáno) znamená totéž jako provedení kvadratury kruhu, však považoval za nemožnou. Ve *Fyzice* (VII, 4) se zabývá srovnatelností kruhového a přímočarého pohybu a uvádí zde [Aristotelés, 1996, s. 201]:

> Jak však tomu bude u kruhu a u přímky? Neboť by to bylo zvláštní, kdyby nebylo možné, aby se tato určitá věc pohybovala v kruhu a stejně také v přímce, nýbrž musela se nutně pohybovat buď rychleji nebo pomaleji. [. . .] Mimoto, pokud se týká důvodu, nezáleží na tom, i kdyby někdo tvrdil, že se musí ihned pohybovat rychleji nebo pomaleji; neboť potom to bude tak, že kružnice jest větší a menší než přímka, a tedy zase také stejná. Jestliže totiž v čase a jedno proběhlo dráhu b a druhé dráhu c, bylo by asi b větší než c, ježto jsme v tom smyslu pojali to, co je rychlejší. Tedy jest také rychlejší, jestliže v kratším čase vykoná stejný pohyb. A tak bude jedna část času a, v níž těleso b proběhne stejnou část kruhu, jako je dráha [c], kterou probíhá těleso c v celém čase a. Vskutku však, jsou-li srovnatelné, vyplývá to, co jsme právě řekli, že totiž některá přímka je stejná s kruhem. Ale nejsou ovšem srovnatelné, a tedy ani pohyby. (překlad A. Kříž)

I když z praktického hlediska je rektifikace křivky přirozenou úlohou, její řešení leží pro Aristotela mimo rámec matematiky. Převládajícím pravidlem při dokazování existence geometrického objektu byla jeho konstruovatelnost. Konstrukce sestávající z konečného počtu úkonů, spolu s důkazem její oprávněnosti, sloužila Řekům jako důkaz existence konstruovaného objektu [Zeuthen, 1881]. Je pravděpodobné, že Aristotelovo přesvědčení o nemožnosti porovnat kružnici a úsečku, tedy najít úsečku stejné délky jako obvod dané kružnice, má tento základ, a není nutné vyvozovat z něj snad Aristotelovo nepochopení geometrie, jak je občas naznačováno.

1.2 Archimédovo měření kruhu

Je-li obsah kruhu dělitelný bez omezení, jak byl Aristotelés přesvědčen, nemůže být vyčerpán vepisováním mnohoúhelníků s rostoucím počtem stran v konečném počtu kroků. To byla základní námitka proti Antifontově metodě popsané v předchozím odstavci.

Krokem směrem k našemu pojetí limity se stala exhaustivní metoda, objevená patrně Eudoxem a rozvinutá Eukleidem a Archimédem a určená ke stanovení obsahu rovinných obrazců a objemů prostorových těles. Exhaustivní metoda umožnila obejít výše uvedenou nesnáz logickou cestou, která předpokládala uhodnutí výsledku a jeho následné dokázání pomocí *reductio ad absurdum*. Eukleidés tuto metodu používá při dokazování vět obsažených ve XII. knize *Základů*, mezi něž patří i tvrzení XII, 2 stanovující souvislost mezi obsahem kruhu a jeho průměrem. Van der Waerden [1959, s. 256] hodnotí jeho důkaz jako obdivuhodný úspěch vědy. Je v něm zcela zřetelně obsažen moderní pojem limity: obsahy vepsaných mnohoúhelníků konvergují k obsahu kruhu v tom smyslu, že rozdíl mezi nimi může být učiněn menší než libovolná daná kladná hodnota.

Archimédés (c. 287 př. n. l. – c. 212 př. n. l.) v knize *O kouli a válci* uvádí i obecná pravidla pro porovnávání délek oblouků křivek. Nejprve definuje vydutou (konkávní) křivku jako každou křivku, která má následující vlastnost: Spojíme-li libovolné dva její body úsečkou, pak všechny body křivky leží na téže straně úsečky nebo případně na úsečce samé, ale žádný na její druhé straně. Dále uvádí Archimédés pět axiomů, z nichž první dva jsou důležité pro porovnávání délek úsečky a oblouku křivky resp. pro porovnávání délek dvou konkávních oblouků [Archimedes, 1897, s. 3–4]:

- Ze všech linií, které mají společné koncové body, je rovná čára nejkratší.
- Z jiných linií ležících v jedné rovině, které mají společné koncové body a které jsou na jednu stranu společné tětivy vyduté (konkávní) a z nichž jedna buď celá leží uvnitř mezi druhou linií a společnou tětivou nebo má s druhou linií část společnou a část umístěnou uvnitř, je kratší ta, která leží uvnitř.

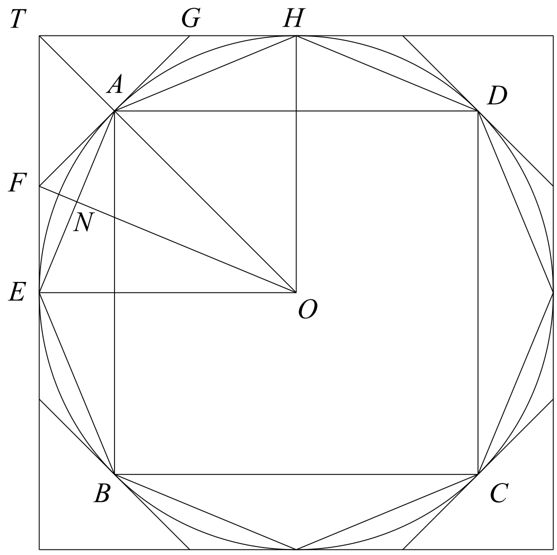
Dochovaná část Archimédovy knihy *Měření kruhu* [Archimedes, 1897, s. 91–98] obsahuje tři tvrzení, které se opírají o výše uvedené postuláty. Dvě z nich se bezprostředně vztahují k rektifikaci kružnice.

První ukazuje, že problém rektifikace kružnice lze převést na problém kvadratury kruhu (a obráceně):

> Obsah libovolného kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, v němž délka jedné odvěsny je rovna poloměru kruhu a délka druhé jeho obvodu.

Důkaz je proveden exhaustivní metodou. Označme P obsah kruhu, K obsah trojúhelníku a předpokládejme, že $P \neq K$.

Nechť nejprve $P > K$. Kružnici vepíšeme čtverec $ABCD$ (obr. 1.1; značení i ilustrace jsou převzaty z [Archimedes, 1897]). Nad každou z jeho stran sestrojíme rovnoramenný trojúhelník s vrcholem uprostřed kratšího oblouku kružnice, čímž obdržíme vepsaný osmiúhelník. Stejným způsobem postupujeme tak dlouho, dokud rozdíl mezi obsahem vepsaného mnohoúhelníku nebude menší než rozdíl $P - K$, neboli dokud obsah vepsaného mnohoúhelníku nebude větší než K. Vezmeme poté jednu z jeho stran, např. AE, a kolmici ON k této straně procházející středem kružnice. Obsah vepsaného mnohoúhelníku o n stranách je stejný jako obsah trojúhelníku s výškou ON a základnou $n \cdot AE$, tedy $n \cdot AE \cdot ON/2$. Protože ON je menší než poloměr kruhu a $n \cdot AE$ je menší než jeho obvod, je obsah vepsaného n-úhelníku menší než K, což je spor.



OBR. 1.1: K důkazu tvrzení 1 z Archimédova *Měření kruhu* [Archimedes, 1897, s. 91]

Nechť tedy $P < K$. Kružnici opíšeme čtverec a označíme T průsečík dvou jeho sousedních stran, které se dotýkají kružnice v bodech E a H. Oblouky kružnice mezi jejími průsečíky s opsaným čtvercem rozpůlíme a jejich středy vedeme tečny ke kružnici. Označíme A střed oblouku EH a FAG tečnu v A. Úhel $\measuredangle TAG$ je ovšem pravý a platí $TG > GA$, $TG > GH$. Plocha trojúhelníku FTG je větší než polovina plochy $TEAH$. Podobně rozdělíme-li oblouk AH napůl a sestrojíme tečnu v jeho středu, pak tato tečna „odstřihne“ z plochy GAH více než jednu polovinu. Pokračujeme v dělení, až bude rozdíl obsahu opsaného mnohoúhelníku a kruhu menší než $K - P$. Protože kolmice ze středu O k libovolné straně mnohoúhelníku je rovná poloměru kruhu, avšak obvod mnohoúhelníku je delší než obvod kruhu, je obsah vepsaného n-úhelníku větší než K, což je opět v rozporu s předpokladem. Protože neplatí ani $P > K$, ani $P < K$, musí platit $P = K$.

Třetí tvrzení knihy *Měření kruhu* stanovuje horní a dolní odhad pro poměr obvodu kruhu a jeho průměru. Archimédova metoda měření obvodu kruhu obsahuje inovaci: k jeho stanovení jsou použity jak vepsané, tak také opsané mnohoúhelníky.

> Poměr obvodu libovolného kruhu k jeho průměru je menší než 22/7, ale větší než 223/71.

Archimédova rektifikace představuje vrcholnou ukázku starověké početní dovednosti. Vyznačuje se zároveň logickou přesností charakteristickou pro Archimédovy výpočty, která byla vzorem pro matematiky ještě v 17. století.

1.3 Rektifikace kružnice a mechanické křivky

V antické geometrii byly jako *geometrické* křivky (linie) chápány kružnice a přímka a s jistými výhradami ještě kuželosečky; ostatní křivky byly nazývány *mechanické*, protože při jejich popisu se uplatňovala představa pohybu. René Descartes (1596 – 1650) posunul hranici mezi geometrickými a ostatními (mechanickými) křivkami dále. Mechanické křivky jsou podle Descarta takové křivky, které jsou vytvářené dvěma nezávislými pohyby, mezi nimiž nelze určit přesný vztah. Příklady mechanických křivek podle Descartovy klasifikace jsou kvadratrix, Archimédova spirála a šroubovice. Všechny tyto křivky ve starověku sloužily k řešení problému kvadratury kruhu.

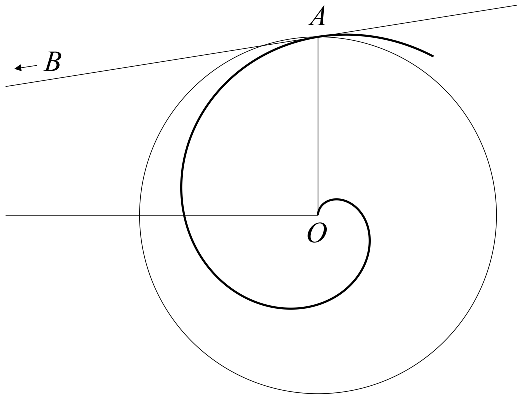
V knize *O spirálách* se Archimédés [1897, s. 151–188] zabývá rovinnou křivkou, kterou opisuje bod pohybující se rovnoměrně po průvodiči, otáčejícím se rovnoměrně kolem daného bodu (pólu). V polárních souřadnicích má tato křivka, nazývaná dnes *Archimédovou spirálou*, rovnici

$$\rho = \alpha\vartheta, \tag{1.2}$$

kde $\alpha = r/(2\pi)$, přičemž r je vzdálenost konce prvního závitu spirály od pólu (poloměr tzv. „první kružnice“ spirály). Archimédés ukazuje (tvrzení 18, 19 a 20), že tato křivka může sloužit ke stanovení obvodu kružnice (a tím i ke kvadratuře kruhu, jak plyne z tvrzení 1 v *Měření kruhu*).

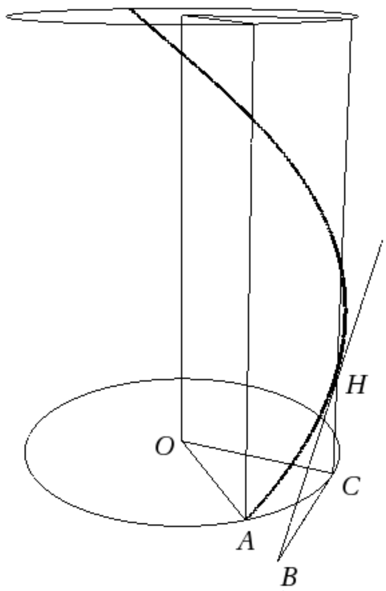
Je-li A koncovým bodem prvního závitu spirály a sestrojíme-li v tomto bodě tečnu ke spirále, pak polární subtangenta OB bude rovna obvodu „první kružnice“ (obr. 1.2). Obecně pak platí [Archimedes, 1897, s. 174]: Je-li A bod n-tého závitu spirály, p obvod kružnice se středem O a poloměrem OA, K průsečík této kružnice s průvodičem v počáteční poloze a B průsečík tečny vedené ke spirále v bodě A a přímky kolmé k OA, pak

$$OB = (n-1)p + \overline{KA}, \tag{1.3}$$



OBR. 1.2: Stanovení délky „první kružnice“ Archimédovy spirály

přičemž oblouk[2] $\overline{KA}$ je měřen „dopředu“. Toto tvrzení bychom v modernější podobě mohli formulovat takto [Heath, 1921, s. 231]: Je-li $\rho = \alpha\vartheta$ rovnice spirály v polárních souřadnicích, pak pro polární subtangentu OB platí $OB = \rho^2/\alpha$.



OBR. 1.3: Šroubovice

Jinou křivkou definovanou pomocí dvou nezávislých pohybů je *šroubovice* (helix). Je to prostorová křivka, kterou opisuje bod, pohybující se rovnoměrně podél hrany obdélníku, rotujícího kolem osy procházející protilehlou hranou.

[2] Symbolem s vodorovnou linkou nahoře (která z typografických důvodů dostala přednost před obloučkem) budeme v celé kapitole rozumět oblouk.

Způsob, jakým mohla být šroubovice použita k rektifikaci oblouku kružnice, popisuje Heath [1921, s. 232]. Jestliže v libovolném bodě H šroubovice sestrojíme tečnu a označíme B její průsečík s rovinou OAC (ve které leží podstava válce, po jehož povrchu se pohybuje bod opisující šroubovici), pak průmět úsečky HB do roviny OAC má délku shodnou s délkou oblouku $\overline{AC}$ (obr. 1.3). Knorr [1986, s. 166–167] se domnívá, že šroubovice posloužila Archimédovi na heuristické úrovni k nalezení těch vlastností spirály, které se týkají rektifikace kružnice.

Další speciální křivkou, kterou lze využít k rektifikaci kružnice, je *kvadratrix*. Pappos [1876, s. 252–253] uvádí, že

> ke kvadratuře kruhu použili Nikomédés, Deinostratos a někteří další geometři jistou křivku, která byla pojmenována podle této vlastnosti.

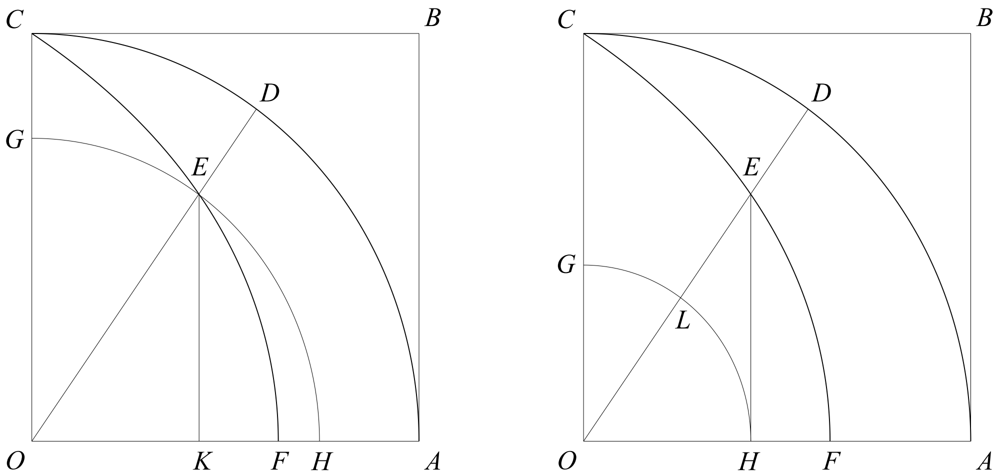
Kvadraturu kruhu lze stejně jako v případě spirály provést na základě rektifikace oblouku kružnice. Dokážeme, že délka oblouku kružnice $\overline{ADC}$ je ve stejném poměru k délce úsečky OC, jako OC ku OF, tedy že platí

$$\frac{\overline{ADC}}{OA} = \frac{OA}{OF}. \tag{1.4}$$

Důkaz využívá *reductio ad absurdum* [Heath, 1921, s. 227–229]. Předpokládáme nejprve, že platí $\overline{ADC} : OA < OA : OF$, tedy že existuje bod H takový, že $\overline{ADC} : OA = OA : OH$, přičemž $OH > OF$ (obr. 1.4 vlevo). Kolem bodu O opíšeme kružnici s poloměrem OH, která protne kvadratrix v bodě E. Sestrojíme kolmici EK a protáhneme úsečku OE do bodu D. Protože obvody kruhu jsou ve stejném poměru jako jejich průměry, platí $\overline{ADC} : OA = OA : OH = \overline{ADC} : \overline{GEH}$. Z toho pak plyne, že $\overline{GEH} = OA$. Vzhledem k vlastnostem kvadratrix rovněž platí, že $OC : EK = \overline{ADC} : \overline{AD} = \overline{GEH} : \overline{EH}$; to ale vede ke sporu, neboť pak by muselo platit také $\overline{EH} = EK$, což není možné.

Předpokládejme nyní $\overline{ADC} : OA > OA : OF$, tedy že existuje bod H takový, že $\overline{ADC} : OA = OA : OH$, přičemž $OH < OF$ (obr. 4 vpravo). Opíšeme kolem bodu O opět kružnici s poloměrem OH, v bodě H vztyčíme kolmici, která protne kvadratrix v bodě E a úsečku OE prodloužíme do D. Stejně jako prve se ukáže, že musí platit $\overline{GLH} = OA$ a vzhledem k vlastnostem kvadratrix také $\overline{ADC} : \overline{AD} = OC : EH$ a tudíž i $\overline{LH} = EH$, což není možné. Jedinou zbývající možností je tedy $\overline{ADC} : OC = OC : OF$, což jsme měli dokázat.

Pappos podává zprávu i o námitkách jistého Spora, které ukazují na slabiny výše uvedeného postupu. První námitka je založena na tom, že k tomu, abychom nechali pohybovat jeden bod po kružnici a druhý po úsečce a tyto pohyby aby byly v takovém



OBR. 1.4: Rektifikace kružnice pomocí kvadratrix [Heath, 1921, s. 228]

vzájemném poměru, že oba body dosáhnou konců svých drah ve stejném okamžiku, potřebovali bychom nejprve znát poměr poloměru kružnice ke čtvrtině jejího obvodu, tedy jinými slovy popis křivky předpokládá účel, pro který byla sestrojena. Druhá námitka se týká průsečíku kvadratrix s úsečkou CD, který není znám, neboť obě pohybující se úsečky na konci své dráhy splynou a neprotínají se tak v jednom bodě. Abychom jej mohli nalézt, museli bychom opět předpokládat znalost poměru poloměru kružnice ke čtvrtině jejího obvodu.

V první námitce zaznívá opět Aristotelovo tvrzení o nemožnosti porovnat přímočarý a křivočarý pohyb. Poloha bodu G, která je předmětem druhé námitky, by mohla být určena exhaustivní metodou s libovolnou zvolenou přesností, ale v tom případě se jedná opět o přibližnou metodu, jakou použil i Archimédés v *Měření kruhu*.

1.4 Pokusy, úspěchy a omyly

Od konce 15. a začátku 16. století pozorujeme v evropském myšlení sílící opozici vůči aristotelismu a středověké scholastické filosofii. Souběžně s tím roste v matematice zájem o dílo Archiméda, jehož knihy jsou vydávány v latinských překladech. Stále významnější roli začínají hrát infinitezimální techniky, jejichž použití má, alespoň zpočátku, spíše heuristický charakter.

Mancosu [1996, s. 34 a n.] poukazuje na to, že dříve rozšířená víra v existenci *horror infiniti* u řeckých geometrů není zcela opodstatněná a že užívání infinitezimálních technik na heuristické úrovni bylo i ve starověku poměrně rozšířené. V řecké geometrii však nebylo přípustné činit tyto metody součástí formálního dokazování. Neformální postupy Archiméda a dalších v 17. století známy nebyly a infinitezimální techniky tak byly vlastně znovu objevovány. Některé postupy přitom byly zcela nové, stejně jako snaha učinit z těchto metod legitimní součást formálního důkazu.

Johannes Kepler (1571 – 1630) byl jedním z prvních, kteří vyvíjeli nové techniky, ležící mimo rámec formálních postupů řeckých geometrů [Mancosu, 1996, s. 38]. Kepler přijal učení Mikuláše Kusánského (1401 – 1464) a opíral se o představu geometrické spojitosti, podle níž není podstatného rozdílu mezi přímými a zakřivenými liniemi [Boyer, 1949, s. 110]. Vztah mezi nimi lze podle Keplera vyjadřovat kvantitativně. Infinitezimální úvahy rozvíjel Kepler zejména ve spise *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615), ve kterém se zabýval výpočtem objemů rotačních těles chápaných jako nekonečné soubory nekonečně malých částí.

Až do Keplerovy doby měla v astronomii výlučné postavení kružnice jako dráha pohybujících se nebeských těles. Teprve s Keplerovými výsledky se toto paradigma začalo měnit. Ve spise *Astronomia nova* (1609) se objevila představa Marsu obíhajícího kolem Slunce po eliptické dráze. Kepler se zde zabýval i geometrickými vlastnostmi elipsy a stanovil přibližnou hodnotu jejího obvodu jako aritmetický průměr obvodu kruhu s poloměrem rovným delší poloose a obvodu kruhu s poloměrem rovným kratší poloose [Kepler, 1860, s. 401]. Obvod elipsy $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ by tak byl přibližně roven $\pi(a+b)$.

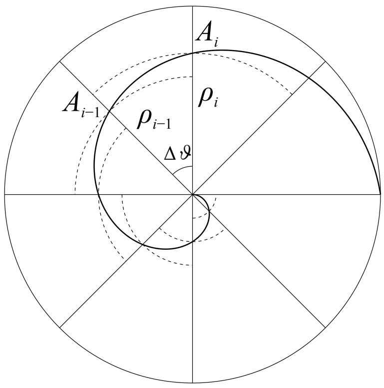
Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) vyvinul metodu indivisibilií v průběhu dvacátých let 17. století a publikoval ji roku 1635 v obsáhlém díle *Geometria indivisibilus continuorum nova quadam ratione promota*. Výkladem metody se zabývá i jeho další kniha *Exercitationes geometricae sex* (1647), která obsahuje také obhajobu Cavalieriho metody před kritikou, vznesenou vůči ní v předcházejících letech.

Cavalieri svou metodu představuje ve dvou verzích. První je obsažena v prvních šesti knihách *Geometrie indivisibilus* a je založena na představě rovinného obrazce tvořeného nekonečným počtem úseček (linií) a porovnávání systémů „všech linií“ různých obrazců (podobně těleso je tvořeno nekonečným systémem rovinných obrazců). Cavalieri si byl vědom koncepčních potíží spojených s chápáním rovinných obrazců a prostorových těles jako nekonečných systémů nedělitelných prvků. Druhá verze metody indivisibilií je obsažena v sedmé knize *Geometrie indivisibilus* a je založena na „distributivním“, nikoli „kolektivním“ chápání „všech linií“ [Mancosu, 1996, s. 48]. Sedmá kniha obsahuje v úvodu proslulý Cavalieriho princip a jsou v ní přeformulována některá tvrzení předchozích knih na novém základě.

Zásadní námitky proti Cavalieriho metodě (v obou jejích verzích) vznesl Paul Guldin (1577 – 1643). Guldin pocházel z protestantské rodiny, ale konvertoval ke katolictví a vstoupil do jezuitského řádu, kde získal matematické vzdělání. Jeho nejdůležitějším dílem je *De centro gravitatis* (zkráceně nazývané *Centrobaryca*), které vyšlo ve čtyřech knihách v letech 1635 – 1641. Metodu indivisibilií kritizoval Guldin z pozice stoupence tradičního přístupu ke geometrii. Byl skeptický k úvahám o nekonečnu a atomistické teorii kontinua a dával přednost konkrétním řešením a explicitním konstrukcím [Mancosu, 1996, s. 56].

Guldinův hlavní cíl byl ovšem mnohem ambicióznější: přeformulovat základy geometrie tak, aby neobsahovaly nepřímé důkazy. Proti exhaustivní metodě i Cavalieriho indivisibiliím postavil Guldin metodu založenou na vlastnostech těžiště rovinných obrazců a prostorových těles. Tzv. Guldinovo pravidlo je sice obsaženo již v Pappově *Sbírce*, ale obvinění z plagiátorství, vznesené později proti Guldinovi, je v současné době považováno za neopodstatněné. Cavalieri v polemice s Guldinem poukazoval na to, že jediný přímý důkaz Guldinova pravidla je založen na indivisibiliích a že jeho metoda je tedy hlubší než Guldinova. Přímý důkaz je tak podle Cavalieriho podmíněn připuštěním indivisibilií [Mancosu, 1996, s. 61].

Cavalieri se soustředil na vyšetřování obsahů rovinných obrazců a objemů těles. Guldin se ve druhé knize zabýval i vyšetřováním délky oblouku Archimédovy spirály a elipsy. V případě spirály (popsané rovnicí (1.2)) dospívá k závěru, že délka jejího prvního závitu je rovna polovině obvodu „první kružnice“ [Guldin, 1640, s. 39 a n.]. Jeho úvaha spočívala ve stanovení horního a dolního odhadu délky oblouku spirály pomocí systémů opsaných a vepsaných oblouků kružnic.



OBR. 1.5: Guldinovo chybné stanovení délky prvního závitu Archimédovy spirály

Guldin předpokládal, že (zapsáno moderním způsobem, viz též [Zeuthen, 1903, s. 293]) rozdělíme-li úhel 2π na n stejných dílů $\Delta\vartheta = 2\pi/n$ a bude-li l_i délka oblouku spirály mezi body A_{i-1} a A_i (obr. 1.5), platí pro každé $i = 1, \ldots, n$

$$\rho_{i-1}\Delta\vartheta < l_i < \rho_i\Delta\vartheta. \tag{1.5}$$

Protože zvětšováním počtu dílů můžeme vždy dosáhnout toho, že rozdíl mezi levou stranou a pravou stranou (1.5) bude menší než libovolná daná kladná hodnota, platí podle Guldina pro délku prvního závitu spirály $l = \pi r$ (jedná se vlastně o hodnotu integrálu $\int_0^{2\pi} \rho\, d\vartheta$; Guldin tento výsledek dokazuje pomocí *reductio ad absurdum*).

Výsledek je ovšem nesprávný, neboť druhá nerovnost v (1.5) neplatí. Sám Guldin uvedl v další části knihy opravu. Nesprávnost předpokladu ukázal numericky na příkladu dělení kruhu na 12 stejných dílů; délku spirály při tom aproximoval vepsanou lomenou čárou. Podobně postupoval při numerickém odhadu délky elipsy.

Vedle infinitezimálních technik se postupně v matematice v 17. století prosazuje i užívání analytických metod. Hlavním představitelem algebraizace geometrie je Descartes, jehož *Géométrie* vyšla nejprve francouzsky roku 1637 jako příloha *Discours de la méthode*. Rozšířila se především díky latinskému překladu van Schootena vydanému poprvé roku 1649 a podruhé o deset let později spolu s příspěvky dalších autorů.

Descartes byl především filosofem; jeho racionalismus se stal základem světového názoru opírajícího se o přírodní vědy, který na dlouhou dobu výrazně ovlivnil postoj člověka k přírodě a jejímu poznávání.

V souvislosti s rektifikací křivek je často citován Descartův výrok o nemožnosti porovnávat přímé a zakřivené linie, v němž znovu zaznívá aristotelské dogma o jejich rozdílné povaze [Mancosu, 1996, s. 77–78]. Descartes byl obeznámen s infinitezimálními technikami, považoval je však (na rozdíl od algebraických metod) za nepřesné. Příkladem může být Descartovo řešení kvadratury kruhu. Jeho postup vychází z daného čtverce a pokračuje konstrukcí posloupnosti obdélníků, jejichž základny vytvářejí úsečku, jejíž délka se s rostoucím počtem kroků blíží průměru kruhu s obvodem rovným obvodu daného čtverce. M. Cantor [1900, s. 853] nazval jeho postup „arkufikací čtverce“.

Dokladem o tom, že Descartes, alespoň v případě mechanických křivek, nepovažoval délku oblouku a délku úsečky za různorodé veličiny, je jeho popis vlastností logaritmické spirály v dopise Mersennovi z 12. září 1638. Descartes [1897, s. 360] si povšiml, že poměr délky oblouku mezi pólem a daným bodem spirály a délky průvodiče tohoto bodu je konstantní a dále že úhel, který svírá tečna s průvodičem, je také konstantní.

Rektifikaci logaritmické spirály provedl Evangelista Torricelli (1608 – 1647) někdy v průběhu čtyřicátých let 17. století. Pouze tři práce Torricelliho o geometrii byly publikovány za jeho života pod titulem *Opera geometrica* (1644). Řada jeho prací zůstala v rukopise a byla vydána až mnohem později. Spis *De infinitis spiralibus* je obsažen v Torricelliho spisech vydaných při příležitosti třístého výročí narození „toskánského Archiméda“ [Torricelli, 1919, s. 349–359].[3]

[3] Revidovaná verze vyšla znovu se souběžným italským překladem a komentářem Ernesta Carruccia v roce 1955 [Torricelli, 1955].

Při určování délky oblouku pracuje Torricelli s lomenou čárou vepsanou a opsanou spirále, z nichž první je kratší a druhá delší než odpovídající oblouk spirály (na základě Archimédova postulátu, který však Torricelli explicitně nezmiňuje). Protože rozdíl mezi délkou opsané čáry a vepsané čáry může být menší než délka libovolné zadané úsečky, tím spíše to platí o délce oblouku spirály a délce vepsané čáry, kterou Torricelli dokáže určit. Výsledek Torricelli dokazuje pomocí *reductio ad absurdum*, přesně v duchu důkazů prováděných starořeckými geometry.

Několik desetiletí před Torricellim se stanovením délky oblouku logaritmické spirály zabýval Thomas Harriot (1560 – 1621). Harriot se v 80. letech 16. století zúčastnil Raleighovy výpravy do Nového světa a strávil nějakou dobu v anglické kolonii na ostrově Roanoke. K zájmu o logaritmickou spirálu jej přivedlo studium problémů souvisejících s navigací při mořeplavbě. Podle Peppera [1968] se Harriot zabýval rektifikací logaritmické spirály již v devadesátých letech 16. století a na základě aproximace oblouku spirály lomenou čárou dospěl zřejmě k obecnému řešení odpovídajícímu rovnici $l = r/\cos\alpha$ pro délku l oblouku spirály $\rho = e^{\vartheta \operatorname{cotg} \alpha}$ mezi daným bodem s průvodičem r a pólem (viz též [Koudela, 2010a, s. 157–159]). Jedná se o první historicky doložený pokus o rektifikaci oblouku jiné křivky než kružnice. I Harriotovy výsledky však zůstaly pouze v rukopise a neměly vliv na další vývoj matematiky.

Descartovo přesvědčení o rozdílné povaze křivek a přímek mohlo souviset s jeho rozlišováním geometrických a negeometrických křivek (domnívá se tak např. Bos [1981]). Existenci podstatného rozdílu mezi algebraickými a mechanickými křivkami z hlediska určení délky oblouku však zpochybnilo porovnání délky oblouku paraboly a Archimédovy spirály, tedy algebraické a mechanické křivky.

Tvrzení, že délka prvního závitu Archimédovy spirály je rovna délce oblouku paraboly, jejíž základna je rovna poloměru a osa polovině obvodu „první kružnice“, se objevilo ve spise *Cogitata physico-mathematica*, jehož autorem byl minorita, vědec a spojující činitel evropských učených kruhů Marin Mersenne (1588 – 1648). Mersenne [1644, s. 129–131] výsledek připsal svému příteli Robervalovi. Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675), který zastával prestižní postavení na Collège Royal, publikoval málo a svoje metody tajil. Při studiu křivek využíval představu dráhy pohybujícího se bodu jako výsledku skládání jednoduchých pohybů. Korektní důkaz Robervalova tvrzení ve stylu řeckých geometrů podal Blaise Pascal (1623 – 1662) v roce 1658.

Autorem původní myšlenky byl však zřejmě Thomas Hobbes (1588 – 1689), anglický filosof, jehož názory na uspořádání společnosti měly později vliv na osvícenství. Royalista Hobbes se v roce 1641 uchýlil do pařížského exilu, kde navázal kontakt s intelektuálními kruhy kolem Mersenna. Jeho zájmy zahrnovaly i geometrii a sám se pokusil formulovat metodu studia křivek na základě analýzy pohybů [Jesseph, 1999, s. 119 a n.].

Hobbes se pokusil vytvořit ucelený materialistický systém popisu světa, v jehož rámci vykládal matematiku na základě pojmů rozlehlosti a pohybu. Jeho kritický postoj k teorii indivisibilií a Descartově analytické metodě byl alespoň do jisté míry oprávněný, jeho marné pokusy o kvadraturu kruhu jej však ve světě velké matematiky diskvalifikovaly.

Hobbes definoval linii (přímou i zakřivenou) kinematicky (viz odst. 3.1). Ve svém spise *De corpore* (lat. 1655, angl. o rok později) chybně odvodil na základě kinematické analýzy délku oblouku paraboly. Je otázkou, zda jeho výsledek měl nějaký vliv na úspěšné rektifikace, které byly provedeny v době bezprostředně následující.

1.5 Curvarum rectificatio

Ve druhé polovině padesátých let 17. století došlo k několika událostem, které rektifikaci posunuly do středu zájmu předních matematiků té doby. V roce 1656 vyšla Wallisova *Arithmetica infinitorum*, v níž byla naznačena možnost řešení rektifikace některých křivek. O dva roky později vyšla Pascalova *Histoire de la Roulette*, která oznamovala Wrenovu rektifikaci oblouku cykloidy. Roku 1659 vyšlo druhé latinské vydání Descartovy *Géométrie* s van Heuraetovým obecným řešením problému rektifikace konkávního oblouku a krátce poté i Wallisův spis *Tractatus duo* s dodatkem obsahujícím popis rektifikací několika křivek.

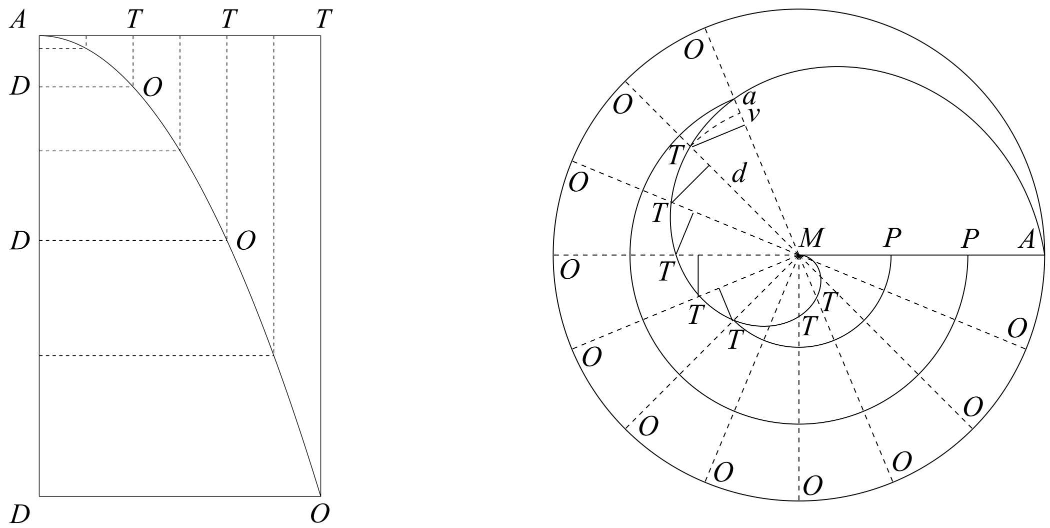
John Wallis (1616 – 1703), který déle než půl století zastával místo saviliánského profesora geometrie na oxfordské univerzitě, je bezesporu jednou z nejvýraznějších postav matematiky 17. století. Za jeho nejvýznamnější dílo je obecně považována *Arithmetica infinitorum* pojednávající o uplatnění aritmeticko-algebraických metod při řešení geometrických problémů, zejména určování obsahů rovinných obrazců a objemů těles.

Hlavním inspiračním zdrojem pro spis *Arithmetica infinitorum* byla Cavalieriho metoda, s níž se Wallis seznámil prostřednictvím Torricelliho geometrických prací. Wallis pochopil, že metoda indivisibilií otevírá nové možnosti při vyšetřování vlastností geometrických objektů. Jeho vlastním příspěvkem bylo nalezení způsobu, jak vyjadřovat myšlenky metody indivisibilií aritmeticky prostřednictvím nekonečných řad.

Ve scholiu (komentáři) k tvrzení 38 Wallis [1656, s. 28–31] zdůrazňuje, že přímka a křivka nejsou různorodými geometrickými objekty a délky úsečky a oblouku křivky mohou být vzájemně porovnány. Dále je ukázáno, že může být nalezena úsečka délky „téměř rovné“ [4] délce oblouku paraboly.

[4] „quam proxime“; Jacqueline Stedallová v anglickém vydání [Wallis, 2004, s. 36] překládá „as close as one wishes“.

Na obr. 1.6 je parabola, jejíž rovnice by podle dnešních zvyklostí měla tvar $a^2y = x^2$ (pokud bychom soustavu souřadnic volili tak, aby počátek byl v bodě A a aby osa y mířila dolů). Body $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$ na ose x vedeme rovnoběžky s osou y. Jejich ordináty budou mít hodnoty $1, 4, 9, 16, \ldots$ a jejich rozdíly budou tvořit aritmetickou posloupnost $1, 3, 5, 7, \ldots$ Úseky lomené čáry vepsané parabole budou mít délky $\sqrt{a^2+1}$, $\sqrt{a^2+9}$, $\sqrt{a^2+25}, \ldots$ Lomená čára má ovšem délku menší než parabola, může však aproximovat její délku tím lépe, čím menší je dané a.



OBR. 1.6: Stanovení délky oblouku ve Wallisově spise *Arithmetica infinitorum*

Podobně by podle Wallise bylo možné stanovit délku oblouku kubické či bikvadratické paraboly.

Další křivkou, na které Wallis demonstruje svou metodu, je Archimédova spirála ($\rho = \alpha\vartheta$, $\vartheta \in [0, \vartheta_1]$). Interval $[0, \vartheta_1]$ rozdělíme na n stejných částí $\Delta\vartheta$; každé z nich bude odpovídat stejný přírůstek průvodiče a. V bodě T spustíme kolmici k následujícímu průvodiči. Je-li d průměr kružnice procházející bodem T se středem totožným s pólem spirály, je druhá mocnina délky úseku TT lomené čáry vepsané spirále rovna podle Pýthagorovy věty $((1/2)d \sin \Delta\vartheta)^2 + (a+v)^2$ (první člen nazývá Wallis „sinus rectus“, v v druhém členu je „sinus versus“; obr. 1.6 odpovídá původní ilustraci, symboly a, v, d jsou doplněny). Platí $((1/2)d \sin \Delta\vartheta)^2 = v(d-v)$, dostáváme tedy $vd - v^2 + v^2 + 2av + a^2 = = vd + 2av + a^2$. Poměr $v : d$ je konstantní, položíme jej rovným $1 : m$. Potom je poslední výraz roven $v^2m + 2va + a^2$. Hodnoty v tvoří aritmetickou posloupnost; kdyby se jednalo např. o posloupnost $0, 1, 2, 3 \ldots$, budou úseky vepsané čáry rovné $\sqrt{0 \cdot m + 0 \cdot a + a^2}$, $\sqrt{1 \cdot m + 2 \cdot a + a^2}$, $\sqrt{4 \cdot m + 4 \cdot a + a^2}$, $\sqrt{9 \cdot m + 6 \cdot a + a^2}$ atd. Čím větší bude počet dílů, na něž je interval rozdělen, tím lepší aproximaci délky oblouku dostaneme. Wallis zdůrazňuje, že délka vepsané lomené čáry je vždy menší než délka oblouku a ukazuje, jakým způsobem lze zároveň stanovit horní odhad.

Wallis tedy popsal rektifikaci jako úlohu v zásadě proveditelnou, ačkoliv k žádnému konkrétnímu výsledku nedospěl.

Spis *Tractatus duo* [5] z roku 1659 sestává ze dvou částí a dodatku. První část spisu, která se zabývá vlastnostmi cykloidy, je reakcí na Pascalovu soutěž [6]; druhá část je věnována vlastnostem kisoidy. Z hlediska problému rektifikace je důležitý dodatek, který reaguje na van Heuraetův objev rektifikace. Wallis v něm úlohu vůbec poprvé pojmenovává: v analogii k označení kvadratura volí pro určení délky oblouku křivky řecké označení euthunsis, které má tentýž význam jako latinské rectificatio (narovnání, tedy rektifikace).

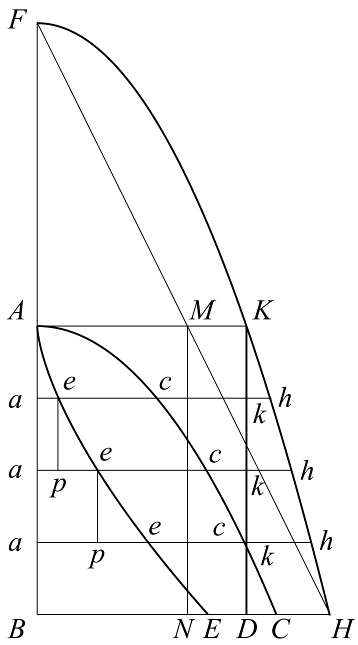
Wallis [1659, s. 91] uvádí, že první rektifikaci provedl William Neil (1637 – 1670) v červenci nebo srpnu roku 1657; jednalo se o určení délky oblouku semikubické paraboly (tedy křivky dané rovnicí $y^2 = ax^3$). Stejným problémem se po něm zabýval i William Brouncker (1620 – 1684) a sám Wallis.

Neilovo řešení se opíralo o stejnou myšlenku jako Wallisovy úvahy o rektifikaci v knize *Arithmetica infinitorum*, tedy chápání křivky jako infinitezimálně lomené čáry, avšak výsledek byl získán čistě geometrickou cestou. Řešení je založeno na nalezení pomocné křivky, jejíž kvadraturu umíme provést; obsah plochy ohraničené obloukem křivky chápe Neil jako součet obsahů obdélníků s nekonečně malou základnou a délku křivky jako součet nekonečně mnoha nekonečně krátkých úseček [Koudela, 2010b].

Wallis [1659, s. 93] publikoval i Brounckerovo algebraické řešení téhož problému. Na obr. 1.7 je překreslena původní ilustrace včetně značení; body ležící mezi koncovými body uvažovaných čar jsou označovány stejnými písmeny. K dané parabole AcC sestrojíme křivku AeE tak, aby obsah parabolických segmentů ABC a Aac pro libovolný bod a byl ve stejném poměru jako délky úseček BE a ae. Označíme-li ve shodě s Brounckerem

[5] Úplný název je *Tractatus duo, Prior de Cycloide et corporibus inde genitis, Posterior Epistolaris in qua agitur de Cissoide et corporibus inde genitis, et de curvarum tum linearum euthunsis, tum superficierum platuomo* .

[6] Marguerite Perrierová v životopise Pascala vypráví, že v roce 1658 postihla Pascala silná bolest zubů spojená s nespavostí. Aby odvrátil své myšlenky od úporné bolesti, zaměstnal se Pascal geometrickými úvahami a během několika dní vyřešil řadu problémů, týkajících se cykloidy. Své náboženské dílo považoval za přednější, ale zároveň cítil potřebu svým názorovým oponentům předvést hloubku svého ducha a ukázat, že rozumí důkazům lépe než jiní. Rozeslal proto výzvu k soutěži francouzským i zahraničním matematikům v podobě okružního listu se seznamem šesti problémů týkajících se vlastností cykloidy. Protivníkům byla dána lhůta tří měsíců a pro vítěze byla určena finanční odměna. Na výzvu reagovali Wallis a Lalouvère, cena však udělena nebyla. Pascal sám později publikoval pod pseudonymem Amos Dettonville (anagram jména Louis de Montalte, které bylo připojeno ke druhému vydání Pascalových *Listů venkovanovi*) svá vlastní řešení ve formě dopisu Carcavymu a v témže roce uveřejnil i pojednání o historii cykloidy. Bez ohledu na pochybnosti o regulérnosti soutěže je jisté, že se Pascalovi podařilo vyvolat o cykloidu velký zájem. Svědčí o tom i Wrenova rektifikace oblouku cykloidy, i když tato úloha nebyla do soutěže zařazena. [Pascal, 1914, s. 337 a n.]



OBR. 1.7: Brounckerova rektifikace oblouku semikubické paraboly [Wallis, 1659, s. 93]

$a = AB$, $b = BC$ a $c = BE$, pak poměr délky oblouku $\overline{AeE}$ a úsečky AB je roven

$$\frac{(9c^2 + 4a^2)\sqrt{9c^2 + 4a^2} - 8a^3}{27ac^3}. \tag{1.6}$$

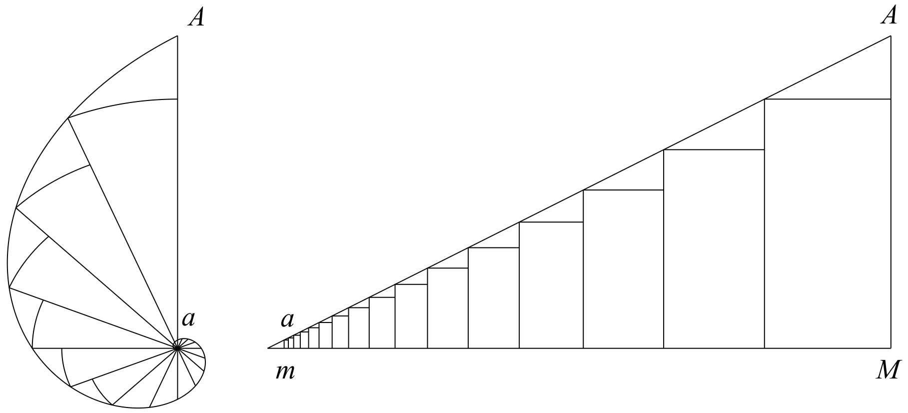
Brounckerův postup je v podstatě shodný s Neilovým, výsledek ale Brouncker vyjadřuje algebraickými prostředky. Využívá při tom znalosti kvadratury parabolického segmentu.

Spis *Tractatus duo* obsahuje i detailní popis rektifikace základního oblouku cykloidy, kterou provedl Wren [Wallis, 1659, s. 73 a n.]. Christopher Wren (1632 – 1723) se do historie zapsal především jako architekt, matematice se věnoval spíše okrajově. Rektifikací cykloidy si však vysloužil uznání předních matematiků své doby, ať už to byli Pascal či Wallis nebo později Newton [1686, s. 20], který Wrena spolu s Wallisem a Huygensem zařadil mezi nejvýznamnější geometry své doby.

Wren aproximuje délku oblouku cykloidy pomocí tzv. pilovitých lomených čar (*polygona serrata*) opsaných a vepsaných tvořící kružnici cykloidy a opírá se přitom o znalost konstrukce tečen k cykloidě a Archimédův postulát. Tvrzení, že délka základního oblouku cykloidy je rovna čtyřnásobku průměru tvořící kružnice, dokazuje sporem. Jedná se o poměrně komplikovanou, ale elegantní ukázku exhaustivní metody [Koudela, 2010a, s. 162–164].

Vedle Archimédovy spirály, kterou se zabýval již v knize *Arithmetica infinitorum*, popisuje Wallis ve spise *Tractatus duo* rovněž konstrukci a vlastnosti logaritmické spirály

[Wallis, 1659, s. 106–107]. Tvoří-li středové úhly aritmetickou posloupnost, je poměr délek každých dvou po sobě jdoucích průvodičů konstantní. Nahradíme-li pro malé $\Delta\vartheta$ oblouk spirály úsečkou, bude délka oblouku spirály mezi pólem a bodem A stejná jako délka přepony pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je shodná s průvodičem bodu A a úhel u vrcholu A odpovídá úhlu, který tečna spirály svírá s průvodičem. Spirála může být tedy „narovnána“ roztažením podél tečny až po její subtangentu (obr. 1.8). Wallis si všímá i paradoxního závěru, že oblouk tvořený nekonečným počtem závitů má konečnou délku.



OBR. 1.8: Wallisovo určení délky oblouku logaritmické spirály [Wallis, 1659, s. 106]

Wallis byl prvním, kdo o logaritmické spirále něco publikoval, neboť Torricelliho práce o spirále vyšla až ve 20. století a Descartův dopis Mersennovi byl vydán tiskem poprvé v roce 1667. Wallis zřejmě s pracemi svých předchůdců, kteří se logaritmickou spirálou zabývali, obeznámen nebyl.

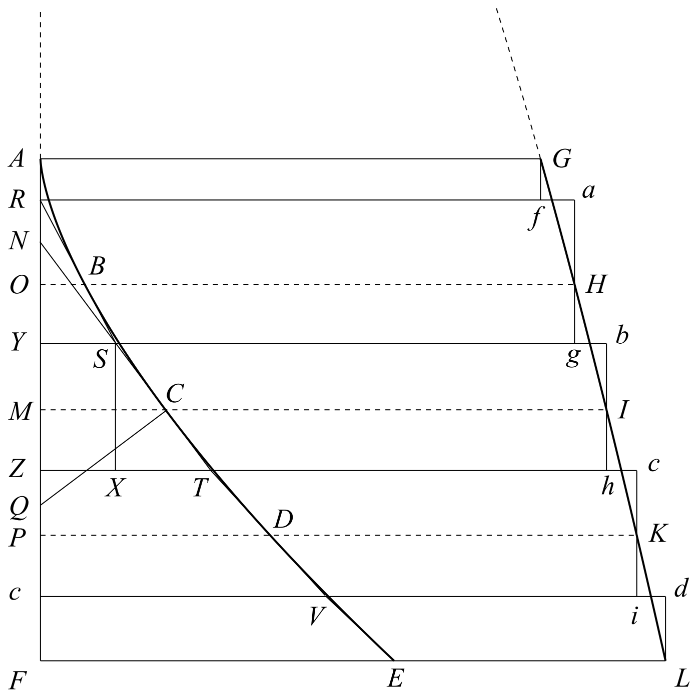
Wallis koncipoval dodatek ke spisu *Tractatus duo* jako dopis Huygensovi. Uzavírá jej následujícími slovy [Wallis, 1659, s. 121]:

> Toto je tedy, šlechetný pane, několik příkladů naší metody porovnávání křivek a přímek (nebo spíše narovnávání linií a zakřivených ploch), mezi nimiž (jak jsi viděl) byly jednak Tebou zmíněné objevy a jednak některé jiné. Byl bych připojil ještě další, ale nechtěl jsem, aby se z mého dopisu stala kniha.

1.6 Prestižní záležitost

Nepočítáme-li Fermatův příspěvek, byl spor o první úspěchy při řešení problému rektifikace na začátku druhé poloviny 17. století veden hlavně po anglo-holandské linii. Wallis v dopise Huygensovi ve spise *Tractatus duo* reagoval mj. na objev obecné metody rektifikace konkávních křivek Huygensova krajana Hendrika van Heuraeta (1633 – 1660).

V Holandsku se Descartovým myšlenkám dostalo příznivého přijetí. Druhé vydání van Schootenova latinského překladu *Géométrie*, které vyšlo v roce 1659 a kterým se Descartova metoda zřejmě definitivně prosadila, obsahovalo vedle van Schootenova komentáře i několik kratších pojednání, která rozvíjela metodu studia křivek a jejich vlastností algebraickými prostředky. Mezi jejich autory byl rovněž van Heuraet, který v pojednání [van Heuraet, 1659] ukázal obecnou metodu rektifikace konkávní křívky a příkladem, na němž svou metodu demonstroval, byla opět semikubická parabola.



OBR. 1.9: Rektifikace semikubické paraboly podle van Heuraeta [1659, s. 518]

K dané křivce $ABCDE$ a úsečce Σ sestrojíme další křivku $GHIKL$ tak, aby platilo

$$\frac{MC}{CQ} = \frac{\Sigma}{MI}, \tag{1.7}$$

kde MC je ordináta bodu C a CQ normála k první křivce v témže bodě (obr. 1.9, původní značení je zachováno). Potom délka křivky $ABCDE$ bude číselně rovna obsahu plochy ohraničené křivkou $GHIKL$ a úsečkami AF, AG a FL, dělené délkou Σ.

Van Heuraetova metoda je založena, podobně jako Neilovo řešení, na představě křivky jako infinitezimálně lomené čáry a převedení problému rektifikace na problém kvadratury pomocné křivky. Van Heuraet nečiní žádné předběžné předpoklady o křivce $ABCDE$, jeho postup ale předpokládá existenci tečny v každém jejím bodě. Budeme-li křivku $ABCDE$ považovat za graf funkce $y = f(x)$, bude pomocná křivka grafem funkce

$y = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Při hledání délky oblouku semikubické paraboly využívá van Heuraet algebraické prostředky [Koudela, 2010b].

Rovněž pro Huygense představovala rektifikace křivek důležitou oblast zájmu. Huygensovo magnum opus *Horologium oscillatorium*, které bylo publikováno roku 1673, obsahuje plody autorovy mnohaleté práce. Třetí část pojednává o výsledcích Huygensova výzkumu délek křivek a najdeme v ní i jeho vlastní verzi historie prvních rektifikací. Vysoce v ní hodnotí Wrenovu práci, Neilův příspěvek naopak podceňuje (což vyvolalo rozhořčenou reakci Wallise, hájícího prvenství svého krajana). Huygens vyzdvihuje také van Heuraetovu práci a zdůrazňuje i svůj vlastní podíl.

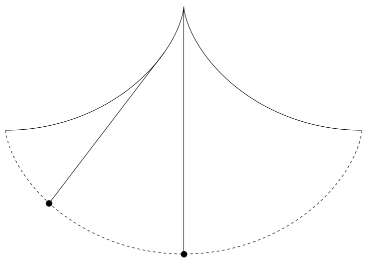
Boyer [1964] se domnívá, že Huygensův zájem o rektifikaci byl podnícen Hobbesovým nesprávným určením délky oblouku paraboly (viz s. 20). Roku 1657 dospěl Huygens ke dvěma výsledkům, které měly k problematice rektifikace vztah [Yoder, 1988, s. 120 a n.]. Prvním byla souvislost mezi rektifikací paraboly a kvadraturou hyperboly, druhým vztah mezi obsahem parabolického konoidu a obsahem jeho kruhové základny. S těmito výsledky seznámil svého někdejšího učitele van Schootena, jehož prostřednictvím se zpráva o nich dostala i k van Heuraetovi a údajně pro něj znamenala inspiraci pro jeho práci o rektifikaci. Někteří moderní autoři tuto hypotézu přejímají; dnes je však obtížné takové tvrzení ověřit. Van Heuraetova práce měla nicméně obecnější charakter. Huygens sám na konci 50. let cítil, že musí přinést významnější výsledek, chce-li se rovnat Wrenovi a van Heuraetovi. K tomu mu poskytl materiál jeho objev evolut.

Huygensův vhled do světa geometrie mu umožnil přetvářet podněty přicházející ze světa mechaniky v geometrické teorie samostatného významu. Úsilí o konstrukci přesných kyvadlových hodin přivedla Huygense k problému, který jej zaměstnával na konci 50. let: k problému izochronního (tautochronního) kyvadla. Kyvadlo opisující oblouk kružnice není izochronní; doba kmitu závisí na poloze, v níž je závaží uvolněno. Při hledání izochrony se Huygensovi nejprve podařilo vyřešit přidružený „infinitezimální“ problém: vyjádřit závislost doby kmitu kyvadla na délce ramene při dostatečně malé amplitudě, kdy lze zanedbat odchylky od izochronního pohybu. Tento výsledek jej poté dovedl k velkému úspěchu, kterým byl objev izochronie cykloidy.

Důkaz, který se později objevil v *Horologiu oscillatoriu*, měl Huygens sestaven v zásadě již na konci roku 1659 [Yoder, 1988, s. 59–61]. Jeho odvození naznačuje jasně Huygensovu schopnost užívat infinitezimální metody a najdeme v něm i použití charakteristického trojúhelníku, který se stal později jedním ze základních stavebních prvků Leibnizovy *nové metody*. Huygens si byl dobře vědom významu svého objevu a připsal ke svému důkazu citát z Ovidia: „Magna nec ingenijs investigata priorum“.[7]

[7] Velké věci, v něž předků nevnikl důvtip. (*Proměny*, 15, 146. Český překlad Ferdinand Stiebitz.)

Při konstrukci izochronních kyvadlových hodin bylo třeba umístit kyvadlo (vlákno se závažím) mezi překážky tvarované tak, aby se závaží pohybovalo po cykloidě [Schwabik, 1999]. Řešení tohoto praktického problému přivedlo Huygense k dalšímu významnému geometrickému objevu: teorii evolut. Úkolem bylo k dané (převrácené) cykloidě najít křivku (tzv. evolutu), na kterou se má vlákno navíjet a jejíž tečna v každém bodě bude kolmá k dané cykloidě a jejíž oblouk bude mít délku rovnou délce vlákna. Huygens měl v té době již hotov důkaz tvrzení o délce oblouku cykloidy, k němuž dospěl ještě před vydáním *Tractatus duo*, a rozpoznal, že hledanou křivkou je opět cykloida (obr. 1.10).



OBR. 1.10: Kyvadlo pohybující se po cykloidě

Ačkoliv tento výsledek vyplynul z řešení konkrétního problému souvisejícího s pohybem kyvadla, nalezená technika měla obecný charakter. Huygens se neomezil jen na hledání evoluty cykloidy; tutéž techniku, kombinující infinitezimální úvahy s algebraickým odvozením, vyzkoušel i na parabole a zjistil, že evolutou paraboly je semikubická parabola, jejíž *latus rectum* má délku rovnou 27/16-násobku téže veličiny dané paraboly.[8] Další studovanou křivkou byla elipsa a zdá se, že Huygens již v roce 1659 odvodil obecný vztah, který je obsažen v *Horologiu oscillatoriu* [Yoder, 1988, s. 87].

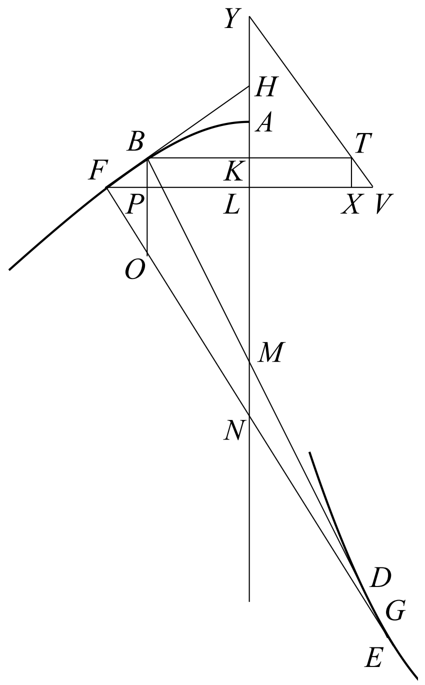
V bodech B a F dané křivky ABF (obr. 1.11) sestrojíme normály, které budou tečnami její evoluty v bodech B a D. Leží-li body B a F dostatečně blízko, můžeme považovat průsečík normál G za bod jejich dotyku s evolutou, tedy bod ležící na evolutě. Oblouk mezi body B a F nahradíme úsečkou a z podobnosti trojúhelníků BOG a MNG resp. BOF a HNF dostaneme rovnici

$$\frac{BG}{MG} = \frac{HN}{HL} \cdot \frac{KL}{MN}, \tag{1.8}$$

která umožňuje na základě vlastností křivky ABF určit bod G její evoluty.

Využití evolut k rektifikaci bylo nasnadě. Vlákno odvíjející se z překážky má stejnou délku jako oblouk křivky, podle níž je překážka vytvarována. Každé určení evoluty je zároveň její rektifikací [Yoder, 1988, s. 128].

[8] *Latus rectum* paraboly je tětiva procházející ohniskem a rovnoběžná s řídící přímkou. V případě paraboly $y^2 = rx$ se jedná o úsečku délky r. V případě semikubické paraboly $ay^2 = x^3$ je pod pojmem latus rectum míněna úsečka délky a [Yoder, 1988, s. 203, pozn. 31].



OBR. 1.11: K odvození obecné rovnice pro evolutu [Huygens, 1673, s. 81]

V tvrzení 11 z třetí části knihy *Horologium oscillatorium* spojuje Huygens [1673, s. 81] výslovně určení evoluty s problémem rektifikace:

> Pro danou křivku najít jinou křivku, která popisuje danou křivku jako svou evolutu; a ukázat, jak z každé geometrické křivky může být nalezena jiná křivka stejně geometrická. kterou je možné položit rovnou úsečce [tj. rektifikovat].

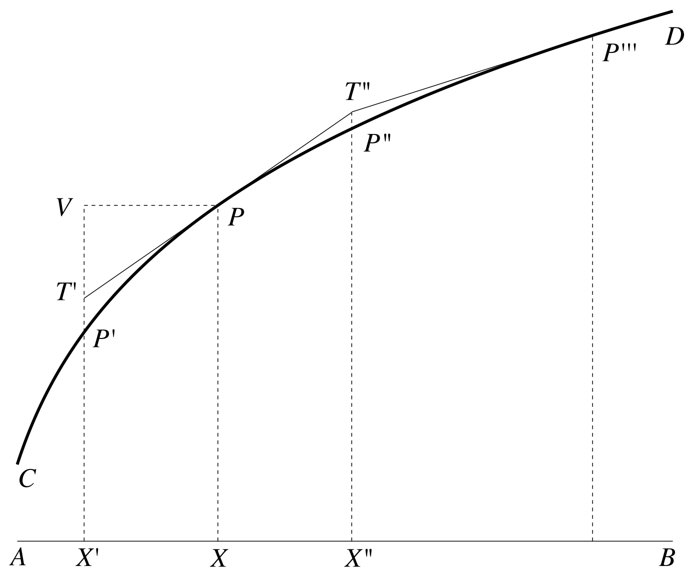
Huygensova metoda se stala matematickým vyjádřením praktického a přímočarého řešení problému rektifikace. Yoderová [Yoder, 1988, s. 130] cituje Huygensův dopis, který odráží rivalitu mezi ním a van Heuraetem při hledání obecné metody rektifikace. „Troufám si tvrdit, že tento objev uspokojí i velmi náročného van Heuraeta; neboť pro mne je zajisté nejvybranějším ze všech objevů, na které jsem kdy narazil," píše Huygens van Schootenovi. Huygensova metoda byla v dané době efektivnější, neboť úspěšnost van Heuraetovy metody závisela na schopnosti provést kvadraturu obrazce ohraničeného pomocnou křivkou. Ve van Heuraetově metodě s jejím spojením problematiky tečen a kvadratur však můžeme vidět zárodek obecného pravidla, které se stalo základem nové metody: tzv. základní věty infinitezimálního počtu, vyjadřující vztah mezi operacemi integrace a derivování.

1.7 Geometrické řešení

Přibližně ve stejné době jako Neil a van Heuraet dospěl k řešení problému rektifikace Pierre de Fermat (1601 – 1665). Jeho pojednání [Fermat, 1660] vyšlo bez souhlasu autora jako příloha k Lalouvèrovu *Veterum geometria promota*. Obsahuje obecnou metodu rektifikace konkávních křivek a příkladem, na němž je metoda ilustrována, je opět semikubická parabola.

Fermatova práce neobsahuje ani zmínku o Neilově rektifikaci ani o van Heuraetově práci, která musela být poměrně známá. Fermatova metoda se každopádně od prací obou jeho předchůdců značně liší. Je patrné, že Fermatův traktát o rektifikaci je především reakcí na Pascalovo pojednání týkající se porovnání oblouků paraboly a Archimédovy spirály. Nevyužívá algebraických prostředků a délku úsečky a oblouku porovnává pomocí *reductio ad absurdum*.

Fermat se však záměrně odchyluje od Archimédovy metody rektifikace kružnice, která pracuje s opsanou a vepsanou linií, a ukazuje, že jeho postup je v tomto případě výhodnější. Dané křivce *opíše* dva systémy úseček tvořených úseky tečen a pomocí Archimédova postulátu dokáže, že délka prvního je větší než délka daného oblouku a délka druhého menší, přičemž rozdíly mezi délkou obou systémů úseček a daného oblouku lze učinit menší než je délka libovolné dané úsečky.



OBR. 1.12: K Fermatově metodě rektifikace

Nechť CD je oblouk hladké konkávní křivky nad úsečkou AB (obr. 1.12). Mezi body A a B zvolíme bod X, sestrojíme v něm kolmici k základně AB a v jejím průsečíku P s křivkou sestrojíme tečnu ke křivce. Dále zvolíme bod X' resp. X'' mezi A a X resp. X

a B a vztyčíme v těchto bodech kolmice. Jejich průsečíky s křivkou označíme P' a P'' a průsečíky s tečnou T' a T''. Platí

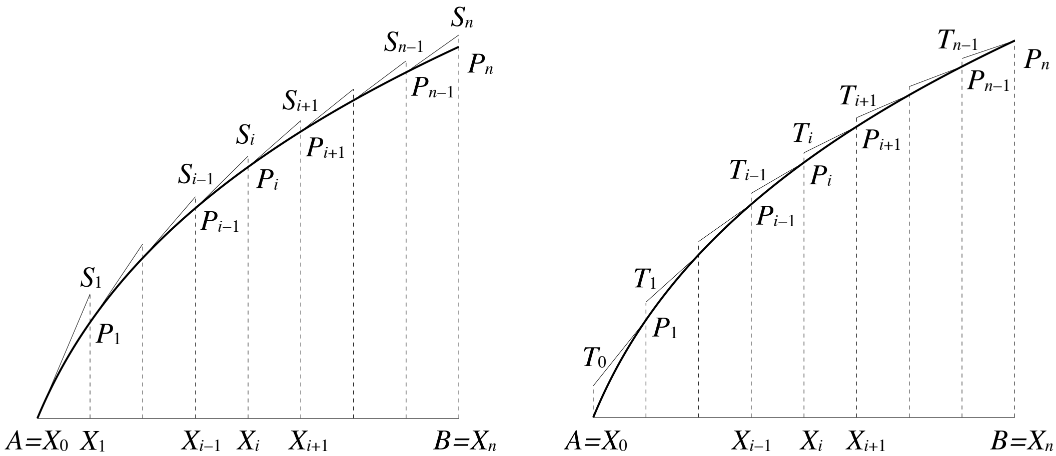
$$T'P < \overline{P'P},$$

neboť délka úsečky PV je menší než délka PT' a ta je menší než délka úsečky PP', která je podle Archimédova postulátu kratší než oblouk $P'P$. Dále platí

$$PT'' > \overline{PP''},$$

neboť $T''P''' < \overline{P''P'''}$ (stejně jako v předchozím případě) a $PT'' + T''P''' > \overline{PP'''}$ (podle Archimédova postulátu).

Rozdělíme nyní úsečku AB pomocí bodů $X_0 = A, X_1, X_2, \ldots, X_n = B$ na n stejných dílů. V každém z dělících bodů $X_i, i = 1, \ldots, n$ sestrojíme kolmice k základně AB a v jejích průsečících s křivkou, které označíme P_i, sestrojíme tečny. Bod, ve kterém tečna v bodě P_i protne kolmici v bodě X_{i+1}, označíme S_{i+1}. Podobně označíme T_{i-1} bod, ve kterém tečna v bodě P_i protne kolmici v bodě X_{i-1} (obr. 1.13).



OBR. 1.13: Fermatův způsob stanovení horního a dolního odhadu délky oblouku

Protože $P_iS_{i+1} = T_{i-1}P_i$, dostaneme s pomocí dokázaných nerovností

$$P_0S_1 + P_1S_2 + \cdots + P_{n-1}S_n > \overline{P_0P_n} > T_0P_1 + T_1P_2 + \cdots + T_{n-1}P_n.$$

Protože platí

$$T_0P_1 = P_1S_2, \ldots, T_{n-2}P_{n-1} = P_{n-1}S_n,$$

bude rozdíl celkových délek obou systémů úseček roven $P_0S_1 + T_{n-1}P_n$. Při dostatečném počtu dělících bodů tak bude tento rozdíl a tím spíše i rozdíl mezi délkou delšího systému úseček a obloukem jakož i obloukem a kratšího systému úseček menší než délka libovolné dané úsečky.

Rektifikaci Fermat demonstruje na příkladu semikubické paraboly. „Proč se tak dlouho setrvávalo u otázky tak jednoduché, když lze bezprostředně dospět k Archimédově metodě?“, ptá se Fermat [1660, s. 221] v narážce na domněnky o neproveditelnosti rektifikace.

Jméno skotského matematika Jamese Gregoryho (1638 – 1675) není zdaleka tak známé jako jména Newtona a Leibnize; myšlenky obsažené v jeho díle z něj však činí jejich přímého předchůdce. Jednu z prvních verzí základní věty infinitezimálního počtu obsahuje spis *Geometriæ pars universalis*, který Gregory napsal v době svého pobytu v Itálii v letech 1664 – 1668. Toto dílo bylo zamýšleno jako shrnutí, sjednocení a zobecnění výsledků dosažených při řešení problémů konstrukce tečen, kvadratur a rektifikací. Sám Gregory připouští v úvodu, že všechny předkládané výsledky nejsou jeho vlastní; jeho schopnost najít obecnou zákonitost skrytou za jednotlivými případy však činí jeho dílo originálním. Jeho důkazy jsou vedeny v duchu Archimédovy (exhaustivní) metody; Gregory se nevyhýbá ani Cavalieriho metodě (indivisibilií), přičemž poukazuje na to, že ji lze převést na předchozí způsob. Obecné pravidlo spojující délku oblouku dané křivky s obsahem obrazce ohraničeného pomocnou křivkou je obsaženo ve druhém tvrzení. Předpokládá se jednoduchá, nezavinutá (non sinuosa) křivka, která má v každém bodě tečnu. Gregory, podobně jako v citovaném pojednání Fermat, s jehož dílem se v Itálii rovněž seznámil, používá geometrický jazyk a dospívá k výsledku odpovídajícímu vzorci (1.1).

1.8 Přednosti a slabiny „nové metody“

Vývoj základů infinitezimálního počtu završili nezávisle Isaac Newton (1643 – 1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) a otevřeli tak cestu k metodickému zkoumání problémů rektifikace, kvadratury a dalších úloh souvisejících s vlastnostmi křivek.

Nová teorie byla poprvé představena v Leibnizově pojednání *Nova methodus* [9], které v roce 1684 přinesl časopis *Acta eruditorum*. Všeobecně se soudí, že Newton dospěl k hlavním výsledkům již na přelomu 60. a 70. let; tiskem je však publikoval až mnohem později.

První učebnici infinitezimálního počtu napsal Guillaume François Antoine markýz de l'Hospital (1661 – 1704). Kniha nesla název *Analyse des infiniments petits, pour*

[9] Celý název zní *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus.*

l'intelligence des lignes courbes a vyšla v roce 1696; na jejím obsahu měl velký podíl Johann Bernoulli (1667 – 1748), jehož si l'Hospital najal jako svého učitele. Kniha byla obecně považována za prezentaci Leibnizovy nové metody. Jedním ze základních východisek byla pro l'Hospitala [1716, s. 3] představa křivky jako lomené čáry tvořené nekonečně mnoha nekonečně malými rovnými úseky:

> Křivka může být považována za soubor nekonečně mnoha nekonečně krátkých rovných čar, nebo (což je totéž) za lomenou čáru s nekonečným počtem stran, z nichž každá má nekonečně malou délku a které určují zakřivení prostřednictvím úhlů, jež svírají mezi sebou navzájem.

Ani vynikající výsledky, které nová metoda přinášela, nedokázaly úplně rozptýlit pochybnosti o legitimitě jejích postupů. Kritikové infinitezimálního počtu poukazovali na logické nedostatky v jeho základech – na nejasné a rozporuplné definice základních pojmů a především na problematický pojem nekonečně malé veličiny. Sami objevitelé nové metody si byli slabých míst své teorie vědomi, avšak dosažené výsledky zastínily potřebu jejich úplného vyjasnění.

Nejznámějším odpůrcem nové metody se stal biskup anglikánské církve George Berkeley (1685 – 1753). Jeho kritika jak Newtonovy, tak Leibnizovy teorie obsažená ve spise *The Analyst* z roku 1734 byla založena pouze na rozboru jejich vnitřní konzistence a vycházela z požadavků na přesnost, které nebyly nijak nové. Berkeley poukazoval na to, že nekonečně malé veličiny nejen nejsou nutné, ale jsou dokonce v řádně budované teorii nepřijatelné.

Analýza v 18. století na jedné straně přinášela nové poznatky a nemalým dílem přispěla k úspěchům přírodovědy, z nichž pramenil optimistický pohled na možnost racionálního porozumění světu, na druhé straně byla stále silněji pociťována existence slabých míst v jejích základech. Tento stav ilustruje Diderotova *Encyclopédie* (vycházela v letech 1751 – 1766), která měla představovat souhrn lidského vědění v polovině 18. století. Koeditorem a autorem většiny hesel z oblasti matematiky byl Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783). Heslo LIMITE je pojato vcelku moderním způsobem; na příkladu kružnice s opsaným a vepsaným pravidelným mnohoúhelníkem je ukázáno, že ačkoliv lomené čáry tvořící obvody takových mnohoúhelníků nebudou nikdy stejně dlouhé jako kružnice, lze její délku chápat jako limitu délek těchto lomených čar. D'Alembert však toto pojetí dále nerozpracoval a stejně jako ostatní používal běžně nekonečně malé veličiny. Heslo RECTIFICATION bylo naproti tomu víceméně převzato z Chambersovy *Cyclopædie*, která byla pro francouzské encyklopedisty inspirací. Křivka je zde výslovně chápána jako lomená čára tvořená nekonečně krátkými úsečkami s délkami $\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Vybudovat novou teorii, která by dokázala totéž co infinitezimální počet, ale neobsahovala jeho slabiny a splňovala požadavky na přesnost odpovídající geometrii starých Řeků, se pokusil na přelomu 18. a 19. století Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813). Jeho *Théorie des fonctions analytiques* vyšla roku 1797 a obsahovala pojmy derivované a primitivní funkce, s jejichž pomocí byly vyjadřovány operace derivování a integrování. K dané (reálně analytické) funkci f uvažoval Lagrange [1797, s. 2] odpovídající mocninnou řadu

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \dots \tag{1.9}$$

a derivaci $f'(x)$ chápal jako koeficient $p = p(x)$ u lineárního členu.

Lagrangeovo řešení problému rektifikace oblouku konkávní křivky, která je grafem funkce f, se opírá o Archimédův postulát. Na jeho základě Lagrange [1797, s. 158–159] dokazuje, že délka oblouku mezi x a $x+i$ je ohraničena délkami úseků tečen v koncových bodech oblouku mezi přímkami x a $x+i$, neboli

$$i\sqrt{1+[f'(x)]^2} \le l \le i\sqrt{1+[f'(x+i)]^2}.$$

Označíme-li $\varphi(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$ a bude-li Φ funkce vyjadřující délku křivky, pak pro délku oblouku platí $\Phi(x+i) - \Phi(x) = i\varphi(x) - i\varphi(x+i)$. Odtud plyne $\Phi'(x) = \varphi(x)$ a k nalezení délky oblouku křivky tedy potřebujeme najít primitivní funkci k funkci $\varphi(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$. Hodnotu integrační konstanty určíme z podmínky, že $\Phi(x) = 0$ v počátečním bodě oblouku.

Lagrangeova teorie analytických funkcí představovala pokus o vybudování analýzy na algebraickém základě a v analýze „určovala tón“ zhruba po dobu dvou desetiletí na přelomu 18. a 19. století. Pojetí blízké Lagrangeovu se objevuje rovněž v kompendiu poznatků z diferenciálního a integrálního počtu *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797 – 1798), jehož autorem byl Silvestre François Lacroix (1765 – 1843). Při důkazu, že limita poměru délky oblouku konkávní křivky a délky tětivy vedené koncovými body oblouku je rovna jedné, blíží-li se přírůstek nezávisle proměnné nule, volí Lacroix [1810, s. 451 a n.] „nejanalytičtější způsob“: používá Taylorovu větu a rovněž, byť ne výslovně, Archimédův postulát.

V první polovině 19. století začala být stále více pociťována potřeba přebudovat analýzu na spolehlivých aritmetických základech a bez odkazů na geometrickou intuici. Úsilí o přeformulování základů analýzy je v tomto období spojeno především se jménem Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857). V Lagrangeově i Lacroixově díle můžeme zaznamenat posun v chápání pojmu funkce směrem k modernímu pojetí. Pojem funkce přestává být spojován s algebraickým výrazem, připouští se i funkce definované pomocí mocninné řady nebo funkce, pro které není explicitní předpis znám. Cauchyův

Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique z roku 1821 se od zmíněných prací jeho předchůdců významně liší především odlišným chápáním spojitosti funkce. Negeometrický přístup vyžadoval také nové pojetí čísla.

Cauchyova nová analýza rozvíjená dále ve spise *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal a la géométrie* (1826) byla založena na zdůraznění limity pro definování derivací a integrálů. Radikální změnou ve srovnání s ustálenou praxí byla Cauchyova definice integrálu jako limity posloupnosti integrálních součtů. Cauchy [1826, s. 77 a n.] se zabývá i určením diferenciálu oblouku křivky a problémem rektifikace. Myšlenkově je jeho odvození podobné Lacroixovu, předpokládá se spojitá konkávní křivka a alespoň implicitně je při postupu použit i Archimédův postulát; vychází známý transformační vzoreček $ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$, kde y' je derivace chápaná ve smyslu limity diferenčních podílů.

Větší pozornost než Cauchy věnoval problému rektifikace horlivý berlínský stoupenec nové analýzy Enno Heeren Dirksen (1788 – 1850). Dirksen [1835] si položil otázku, zda obvyklý postup určení diferenciálu a následně primitivní funkce vyjadřující délku je správný a jaké je v teorii rektifikace místo Archimédova postulátu. Nahradil Archimédův postulát *definicí* délky křivky, která staví na známém pojmu délky úsečky a na integrálu jako limitě integrálních součtů.

Oblouk (prostorové) křivky s koncovými body A a B Dirksen rozděluje soustavou $n+1$ ekvidistantních rovnoběžných rovin tak, aby první a poslední procházely koncovými body oblouku. Průsečíky křivky $M_i, i = 0, \ldots, n$ s rovinami spojuje úsečkami, které dohromady tvoří lomenou čáru délky

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1}.$$

Číslo

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n$$

pak Dirksen nazývá délkou oblouku AB.

Bernard Bolzano (1781 – 1848) byl ke studiu základů analýzy veden spíše filosofickými pohnutkami. Uvědomoval si možná jasněji než kdokoliv z jeho současníků, jaká jsou slabá místa tehdejší analýzy a jaké postupy je třeba volit, aby teorie z přísně logického hlediska obstála. Mezi jeho rané práce zabývající se analýzou patří i pojednání [Bolzano, 1817], ve kterém se Bolzano pokusil o obecné řešení problému rektifikace nejen bez použití nekonečně malých veličin, ale i bez Archimédova postulátu.

Bolzano se ve své teorii rektifikace nechtěl opírat o nic jiného než o Taylorovu větu. Uvažuje jednoduchou rovinnou křivku popsanou rovnicí $y = f(x)$; hledaná délka křivky je dána rovnicí $y = F(x)$. Přírůstku Δx bude odpovídat přírůstek délky $F(x+\Delta x)-F(x)$, který lze vyjádřit podle Taylorovy věty rozvojem $\Delta x(\frac{dF(x)}{dx}+\frac{\Delta x}{2}\frac{d^2F(x)}{dx^2}+\ldots)$. Tento výraz vyjadřuje délku oblouku odpovídajícího úsečce Δx a je určen hodnotami $f(x+m\Delta x)$, když za m dosadíme „všechny myslitelné vlastní zlomky nebo 0 nebo 1“. Bolzano dále ukazuje, že hodnoty $F(x + \Delta x) - F(x)$ jsou určeny pouze hodnotami výrazu $f(x+m\Delta x) - f(x)$.

Stojí-li pro dvě nebo více křivek výraz $f(x + \Delta x) - f(x)$ k Δx ve stejném poměru a navíc podíl $\frac{f(x+m\Delta x)-f(x)}{m\Delta x}$ nabývá stejných hodnot pro každé výše uvedené m, pak oblouky těchto křivek odpovídající Δx jsou *podobné* a z teorie podobnosti plyne, že rovněž $F(x + \Delta x) - F(x)$ jsou k Δx ve stejném poměru. Výraz $\frac{F(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ tak závisí pouze na hodnotách $\frac{f(x+m\Delta x)-f(x)}{m\Delta x}$ pro výše uvedená m.

Uvažujme dále dvě křivky popsané rovnicemi $y = f(x)$ a $y = \varphi(x)$. Funkce F resp. Φ vyjadřující jejich délku bude podle Bolzana nepochybně možné z funkcí f resp. φ odvodit stejným způsobem. Výrazy $\frac{dF(x)}{dx}$ a $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ jsou ale určeny pouze pomocí $\frac{df(x)}{dx}$ a $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ a musí být z nich odvoditelné stejným způsobem.

Dobová kritika[10] vytýkala Bolzanovi, že jeho důkazy nejsou důkazy v matematickém slova smyslu, ale že jsou promíchány s diskurzívní výplní připouštějící pochybnosti. Z hlediska moderní analýzy bylo problematické Bolzanovo přiřazení nějakého čísla každému oblouku křivky. O více než půlstoletí později se Bolzanovou prací zabýval Stolz [1881] a upozornil, že problematický předpoklad možnosti rozvinutí funkce $F(x)$ není nutný, neboť by stačilo předpokládat existenci $\frac{dF}{dx}$.

Zajímavější než jeho řešení problému rektifikace bylo z hlediska dalšího vývoje matematiky Bolzanovo vymezení pojmu křivky, plochy a tělesa, které přitom nebylo, jak Bolzano sám poznamenává, pro řešení uvažovaného problému potřeba. Bolzanovy myšlenky týkající se souvislosti a dimenze předběhly úsilí o definování těchto pojmů z hlediska teorie množin a topologie (více v odstavci 3.2).

1.9 Duhamelovo pojetí délky křivky

Matematická analýza získávala podobu, v níž se dnes vyučuje v úvodních kurzech na univerzitách, v průběhu 19. století. Úsilí o vybudování pevných a logicky konzistentních základů vedlo k postupnému přebudování celé teorie včetně revize základních pojmů.

[10] Allgemeine Literatur-Zeitung. September 1819, Num. 236, s. 180–184 (autor neuveden).

Vývoj analýzy v 19. století vyústil v rozpracování zcela nových matematických oborů: teorie množin a topologie.

Devatenácté století přineslo především definici funkce ve smyslu jednoznačného přiřazení závisle proměnné každé hodnotě nezávisle proměnné. Fyzikálně-geometrické kontinuum bylo nahrazeno kontinuem reálných čísel a infinitezimální počet byl vystavěn na pojmu limity. Původně intuitivně samozřejmá úloha přiřazení délky křivce a její stanovení pomocí integrálu (1.1) byla obrácena: délkou křivky byl nazván právě integrál, který dříve byl pouze prostředkem pro její stanovení.

Cauchyova nová analýza nebyla zpočátku přijímána jednoznačně. Potřeba opírat celou teorii o logicky nezpochybnitelné základy byla obecně uznávána. Z heuristického pohledu však tradiční postupy používající nekonečně malé veličiny vyhovovaly a pro potřeby praxe byly brány jako adekvátní.

Jedním z Cauchyových následovníků na École Polytechnique byl Jean-Marie Constant Duhamel (1797 – 1872). Zabýval se matematickou fyzikou, těžiště jeho práce však spočívalo více v pedagogické činnosti. Na École Polytechnique působil s přestávkami od roku 1830 do roku 1869. Ve svých učebnicích přejímal alespoň do jisté míry postupy nové analýzy. Začal být řazen mezi její propagátory a uznáván jako reprezentant nového proudu v matematice. Dnes je však jeho jméno mimo okruh odborníků prakticky neznámé.

Duhamelovým životním dílem je kniha *Des méthods dans les sciences de raisonnement*, kterou napsal na sklonku svého života, ale která obsahuje myšlenky, jimiž se zabýval od počátku své vědecké dráhy. Pokusil se v ní vytvořit co nejobecnější základ pro metodologii deduktivních věd. Dílo má pět částí. První se zabývá obecnými filosoficko-logickými základy deduktivních věd, další tři jsou věnovány aplikaci těchto obecných pravidel v oblastech odpovídajících třem základním předmětům deduktivních metod: číslu, rozlehlosti a síle, tedy zhruba řečeno v aritmetice, v geometrii a v mechanice. Poslední posmrtně vydaná část, která byla připojena k druhému vydání, rozšiřuje deduktivní racionální výstavbu v duchu francouzského pozitivismu na vědu o člověku ve smyslu *l'homme moral*, se stránkou individuální (psychologickou) a sociální.

Otázkou rektifikace křivek se Duhamel zabývá ve druhé části nazvané *Application des méthodes générales a la science des nombres et a la science de l'étendue*, která vyšla roku 1866. Duhamel si uvědomoval nemožnost srovnávat geometrickými prostředky oblouky různých křivek, případně oblouky s úsečkami. Abychom mohli vyjádřit délku oblouku, tedy přiřadit danému oblouku jednoznačně číslo vyjadřující jeho délku, je podle něj potřeba nejprve jasně definovat, co rozumíme pojmem délka oblouku křivky. Duhamel [1866, s. 412] ji definuje jako limitu, k níž se blíží délka lomené čáry vepsané danému oblouku, když se délky stran lomené čáry vesměs blíží nule.

Aby tato definice měla smysl, dokazuje Duhamel, že tato limita existuje a je jednoznačně určena bez ohledu na to, jakým způsobem je dělení oblouku realizováno. Předpokládá konkávnost křivky mezi koncovými body celého oblouku; pokud tomu tak není, lze rozdělit oblouk na menší části, z nichž každá jednotlivě podmínku splňuje. Pro speciálně zvolené dělení oblouku nejprve dokáže, že posloupnost délek vepsaných lomených čar je shora ohraničená a rostoucí a má tedy limitu.

Tato limita nezávisí na způsobu vepsání lomené čáry, za předpokladu, že délky jejích stran se blíží nule. Duhamel [1866, s. 398] svůj důkaz opírá o tzv. „principe fondamental des infinement petites“, podle kterého

> limita součtu veličin nekonečně malých[11] se nezmění, jestliže tyto veličiny zaměníme jinými veličinami, jejichž poměry k odpovídajícím původním veličinám jsou rovny jedné.

Jinými slovy: Platí-li $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+\cdots+\alpha_n(x) \to L \in \mathbb{R}$ pro $n \to \infty$ a zároveň $\alpha_k(x) \geq 0$ a $\lim_{x\to 0} \alpha_k(x) = 0$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, pak také součet $\beta_1(x) + \beta_2(x) \cdots + \beta_n(x)$ konverguje k L, jestliže pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n$ se poměr $\beta_k(x)/\alpha_k(x)$ pro $x \to 0$ blíží jedné.

Duhamel neformuloval zvlášť podmínky rektifikovatelnosti; ve svých úvahách se omezil na takové oblouky, kterým bylo možné přiřazovat číslo vyjadřující jejich délku.

1.10 Délka grafu a nespojité funkce

Paul du Bois-Reymond (1831 – 1889) měl blízko k Weierstrassovi v zájmu o základy analýzy a nezávisle na Cantorovi se zabýval i problematikou nekonečných bodových množin. V článku [du Bois-Reymond, 1879] se zabýval otázkou rektifikace ve vztahu k určení nejkratší spojnice dvou bodů ve variačním počtu. Chtěl speciálně podat první korektní (z teorie integrálu vycházející) důkaz tvrzení, že mezi všemi rektifikovatelnými liniemi spojujícími dva body je úsečka nejkratší. Protože pojem délky křivky (grafu funkce $y = f(x)$, $x \in [a, b]$) v sobě zahrnuje představu limitního přechodu, jedná se o pojem bytostně analytický. Otázka rektifikovatelnosti pak podle du Bois-Reymonda musí souviset s existencí integrálu (1.1).

Du Bois-Reymond nepožadoval spojitost funkce f, která byla dříve při úvahách o délce křivky mlčky předpokládána. Má-li *rektifikovatelná funkce* v nějakém bodě x_1 skokovou

[11] Nekonečně malou veličinou rozumí Duhamel každou proměnnou veličinu, která konverguje k nule. Nejde tedy o pevnou konstantní veličinu v tradičním smyslu, ale o proměnnou.

nespojitost, je podle du Bois-Reymonda rozumné započítat hodnotu $|f(x_1+) - f(x_1-)|$ do délky jejího grafu.

Uvažujme křivku představovanou grafem funkce f definované na intervalu $[a, b]$, která je na $[a, b]$ spojitá s výjimkou bodů tvořících množinu P, kde má f skokové nespojitosti. Předpokládejme, že f má spojitou derivaci na každém intervalu, který neobsahuje žádný bod množiny P.

Je-li P konečná množina tvořená body

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b = x_{n+1},$$

definujeme délku křivky

$$L = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k+) - f(x_k-)| + \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \tag{1.10}$$

Tuto definici lze dále zobecnit pro případ, že P je množina prvního druhu, za předpokladu, že řada

$$\sum_{k \in P} |f(x_k+) - f(x_k-)|$$

konverguje.[12] Du Bois-Reymond byl přesvědčen, že toto je nejobecnější definice délky křivky. Kdyby množina P byla hustá (Du Bois-Reymond používal vlastní termín „pantachisch“) v intervalu $[a, b]$, neexistovala by v něm derivace f' a křivka by nebyla rektifikovatelná. Pojmy množiny prvního druhu a množiny řídké v daném intervalu nebyly v roce 1879 rozlišovány [Hawkins, 1975, s. 81].

Zatímco pro Duhamela neměla otázka nerektifikovatelných křivek zvláštní význam, jejich případná existence získala důležitost po du Bois-Reymondově formulaci podmínek rektifikovatelnosti.

Dalším matematikem, jehož vztah k reálné analýze byl ovlivněn Weierstrassem, byl Otto Stolz (1842 – 1905). V článku věnovaném citované Bolzanově práci se Stolz [1881] zabýval otázkou, jak je vymezena třída funkcí, jejichž graf má pro $a \leq x \leq b$ konečnou délku. Stolz přitom uvažoval spojité funkce, které mají v $[a, b]$ derivaci f' integrovatelnou

[12] Pojem množiny prvního druhu zavedl Georg Cantor (1845 – 1918) v prvním díle svého pojednání o bodových množinách na přímce [Cantor, 1879], v němž shrnul výsledky svého studia nekonečných bodových množin, kterému se věnoval v souvislosti s problémem jednoznačnosti reprezentace dané funkce trigonometrickou řadou. Podle Bolzano–Weierstrassovy věty obsahuje každá nekonečná omezená množina M na číselné ose alespoň jeden hromadný bod. Množinu všech hromadných bodů množiny M nazývá Cantor první derivovanou množinou (erste abgeleitete Punktmenge) množiny M a označuje ji M'. Je-li M' nekonečná, obsahuje opět alespoň jeden hromadný bod. Množinu všech hromadných bodů množiny M' nazývá Cantor druhou derivovanou množinou množiny M a označuje ji symbolem M''. Obecně n-tou derivovanou množinu množiny M označuje Cantor symbolem $M^{(n)}$. Je-li pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ množina $M^{(n)}$ konečná, nazývá se M množinou prvního druhu (eine Punktmenge der ersten Gattung). Ve stejné době se problematikou nekonečných bodových množin na číselné ose zabýval i du Bois-Reymond.

v du Bois-Reymondově smyslu (jinými slovy množina bodů nespojitosti f' je prvního druhu, viz [Hawkins, 1975, s. 81]). Nutnou a postačující podmínkou rektifikovatelnosti grafu $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ je podle Stolze absolutní konvergence integrálu $\int_a^b f'(x)dx$ (která zaručuje konvergenci $\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$).

Du Bois-Reymondovo přesvědčení o souvislosti mezi existencí integrálu (1.1) (v Riemannově smyslu) a rektifikovatelností grafu funkce zpochybnil Ludwig Scheeffer (1859–1885). Na Scheeffera měl velký vliv Cantor, který sám vysoce hodnotil jeho výsledky a doporučoval jejich otištění v *Acta mathematica*. Slibná kariéra Ludwiga Scheeffera však byla předčasně ukončena tyfem ve věku pouhých 26 let.

První ze tří Scheefferových příspěvků, které se v *Acta mathematica* objevily, byl věnován rektifikaci křivek. Hutný, asi třicetistránkový text obsahuje vedle několika definic sedm vět doprovázených příklady. V úvodu Scheeffer [1884, s. 49] píše, že jeho zájem o tuto problematiku byl podnícen studiem vlastností jedné pozoruhodné funkce, která

> je všude spojitá, její derivace (jakož i její kvadrát) však má v každém libovolně malém intervalu nenulovou oscilaci, takže určitý integrál
>
> $$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$
>
> podle Riemannovy definice nenabývá žádného smyslu. Přesto z geometrických úvah jednoznačně vyplývá, že touto funkcí definovaná křivka má mezi každými svými dvěma body určitou konečnou délku.

Podle Scheeffera je třeba otázku rektifikovatelnosti zkoumat nezávisle na otázce existence integrálu (1.1).

Scheeffer definuje délku oblouku křivky představované grafem funkce $y = f(x)$ mezi body $[x_0, y_0]$ a $[x_1, y_1]$ v zásadě stejně jako Duhamel a Stolz, tj. jako limitu, k níž se blíží délky vepsaných lomených čar, když se délky intervalů mezi jednotlivými dělícími body intervalu $[x_0, x_1]$ vesměs blíží nule. Zatímco Duhamel se zabýval spojitými a alespoň po částech hladkými funkcemi, Scheeffer neklade na funkci f a priori žádná omezení. Představu spojité čáry lze podle něj přijmout až na základě jeho definice délky oblouku.

Scheeffer se nejprve zabývá grafem spojité funkce a dokazuje znovu Duhamelovo tvrzení o nezávislosti limity posloupnosti délek vepsaných lomených čar na způsobu dělení. Další tvrzení se týkají nespojitých funkcí, které Duhamel neuvažoval, a stanovení podmínek rektifikovatelnosti jejich grafů. Scheeffer [1884, s. 61] v té souvislosti uvádí příklad nespojité funkce, pro kterou integrál vyjadřující délku oblouku neexistuje, ale jejíž graf má přesto konečnou délku ve výše uvedeném smyslu. Nechť $w_1, w_2, \ldots$ je spočetná množina libovolných hodnot a $s_1, s_2, \ldots$ spočetná množina kladných hodnot, přičemž řada $\sum_{r=1}^{\infty} s_r$ má konečný součet. Pak křivka definovaná rovnicí

$$y = \sum_{-\infty}^{x} s_r, \tag{1.11}$$

v níž se sčítá přes všechny indexy r, pro které je $w_r < x$, má mezi každými dvěma body $[x_0, y_0]$ a $[x_1, y_1]$ délku $x_1 - x_0 + y_1 - y_0$. Obzvlášť zajímavou se tato vlastnost jeví v případě, kdy množina $w_1, w_2, \ldots$ je hustá. Co speciálně odlišuje tuto křivku od běžné stupňovité lomené čáry, je to, že neobsahuje žádnou horizontální linii.

V souvislosti s tímto příkladem uvádí Scheeffer i další příklady funkcí, pro které integrál (1.1) nabývá jiné hodnoty než jakou má podle definice délka jejich grafu (jedná se o první příklady tzv. singulárních funkcí, o kterých bude podrobněji pojednáno v odstavci 4.2).

Du Bois-Reymond a Scheeffer rozšířili pojem rektifikovatelnosti i na případ grafů nespojitých funkcí. Problém rektifikace tak byl spojen s problematikou výjimečných množin a vřazen do obecného trendu v analýze v poslední čtvrtině 19. století. Scheeffer se nicméně soustředil pouze na nejvýše spočetné množiny bodů nespojitosti. V závěru svého pojednání slibuje přinést i výsledky týkající se množin vyšší mohutnosti, tento slib však on sám nesplnil.

Literatura

ARCHIMEDES 1897. *The Works of Archimedes, edited in modern notation with introductory chapters by T. L. Heath.* Cambridge : Cambridge University Press, 1897.

ARISTOTELÉS 1978. *O sofistických důkazech.* Praha : Academia, 1978.

ARISTOTELÉS 1996. *Fyzika.* Praha : Rezek, 1996. ISBN 80-86027-03-1.

BOLZANO, B. 1817. *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung.* Leipzig : Paul Gotthelf Kummer, 1817.

BOS, H. J. M. 1981. On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie. *Archive for History of Exact Sciences.* 1981, vol. 24, s. 295–338.

BOYER, C. B. 1949. *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* New York : Dover, 1949.

BOYER, C. B. 1964. Early Rectifications of Curves. In *Mélanges Alexandre Koyré*, t. 1. Paris : Hermann, 1964, s. 30–39.

CANTOR, G. 1879. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen.* 1879, Bd. 15, s. 1–7.

CANTOR, M. 1900. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. 2. 2. Aufl. Leipzig : B. G. Teubner, 1900.

CAUCHY, A. L. 1826. *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal a la géométrie*, t. I. Paris : chez de Bure frères, 1826.

DESCARTES, R. 1897. *Œuvres de Descartes / Publiées par Charles Adam et Paul Tannery*, t. 2. Paris : L. Cerf, 1897.

DIRKSEN, E. H. 1835. Über die Anwendung der Analysis auf die Rectification der Curven, die Quadratur der Flächen und die Cubatur der Körper. *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin*. 1835, s. 123–168.

DU BOIS-REYMOND, P. 1879. Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung. *Mathematische Annalen*. 1879, Bd. 5, s. 283–314.

DUHAMEL, J.-M. C. 1866. *Des méthodes dans les sciences du raisonnement*. Paris : Gauthier-Villars, 1866.

FERMAT, P. DE. 1660. De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica. In LALOUVÈRE, A. DE. *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris*. Tolosæ : apud Arnaldum Colomerium, 1660. (Cit. podle: Œuvres de Fermat, t. 1. Paris : Gauthier-Villars, 1891, s. 211–254).

GULDIN, P. 1640. *De centro gravitatis, liber secundus*. Viennæ : Formis Matthæi Cosmerovij, 1640.

HAWKINS, T. 1975. *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development*. 2nd edition. New York : Chelsea Publishing Company, 1975. ISBN 0-8284-0282-5.

HEATH, T. L. 1921. *A History of Greek Mathematics*, vol. 1. Oxford : Clarendon Press, 1921.

HEURAET, H. VAN. 1659. Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas. In *Geometria, a Renato des Cartes anno 1637 gallica edita*. Amstelodami : Apud Ludovicum et Danielem Elzevirios, 1659, s. 517–520.

HUYGENS, CH. 1673. *Horologium oscillatorium, sive, De motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricæ*. Parisiis : Apud F. Muguet, 1673. (Angl. překlad I. Bruce je dostupný online na `http://www.17centurymaths.com/contents/huygenscontents.html`).

JESSEPH, D. M. 1999. *Squaring the Circle : the War between Hobbes and Wallis*. Chicago : University of Chicago Press, 1999. ISBN 0-226-39900-1.

KEPLER, J. 1860. *Joannis Kepleri astronomi opera omnia ed. Ch. Frisch*, vol. III. Frankforti a. M. et Erlangae : Heyder & Zimmer, 1869.

KNORR, W. R. 1986. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston : Birkhäuser, 1986. ISBN 0-486-67532-7.

KOUDELA, L. 2010a. Problém rektifikace ve vývoji analýzy. In BEČVÁŘ, J.; BEČVÁŘOVÁ, M. (ed.). *Dějiny matematiky VI.* Praha : Matfyzpress, 2010, s. 141–174. ISBN 978-80-7378-146-0.

KOUDELA, L. 2010b. První rektifikace algebraických křivek. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* 2010, sv. 55, s. 139–147.

LACROIX, S. F. 1810. *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral.* 2e édition. Paris : chez Courcier, 1810.

LAGRANGE, J.–L. 1797. *Théorie des fonctions analytiques.* Paris : Imprimerie de la République, 1797.

L'HOSPITAL, G. DE 1716. *Analyse des infiniments petits, pour l'intelligence des lignes courbes.* 2e édition. Paris : François Montalant, 1716.

MANCOSU, P. 1996. *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century.* New York : Oxford University Press, 1996. ISBN 0-19-508463-2.

MERSENNE, M. 1644. *Cogitata physico-mathematica.* Parisiis : Sumptibus Antonii Bertier, 1644.

NEWTON, I. 1686. *Philosophiæ naturalis principia mathematica.* Londini : Typis Josephi Straeter, 1686.

PASCAL, B. 1914. *Œuvres complétes, éd. L. Brunschvicg, P. Boutroux, F. Gazier*, t. VII. Paris : Hachette, 1914.

PAPPOS 1876. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manuscriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch*, vol. I. Berolini : Apud Weidmannos, 1876.

PEPPER, J. V. 1968. Harriot's Calculation of the Meridional Parts as Logarithmic Tangents. *Archive for History of Exact Sciences.* 1968, vol. 4, s. 359–413.

SCHEEFFER, L. 1884. Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven. *Acta mathematica.* 1884, vol. 5, s. 49–82.

SCHWABIK, V. 1999. O konstrukci kyvadlových hodin. In BEČVÁŘ, J.; FUCHS, E. (ed.). *Matematika v 16. a 17. století.* Praha : Prometheus, 1999, s. 283–295. ISBN 80-7196-150-7.

STOLZ, O. 1881. B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. *Mathematische Annalen.* 1881, Bd. 18, s. 255–279.

TORRICELLI, E. 1919. *Opere di Evangelista Torricelli - Edite in occasione del III centennario della nascita col concorso del comune di Faenza, da Gino Loria e Giuseppe Vassura*, t. 1. Faenza : G. Montanari, 1919.

TORRICELLI, E.; CARRUCCIO, E. 1955. *De infinitis spiralibus.* Pisa : Domus Galileana, 1955.

VAN DER WAERDEN, B. L. 1959. *Probuždajuščajasja nauka.* Moskva : GIFML, 1959. (Překlad z holandského originálu *Ontwakende Wetenschap*, Groningen : P. Noordhoff, 1950).

WALLIS, J. 1656. *Tractatus duo, prior, de cycloide et corporibus inde gentis: posterior, epistolaris in qua agitur de cissoide, et corporibus inde gentis, et de curvarum ...* Oxoniæ : Typis Academicis Lichfeldianis, 1659.

WALLIS, J. 1659. *Arithmetica infinitorvm, sive, nova methodus inquirendi in curvilieorum quadraturam ......* Oxonii : typis Leon: Lichfield academi typographi, 1656.

WALLIS, J. 2004. *The Arithmetics of Infinitesimals.* New York : Springer, 2004.

YODER, J. G. 1988. *Unrolling time : Christiaan Huygens and the mathematization of nature.* Cambridge : Cambridge University Press, 1988. ISBN 0-521-52481-4.

ZEUTHEN, H. G. 1881. Die geometrische Construction als „Existenzbeweis“ in der antiken Geometrie. *Mathematische Annalen.* 1881, Bd. 47, s. 222–228.

ZEUTHEN, H. G. 1903. *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert.* Leipzig : B. G. Teubner, 1903.

Kapitola 2

Křivka jako obraz intervalu

Pojem křivky byl dlouho chápán jako intuitivně jasný a nevyžadující zvláštní definici. Otázka „Co je to vlastně křivka?“ začala nabývat na významu teprve v souvislosti s vývojem matematiky ve druhé polovině 19. století. První obecně přijímanou definicí křivky se stala tzv. Jordanova definice, jež byla formulována na konci osmdesátých let 19. století a vyjadřovala matematicky představu křivky jako dráhy pohybujícího se bodu. Brzy se však ukázalo, že Jordanova definice je příliš široká a že jí vyhovují i objekty, které mají k intuitivní představě křivky daleko. Tzv. patologické křivky, chápané zpočátku jako okrajové jevy, začaly na přelomu 19. a 20. století hrát důležitou roli a přispěly významnou měrou k vývoji nových oborů: teorie množin a topologie.

2.1 Křivky a funkce

Prvním, kdo formálně definoval funkci proměnné veličiny jako výraz sestavený z dané proměnné a konstant, byl Johann Bernoulli (1667 – 1748) v roce 1718 [Jahnke, 2003, s. 114]. Představy o závislosti dvou veličin, které vedly ke vzniku pojmu funkce, lze nicméně považovat za jeden ze základních stavebních kamenů matematického myšlení a sledovat je i do hlubší minulosti [Juškevič, 1966].

Pojem funkce a pojem křivky měly k sobě od počátku poměrně blízko. Křivka vyjadřující závislost dvou veličin sloužila jako obraz funkce, postupem času se ale vztah obou pojmů měnil. Geometricky znázornit funkci mohlo být v případě složitějších předpisů problematické nebo dokonce neproveditelné. Vzorce, pomocí kterých byly funkce popisovány, získávaly větší nezávislost.

Kolem poloviny 18. století se objevuje ještě jiné, odlišné pojetí funkce. Leonhard Euler (1707 – 1783) chápal funkci nejen jako analytický výraz (vzorec) obsahující proměnné a konstanty (jako Bernoulli a Leibniz), ale také jako proměnnou závisející na jiné proměnné [Lützen, 2003, s. 156], tedy v podstatě v moderním smyslu. Funkce začínala být chápána jako samostatný matematický pojem, který se nemusel nutně vztahovat ke geometrickému vyjádření.

Pro moderní chápání pojmu funkce mělo zásadní význam Fourierovo pojednání *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Joseph Fourier (1768 – 1830) měl blízko k hlavnímu proudu francouzské matematiky na přelomu 18. a 19. století, představovanému Lagrangem, Lacroixem a Laplacem. Jako vedoucí vědecké části expedice se zúčastnil i Napoleonovy výpravy do Egypta. Fourier vyslovil názor, že každá omezená funkce definovaná na intervalu $(-a, a)$, $a > 0$, může být vyjádřena ve tvaru trigonometrické řady s koeficienty určenými známými integrálními vzorci. Jeho práce, která v době svého vzniku nebyla přijímána jednoznačně, byla postavena na nejobecnějším chápání pojmu funkce. Je nicméně otázkou, zda Fourier skutečně připouštěl vztah mezi proměnnými ve stejném smyslu, v jakém jej chápe moderní analýza. Hawkins [1975, s. 6–7] je např. přesvědčen, že Fourier chápal pojem funkce v podstatě stejně jako matematikové 18. století. Poukazuje rovněž na to, že integrace byla ve Fourierově době chápána převážně jako inverzní operace k derivování a že Fourier si neuvědomoval potřebu odůvodnit platnost integrálních vzorců pro koeficienty trigonometrické řady.

Moderní pojetí funkce ve smyslu přiřazení jediné funkční hodnoty každé hodnotě argumentu rozvíjel Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) v souvislosti s formulováním obecných podmínek konvergence Fourierovy řady. Dirichlet studoval v Paříži, kde mezi jeho učitele patřili mimo jiné Fourier a Poisson. Po návratu do Německa až do konce života působil na německých univerzitách a přispěl k tomu, že Německo se ve druhé polovině 19. století stalo matematickou velmocí.

Dirichlet byl zřejmě prvním, kdo k jistému účelu vymezil specifickou třídu funkcí. Šlo o po částech spojité a po částech monotonní funkce, které lze reprezentovat konvergentní Fourierovou řadou [Volkert, 1987]. V té souvislosti publikoval Dirichlet [1829, s. 132] známý příklad funkce definované předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} c & \text{jestliže } x \text{ je racionální,} \\ d & \text{jestliže } x \text{ je iracionální,} \end{cases} \tag{2.1}$$

kde $c \neq d$. Žádnou část Dirichletovy funkce (dnes zpravidla uváděné s $c = 1$ a $d = 0$) nelze graficky reprezentovat křivkou.

Rovněž spojitost funkce přestávala mít vztah k algebraickému vyjádření funkce. V 18. století byla spojitost funkce dávána do souvislosti s platností jednoho předpisu. Funkce $y = 1/x$ byla v tomto smyslu spojitá, i když její graf sestává ze dvou oddělených větví.

Nové chápání pojmu spojitosti funkce přišlo s Bolzanem a Cauchym. Spojitou byla zhruba řečeno nazvána taková funkce, jejímž grafickým vyjádřením je souvislá čára. Třída spojitých funkcí (v novém smyslu) představovala důležitou oblast, která začala být intenzívně studována.

Křivka vyjadřující podobu (spojité) funkce byla převážně chápána kinematicky. Tato představa je explicitně vyádřena např. v knize *Instituzioni analytiche* z roku 1748, jejíž druhá část, obsahující základy infinitezimálního počtu, byla roku 1775 vydána francouzsky pod názvem *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral*. Jedná se o první učebnici infinitezimálního počtu napsanou ženou. Maria Gaetana Agnesiová (1718 – 1799), „nejvýznamnější matematička od dob Hypatie“ [Struik, 1986, s. 178], popisuje funkci takto [Agnesi, 1775, s. 2]:

> *Proměnnými* nazýváme takové veličiny, které mohou růst či klesat, a představujeme si je jako *fluenty*, uvedené do spojitého pohybu působením nějaké síly.

Zdálo se samozřejmé, že dráha pohybujícího se bodu musí být hladká, alespoň po částech. To vedlo k názoru, že i spojitá funkce musí být diferencovatelná, s případnou výjimkou konečného počtu bodů.

Takto uvažuje např. Louis Poinsot (1777 – 1859), který byl ve svém přístupu ovlivněn Lagrangem. Poinsot stanul po Lagrangeově smrti roku 1813 v čele oddělení matematických věd Institutu, založeného v porevoluční době jako náhrada za zrušenou Akademii. V době restaurace byl však jako exponent císařství nucen odstoupit (jeho nástupcem na École Polytechnique se stal Cauchy). Ve svých přednáškách pro École Polytechnique Poinsot [1816, s. 116] uvádí, že poměr přírůstků proměnných $\Delta y/\Delta x$ má vždy limitu pro Δx blížící se nule a opírá se při tom o představu křivky, která je geometrickým znázorněním y jako funkce x a jejíž tečna „bezpochyby existuje“.

Ještě dříve se souvislostí mezi spojitostí funkce a existencí derivace v daném intervalu zabýval André Marie Ampère (1775 – 1836). Jeho článek [1806] se opíral o Lagrangeovu teorii analytických funkcí a obsahoval (mylný) důkaz, že každá spojitá funkce je diferencovatelná v každém bodě, až na případný konečný počet bodů, kde derivace neexistuje. Je třeba připomenout, že v té době nebyly ještě pojmy funkce a spojitosti definovány v dnešním smyslu.

O Ampèrově závěru však nepochybovali ani autoři většiny učebnic analýzy, které byly napsány v následujících desetiletích. Joseph Ludwig Raabe (1801 – 1859) v knize *Differential- und Integralrechnung* vydané roku 1839 rozumí pod pojmem funkce každý výraz, utvořený konečným či nekonečným počtem algebraických operací obsahujících proměnnou. Spojitou funkci definuje v podstatě v Cauchyově smyslu jako funkci, u níž nekonečně malá změna (nezávisle) proměnné vede k nekonečně malé změně hodnoty. Z „Ampèrovy věty“ činí Raabe [1839, s. v. a 7] základ diferenciálního počtu.

Rovněž Joseph Bertrand (1822 – 1900) a Henri Garcet (1815 – 1871) v knize *Traité d'algebre*, která se dočkala mnoha vydání, obecně konstatují (aniž by se zabývali podrobnostmi), že spojitá funkce f má v každém bodě derivaci, neboť „spojitá křivka [reprezentovaná rovnicí $y = f(x)$] má v každém bodě definovanou tečnu“ [Bertrand, 1878, 94].

Dne 18. července 1872 popsal Karl Weierstrass (1815 – 1897) ve své přednášce pro Královskou akademii v Berlíně spojitou funkci, která v rozporu se všeobecným očekáváním nemá vlastní derivaci v žádném bodě. Weierstrassova funkce je definována jako součet nekonečné (trigonometrické) řady

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\left(a^n x\pi\right), \tag{2.2}$$

kde a je liché celé číslo a b kladná konstanta menší než 1. Weierstrass ukázal, že pokud hodnota součinu ab je větší než $1 + 3\pi/2$, nemá funkce derivaci v žádném bodě.

Text původní přednášky byl vydán až ve druhém díle Weierstrassových spisů [Weierstrass, 1895], přesto se však Weierstrassova funkce stala první spojitou nediferencovatelnou funkcí, jejíž objev byl publikován. Zásluhu na tom měl Paul du Bois-Reymond (1831 – 1889), který o Weierstrassově funkci referoval v článku [du Bois-Reymond, 1875], zabývajícím se i dalšími otázkami.

Weierstrassova funkce vyvolala v matematických kruzích značný rozruch. O tom, jakým dojmem zapůsobila, svědčí nakonec i slova samotného du Bois-Reymonda ze zmíněného článku.

> Ještě mnohá tajemství se Weierstrassova funkce zdá ukrývat, a nemohu se ubránit pomyšlení, že jsme zde vedeni hluboko až k samé hranici našeho intelektu, podobné té, jakou v mechanice vyznačují pojmy hmoty a síly.

Časem se ukázalo, že první příklady funkcí tohoto typu byly popsány ještě před Weierstrassem. Nejstarším známým příkladem je Bolzanova funkce, která je spojitá v intervalu $[a, b]$, ale nemá v žádném bodě tohoto intervalu vlastní derivaci (Bolzano dokázal, že body, v nichž tato funkce nemá vlastní derivaci, tvoří v intervalu $[a, b]$ hustou množinu [Hykšová, 2003, s. 176]). Bolzano ji popsal před rokem 1834, avšak jeho objev zůstal pouze v rukopise a byl publikován až dlouho po Bolzanově smrti (více o Bolzanově funkci v části 5.7). O historii tohoto typu funkcí existuje rozsáhlá literatura (např. [Singh, 1953], [Volkert, 1987]).

Vznikla otázka, zda grafy takových funkcí lze ještě považovat za křivky. I du Bois-Reymond, který první podal zprávu o Weierstrassově funkci, napsal, že

> v každém případě pojem křivky, jak se používá v geometrii, variačním počtu nebo v mechanice, předpokládá existenci tečen.[1]

Uvedený citát pochází z du Bois-Reymondovy reakce [1885] na Scheefferovo pojednání o rektifikaci. Jak bylo řečeno v předchozí kapitole, Scheeffer na základě příkladu nespojité funkce, jejíž graf má z geometrického hlediska konečnou délku, avšak Riemannův integrál (1.1) pro ni neexistuje, odmítl spojovat problém rektifikovatelnosti s otázkou existence integrálu (1.1), jak to činil du Bois-Reymond.

Ukazovalo se stále naléhavěji, že je potřeba vyjasnit nejen pojem délky křivky, ale i pojem křivky samotné.

2.2 Jordanova definice křivky a Jordanova věta

V průběhu 80. let 19. století vyšla poprvé třísvazková učebnice *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1882 – 1887), jejímž autorem byl Camille Jordan (1838 – 1922). Jordan patří spolu s Cauchym a Duhamelem mezi ty francouzské matematiky spojené s École Polytechnique, kteří výrazně přispěli k vývoji analýzy v 19. století. Třetí svazek *Cours d'analyse* vydaný v roce 1887 obsahuje dodatek *Note sur quelques points de la théorie des fonctions*, ve kterém Jordan reviduje některé partie z hlediska soudobých nároků na přesnost. Dodatek obsahuje důkazy dvou vět, v nichž se vyskytuje pojem křivky: Cauchyovy věty a Jordanovy věty. V té souvislosti je zde podána obecná definice křivky, která se dnes nazývá Jordanova a která odráží představu křivky jako dráhy pohybujícícho se bodu [Jordan, 1887, s. 587].

Definice. *Křivkou* (v rovině) nazýváme množinu bodů popsaných rovnicemi

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \tag{2.3}$$

kde t je nezávislý parametr. Jsou-li f a φ spojité funkce proměnné t, hovoříme o *spojité* křivce. Mají-li tyto funkce stejnou periodu, jedná se o uzavřenou křivku. Nabývají-li x a y zároveň stejných hodnot pro různé hodnoty t, má křivka vícenásobné body.[2]

[1] Du Bois-Reymond používá v tomto smyslu vlastní pojem „Orthoidie“, který v matematice nezdomácněl, ale přesto se objevil i v české literatuře. Práce Karla Čupra (1883 – 1956) *O funkcích anorthoidních*, která vyšla roku 1912 jako součást výroční zprávy II. české státní reálky v Brně, je dalším solidním zdrojem informací o historii spojitých nediferencovatelných funkcí.

[2] Uvedená formulace včetně zvýraznění odpovídá původní definici. Tzv. Jordanova definice křivky přijímaná v pozdější době se omezuje na spojité funkce f a φ a $t \in [a, b]$, někdy vylučuje i vícenásobné body.

Definice křivky je doplněna definicí délky oblouku odpovídajícího hodnotám $a \leq t \leq b$ a stanovením nutné a postačující podmínky jeho rektifikovatelnosti. Jestliže

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b \tag{2.4}$$

je dělení intervalu $[a, b]$ a $f(t_k) = x_k$, $\varphi(t_k) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, bude délka lomené čáry vepsané křivce, jejímiž vrcholy jsou body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, ..., $[x_n, y_n]$ rovna

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}. \tag{2.5}$$

Existuje-li konečná limita výrazu (2.5) pro $n \to \infty$ (za předpokladu, že délky dělících intervalů se vesměs blíží nule), nazývá Jordan ve shodě s Duhamelem tuto limitu délkou oblouku křivky.

K tomu, aby oblouk měl konečnou délku, je nutné a stačí, aby součty

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}|, \quad \sum_{k=1}^{n} |y_k - y_{k-1}|$$

byly omezené pro všechna dělení (2.4). Jinými slovy, oblouk je rektifikovatelný, jestliže funkce f a φ mají na intervalu $[a, b]$ *konečnou variaci*.[3]

V komplexní analýze se dnes Jordanovou křivkou většinou rozumí homeomorfní obraz jednotkové kružnice. Označíme-li C takovou křivku a $\operatorname{Int} C$ její vnitřek, pak lze Cauchyovu větu formulovat takto (podrobněji viz např. [Černý, 1983, s. 202]):

Věta (Cauchy)**.** *Je-li C rektifikovatelná kladně orientovaná uzavřená Jordanova křivka a je-li funkce f holomorfní v otevřené množině G, která obsahuje množinu $\overline{\operatorname{Int} C}$, potom*

$$\int_C f(z)\, dz = 0. \tag{2.6}$$

V Jordanově formulaci [1887, s. 605] se jednalo o uzavřenou rektifikovatelnou křivku ležící ve vnitřku uzavřené křivky bez vícenásobných bodů, kde je funkce f holomorfní. Tato věta vyžadovala rovněž vyjasnění pojmu vnitřku uzavřené křivky. Jordan cítil nutnost dokázat intuitivně samozřejmé tvrzení o tom, že uzavřená spojitá křivka rozděluje rovinu na vnější a vnitřní část, přičemž vnitřní „obsahuje kruh konečného poloměru“ [Jordan, 1887, s. 593].

[3] Jordan zavedl pojem konečné variace (oscillation limitée) v příspěvku [Jordan, 1881], ve kterém se zabýval otázkou, jaké podmínky musí splňovat daná funkce, aby bylo možné ji reprezentovat trigonometrickou řadou.

Moderní formulace Jordanovy věty [Černý, 1983, s. 138] využívá pojem komponenta. Je-li $M \subset \mathbb{C}$, pak každou maximální souvislou podmnožinu M nazýváme *komponentou* množiny M.

Věta (Jordan)**.** *Nechť C je Jordanova křivka v $\mathbb{C}$. Pak množina $\mathbb{C} \setminus C$ je tvořena právě dvěma komponentami, z nichž právě jedna je omezená. Hranicí obou komponent je C.*

Jordan [1887, s. 592–593] při důkazu vycházel z předpokladu, že tvrzení věty platí pro uzavřenou lomenou čáru bez vícenásobných bodů. K dané křivce C lze sestrojit lomenou čáru P, která aproximuje C s libovolnou přesností. K ní se sestrojí lomené čáry S a S' ležící vně resp. uvnitř P tak, aby C ležela mezi nimi. Dalším krokem je pak konstrukce posloupností lomených čar $S_1, S_2, \ldots$ a $S'_1, S'_2, \ldots$ tak, že C bude stále ležet mezi odpovídajícími si čarami S_k a S'_k a ty budou obě pro každé $k > 1$ ležet mezi čarami S_{k-1} a S'_{k-1}. C tak bude zřejmě stále ležet uvnitř prstence dělícího rovinu na dvě části.

Jordanův důkaz byl záhy kritizován. Jeho zásluhou ale je, že rozpoznal závažnost věty a pokusil se ji dokázat. Pro Jordana měla tato věta využití hlavně v analýze v komplexním oboru, Schoenflies a další si však začali uvědomovat její význam v topologii [Johnson, 1979, s. 168].

První verze Jordanovy věty se objevuje již v Bolzanově rukopise *Anti-Euclid* ze 40. let 19. století, ve kterém Bolzano požaduje přeformulování eukleidovské geometrie podle zásad správné výstavby vědecké teorie, jak ji představil ve svém spise *Wissenschaftslehre.* Řada základních pojmů geometrie není podle Bolzana uspokojivě definována. Podobně některá tvrzení postrádají důkaz. Mezi tato tvrzení patří i následující věta [Johnson, 1976, s. 285]:

> Leží-li uzavřená křivka v rovině a jestliže pomocí souvislé linie [4] spojíme bod ležící uvnitř uzavřené křivky s bodem ležícím vně, pak tato souvislá linie protne uzavřenou křivku.

Johnson [1976, s. 285] spatřuje Bolzanovu motivaci v kritice Eukleidova prvního důkazu týkajícího se konstrukce rovnostranného trojúhelníku nad danou úsečkou, kterou vznesli Wolff a Kästner. Bolzanův vhled do problému byl ale podle něj mnohem hlubší.

2.3 Cantorův paradox dimenze

Korespondence mezi reálnými čísly a body číselné osy, která je součástí běžného školního výkladu teorie reálných čísel, byla korektním způsobem ustanovena v pojednání *Stetigkeit und die Irrationalzahlen* Richarda Dedekinda (1831 – 1916) z roku 1872. Teorie

[4] O Bolzanově pojetí linie, souvislé linie apod. pojednává odst. 3.2.

Dedekindových řezů, která se stala základní součástí teorie reálných čísel, je založena na výsledcích, k nimž Dedekind dospěl již na konci 50. let při zkoumání otázek spojitosti. Dedekind ukazuje, že množina reálných čísel je spojitá ve stejném smyslu, v jakém byla spojitost intuitivně přisuzována přímce. Impulsem k publikování této teorie bylo Cantorovo pojednání o reálných číslech, které vyšlo téhož roku a o kterém se Dedekind s uznáním zmiňuje. Dauben [1979, s. 48] upozorňuje, že naopak Dedekindovo tvrzení, že „číselná osa je nekonečně bohatší na body než obor racionálních čísel na čísla“, předznamenalo další směr Cantorova výzkumu nekonečných množin.

Nástrojem pro porovnávání nekonečných množin se Cantorovi stal pojem *mohutnosti* (Mächtigkeit), jeden ze základních stavebních kamenů jeho teorie množin. Množiny M a N mají stejnou mohutnost (jsou *ekvivalentní*), jestliže existuje prosté zobrazení M na N. Již roku 1874 Cantor potvrdil obecně přijímaný názor, že reálných čísel je „více“ než přirozených, když dokázal, že neexistuje prosté zobrazení množiny přirozených čísel *na* množinu reálných čísel.

Dalším Cantorovým krokem bylo porovnání mohutnosti bodových množin reprezentujících útvary různé dimenze, tedy např. úsečky a čtverce. Cantor si položil na první pohled absurdní otázku, zda by bylo možné najít prosté zobrazení úsečky na čtverec a zřejmě i ke svému vlastnímu překvapení dospěl ke kladné odpovědi. V roce 1877 oznamuje Dedekindovi překvapující výsledek, že vícerozměrné útvary mají stejnou mohutnost jako křivky [Dauben, 1979, s. 54–55].

Cantorova první úvaha se opírala o představu vyjádření souřadnic bodu vícerozměrného útvaru pomocí desetinného rozvoje a jejich složení do desetinného rozvoje bodu úsečky. Ve zjednodušeném dvourozměrném případě by se bod jednotkového čtverce popsal pomocí dvojice čísel

$$x = 0,a_1a_2\dots a_n\dots,\quad y = 0,b_1b_2\dots b_n\dots, \tag{2.7}$$

které by se přiřadil bod jednotkového intervalu

$$t = 0,a_1b_1a_2b_2\dots a_nb_n\dots. \tag{2.8}$$

V první verzi Cantorova důkazu odhalil Dedekind rychle slabé místo: tím byla reprezentace čísel s ukončeným desetinným rozvojem. Cantor připustil oprávněnost Dedekindovy námitky a slabé místo v důkazu odstranil, i když za cenu ztráty jednoduchosti argumentace.

Cantor své výsledky publikoval v článku [Cantor, 1877]. Zdůrazňuje v něm, že k jednoznačnému určení prvku $\mathbb{R}^n$ stačí jediný parametr a dimenze chápaná jako počet nezávislých parametrů nutných k určení daného prvku není jedinečnou charakteristikou prostoru.

S takto připravenou půdou formuluje Cantor [1877, s. 245] hlavní tvrzení svého pojednání:

> Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je n vzájemně nezávislých proměnných veličin nabývajících hodnot ≥ 0 a ≤ 1 a nechť t je jiná proměnná se stejným oborem hodnot $(0 \leq t \leq 1)$. Pak je možné veličinu t přířadit systému n veličin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak, že jedné hodnotě t přísluší jeden určitý systém hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a jednomu danému systému $x_1, x_2, \ldots, x_n$ přísluší určitá hodnota t.

V důkazu na rozdíl od první verze sdělené Dedekindovi uvažuje nejprve pouze množiny iracionálních čísel z intervalu $(0, 1)$. V dalším kroku pak ukáže, že existuje prosté zobrazení množiny všech iracionálních čísel z intervalu $(0, 1)$ na množinu všech reálných čísel z intervalu $[0, 1]$.

Článek [Cantor, 1877] byl posledním Cantorovým příspěvkem v *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Vliv Leopolda Kroneckera (1823 – 1891) vedl k tomu, že Cantor další výsledky svého studia nekonečných množin publikoval v *Mathematische Annalen* [Dauben, 1979, s. 69].

2.4 Otázka invariance dimenze

Existuje-li prosté zobrazení úsečky na čtverec, stačí k jednoznačnému určení libovolného bodu čtverce jediný parametr. Pokud bychom chápali dimenzi nějakého geometrického objektu zhruba řečeno jako počet nezávislých parametrů (souřadnic), které jsou potřeba k jednoznačnému určení jeho libovolného bodu, byl Cantorův výsledek v rozporu se zřejmou dvourozměrností čtverce. To vedlo k velmi závažným otázkám, týkajícím se samotného pojmu dimenze a jeho invariance vůči jistému druhu zobrazení. Cantorův výsledek v podstatě znamenal, že z existence bijekce $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ neplyne $n = m$. Otázka zněla, zda připojením dalších předpokladů o zobrazení φ nelze dosáhnout toho, že dimenze bude vůči φ invariantní.

V chápání geometrického prostoru a dimenze došlo v 19. století k podstatným změnám. Geometrie se postupně oprostila od vazby na reálný svět a každodenní zkušenost. Obecná teorie rozlehlosti a spojitých veličin, kolem poloviny 19. století rozvíjená na filosoficko-geometrických základech především Grassmannem, Riemannem a Helmholtzem, měla značný význam i pro základy analýzy.

Bernhard Riemann (1826 – 1866) se těmito otázkami zabýval ve své habilitační přednášce *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* na univerzitě v Göttingen, přednesené roku 1854, avšak publikované až roku 1868. V první části vysoce ceněné přednášky formuloval Riemann pojem n-rozměrné variety (n-fach augedehnten Mannigfaltigkeit). Riemannova teorie měla sloužit jako obecný rámec pro *analysis situs*, jak byla tehdy nazývána topologie; chápání variety jako topologického objektu patrně ztížilo srozumitelnost Riemannových myšlenek [Johnson, 1979, s. 121]. Riemann ukazuje induktivní způsob konstrukce n-rozměrné variety na základě představy pohybu. Obráceným postupem lze podle Riemanna specifikovat bod n-rozměrné variety pomocí n reálných čísel (Größenbestimmungen). Johnson [1979, s. 127] při kritickém zkoumání této části Riemannovy přednášky uvádí vážné koncepční potíže a konstatuje, že „Riemann teprve ohledával cestu vedoucí k obecné topologii".

Cantorův paradoxní výsledek zpochybnil závěry Riemanna a dalších týkající se souřadnicového pojetí dimenze a její invariance. Cantor a Dedekind nový objev interpretovali různě. Pro Cantora znamenal nutnost revize všech dosavadních výsledků, které se přímo či nepřímo opíraly o předpoklad invariance dimenze. Dedekind naproti tomu hájil předchozí výsledky a přikláněl se k názoru, že invarianci dimenze lze obhájit připojením požadavku spojitosti zobrazení φ [Dauben, 1979, s. 57].

V době bezprostředně následující vyšlo několik článků obsahujících důkazy, že nelze sestrojit prosté a navíc *spojité* zobrazení $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^m$, pokud $n \neq m$. Lüroth, Thomae a Jürgens, jejichž příspěvky vyšly během roku 1878, se snažili s menší či větší mírou obecnosti ukázat, že předpoklad spojitosti zajistí invarianci dimenze v tom smyslu, jak byla chápána před Cantorem. Eugen Netto (1848 – 1919) šel dále než jeho předchůdci.

Netto studoval v Berlíně u Kummera a Weierstrasse a devět let učil na gymnáziu Friedricha Werdera; z té doby pochází jeho článek o invarianci dimenze. Po krátkém působení ve Štrasburku získal na Weierstrassovo doporučení místo na berlínské univerzitě. Téměř čtvrt století pak působil jako řádný profesor na univerzitě v Giessenu. Vedle práce o invarianci dimenze jsou známy především jeho výsledky z oblasti teorie grup.

V článku [Netto, 1879] dokazuje Netto obecné tvrzení, které je dnes občas spojováno s jeho jménem [Sagan, 1994, s. 6].

Věta (Netto)**.** *Je-li f prosté zobrazení m-rozměrné variety na n-rozměrnou varietu a $m \neq n$, pak f není spojité.*

Nechť M_n označuje n-rozměrnou varietu. Prosté zobrazení mezi M_0 (podle Netta jednoprvkovou množinou) a M_1 (linií) zřejmě není možné. Totéž platí o prostém zobrazení mezi M_n, $n \geq 1$ a M_0. Označíme $\mathfrak{A}$ jednoduchý uzavřený oblouk (einfache geschlossene Linie) v M_2 a předpokládáme jeho prosté zobrazení do M_1. Obraz $\mathfrak{A}$ v M_1, který označíme A, nemůže být jednoprvkovou množinou ani celou M_1 a musí podle Netta být určitou částí (ein bestimmtes Stück) linie M_1. Uvažujme v M_1 nějaký bod ležící uvnitř A a jiný bod, který není prvkem A. Chceme-li spojit tyto dva body obloukem (auf stetigem Wege) ležícím v M_1, musíme překonat některý z koncových bodů A (označme je α_1, α_2). Nechť těmto bodům odpovídají v M_2 body a_1, a_2. Kdyby zobrazení $M_2 \to M_1$ bylo navíc spojité, pak by nebylo možné spojit žádnou dvojici bodů v M_2, z nichž jeden je prvkem $\mathfrak{A}$ a druhý ne, aniž by spojující oblouk obsahoval některý z bodů a_1, a_2. Z toho plyne, že jednoznačné zobrazení $M_2 \to M_1$ nemůže být zároveň spojité. Netto tuto úvahu dále zobecňuje na případ vícerozměrných variet.

Nettův důkaz, jehož hlavní myšlenka je zde reprodukována (včetně původního značení), ilustruje dobře stav vývoje topologie na konci sedmdesátých let 19. století. Netto si kladl otázky, které byly pro uchopení problému zásadní: co znamenají pojmy hranice a vnitřek množiny, co je vlastně dimenze a jakým způsobem by měla být korektně definována apod. Souvislost chápe Netto jako možnost spojit každou dvojici bodů obloukem, který je celý součástí dané množiny. Na druhé straně je však Nettův postup částečně založen na intuici, některá tvrzení necítí potřebu dokazovat. Není-li obrazem oblouku bod, musí jím být zase oblouk, konstatuje např. Netto. Důkladný rozbor ukazuje, že jeho postup se opírá o další předpoklady, jako je věta o invarianci oblasti nebo předpoklad o separovatelnosti bodů [Johnson, 1979].

Dokázat invarianci dimenze se pokusil rovněž Cantor v článku z roku 1879. Jeho důkaz se opíral o jisté zobecnění věty o mezihodnotě.

Nettovy a Cantorovy výsledky byly zprvu obecně přijímány; Jürgens sice upozornil záhy na mezery v Nettově argumentaci, avšak jeho osmnáctistránkový spis *Allgemeine Sätze über Systeme von zwei eindeutigen und stetigen reellen Functionen von zwei reellen Veränderlichen*, vydaný jako soukromý tisk v nakladatelství B. G. Teubner roku 1879, zůstal asi víceméně bez povšimnutí [Dauben, 1979, s. 324].

Enno Jürgens (1849 – 1907) studoval v Heidelbergu a doktorskou disertační práci obhájil roku 1875 na univerzitě v Halle. Od roku 1883 působil na Technische Hochschule v Cáchách. K problematice invariance dimenze se vrátil na konci století v pojednání [Jürgens, 1899], v němž kriticky rozebíral mezery jak v Nettově, tak i v Cantorově postupu ve světle nových objevů, např. Peanovy křivky (viz následující odstavec). Jürgens poukazoval na nutnost vyjasnit pojem dimenze v jistých patologických případech, kdy např. množina bodů ležících na ploše nemá ani charakter linie ani charakter plochy (ein ausdehnungloser Teil). Tato kritika měla na rozdíl od jeho předchozího článku ohlas a jeho argumenty přejal např. Schoenflies [1908].

Hodnocení Nettova postupu u moderních autorů do značné míry závisí na tom, zda jsou více zdůrazněny nové myšlenky [Dauben, 1979, s. 72] nebo mezery v argumentaci [Johnson, 1979]. Práce Netta, Jürgense a Cantora však měly nepochybně velký vliv na směr, kterým se ubíral vývoj topologie a v jehož rámci bylo nutné vyjasnit, jaké vlastnosti určují dimenzi dané množiny a které objekty lze zvát liniemi, plochami a tělesy.

2.5 Křivky vyplňující prostor

Na Cantorovu a Nettovu práci navázal Giuseppe Peano (1858 – 1932) článkem [Peano, 1890], ve kterém popsal spojité zobrazení intervalu na čtverec, tedy křivku, která prochází všemi body čtverce. Peanův objev byl přinejmenším stejně překvapující jako Cantorův paradox dimenze, neboť byl v naprostém rozporu s obecně přijímanou intuitivní představou křivky.

Libovolné číslo $t \in [0,1]$ lze vyjádřit ve tvaru

$$t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots , \tag{2.9}$$

kde koeficienty $a_1, a_2, \ldots$ nabývají hodnot $0, 1$ nebo 2, resp. ve tvaru triadického rozvoje $0, a_1a_2a_3\ldots$. Konstrukce Peanovy křivky je založena na použití operátoru $\mathbf{k}$, který číslu a_i přiřazuje jeho doplněk v trojkové soustavě, tedy $\mathbf{k}a_i = \mathbf{k}^1 a_i = 2 - a_i$, kde $a_i = 0, 1$ nebo 2. Pro $n \geq 2$ definujeme $\mathbf{k}^n a_i = \mathbf{k}(\mathbf{k}^{n-1}a_i)$; platí zřejmě $\mathbf{k}^n a_i = a_i$ pro n sudé a $\mathbf{k}^n a_i = \mathbf{k}a_i$ pro n liché.

Pro $t = 0, a_1a_2a_3\ldots$ definujeme $x = f(t) = 0, b_1b_2b_3\ldots$, kde $b_1 = a_1$, $b_2 = \mathbf{k}^{a_2}a_3$, $b_3 = \mathbf{k}^{a_2+a_4}a_5, \ldots$ a $y = \varphi(t) = 0, c_1c_2c_3\ldots$, kde $c_1 = \mathbf{k}^{a_1}a_2$, $c_2 = \mathbf{k}^{a_1+a_3}a_4$, $c_3 = \mathbf{k}^{a_1+a_3+a_5}a_6, \ldots$.

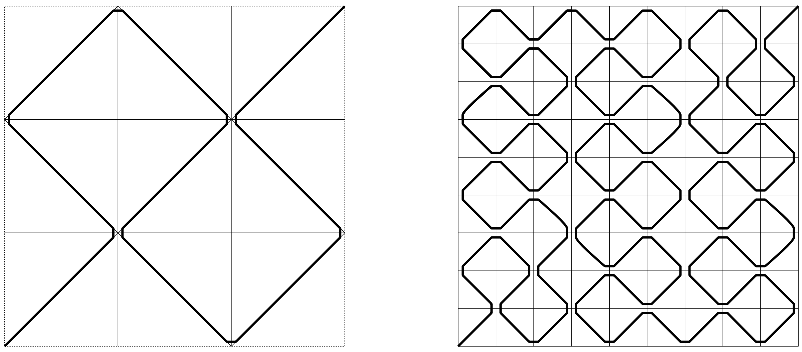
Triadický rozvoj bodů uzavřeného intervalu $[0,1]$ není vždy určen jednoznačně. Čísla s ukončeným rozvojem (která vynásobena nějakou mocninou 3 jsou rovna celému číslu) lze psát ve tvaru

$$0, a_1a_2\ldots a_n222\ldots, \text{ kde } a_n = 0 \text{ nebo } 1,$$

nebo ve tvaru

$$0, a_1a_2\ldots a_n'000\ldots, \text{ kde } a_n' = a_n + 1.$$

Peano proto nejprve dokazuje, že zobrazení $[0,1] \to [0,1]\times[0,1]$, jehož složky tvoří funkce $f(t)$ a $\varphi(t)$, je nezávislé na vyjádření čísel s ukončeným rozvojem. Stručně zdůvodňuje, že toto zobrazení je spojité a oborem jeho hodnot je celý jednotkový čtverec. Dále naznačuje možnost použití jiné než trojkové soustavy a také sestrojení křivky procházející všemi body jednotkové krychle. Na závěr bez důkazu konstatuje, že funkce $f(t)$ a $\varphi(t)$ jsou spojité nediferencovatelné funkce parametru t (důkaz provedl Moore [1900]).



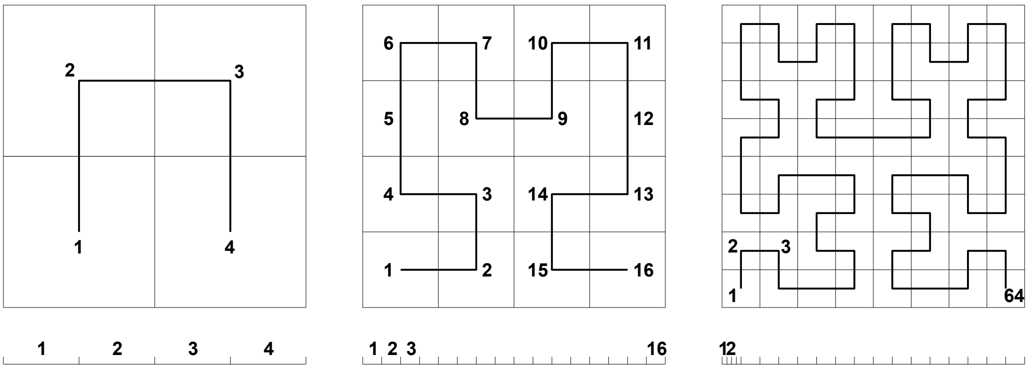
OBR. 2.1: Geometrické znázornění konstrukce Peanovy křivky (podle [Moore, 1900])

Konstrukce Peanovy křivky může být geometricky znázorněna pomocí lomených čar, které získáme spojením obrazů bodů $0, 1/3^{2n}, 2/3^{2n}, \ldots, (3^{2n}-1)/3^{2n}$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Lomené čáry pro $n = 1$ a 2 jsou znázorněny na obr. 2.1 (zakulacené hroty jsou použity pro lepší představu o průběhu čar).

Krátce po Peanově článku přinesly *Mathematische Annalen* krátký příspěvek Davida Hilberta (1862 – 1943), ve kterém byla popsána geometrická konstrukce spojitého zobrazení jednotkové úsečky na jednotkový čtverec. Hilbert [1891] ukazuje, že souřadnicové funkce, zprostředkující konstrukci zobrazení úsečky na čtverec, lze popsat geometricky názorným způsobem. Vycházel přitom z následující myšlenky: rozdělíme jednotkový interval na čtyři stejné úsečky a jednotkový čtverec na čtyři menší shodné čtverce. Každé dílčí úsečce přiřadíme jeden dílčí čtverec způsobem, který je naznačen na obr. 2.2 vlevo (jedná se v podstatě o překreslení původní ilustrace z Hilbertova článku). V dalším kroku rozdělíme každou z dílčích úseček opět na čtyři stejné díly a každý dílčí čtverec na čtyři menší čtverce. Úsečky přiřadíme vzájemně jednoznačně čtvercům tak, aby sousedním úsečkám odpovídaly sousední čtverce a aby každý ze čtyř dílů dané úsečky odpovídal nějakému dílu čtverce korespondujícího s danou usečkou (obr. 2.2 uprostřed).

Tímto způsobem je naznačeno, jak bude každému bodu úsečky jednoznačně přiřazen bod čtverce. K tomu stačí určit posloupnost vnořených intervalů, které odpovídá posloupnost vnořených čtverců. Hilbertova konstrukce se opírá o Cantorovu větu [Veselý, 2009, s. 371].

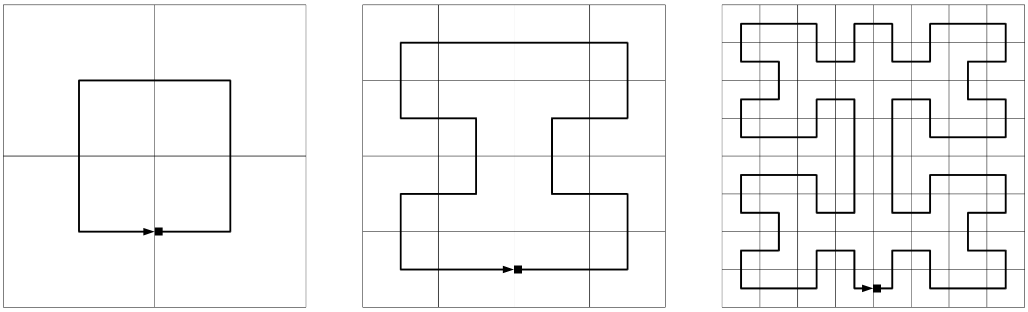
Věta (Cantor)**.** *Nechť* (X, d) *je úplný metrický prostor a nechť* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v prostoru* X*, tj.* $A_{n+1} \subset A_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Nechť* $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$*. Pak existuje právě jeden bod* $x \in X$ *takový, že* $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$*.*



OBR. 2.2: Konstrukce Hilbertovy křivky [Hilbert, 1891]

V případě, že daný bod $t \in (0,1)$ je koncovým bodem některého z dílčích intervalů, odpovídá mu více posloupností úseček a tudíž i více posloupností čtvreců, které však vedou ke stejnému obrazu. Zobrazení je surjektivní a spojité (podrobně dokazuje např. Veselý [2009, s. 373–374]). Zobrazení ovšem není vzájemně jednoznačné; Hilbert uvádí, že každému bodu čtverce odpovídá jeden, dva nebo čtyři body úsečky.[5]

Eliakim Hastings Moore (1862 – 1932) popsal variantu Hilbertovy křivky, která je uzavřená (počáteční bod je totožný s koncovým). Jeho konstrukce předpokládá jiné řazení čtverců, jak je naznačeno na obr. 2.3.



OBR. 2.3: Konstrukce Moorovy křivky [Moore, 1900]

Henri Lebesgue (1875 – 1941) popsal křivku procházející všemi body jednotkového čtverce, která se od předchozích křivek liší [Lebesgue, 1904, s. 44–45]. Pro

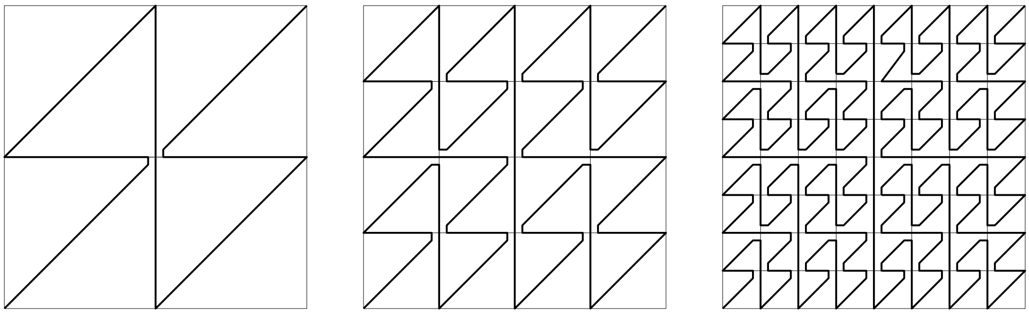
$$t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots , \tag{2.10}$$

[5] Sierpiński [1912, s. 18] ukázal, že existují rovněž body čtverce, jimž odpovídají tři body úsečky.

kde koeficienty a_i nabývají pouze hodnot 0 nebo 2, položíme

$$x = f(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{2^n} + \cdots\right) \tag{2.11a}$$

$$y = \varphi(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{2^2} + \cdots + \frac{a_{2n}}{2^n} + \cdots\right) \tag{2.11b}$$



OBR. 2.4: Konstrukce Lebesgueovy křivky

Body, které nelze vyjádřit rozvojem (2.10), leží v některém ze styčných intervalů Cantorovy množiny. Je-li (t_0, t_1) takovým intervalem, definujeme

$$x = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0), \quad y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}(t - t_0). \tag{2.12}$$

Část křivky odpovídající (t_0, t_1) je tedy úsečkou spojující body $[x_0, y_0]$ a $[x_1, y_1]$. První kroky konstrukce Lebesgueovy křivky jsou znázorněny na obr. 2.4 (včetně zakulacených rohů pro lepší představu o průběhu lomené čáry).

První obsáhlejší pojednání o křivkách vyplňujících prostor[6] se objevilo už v roce 1912. Bylo napsáno v polštině; jeho autorem byl Wacław Sierpiński (1882 – 1969) a článek [Sierpiński, 1912] vyšel v časopise *Prace matematyczno-fizyczne*, prvním polském matematickém časopise, vydávaném od roku 1888. Článek obsahuje i popis nové křivky (nazývané dnes křivkou Sierpińského), vyplňující trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$ a $[0, 1]$. Mnoho knih vydaných od počátku 20. století obsahovalo popis křivek vyplňujících prostor, na ucelenou monografii však toto téma čekalo až do devadesátých let 20. století, kdy vyšla kniha Hanse Sagana *Space-Filling Curves* [Sagan, 1994].

[6] I když se většinou jedná o křivky procházející všemi body čtverce nebo trojúhelníku, používám pro křivky tohoto typu souhrnné označení křivky vyplňující prostor, které je českým ekvivalentem anglického space-filling curves, popř. křivky Peanova typu.

2.6 Křivky s nenulovým vnějším obsahem

Druhé vydání *Cours d'analyse* z roku 1893 Jordan zcela přepracoval, aby kniha splňovala nároky na přesnost odpovídající tehdejšímu stavu vývoje analýzy. Definici křivky a poznatky týkající se rektifikace a rektifikovatelnosti obsahoval již dodatek k prvnímu vydání, i když některá odvození byla revidována. Když Jordan dokazoval, že rovinný obrazec ohraničený rektifikovatelnou uzavřenou křivkou má vždy konečný obsah, ukázal zároveň, že vnější obsah[7] rektifikovatelné křivky je vždy nulový [Jordan, 1893, s. 107]. Jordanova úvaha je založena na představě rozdělení oblouku o délce L na n dílčích oblouků stejné délky a rozdělení roviny, v níž křivka leží, na čtverce o straně L/n. Každý z dílčích oblouků může být zřejmě obsažen nejvýše ve čtyřech takových čtvercích. Celá křivka je tedy pokryta čtverci o celkovém obsahu nejvýše rovném $4nL^2/n^2 = 4L^2/n$, který se s rostoucím n blíží nule.

V roce 1894 byl založen časopis *L'intermédiaire des mathématiciens*, který byl určen k výměně otázek, odpovědí, problémů a jejich řešení mezi matematiky celého světa. V prvním svazku vznesl Jordan [1894] otázku, zda vnější obsah obecné (Jordanovy) křivky může zůstat „neurčitý“ (indeterminée). Peano [1896] odpověděl poukazem na svůj příklad křivky vyplňující jednotkový čtverec. Není známo, zda Jordan Peanovu odpověď vzal na vědomí, veřejně na ni ale nikdy nereagoval [Johnson, 1979, s. 172]. Definice křivky uvedená v dodatku k prvnímu vydání *Cours d'analyse* zůstala v dalších vydáních beze změny a Peanův objev zmiňován nebyl.

Bylo nicméně přirozené, že se objevila snaha omezit Jordanovu definici křivky tak, aby nepřipouštěla patologické objekty typu Peanovy či Hilbertovy křivky.

Adolf Hurwitz (1859 – 1919) ve své přednášce na prvním mezinárodním kongresu matematiků (ICM) v Curychu při posuzování podmínek platnosti Cauchyovy věty (viz s. 49) položil základní otázky [Hurwitz, 1898, s. 101]:

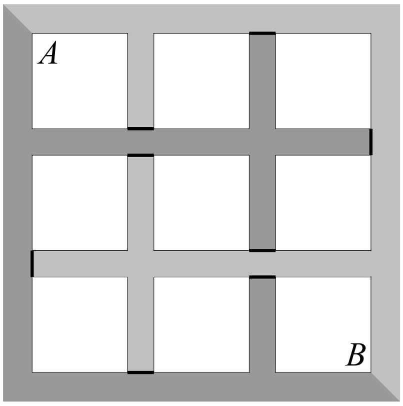
> Co je jednoduchá uzavřená linie, co je vůbec linie a zvláště uzavřená linie, a jsou ve formulaci Cauchyovy věty přípustné všechny nebo pouze některé uzavřené linie?

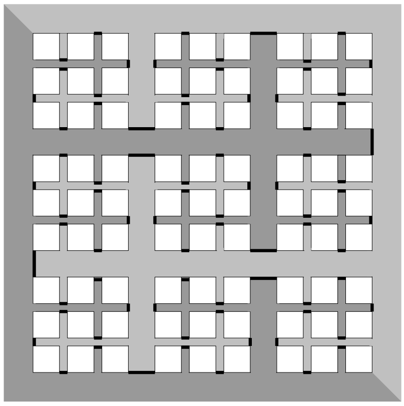
Hurwitz navrhl zkoumat uzavřené množiny z hlediska tříd ekvivalence, které jsou tvořeny množinami, pro něž existuje prosté spojité zobrazení jedné na druhou. Jednoduchá uzavřená křivka (v rovině) je podle něj množina bodů, která patří do téže třídy jako obvod čtverce.

[7] Peano [1887, s. 156] definuje vnější obsah množiny bodů v rovině takto: rozdělíme rovinu sítí čtverců o straně 2^{-n} a označíme s_n součet obsahů všech čtverců, které mají s danou množinou neprázdný průnik. Posloupnost s_n je nerostoucí, její limita představuje vnější obsah dané množiny.

Osgood [1903] v duchu Hurwitzova pojetí definuje *Jordanovu křivku* jako množinu bodů (v rovině), která je prostým a spojitým zobrazením úsečky včetně koncových bodů (není-li křivka uzavřena) nebo kružnice (v případě uzavřené křivky). Tato definice vylučuje křivky s vícenásobnými body a tedy i křivky Peanova typu. Osgood však ukázal, že i při tomto omezení lze na výše uvedenou Jordanovu otázku dát kladnou odpověď. Popisuje konstrukci Jordanovy křivky (bez vícenásobných bodů), která má nenulový vnější obsah (v Peanově smyslu).

William Fogg Osgood (1864 – 1943) vystudoval harvardskou univerzitu a svoje matematické vzdělání dovršil na konci 80. let 19. století v Německu. V roce 1890 se vrátil na Harvard, kde působil až do roku 1933. Je oceňován za to, že do Spojených států přenášel myšlenky a atmosféru z míst, která v té době představovala hlavní centra matematického světa.





OBR. 2.5: Konstrukce Osgoodovy křivky [Osgood, 1903]

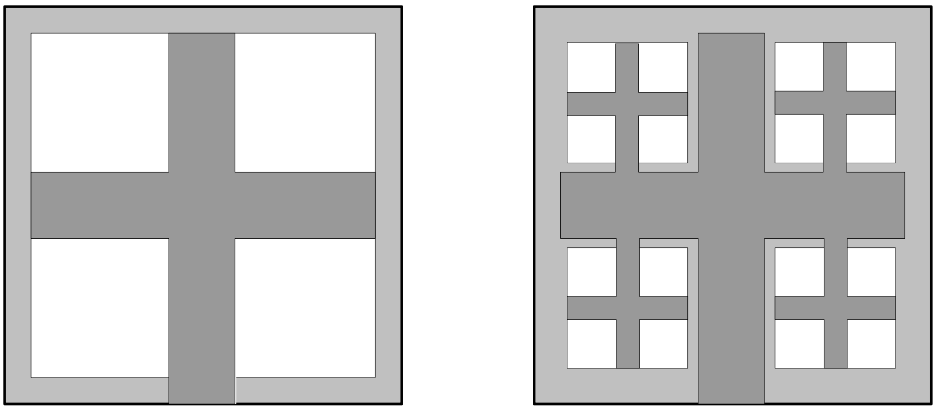
Prvním krokem při konstrukci Osgoodovy křivky je sestrojení jednotkového čtverce, jehož úhlopříčku AB protáhneme na obě strany (obr. 2.5). Bod A bude počátkem konstruované křivky; přiřadíme mu hodnotu parametru $t = 0$. Bod B bude jejím koncovým bodem a bude mu odpovídat $t = 1$. Dvě části roviny rozdělené protaženou úhlopříčkou čtverce budou představovat vodu (tmavě šedá oblast) a pevnou zemi (světle šedá oblast), mezi nimiž leží bílý čtverec. V prvním kroku rozdělíme čtverec pomocí kanálů a hrází na 9 menších stejných čtverců. Místa, kde se kanály a hráze dotýkají (na obr. 2.5 vyznačená černou barvou), budou součástí konstruované křivky. Interval $[0, 1]$ rozdělíme na 17 stejných dílů. Prvnímu úseku konstruované křivky ležící mezi čtverci 1 a 2 přiřadíme interval $[\frac{1}{17}, \frac{2}{17}]$, spojnici čtverců 2 a 3 interval $[\frac{3}{17}, \frac{4}{17}]$ atd. Osmi úsekům křivky tak budou odpovídat intervaly $[\frac{2n-1}{17}, \frac{2n}{17}]$, $n = 1, 2, \ldots, 8$.

V dalším kroku postupujeme analogickým způsobem v každém z devíti menších čtverců. Voda i pevnina tvoří i po vybudování nových kanálů a hrází jednoduše souvislé oblasti.

Součástí konstruované křivky se stanou opět místa, kde se kanály a hráze setkávají. Těm, které se nacházejí v prvním čtverci, přiřadíme intervaly $[\frac{2n-1}{17^2}, \frac{2n}{17^2}]$, $n = 1, 2, \ldots, 8$, a podobně v dalších čtvercích. Stejným způsobem pokračujeme v konstrukci dále. Výsledná Jordanova křivka bude tvořena (a) spočetným systémem úseček, kterým bude odpovídat spočetný systém intervalů ležících v $[0, 1]$, a (b) hromadnými body množiny koncových bodů těchto úseček, jimž budou přiřazeny ty hodnoty parametru t, které budou limitami posloupností koncových bodů odpovídajících intervalů.

Vhodnou vobou šířky kanálů a hrází lze dosáhnout toho, že vnější obsah Osgoodovy křivky bude mít libovolnou hodnotu $0 < S < 1$. Nechť $\lambda < \frac{1}{2}$ a nechť $\{\epsilon_k\}$ je klesající posloupnost kladných čísel, které tvoří konvergentní řadu $\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\ldots$, jejíž součet je λ. V prvním kroku budeme volit šířku kanálů tak, aby jejich obsah byl ϵ_1. V druhém kroku budeme volit šířku kanálů tak, aby jejich celkový obsah v devíti menších čtvercích byl ϵ_2. Tímto postupem dosáhneme toho, že celkový (vnitřní) obsah kanálů bude $\sum \epsilon_n = \lambda$. Stejně volíme i šířku hrází. Vnější obsah Jordanovy křivky pak bude $S = 1 - 2\lambda$.

Osgood uvádí, že k této konstrukci jej přivedlo zkoumání možností hranice jednoduše souvislé oblasti. Jiný způsob konstrukce Osgoodovy křivky uvádí Sagan [1994, s. 134] a upozorňuje, že limitní podobou Osgoodovy křivky (pro $\lambda \to 0$) je Peanova křivka. Sagan [1994, s. 140–141] ukazuje i konstrukce křivek Osgoodova typu, jejichž limitní podobou je Hilbertova či Lebesgueova křivka. Osgoodův přístup působí možná poněkud komplikovaně, jeho představa však zaujala Mandelbrota [1982, s. 149], který v prolínajících se systémech kanálů a hrází viděl obraz lidského těla s jeho cévním systémem pronikajícím do každé části tkáně.



OBR. 2.6: Konstrukce křivky Youngové [Young, 1905]

Youngová [1905] popsala variantu Osgoodovy křivky, jejíž konstrukce vedla k názornější představě o tvaru výsledné křivky. Křivka Youngové je v každém kroku aproximována lomenou čárou, která tvoří hranici tmavě šedé oblasti sestávající z částí tvaru kříže (obr. 2.6).

Grace Youngová (roz. Chisholmová) (1868 – 1944) studovala matematiku na univerzitě v Cambridge na Girton College, která byla tehdy vyhrazena pouze ženám. Pokračovala ve studiu na univerzitě v Göttingen, kde pod vedením Felixe Kleina získala roku 1895 doktorát (byla první ženou, která v Německu dosáhla tohoto stupně). Následujícího roku se provdala za svého učitele z Girton College Williama Henryho Younga. Zabývala se převážně analýzou a teorií množin, řadu prací publikovala společně se avým manželem.

Nevýhodou konstrukcí Osgooda a Youngové je, že některé části intervalu $[0, 1]$ se zobrazují na množiny nulového vnějšího obsahu (neboť součástí obou křivek je spočetný systém úseček). Sierpiński navrhl jinou konstrukci křivky Osgoodova typu, jejíž každá část je křivkou s nenulovým vnějším obsahem. Podobnou křivku popsal roku 1917 Konrad Knopp (1882 – 1957) v článku zabývajícím se vlastnostmi von Kochovy křivky a křivek Peanova a Osgoodova typu (viz [Sagan, 1994, s. 136–140]).

2.7 Význam patologických křivek

„Intuice nemůže přinést přesnost ani jistotu [. . .]. Čím větší nároky byly v matematice kladeny na přesnost, tím méně prostoru zbývalo pro intuici. Neuplynula příliš dlouhá doba od poznání, že nelze zjednat přesnost v dokazování, nebyla-li již dříve přítomna v definicích. Objekty, které poutaly pozornost matematiků, byly po dlouhou dobu špatně definovány,“ uvádí Henri Poincaré (1854 – 1912) v eseji *Les définitions mathématiques et l'enseignement* [Poincaré, 1914, s. 123–124].

Nezdálo se například nutné dokazovat, že jestliže spojitá funkce nabývá v krajních bodech uzavřeného intervalu hodnot různého znamení, musí v tomto intervalu existovat bod, ve kterém je tato funkce rovna nule. Tvrzení, že jednoduchá uzavřená křivka rozděluje rovinu na dvě oblasti, bylo pokládáno za natolik zřejmé, že potřeba zvláštního důkazu nebyla pociťována. Představa spojité křivky, která není hladká (s případnou výjimkou konečného počtu bodů), se zdála být absurdní.

Bolzano byl jedním z prvních, kdo si uvědomovali potřebu dokazovat tvrzení, která byla dříve považována za samozřejmá. Některé bez důkazu přijímané závěry se časem potvrdily, jiné musely být revidovány. První objekty, kterým se později začalo říkat patologické, sloužily jako protipříklady k intuitivně očekávaným výsledkům. Paradoxní podoba některých závěrů byla způsobena nesouladem s povrchním očekáváním.

Volkert [1987, s. 194] uvádí, že „seznam prominentních protipříkladů" v analýze vznikl v souvislosti se zkoumáním vlastností, které byly v minulosti s funkcemi spojovány a které ve zkratce vyjadřuje výroky „všechny omezené funkce jsou integrovatelné", „všechny spojité funkce jsou diferencovatelné", „všechny diferencovatelné funkce jsou analytické".

První přirozenou reakcí bylo vyloučit tyto objekty ze světa matematiky; zdálo se totiž, že nemají žádný praktický význam. „Dříve, když se vymyslela nová funkce, bylo to se zřetelem na nějaký praktický účel. Dnes se vymýšlejí jen proto, aby ukázaly vady v uvažování našich otců, a nelze z nich vyvodit nic jiného", píše Poincaré (s. 125).

Lebesgue [1922, s. 13] popisuje odpor, který musel překonávat při publikování výsledků svého studia funkcí reálné proměnné. Charles Hermite (1822 – 1901) bránil např. zařazení první z jeho prací předložených Akademii prostřednictvím Emila Picarda (1856 – 1941) do *Comptes rendus*. Bylo to v době, kdy Hermite napsal svou proslulou větu „S hrůzou a zděšením jsem se odvrátil od těchto politováníhodných zjevení funkcí bez derivací". Jeho přáním bylo, aby z matematiky byly vyloučeny všechny problémy, kterých se tyto funkce nějakým způsobem týkají. Pro mnoho matematiků se Lebesgue stal „mužem funkcí bez derivací", ačkoliv se jimi vlastně nikdy speciálně nezabýval.

Prvním, kdo v matematice použil výraz „patologie", byl zřejmě Arthur Moritz Schoenflies (1853 – 1928). V prvním dílu své zprávy o výsledcích teorie množin [Schoenflies, 1900, s. 111] píše

> Člověk by měl tendenci považovat oblast teorie reálných funkcí, z níž teorie množin čerpala své hlavní úspěchy, za druh patologie funkcí. Jevy, které zde přicházejí v potaz, jsou přece bytostné výjimky, které se u tzv. normálních funkcí nevyskytují.

(Více o Schoenfliesově práci v odstavci 3.5). Výraz „monstrum", který se v tomto kontextu také občas používá, zřejmě zpopularizoval Poincaré, když v citovaném eseji (s. 125) napsal: „Logika občas plodí monstra".[8]

Na počátku 20. století se postoj vůči patologickým objektům začal měnit. V citované Schoenfliesově práci jim byl věnován významný prostor, rovněž druhé vydání Picardova *Traité d'analyse* (1901) obsahovalo část věnovanou Peanově a Hilbertově křivce. Celou sbírku „monster" obsahuje kniha Youngových *The Theory of Sets of Points*. Johnson [1979, s. 172] poznamenává, že pro autory cvičené v Cantorových metodách nebyla „monstra" něčím cizorodým.

[8] Dlouho před Poincarém psal o „monstrech" v matematice John Wallis (1616 – 1703). Představa vícerozměrného prostoru je podle něj „jako monstrum v přírodě, méně pravděpodobná než chiméra nebo kentaur" [Wallis, 1685]

Patologické zvláštnosti začaly hrát důležitou roli při dalším vývoji topologie a při hledání přesného významu pojmů jako křivka, dimenze apod. Stále více se při tom ukazovalo, že při formulování definic a tvrzení v topologii nelze spoléhat na intuici. O vývoji představ o křivce v topologii pojednává následující kapitola.

Literatura

AGNESI, M. G. 1775. *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral.* Paris : Claude-Antoine Jombert, 1775.

AMPÈRE, A. M. 1806. Recherches sur quelques points de la théorie des functions derives. *Journal de l'École Polytechnique.* Avril 1806, t. 6, 13e cahier, s. 148–181.

BERTRAND, J.; GARCET, H. 1874. *Traité d'algebre.* 2e partie, 9e édition. Paris : Hachette, 1874.

CANTOR, G. 1877. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1877, Bd. 84, s. 242–258.

ČERNÝ, I. 1983. *Analýza v komplexním oboru.* Praha : Academia, 1983.

DAUBEN, J. W. 1979. *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1979. ISBN 0-691-02447-2.

DIRICHLET, G. L. 1829. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1829, Bd. 4, s. 117–132.

DU BOIS-REYMOND, P. 1875. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reellen Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1875, Bd. 79, s. 21–37.

DU BOIS-REYMOND, P. 1885. Über den Begriff der Länge einer Curve. *Acta mathematica.* 1885, vol. 6, s. 167–168.

HAWKINS, T. 1975. *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development.* 2nd edition. New York : Chelsea Publishing Company, 1975. ISBN 0-8284-0282-5.

HILBERT, D. 1891. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen.* 1891, Bd. 38, s. 459–460.

HURWITZ, A. 1898. über die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit. In *Verhandlungen der ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897.* Leipzig : B. G. Teubner, 1898.

HYKŠOVÁ, M. 2003. *Karel Rychlík (1885 – 1968).* Praha : Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-259-7.

JAHNKE, H. N. 2003. *Algebraic Analysis in the 18th Century.* In JAHNKE, H. N. (ed.). *A History of Analysis.* Providence : American Mathematical Society, 2003, s. 105–136. ISBN 0-8218-2623-9.

JOHNSON, D. 1976. Prelude to Dimension Theory: The Geometrical Investigations of Bernard Bolzano. *Archive for History of Exact Sciences.* 1976, vol. 17, no. 3, s. 261–295.

JOHNSON, D. 1979. The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern topology, Part I. *Archive for History of Exact Sciences.* 1979, vol. 20, no. 2, s. 97–188.

JORDAN, C. 1881. Sur la série de Fourier. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris.* 1881, t. 92, s. 228–230.

JORDAN, C. 1887. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. 3. Paris : Gauthier-Villars, 1887.

JORDAN, C. 1893. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. 1. 2e édition. Paris : Gauthier-Villars, 1893.

JORDAN, C. 1894. Question 60. *L'intermédiaire des mathématiciens.* 1894, t. 1, s. 23.

JÜRGENS, E. 1899. Der Begriff der n-fachen stetigen Mannigfaltigkeit. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* 1899, Bd. 7, s. 50–55.

JUŠKEVIČ, A. P. 1966. O razvitii ponjatija funkcii. *Istoriko-matematičeskije issledovanija.* 1966, t. 17, s. 123–150.

LEBESGUE, H. 1904. *Le cons sur l'intégration et la récherche des fonctions primitives.* Paris : Gauthiers-Villars, 1904.

LEBESGUE, H. 1922. *Notice sur les travaux scientifiques.* Toulouse : Édouard Privat, 1922.

LÜTZEN, J. 2003. *The Foundation of Analysis in the 19th Century.* In JAHNKE, H. N. (ed.). *A History of Analysis.* Providence : American Mathematical Society, 2003, s. 155–196. ISBN 0-8218-2623-9.

MANDELBROT, B. 1982. *The Fractal Geometry of Nature.* New York : W.H. Freeman, 1982. ISBN 0-7167-1186-9.

MOORE, E. H. 1900. On Certain Crinkly Curves. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1900, vol. 1, no. 1, s. 72–90.

NETTO, E. 1879. Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1897, Bd. 86, s. 263–278.

OSGOOD, W. F. 1903. A Jordan Curve of Positive Area. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1903, vol. 4, no. 1, s. 107–112.

PEANO, G. 1887. *Applicazoni geometriche del calcolo infinitesimale.* Torino : Fratelli Bocca, 1887.

PEANO, G. 1890. Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen.* 1890, Bd. 36, s. 157–160.

PEANO, G. 1896. Réponse 60 (C. Jordan). *L'intermédiaire des mathématiciens.* 1896, t. 3, s. 39.

POINCARÉ, H. 1914. *Science and Method.* London : Thomas Nelson and Sons, 1914. (Překlad z francouzského originálu *Science et méthode.* Paris : E. Flammarion, 1908).

POINSOT, L. 1816. Des principes fondamentaux et des règles générales du calcul différentiel. In *Correspondance sur l'École Royale Polytechnique*, t. III. Paris : V. Courcier, s. 111–123.

RAABE, J. L. 1839. *Differential- und Integralrechnung*, Theil 1. Zürich : bei Drell, Füßli und Compagnie, 1839.

SAGAN, H. 1994. *Space-Filling Curves.* New York : Springer-Verlag, 1994. ISBN 0-387-94265-3.

SCHOENFLIES, A. 1900. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* 1900, Bd. 8, Heft 2, s. 1–251.

SCHOENFLIES, A. 1908. *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Zweiter Teil.* Leipzig : B. G. Teubner, 1908.

SIERPIŃSKI, W. 1912. O krzywych, wypełniających kwadrat. *Prace matematyczno-fizyczne.* 1912, t. 23, s. 193–219.

SINGH, A. N. 1953. The Theory and Construction of Non-Differentiable Functions. In HOBSON, E. W. (ed.). *Squaring the Circle and Other Monographs.* New York : Chelsea, 1953.

STRUIK, D. J. 1986. *A Source Book in Mathematics, 1200 – 1800.* Princeton : Princeton University Press, 1986. ISBN 0-691-02397-2.

VESELÝ, J. 2009. *Základy matematické analýzy.* Praha : Matfyzpress, 2009.

VOLKERT, K. 1987. Die Geschichte der pathologischen Funktionen–Ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Methodologie. *Archive for History of Exact Sciences.* 1987, vol. 37, s. 193–232.

WALLIS, J. 1685. *A Treatise of Algebra.* London : Richard Davis, 1685.

WEIERSTRASS, K. 1895. Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. In *Mathematische werke*, Zweiter Band. Berlin : Mayer & Müller, 1895, s. 71–74.

YOUNG, G. C. 1905. On the Form of a Certain Jordan Curve. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics.* 1905, vol. 37, s. 87–91.

Kapitola 3

Křivka jako kontinuum

Poznatky a výsledky pocházející z různých oblastí matematiky se na konci 19. století spojily do jednoho proudu a daly vzniknout novému oboru: topologii. Jeho důležitou součástí byla teorie bodových množin, chápaná zprvu jako základ geometrie a analýzy. Význam křivek při utváření teorie bodových množin byl srovnatelný s významem křivek pro infinitezimální počet. Teorie kontinua a teorie dimenze byly bezprostředně motivovány úsilím o nalezení vhodné charakteristiky křivky. Místa, ve kterých byla nová teorie budována, byla rozprostřena po celém světě, od severní Ameriky přes Polsko a Rakousko až po Japonsko. Některé její součásti jsou vázány na jednu školu či lokalitu – např. teorie nerozložitelných kontinuí je spojena (byť ne výlučně) s varšavskou školou. Výjimkou však nebyly ani výsledky dosažené ve stejné době nezávisle různými matematiky.

3.1 Vývoj představ o kontinuu v souvislosti s křivkami

Jednou z vlastností, které intuitivně připisujeme křivkám, je spojitost. Spojitost je tradičně chápána jako vlastnost jednoho neděleného celku; jejím opakem je diskrétnost, která je spojována s představou souboru oddělených částí. Spojitost má vztah k jednotě, diskrétnost k mnohosti. Protiklad spojitého a diskrétního má zřejmě základ ve starověké představě světa založeného na několika základních protivách, mezi něž patřilo i jedno a mnohé (viz též s. 7).

U Aristotela (*Metafyzika*, V, 13, 1020a) *kolikost* [1] patří mezi základní kategorie a projevuje se dvěma formami: mnohostí a velikostí. Mnohost lze počítat, zatímco velikost lze měřit. Velikost lze dělit v části souvisící, nepřetržité. Veličinu nepřetržitou v jednom směru nazývá Aristotelés délkou, ve dvou směrech šířkou, ve třech hloubkou. Veličiny,

[1] Výrazem *kolikost* vyjadřují překladatelé Aristotela do češtiny (včetně Antonína Kříže v posledním vydání *Metafyziky* [Aristotelés, 2003]) řecké *to poson*.

které lze měřit, jsou výhradně veličiny extenzívní – délka, obsah, objem atd. Změřit velikost znamená porovnat měřenou veličinu s části, kterou považujeme za jednotkovou.

Prostor, čas a s nimi související pohyb byly považovány za manifestace spojitosti. Struktura spojité veličiny se stala předmětem zkoumání. Aristotelés předpokládal, že spojitá veličina je bez omezení dělitelná na menší části. Potenciální nekonečná dělitelnost byla základem jeho odmítnutí možnosti vyčerpání obsahu kruhu posloupností vepsaných mnohoúhelníků (s. 10). Naproti tomu představa spojitého celku, sestávajícího z aktuálně nekonečného množství nedělitelných atomů, našla výraz např. u Epikura. Obě tato pojetí se projevovala v matematickém myšlení přinejmenším až do 17. století.

Na potenciálně nekonečné dělitelnosti času a prostoru jsou založeny proslulé Zenónovy aporie, jejichž smysl se opírá o nepřijatelnost představy uskutečnění nekonečného počtu kroků v konečném čase. Aristotelés odmítl Zenónovy paradoxy jako logické klamy, přesto však otázky, které jsou s nimi spojené, byly předmětem zájmu filosofie až do moderní doby. Aby bylo možné překonat Zenónovy paradoxy, bylo nutné vyjasnit abstraktní pojem kontinua, který je obsažen ve vnímání spojitého času a prostoru [Huggett, 2010].

Eukleidés v *Základech* charakterizuje „čáru“ jako „délku bez šířky“ (v definici 2), případně jako „okraj plochy“ (v definici 6). I když pozornost věnuje prakticky výlučně přímkám a kružnicím, lze jeho charakteristiku vztáhnout na křivky obecně, protože jsou v ní naznačeny podstatné společné rysy všech linií, tedy spojitost (délky) a vedle toho jednorozměrnost, která linii odlišuje od ploch a těles.

Již v geometrii starých Řeků se objevuje představa geometrických objektů generovaných pohybem. Nejednalo se jen o křivky jako spirála či kvadratrix, které byly definovány pomocí skládání pohybů, ale např. i o definice těles vzniklých otáčením rovinných obrazců. Představa křivky jako dráhy pohybujícího se bodu začala postupně nahrazovat statickou představu křivky jako lineárního kontinua.

Christophorus Clavius (1538 – 1612) uvádí v komentářích k Eukleidovým *Základům* [Clavius, 1612, s. 13] představu dráhy pohybujícícho se bodu jako běžný matematický prostředek popisu linie.

Ještě dále šel Thomas Hobbes (1588 – 1679), který přisuzoval ve své materialistické přírodní filosofii matematice a geometrii zvláštní postavení. Geometrii chtěl Hobbes znovu vystavět na týchž základních pojmech, které tvořily jádro jeho filosofického systému: na pojmech tělesa a pohybu. Neměnným atributem tělesa je rozlehlost (extension), subjektivně vnímaná jako prostor. Všechny jeho proměny jsou projevem pohybu a subjektivně jsou vnímány jako čas. Dvě tělesa jsou spojitá (continual), mají-li společnou nějakou část; dotýkají se, jestliže mezi ně nelze vložit žádné další těleso. Linii definuje Hobbes [1839, s. 111] jako dráhu pohybujícího se tělesa, jehož velikost nebereme v úvahu.

Těleso v takovém případě chápeme jako bod, byť by to byla třeba Země obíhající kolem Slunce. Podobně plocha vzniká pohybem linie a těleso pohybem plochy. Některé Hobbesovy myšlenky byly podnětné, ale jejich rozpracování v geometrii jej dovedlo i ke zcela mylným závěrům.

V průběhu 17. století se kinematický přístup v geometrii proměnil z opory pro definování geometrických veličin v nástroj vyšetřování vlastností těchto objektů. Roberval, Torricelli a další používali kinematický přístup při konstrukci tečen, hledání obsahů obrazců s křivočarými hranicemi apod. Matematizace přírodovědy a rozvoj mechaniky vedly k novému pohledu na základy matematiky.

Kinematické pojetí bylo přítomno i v základech infinitezimálního počtu. Newton i Leibniz zvolili podobný přístup k ospravedlnění své teorie. Newton hledal základ pro matematickou teorii v zákonech pohybu a především v zákonu spojitosti času; pro Leibnize to byly zákony přírody, s nimiž matematika musela být v harmonii, měla-li sloužit jejich výkladu [Schubring, 2005, s. 174]. Klasická „metafyzická" formulace o přírodě nedělající skoky ovlivnila přírodovědu v následující době: Boškovića, Carnota a další.[2]

Diderotova *Encyclopédie* uvádí u hesla LIGNE (linie) „rozlehlost v délce, bez šířky nebo hloubky" a připojuje, že v přírodě se linie bez šířky nebo hloubky nevyskytují; geometrické linie mající jednu dimenzi jsou jejich abstrakcí. Existují dva druhy linií: přímky a křivky. Heslo je prakticky doslova převzato z Chambersovy *Cyclopædie*, kde je navíc zdůrazněn kinematický pohled na křivku jako dráhu pohybujícího se bodu. Oba tyto pohledy měly hrát roli v pozdější snaze dát pojmu křivka přesný význam. Kinematický přístup se transformoval do podoby parametrického popisu křivky a Jordanovy definice, která byla popsána v předchozí kapitole.

Významný krok směrem k matematicky přesné definici křivky bez odkazů na pohyb představovaly výsledky Bernarda Bolzana (1781 – 1848), obsažené především v jeho geometrických pracích. Bolzano byl průkopníkem moderního matematického myšlení a přesné vymezení pojmů křivky a kontinua bylo součástí jeho programu budování pevných základů geometrie. V oblasti matematiky a její filosofie navazoval Bolzano především na Baumgartena a Kästnera, kteří pojmům křivka a kontinuum věnovali také pozornost.

Alexander Gottlieb Baumgarten (1714 – 1762) měl značný vliv na evropské myšlení konce 18. a začátku 19. století; jeho *Metaphysica* ovlivnila vedle Bolzana např. i Kanta a Hegela. Baumgarten [1779, s. 86] věnuje pozornost i pojmu linie (linea) a definuje ji jako spojitou řadu bodů vložených mezi dva vzdálené body. Nejkratší linie spojující dva body je přímá; spojnice dvou bodů, která není přímá, je křivka (curva).

[2] Je známo, že Leibniz formuloval i „matematičtější" formulaci principu spojitosti, která má blíže k modernímu pojetí, ale která nebyla jeho současníky ani bezprostředními následovníky přijata a rozvíjena [Schubring, 2005, s. 175].

Abraham Gotthelf Kästner (1719 – 1800), jehož kniha *Anfangsgründe der Mathematik* měla na Bolzana zásadní vliv, uvádí definici kontinua založenou na pojmu souvislosti, byť samozřejmě ne v moderním pojetí. Podle Kästnera [1779, s. 176] spojitá veličina (kontinuum) sestává z částí, které jsou spojeny tak, že kde končí jedna, začíná druhá, a mezi nimi není nic, co by nebylo součástí této veličiny. Kästner se nedomnívá, na rozdíl od Baumgartena, že linie je tvořena body a považuje tuto definici za rozporuplnou.

3.2 Bolzanovy geometrické práce

Bolzanovy práce o geometrii vznikaly v poměrně širokém časovém rozpětí od roku 1804, kdy vyšlo pojednání *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementar Geometrie*, až po období na sklonku jeho života. Společným znakem těchto prací je úsilí o revizi základů geometrie a její vybudování v souladu s Bolzanem proklamovanými zásadami výstavby vědecké teorie.

Betrachtungen, vůbec první Bolzanova vydaná práce, obsahuje metodologické zásady, které hrály důležitou roli v celém jeho dalším díle: jednak je to požadavek dokázat každé tvrzení, není-li dostatečně jasné, že důkaz není nutný, a jednak zásada, že důkaz smí obsahovat pouze pojmy, které nejsou dokazovanému tvrzení cizí [Johnson, 1976, s. 268–269]. Podle Bolzana je takovým pojmem v geometrii např. pojem pohybu, který „mnozí matematikové užívali k dokazování čistě geometrických pravd“ (Bolzano jmenuje Kästnera, Mercatora a Kanta). Speciálně pojmy křivky a plochy je nutné definovat nezávisle na představě pohybu. Ze stejného důvodu Bolzano [1804, s. 46] odmítá i „hraniční“ definice plochy, linie a bodu, které (mylně) připisuje Ockhamovi. Těleso je v tomto smyslu rozlehlostí, která sama žádný jiný objekt neohraničuje. Plocha ohraničuje těleso, linie plochu a bod linii. Podle Bolzana však ani v nejmenším není potřeba, abychom měli na mysli ideu tělesa, chceme-li uvažovat plochu, linii nebo dokonce bod.

V předmluvě ke svému druhému pojednání, filosoficko-matematickým *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, Bolzano [1810, s. VI] konstatuje, že ve srovnání s aritmetikou vykazuje stavba geometrie podstatné vady. Připomíná, že v geometrii dosud chybí přesná definice nejdůležitějších pojmů, jako jsou pojmy linie, plochy a tělesa.

V práci *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung* z roku 1817 (viz rovněž s. 34) se Bolzano zabývá úlohami z analýzy, zahrnul však do ní také sérii definic vymezujících pojmy linie, plochy a tělesa. Tyto definice geometricko-topologického charakteru nemají bezprostřední vztah k teorii, o níž práce pojednává, a nejsou ani potřeba k jejímu pochopení nebo k odvození některého tvrzení. Bolzano je uvádí proto, aby naznačil, jakým směrem se ubírá jeho práce na přebudování základů geometrie.

Společným rámcem všech Bolzanových geometrických úvah je trojrozměrný prostor. Pod pojmem prostorový objekt (ein Raumding) rozumí Bolzano každý konečný či nekonečný souhrn (Inbegriff) bodů v prostoru. Linii charakterizuje [1817, s. 94] pomocí počtu sousedních bodů.

> Prostorový objekt, k jehož každému bodu, v jisté vzdálenosti a pro všechny menší vzdálenosti, existuje alespoň jeden a nejvýše konečná množina bodů coby sousedů, se obecně nazývá *linií*.

Sousedem nějakého bodu v nějaké vzdálenosti je myšlen průsečík objektu s kulovou plochou, jejímž středem je daný bod a poloměrem daná vzdálenost. Pojem vzdálenosti definoval Bolzano již v *Betrachtungen*. Jako základní pojem v geometrii je tam položena dvojice bodů, jejímiž atributy jsou směr a vzdálenost.

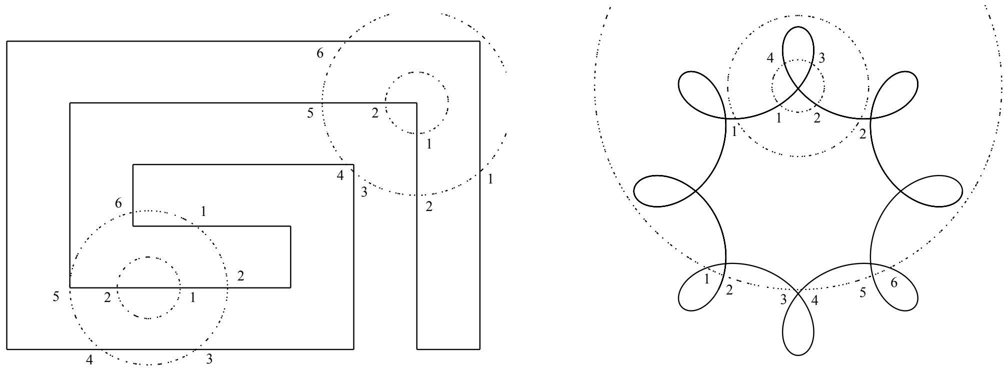
Bolzanovým záměrem bylo pokládat za linie i objekty sestávající z více nesouvisejících částí: např. jednou linií je hyperbola tvořená dvěma oddělenými větvemi. Aby tyto případy rozlišil, zavádí Bolzano [1817, s. 94] pojem souvislosti a definuje úplně souvislou linii.

> Prostorový objekt, jehož každá část, na kterou lze podle právě dané definice pohlížet jako na linii, má alespoň jeden společný bod se zbývající částí, na kterou pak musí být rovněž pohlíženo jako na linii, se nazývá *úplně souvislou linií* (eine durchaus zusammenhängende Linie).

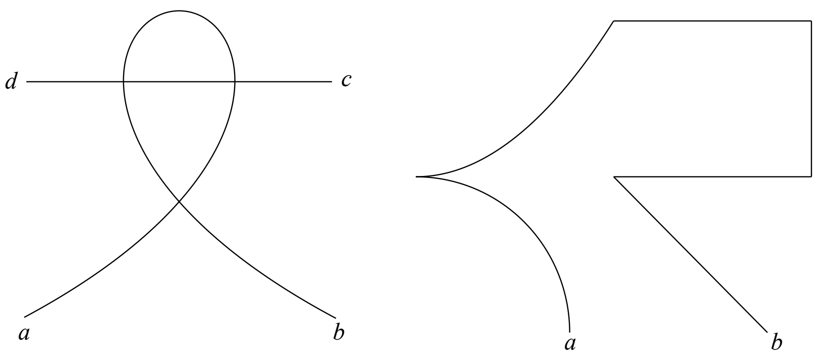
Další definice vymezují pojmy koncový a vnitřní bod linie a jednoduchá a uzavřená linie (viz obr. 3.1 a 3.2). V podobném duchu jsou v *Die drey Probleme* definovány i pojmy plochy a tělesa.

Bolzanovy definice jedno-, dvou- a třírozměrných variet z roku 1817 mají obecný charakter, avšak nepokrývají zdaleka všechny bodové množiny, které je dnes zvykem do těchto kategorií řadit; kromě toho vykazují i jisté formální nesrovnalosti [Johnson, 1976, s. 277].

V pozdějších letech Bolzano své pojetí z roku 1817 přepracoval. Jeho nové definice přihlížejí k jemnostem, jež staré definice nebraly v úvahu, a jeho vhled do problematiky je hlubší. Z hlediska Bolzanova chápání kontinua a linie zvlášť jsou důležité zejména nedokončené spisy *Über Haltung, Richtung, Krümmung und Schnörkelung bei Linien* a *Geometrische Begriffe, die jeder kennt und nicht kennt* z let 1843–44, dále nedokončený *Versuch einer Erklärung der Begriffe von Linie, Fläche und Körper* a rovněž *Paradoxy nekonečna* vydané z Bolzanovy pozůstalosti roku 1851.



OBR. 3.1: Prostorový objekt, jehož každý bod v jisté vzdálenosti a pro všechny menší vzdálenosti má sudý počet sousedů, a přitom nemá body, jejichž vzdálenost od jiných je větší než daná vzdálenost, nazývá Bolzano [1817, s. 94] *do sebe se navracející* nebo *uzavřenou linií.* Má-li každý bod právě dva takové sousedy, jde o *jednoduchou do sebe se navracející čáru* (obr. vlevo).



OBR. 3.2: *Hraniční body* linie jsou podle Bolzana [1817, s. 94] takové body, které v jisté vzdálenosti a pro všechny menší vzdálenosti mají pouze jednoho souseda (vlevo body a, b, c, d, vpravo a, b). Všechny ostatní body se nazývají *vnitřními body.*

Linie, povrchy a tělesa chápe Bolzano jako zvláštní případy prostorových rozlehlostí. Rozlehlost (kontinuum) je množina bodů, která neobsahuje izolované body.

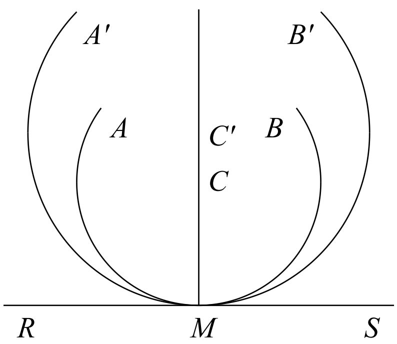
> Jestliže bod i leží v prostorovém objektu tak, že neexistuje žádná jakkoliv malá vzdálenost, o níž by se dalo prohlásit, že pro tuto a pro všechny menší vzdálenosti má bod i jednoho nebo několik sousedů, pak řeknu, že i stojí *izolovaně* nebo *osamoceně* v tom prostorovém objektu. [Bolzano, 1948, s. 143, překlad P. Simon]

Dnes je v teorii množin zvykem považovat za izolovaný bod nějaké množiny takový bod, který má okolí, v němž neleží žádný jiný bod dané množiny. Bolzanova definice je obecnější: např. dyadicky racionální body intervalu $[0, 1]$ jsou bolzanovsky izolované, protože ke každému z nich existují sousedé ve vzdálenostech menších než libovolné dané ε, nikoliv však ve *všech* vzdálenostech menších než ε. Bolzanova definice izolovaného bodu má blíže k pojmu bodu, ve kterém je množina 0-dimenzonální ve smyslu Menger–Urysonovy teorie. Přesněji: v bolzanovsky izolovaném bodě je množina 0-dimenzionální, ale opak obecně neplatí [Johnson, 1976, s. 283].

Nová definice linie neobsahuje omezení na konečný počet sousedů [Bolzano, 1948, s. 144].

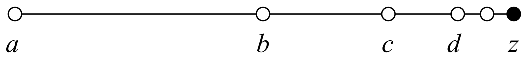
> Rozlehlost, jejíž každý bod má v každé dostatečně malé vzdálenosti jenom tolik sousedů, že jejich množina, uvažovaná pro jednu každou z těchto vzdáleností, stále ještě nepředstavuje rozlehlost, nazvu prostorový objekt jediné nebo jednoduché rozlehlosti, nebo linií. (Překlad P. Simon [3])

V podobném duchu definuje Bolzano dále prostorový objekt dvojnásobné rozlehlosti neboli plochu a prostorový objekt trojnásbné rozlehlosti neboli těleso. Bolzano byl k této změně motivován zřejmě i příklady toho druhu, který je uveden na obr. 3.3 (obrázek je včetně značení převzat z [Bolzano, 1948, s. 183]).



OBR. 3.3: Bolzanovská linie, která je tvořena spočetnou množinou kružnic, jež mají s přímkou RS jeden společný bod M. Bod M má pro každou dostatečně malou vzdálenost nekonečně mnoho sousedů (viz též [Johnson, 1976, s. 287]).

Simon [1981, s. 256] upozorňuje, že v nových Bolzanových definicích se do popředí dostává terminologie založená na dimenzi a názvy linie, plocha a těleso jsou uváděny až na druhém místě.



OBR. 3.4: Bolzanovsky izolovaný bod

V *Paradoxech nekonečna* uvádí Bolzano [1963, s. 77] příklad linie, která vznikne z úsečky az (obr. 3.4), jestliže na ní vyznačíme bod b ležící uprostřed mezi a a z, dále bod c ležící

[3] Překlad tohoto a předcházejícího citátu přebírám doslova z článku [Simon, 1981], pouze pro výraz „Linie“ používám termín „linie“ a nikoliv „čára“.

uprostřed mezi b a z, bod d uprostřed mezi c a z atd. a odejmeme body $a, b, c, d, \ldots, z$. Pokud bychom bod z ponechali, nebude vzniklá množina linií (kontinuem), protože bod z je izolovaným bodem (nemá souseda v žádné vzdálenosti $az/2^n$).

V *Geometrische Begriffe* rozvíjí Bolzano svůj topologický výzkum a podává sérii definic, např. uzavřené a jednoduché uzavřené linie. Bohužel toto pojednání je nedokončené a připomíná spíše soubor poznámek. Obsahuje i jinou formulaci Jordanovy věty, která je však problematičtější než ta, jež je uvedena ve spise *Anti-Euclid* [Johnson, 1976, s. 290].

Bolzanovy geometrické práce z pozdního období obsahují množství myšlenek, o nichž lze bez nadsázky říci, že předběhly dobu. K jejich rozvinutí do podoby ucelené teorie však samotnému Bolzanovi již v té době chyběly síly a žádného přímého pokračovatele neměl.

Jedním z matematiků 19. století, kteří Bolzanovo dílo alespoň zčásti znali, byl Georg Cantor (1845 – 1918). Bolzanovo pojetí kontinua, jak je uvedeno v *Paradoxech nekonečna*, Cantor [1883, s. 576] kritizuje. Zejména skutečnost, že bolzanovské kontinuum může tvořit objekt sestávající z více oddělených částí, byla pro Cantora nepřijatelná. Je zřejmé, že Bolzanovo a Cantorovo pojetí kontinua se rozchází; Cantorovo pojetí je základem moderního chápání kontinua jako souvislé bodové množiny, zatímco Bolzanovo kontinuum bylo spíše předchůdcem množiny kladné (topologické) dimenze. Bolzanovy geometrické práce lze chápat jako vykročení směrem, v němž později vznikla Menger–Urysonova teorie dimenze [Johnson, 1976, s. 283–284].

3.3 Pojem kontinua v Cantorově teorii

Cantor ve svém článku o ekvivalenci bodových množin $[0, 1]$ a $[0, 1] \times [0, 1]$ (viz odst. 2.3) ukázal, že číselná osa může sloužit i jako model pro studium spojitých oborů vyšší dimenze. To byl jeden z důvodů, proč Cantor v následujících letech zaměřil svoje úsilí hlavně na studium bodových množin na přímce. Jeho výsledky byly publikovány v sérii šesti článků se společným názvem *Über unedliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, které vycházely v letech 1879 – 1884 v *Mathematische Annalen* (pátý díl série byl vydán rovněž jako samostatná monografie pod názvem *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*; prvních pět dílů se objevilo pouze s malým zpožděním ve francouzském překladu v *Acta mathematica*).

Hledání odpovědi na otázku, jaké vlastnosti má bodová množina, kterou nazýváme kontinuem, bylo důležitou součástí Cantorova výzkumu. Cantor, opíraje se o vlastní teorii reálných čísel, usiloval o popis kontinua aritmetickými prostředky [Dauben, 1979, s. 290].

Jednou z podmínek charakterizujících kontinuum je dokonalost; *dokonalou* nazývá Cantor [1883, s. 575] takovou množinu, která je rovna své derivaci (množině svých hromadných bodů), tj. uzavřenou množinu, která neobsahuje izolované body. Druhou vlastností potřebnou k tomu, aby bodová množina byla kontinuem, je souvislost. Podle Cantora [1883, s. 575–576] je daná množina *souvislá* (zusammenhang), jestliže ke každým dvěma jejím bodům a každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takovou posloupnost bodů této množiny obsahující ony dva body, že vzdálenost každých dvou po sobě jdoucích bodů v této posloupnosti je menší než ε. Pokud taková posloupnost neexistuje, nazývá Cantor danou množinu diskontinuem. Množina je úplným diskontinuem, jestliže uvedenou vlastnost nemá žádná dvojice jejích bodů.

Podobnými úvahami se zabýval Jordan ve druhém vydání *Cours d'analyse* [Jordan, 1893, s. 26]. Zavádí zde pojmy *komponenta* (un seul tenant) a vzdálenost mezi množinami. Pro dvě uzavřené množiny $A, B \subset \mathbb{R}^n$ definuje Jordan jejich vzdálenost rovností $d(A,B) = \min\{d(x,y); x \in A, y \in B\}$, kde $d(x,y)$ je vzdálenost bodů x a y. Množiny A a B jsou oddělené, jestliže $d(A,B) > 0$. Omezená a uzavřená množina bodů A je tvořena jednou komponentou, jestliže nemůže být rozložena na více uzavřených oddělených množin. Množina A je tvořena jedinou komponentou právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ a každou dvojici bodů $p, p' \in A$ existuje řetězec bodů z A ležících mezi nimi takový, že vzdálenost každých dvou sousedních bodů v tomto řetězci je menší než ε. Souvislost ve smyslu Cantorovy definice je tak nutnou a postačující podmínkou pro to, aby množina A byla tvořena jedinou komponentou (viz též [Wilder, 1978]).

Mezi poznámkami na konci citovaného pojednání uvádí Cantor [1883, s. 590] stručný popis množiny, která je dokonalá a řídká [4] v intervalu $[0,1]$. Tvoří ji všechna reálná čísla, která lze vyjádřit rozvojem

$$t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots,$$

v němž všechny koeficienty a_n nabývají pouze hodnot 0 nebo 2 (jinými slovy jedná se o množinu všech bodů uzavřeného intervalu $[0,1]$, v jejichž triadickém rozvoji se vyskytují pouze číslice 0 nebo 2). Tato množina se běžně nazývá *Cantorovým diskontinuem* nebo *Cantorovou množinou* [5] a má zásadní význam v řadě oblastí matematiky.

[4] Hustou množinou v intervalu $I \subset \mathbb{R}$ nazývá Cantor [1879, s. 2] takovou množinu, jejíž body obsahuje každý interval (α, β) ležící v I. Množina je řídká v I, jestliže není hustá v žádném intervalu ležícím v I. Obecněji (viz např. [Alexandrov, 1954, s. 204]): množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je hustá v otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$, jestliže každý bod množiny G je bodem uzávěru množiny M (tj. $G \subset \overline{M}$). Jestliže v $\mathbb{R}^n$ neexistuje neprázdná otevřená množina, v níž by M byla hustá, pak se množina M nazývá řídkou v $\mathbb{R}^n$.

[5] Je známo, že Cantorovu množinu popsal anglický matematik H. J. S. Smith (1826 – 1883) již v roce 1875 v článku, který pojednával o integraci nespojitých funkcí a byl motivován Riemannovými výsledky [Fleron, 1994].

Geometrická konstrukce, s jejíž pomocí je Cantorova množina zpravidla znázorňována, je založena na opakovaném dělení daného intervalu na tři části a odnímání vnitřních bodů prostřední části. Označíme E_0 uzavřený interval $[0, 1]$. Rozdělíme jej pomocí bodů $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$ na tři části a odebereme všechny body otevřeného intervalu $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Získáme uzavřenou množinu $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Obě její části rozdělíme opět na třetiny pomocí bodů $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ resp. $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$ a odebereme vnitřní body prostředních částí. Získáme uzavřenou množinu E_2, která bude sjednocením čtyř intervalů délky $\frac{1}{3^2}$. S každým z nich postup opakujeme; obecně množina E_k bude tvořena 2^k intervaly délky $\frac{1}{3^k}$. Uzavřená množina $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ je Cantorovou množinou.

Cantor [1883, s. 590] poznamenává, že jeho definice kontinua je nezávislá na pojmu dimenze. Slibuje, že později podá i náležité definice kontinuí různé dimenze; tento slib však nikdy nesplnil.

3.4 Lineární kontinua

Francouzské překlady Cantorových článků vycházející v *Acta mathematica* pomohly otevřít Cantorově teorii cestu do Francie. Bylo Cantorovým údělem, že jeho teorie narážela na někdy velmi ostrou kritiku; vedle odpůrců ale nacházela i příznivce.

Jedním z Cantorových francouzských stoupenců byl Paul Painlevé (1863 – 1933), který ve své disertační práci vydané roku 1888 uplatnil teorii množin při analýze rozložení singulárních bodů holomorfních funkcí v komlexní rovině. V této souvislosti definuje rovinnou křivku jako lineární kontinuum, tedy jako množinu bodů v rovině, která tvoří kontinuum (ve smyslu Cantorovy definice) a má nulový obsah [Painlevé, 1888, s. B4].

Painlevé, který se později stal významným politikem a ve dvou krátkých obdobích zastával funkci ministerského předsedy Francie, zvolil jiný přístup ke křivce než Jordan a věřil, že jeho definice vyjadřuje to, co se běžně pod pojmem křivka rozumí. Lineárnost kontinua však nepřesně spojil s nulovým obsahem.

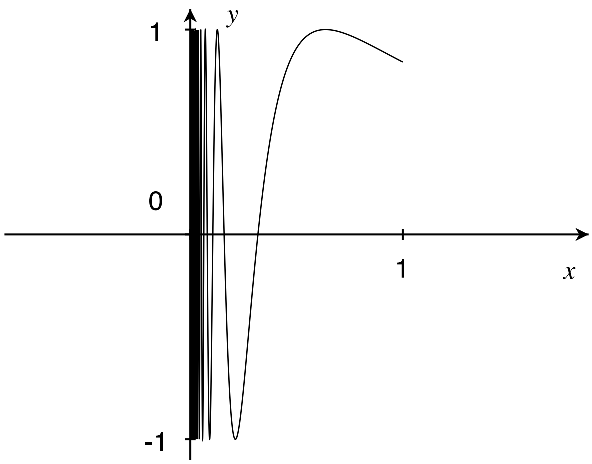
Ludovic Zoretti (1880 – 1948) navázal na Painlevého v obsáhlém článku o holomorfních funkcích, který vyšel roku 1905. Množinu bodů, která je lineárním kontinuem (je dokonalá, souvislá a všechny její body jsou hraniční), nazývá Zoretti [1905, s. 8] *Cantorovou křivkou* (ligne cantorienne).

Pojem křivky učinil Zoretti ústředním tématem svého článku *La notion de ligne* z roku 1909. Položil si v něm otázku, jaké podmínky musí množina bodů splňovat, aby byla Jordanovou i Cantorovou křivkou. Jordanova křivka je kontinuem v Cantorově smyslu (je dokonalá a souvislá), avšak nemusí být lineárním kontinuem. Naopak existují Cantorovy křivky, které nelze považovat za spojité křivky v duchu Jordanovy definice.

Jednoduchým příkladem je množina bodů tvořená grafem funkce

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \tag{3.1}$$

pro $0 < x \leq 1$ a úsečkou s koncovými body $[0, -1]$ a $[0, 1]$ (obr. 3.5). Tato množina je také nazývána „uzavřenou topologickou sinusovkou“ (closed topologist's sine curve [Steen, 1995, s. 137]). Jedná se o důležitý příklad, který bude ještě několikrát v dalších odstavcích zmíněn.



OBR. 3.5: Příklad Cantorovy křivky, která není Jordanovou křivkou

Na přelomu 19. a 20. století byla teorie množin obecně přijímána a rozvíjena. Hurwitzovo programové vystoupení na prvním ICM v Curychu v roce 1897 bylo uznáním důležitosti Cantorovy teorie pro matematiku. Význam teorie množin byl dále podtržen proslulým Hilbertovým projevem na druhém ICM v Paříži v roce 1900.

Cantor sám nepublikoval žádné dílo, které by jeho teorii prezentovalo v ucelené formě (nejblíže k tomu mají výše zmíněné *Grundlagen*). Prvním soustavným pojednáním o teorii množin se stala teprve kniha Williama Henryho Younga (1863 – 1942) a Grace Youngové *The Theory of Sets of Points* z roku 1906.

Navzdory tomu, že Cantor se křivkami speciálně nikdy nezabýval, je jim v knize Youngových věnována poměrně velká pozornost. Chápeme-li podle autorů v teorii množin křivku jako souhrn několika idejí, je třeba vedle uspořádání vzít v úvahu i tvar, který je v mnoha ohledech důležitou charakteristikou. Připouští-li Jordanova definice jako křivky i množiny, které nejsou řídké v rovině, pak je nutné ji odmítnout, neboť nevystihuje některé vlastnosti, které je rozumné křivkám připisovat. Za Jordanovu křivku je v knize považována pouze množina bodů vyhovující Hurwitzově definici (viz s. 59). Problematický a v budoucnu zřejmě neudržitelný je podle nich i pojem „křivka vyplňující prostor" (tato předpověď se ovšem nepotvrdila).

Rovinnou křivkou Youngovi rozumí každou uzavřenou souvislou množinu bodů řídkou v rovině [Young, 1906b, s. 219]:

> Množinu bodů řídkou v rovině takovou, že pro každé libovolně malé ε sjednocení ε-okolí všech bodů křivky tvoří otevřenou souvislou množinu, jejíž průměr[6] s klesajícím ε neklesá k nule, nazýváme *zakřiveným obloukem* (curved arc) nebo krátce *křivkou* (curve).

Dále Youngovi definují koncové body, uzavřenou křivku, jednoduchou uzavřenou křivku, větev (branch) křivky a bod rozvětvení (fork point), které slouží ke zkoumání lokální struktury křivky.

V článku, který vyšel téhož roku, označil Young se zjevným poukazem na Jordanovu větu za jeden z úkolů topologie vymezit přesně pojmy křivky a oblasti. Klade si otázku, které vlastnosti křivky chápané jako množina bodů jsou těmi, jež jsou nezávislé na metrických a projektivních úvahách. Dospívá k definici, která vylučuje množiny typu Peanovy křivky [Young, 1906a, s. 4].

> Křivkou nazýváme množinu bodů řídkou v rovině takovou, že sjednocení trojúhelníků opsaných kolem každého jejího bodu tvoří jednoduše souvislou oblast, tzn., že každá dvojice trojúhelníků může být spojena konečným počtem trojúhelníků, které se vzájemně překrývají.[7]

Young výslovně poznamenává, že ke své definici nepřipojuje předpoklad uzavřenosti a vidí v tom výhodu při zkoumání hranic jednoduše souvislých oblastí. Poukazuje rovněž na možnost zobecnění uvedené definice na případ křivek v n-rozměrných prostorech, které předpokládá nahrazení trojúhelníku n-simplexem.[8]

I když kniha Youngových přinášela vedle výsledků Cantora a jeho pokračovatelů i některé původní výsledky autorů, byla především rekapitulací teorie bodových množin a solidním a čitelným úvodním textem pro začátečníky. Víceméně paralelně vznikající Schoenfliesova práce byla ambicióznějším projektem.

[6] V orig. *span*. Pojem *directed span* znamená šířku pásu, ohraničeného přímkami kolmými k danému směru, mezi nimiž leží všechny vnitřní body dané množiny a každá z nich prochází alespoň jedním hraničním bodem této množiny. Supremum šířek takových pásů ve všech směrech se nazývá *span*.

[7] Trojúhelník chápe Young jako vhodný základní pojem, ze kterého lze vycházet při studiu bodových množin v rovině (nemusí ale nutně jít právě o trojúhelník). Např. množinu řídkou v rovině definuje Young [1906a, s. 2] jako množinu, pro kterou platí, že uvnitř libovolného trojúhelníku existuje trojúhelník, který neobsahuje žádný bod dané množiny.

[8] V matematické literatuře se na začátku 20. století začal tento pojem používat pro n-rozměrnou analogii trojúhelníku v n- a vícerozměrném prostoru (3-simplex je trojúhelník, 4-simplex čtyřstěn atd.). Young nicméně pojem simplex nepoužívá.

3.5 Schoenfliesův *Bericht*

O tom, že křivky na přelomu 19. a 20. století hrály důležitou roli ve vývoji teorie bodových množin, svědčí mimo jiné i to, že Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) se rozhodla na konci 90. let 19. století vydat zprávu o výsledcích, kterých bylo dosaženo ve výzkumu „křivek a bodových množin“. Jejím vypracováním byl pověřen Arthur Moritz Schoenflies (1853 – 1928), jeden z nejvýznamnějších reprezentantů teorie množin a topologie na přelomu 19. a 20. století. Jeho práce *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmnannigfaltigkeiten*, běžně označovaná jenom jako *Bericht*, vyšla ve dvou dílech; první část byla vydána roku 1900, druhá část vyšla jako příloha výroční zprávy DMV roku 1908. Celé dílo se stalo nejvýznamnější monografií o teorii množin a topologii začátku 20. století.

Zejména druhý díl, věnovaný převážně „geometrickým aplikacím“ a postavený vedle výsledků jiných autorů rovněž na Schoenfliesových pracích publikovaných v prvních letech 20. století (tři články se společným názvem *Beiträge zur Theorie der Punktmengen*), byl zamýšlen jako systematické pojednání o základních pojmech, které měly sloužit vybudování geometrie jako samostatné disciplíny na podkladě *analysis situs* (topologie). Tu Schoenflies charakterizuje jako disciplínu, která se zabývá studiem vlastností invariantních vůči prostým spojitým zobrazením. Značnou pozornost věnuje pojmu křivky, o němž Felix Klein [1897, s. 586] prohlásil (jak Schoenflies připomíná), že

> z čistě matematického hlediska nic není dnes temnějšího a neurčitějšího než jmenovaný pojem [křivky].

Pojem souvislosti, která pro Cantora byla jednou ze dvou základních charakteristik kontinua, definuje Schoenflies pouze na základě teorie množin a snaží se při tom vyhnout pojmu vzdálenosti obsaženému v Cantorově definici. Dokonalá množina je souvislá, jestliže ji nelze rozdělit na dvě nebo více neprázdných dokonalých podmnožin [Schoenflies, 1904, s. 209]. To je definice odpovídající Jordanově, o níž Schoenflies píše, že se s ní seznámil až později. Jordanovi sloužila podle Schoenfliese tato formulace pouze k odvození Cantorovy definice, s níž dále pracoval; souvislost však má fundamentální význam pro celou topologii, neboť je to vlastnost, která je invariantní vůči spojitému prostému zobrazení.

Pro účely studia především bodových množin v rovině zavádí Schoenflies [1908, s. 111] několik pojmů v podstatě stejným způsobem, jakým je definují autoři dnešních učebnic. Množina $B(P, \varepsilon)$ všech bodů, jejichž vzdálenost od P je menší než dané $\varepsilon > 0$, se nazývá *ϵ-okolím* nebo prostě *okolím* (Umgebung) bodu P. Bodová množina E v rovině se nazývá *oblastí* (Gebiet), jestliže je otevřená (pro každý bod $P \in E$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $B(P, \varepsilon) \subset E$) a souvislá. Bod P se nazývá *hraniční bod* (Grenzpunkt) množiny

E, jestliže každé jeho okolí obsahuje alespoň jeden bod množiny E a alespoň jeden bod, který není prvkem E. Množina všech hraničních bodů množiny E se nazývá *hranicí* (Grenze) této množiny. Je-li $d(P,Q)$ vzdálenost bodů P,Q, je *průměr* $\mathrm{diam}(E)$ množiny E definován předpisem $\mathrm{diam}(E) = \sup\{d(P,Q); P,Q \in E\}$.

Množinu, která je kontinuem (je uzavřená a souvislá) a neobsahuje žádnou souvislou otevřenou množinu (Gebietsteil), nazývá Schoenflies [1908, s. 108] *lineárním kontinuem* (linienhaft nebo též kurvenhaft Kontinuum). Příkladem lineárního kontinua je systém úseček tvořený intervalem $[0,1]$ číselné osy a kolmicemi o výšce $1/q$ vztyčenými v bodech p/q, kde $p,q \in \mathbb{N}$ jsou čísla nesoudělná.

Za jeden ze základních pojmů *analysis situs* považuje Schoenflies pojem uzavřené křivky. Definuje ji pomocí topologických vlastností bez odkazů na analýzu. *Uzavřenou křivkou* nazývá Schoenflies [1908, s. 119] omezenou uzavřenou bodovou množinu C, která rozděluje rovinu na dvě oblasti F a A tak, že každý její bod je společným hraničním bodem obou oblastí. Dokazuje dále, že taková množina neobsahuje izolované body a je dokonalá, souvislá a *lineární*.

Jordanovu větu formuluje Schoenflies [1908, s. 168] takto:

Věta. *Každá bodová množina, která je prostým spojitým obrazem kružnice, rozděluje rovinu na dvě oblasti, jejichž je společnou hranicí; taková množina je tudíž uzavřenou křivkou ve smyslu předchozí definice.*

V části věnované spojitým křivkám se Schoenflies zabývá Jordanovými křivkami a formuluje podmínky, které musí bodová množina v rovině splňovat, aby byla spojitým obrazem intervalu $[0,1]$. Zavádí za tím účelem pojmy dostupnost a dostupnost ze všech stran. Hranice G oblasti E je *dostupná* v bodě P s ohledem na E, jestliže pro každý bod $A \in E$ existuje lomená čára AP, tvořená konečným nebo případně nekonečným počtem úseček (pro jejichž koncové body je P hromadným bodem), která leží celá (s výjimkou P) v E. Hranice G oblasti E je *dostupná ze všech stran* v bodě P s ohledem na E, jestliže bod P je dostupný z každé podoblasti oblasti E, jejíž hranice bod P obsahuje.

K tomu, aby ohraničené rovinné kontinuum C bylo Jordanovou křivkou, je nutné a stačí, aby hranice každé oblasti, která neobsahuje žádný bod C a jejíž hranice je podmnožinou C, byla v každém svém bodě dostupná ze všech stran (allseitig erreichbar) z této oblasti a aby pro každé $\varepsilon > 0$ existoval nejvýše konečný počet takových oblastí průměru většího než ε [Schoenflies, 1908, s. 237].

Dostupnost ze všech stran v Schoenfliesově větě je podstatná; kdyby byla zaměněna za pouhou dostupnost, přestala by věta platit [Moore, 1923]. Schoenflies [1908, s. 176] viděl v pojmu dostupnost most mezi analýzou a geometrií; chápal jej jako geometrický výraz pojmu spojitost v analýze.

Elegantnější řešení problému charakterizování Jordanových křivek, které o několik let později předložili nezávisle Hahn a Mazurkiewicz, se opírá o pojem lokální souvislosti (odst. 3.7).

Schoenfliesovo úctyhodné dílo se přes své ambice nestalo základem pro moderní topologii (tím se stala o pár let později Hausdorffova kniha *Grundzüge der Mengenlehre*). Svou roli přitom sehrály i Schoenfliesovy chyby, na něž poukázal Brouwer.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966) byl výrazným reprezentantem nastupující generace topologů. Znal dobře Schoenfliesovy práce a záhy po vydání druhého dílu *Berichtu* zaslal redakční radě *Mathematische Annalen*, kde vycházely Schoenfliesovy *Beiträge*, příspěvek nazvaný *Zur Analysis Situs*. Upozornil v něm na to, že některé Schoenfliesovy výsledky nejsou správné, další sice správné jsou, ale nejsou korektně dokázány a další pak jsou nejisté. Brouwerova kritika doplněná řadou protipříkladů vyšla v 68. svazku *Mathematische Annalen* spolu se Schoenfliesovou odpovědí. Následná korespondence Brouwera se Schoenfliesem se vyznačovala klesající mírou vzájemného porozumění a teprve Hilbertova intervence zabránila úplnému narušení vztahů [Dalen, 2005, s. 146].

Schoenflies patřil ke generaci Cantora a Jordana. Další rozvoj teorie množin a topologie byl už spojen se jmény jako Brouwer, Hausdorff, Janiszewski nebo Uryson. Schoenflies byl „tím, komu bylo dovoleno spatřit zaslíbenou zemi, avšak nebyl tím, kdo do ní měl matematiky vést“ [Dalen, 2005, s. 141].

3.6 Ireducibilní a nerozložitelná kontinua

Pro topologii, která se na konci 19. století zformovala v relativně samostatnou matematickou disciplínu, bylo studium bodových množin a jejich vlastností prvořadým cílem. Jordanova věta a s ní související přesná definice křivky měly z tohoto hlediska zvláštní důležitost.

Americký matematik s norskými kořeny Oswald Veblen (1880 – 1960) se ve své doktorské disertaci, obhájené roku 1903, zabýval axiomatickým systémem geometrie založeným na pojmech bodu a uspořádání. V článku [Veblen, 1905] zaměřil svou pozornost na „základní větu topologie“ (tedy Jordanovu věta), kterou dokazuje v obecném tvaru bez jakýchkoliv omezujících podmínek. Pro tento účel a na základě svých geometrických axiomů nejprve definuje jednoduchou a jednoduchou uzavřenou rovinnou křivku jako množiny bodů mající jisté vlastnosti. Ty jsou rozděleny do tří skupin: 1) lineární uspořádání, 2) ordinální spojitost a 3) geometrická spojitost. Veblen ukazuje, že v případě zavedení systému souřadnic je jeho definice ekvivalentní Jordanově definici.

Podnětným prostředím semináře E. H. Moora na nové chicagské univerzitě prošel i další matematik norského původu Nels Johann Lennes (1874 – 1951). Svou disertační práci *Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations*, kterou stejně jako Veblen sepsal pod Moorovým vedením, obhájil roku 1907 a publikoval o čtyři roky později. Lennes, podobně jako Schoenflies, se soustředil na ty otázky, které jsou nezávislé na metrických vlastnostech prostoru. Sem patří zejména jeho charakteristika souvislosti [Lennes, 1911, s. 303].

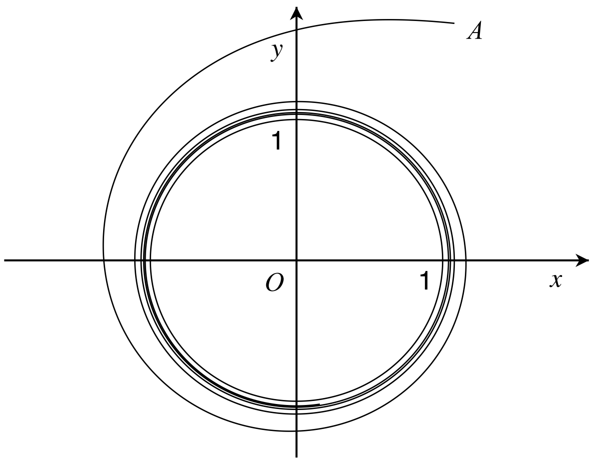
> Bodová množina je souvislá, jestliže v každé dvojici podmnožin, z nichž jedna je doplňkem druhé, alespoň jedna obsahuje hromadný bod druhé.

Studium vlastností jednoduchých oblouků v rovině opírá Lennes [1911, s. 308] o následující definici, kterou považuje za velmi blízkou běžnému intuitivnímu chápání pojmu křivka:

> Spojitým jednoduchým obloukem mezi dvěma body A, B, $A \neq B$, rozumíme omezenou, uzavřenou a souvislou množinu bodů obsahující A i B takovou, že žádná její vlastní podmnožina neobsahuje A a B zároveň.

Lennes svoje výsledky prezentoval na zasedání American Mathematical Society (AMS) v prosinci roku 1905. Abstrakt jeho přednášky uveřejněný následujícího roku v *Bulletinu AMS* obsahuje i obě výše uvedené definice.

Na stejné myšlence, která je obsažena v Lennesově definici křivky, je založen pojem ireducibilního kontinua. Zoretti [1909] nazývá kontinuum, které obsahuje body A a B, ale jehož žádná vlastní podmnožina oba tyto body zároveň neobsahuje, kontinuem *ireducibilním mezi body A a B* (continu irréductible entre A et B). Oblouk kružnice, úsečka či lomená čára neprotínající sebe sama jsou příklady kontinuí ireducibilních mezi svými koncovými body. Ireducibilní kontinuum je zjevně Cantorovou křivkou, neboť žádné plošné kontinuum není mezi žádnými svými dvěma body ireducibilní. Zoretti dokazuje, že každá jednoduchá (sama sebe neprotínající) Jordanova křivka je kontinuem ireducibilním mezi svými koncovými body. Zoretti zpočátku věřil, že platí i obrácené tvrzení a že pojmy jednoduchá Jordanova křivka s koncovými body A a B a kontinuum ireducibilní mezi body A a B jsou v zásadě identické. Obráceně je však situace složitější (viz obr. 3.6) a ireducibilní kontinuum může být i v rovinném případě dosti komplikované; k tomu, aby ireducibilní kontinuum bylo jednoduchou Jordanovou křivkou, je nutné klást další podmínky.



OBR. 3.6: Křivka $\rho = 1 + 1/\vartheta$ (v polárních souřadnicích) spolu s kružnicí $\rho = 1$ tvoří ireducibilní kontinuum mezi bodem $\rho = 1, \vartheta = 1$ a libovolným bodem kružnice [Kuratowski, 1933, s. 131]

Podobnými otázkami jako Zoretti se zabýval polský matematik Zygmunt Janiszewski (1888 – 1920), který se později stal jedním z iniciátorů slavné varšavské matematické školy. Svá doktorská studia v Paříži (pod vedením Lebesguea) zakončil Janiszewski v roce 1911 obhajobou disertační práce *Sur les continus irréductibles entre deux points.*

Janiszewski popisuje křivku v n-rozměrném eukleidovském prostoru ($n \geq 2$) důsledně pomocí jejích „vnitřních“ vlastností (tj. bez vztahu k ostatním bodům prostoru). Východiskem je pro něj pojem ireducibilního kontinua zavedený Zorettim. Ireducibilními kontinui jsou oblouky všech „slušných“ křivek, ale patří mezi ně i značně komplikované množiny. Janiszewski [1912, s. 81] proto zavádí pojem *jednoduchého oblouku* (arc simple) a ukazuje, že jednoduchý oblouk je identický s jednoduchou Jordanovou křivkou.

> Jednoduchým obloukem AB nazýváme každé ireducibilní kontinuum AB, které má tu vlastnost, že libovolná dvě subkontinua, na které je rozdělíme, mají společný právě jeden bod oblouku AB.

Jednoduchý oblouk je každá množina bodů, která je homeomorfním obrazem úsečky. Janiszewski dále pro kontinuum C nazývá kontinuum $G \subset C$ *kontinuem zhuštění* (continu de condensation), jestliže $\overline{C \setminus G} = C$ (G je tedy kontinuum, které je řídké v kontinuu C). V příkladu na obr. 3.5 je kontinuem zhuštění úsečka $\{[x, y]; x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$. Aby nějaký ireducibilní oblouk AB byl jednoduchý, je nutné a stačí, aby na něm neexistovalo žádné kontinuum zhuštění.

Janiszewski [1912, s. 109] rovněž dokazuje, že pro každé kontinuum G a dva jeho body A, B existuje alespoň jedna podmnožina G která je ireducibilním kontinuem mezi A a B. Při důkazu použil transfinitní indukcí. Stejným tvrzením se zabýval i Mazurkiewicz [1910] a dokázal jej bez použití transfinitní indukce.

Obecnou teorii ireducibilních kontinuí vypracoval Kuratowski, značnou pozornost jim věnovali i Mazurkiewicz, Knaster a Uryson. Její součástí je i teorie tzv. nerozložitelných kontinuí, která se začala utvářet na konci první dekády 20. století mimo jiné i na základě jednoho z Brouwerových protipříkladů obsažených v kritice Schoenfliesových tvrzení.

Připomeňme, že Schoenflies ve shodě s obecnou intuicí definoval uzavřenou křivku v rovině jako uzavřenou omezenou množinu, která rozděluje rovinu na dvě oblasti, jejichž je společnou hranicí.

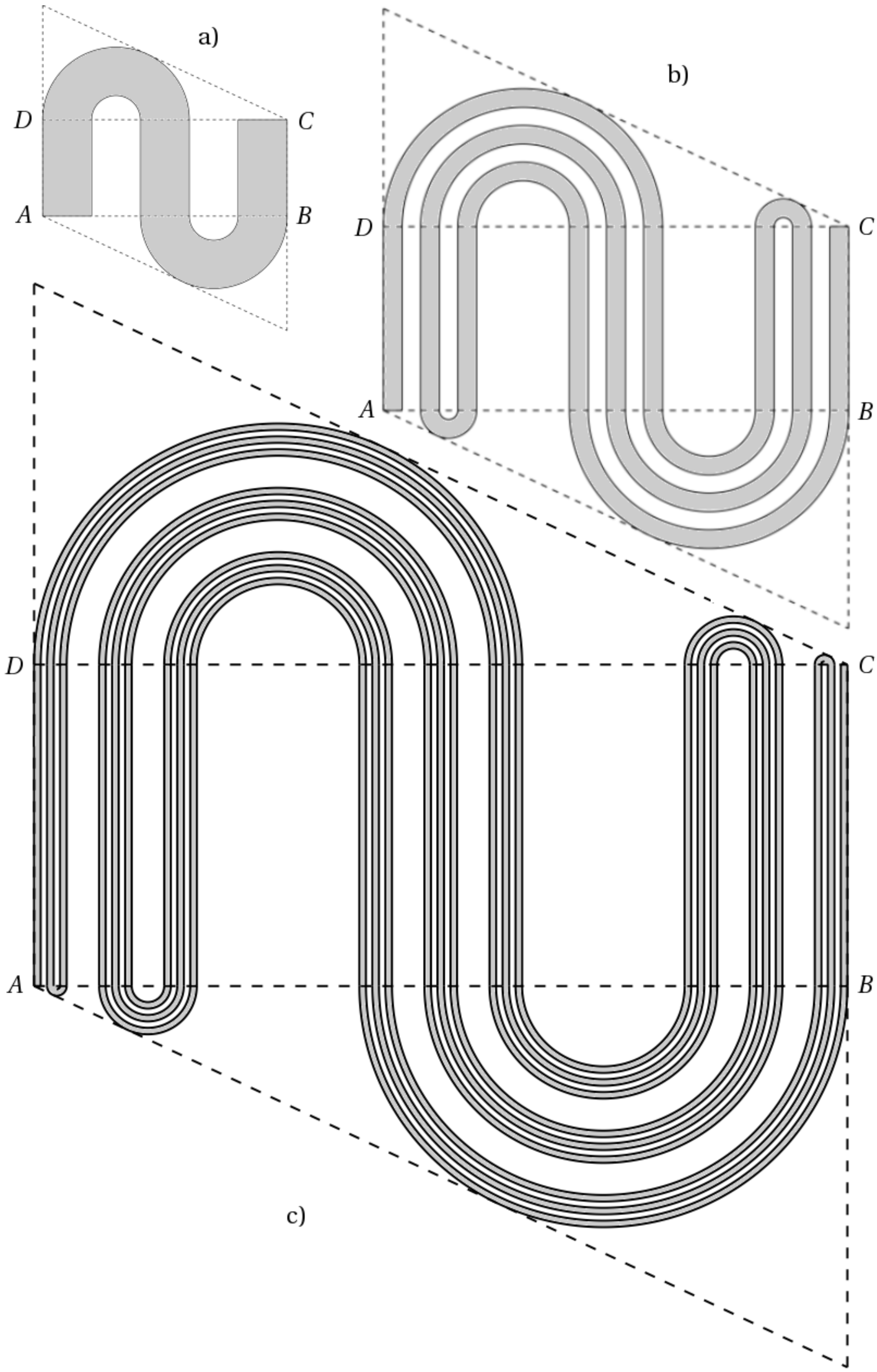
Nejslavnějším z Brouwerových protipříkladů je patrně uzavřená množina, která je společnou hranicí tří oblastí [Brouwer, 1910, s. 427].

Zhruba ve stejné době nezávisle na Brouwerovi uvedl podobnou konstrukci Arnaud Denjoy (1884 – 1974). Zjednodušený příklad obsahuje i práce Janiszewského [1912, s. 114]. Jednalo se o první příklady kontinuí, jejichž společnou vlastností je nerozložitelnost, tzn. kontinua, která nejsou sjednocením dvou vlastních subkontinuí. Studium takových množin se v pozdějších letech stalo důležitou součástí topologie.

Poutavé líčení konstrukce takové množiny podal Kunizó Jonejama (1877 – 1968). Jeho příklad [1917, s. 60–62] je založen na představě země obklopené mořem a sladkovodního jezera ve vnitrozemí. Z jezera i z moře jsou střídavě každý den budovány kanály, které zavádějí vodu do země. Každý den je nutné pracovat tak dlouho, dokud vzdálenost mezi sladkou a slanou vodou nebude nejvýše rovna odpovídajícímu členu dané klesající posloupnosti konvergující k nule. Pokračováním práce den za dnem *in infinitum* dostaneme křivku oddělující slanou a sladkou vodu. Variace na tuto konstrukci umožní vytvořit spočetně mnoho souvislých vodních ploch oddělených společnou hranicí.

Jonejamovo dlouhé pojednání vyšlo v časopise *Tôhoku Mathematical Journal*, prvním japonském vědeckém časopise západního střihu. Jako autora uvedeného příkladu uvádí Jonejama Takea Wadu (1882 – 1944), který mj. napsal článek [Wada, 1911], zřejmě první článek z topologie, který byl v Japonsku vydán.

Bezprostředním impulsem k publikování zmíněného anglicky psaného Wadova článku, který byl věnován pojmu křivky, byla práce [Lennes, 1911], jejíž téma se částečně překrývalo s oborem Wadova nezávisle vedeného výzkumu. Wadovým cílem bylo charakterizovat Jordanovu křivku (kterou chápe v duchu Hurwitzovy definice) z hlediska teorie bodových množin. Definuje *jednoduchou křivku* (simple curve) v n-rozměrném eukleidovském prostoru jako množinu bodů M vyhovující dvěma nezávislým podmínkám. První podmínka v podstatě říká, že M je ireducibilní mezi body A a B (Wada tento pojem nepoužívá, se Zorettiho prací ani s výsledky Janiszewského zjevně nebyl obeznámen). Tuto vlastnost mají i některé množiny, jež jednoduchými Jordanovými křivkami nejsou.



OBR. 3.7: Geometricky názorná konstrukce nerozložitelného kontinua. Obdélník $ABCD$ rozdělíme pomocí úseček rovnoběžných se stranou AD na pět stejných částí. Odebereme druhou a čtvrtou část a zbylé tři spojíme dvěma oblouky (obr. a). Získaný pruh esovitého tvaru rozdělíme opět na pět částí, odebereme druhou a čtvrtou a zbylé tři spojíme dvěma oblouky (obr. b). Získaný pruh spojující body A a C opět rozdělíme, doplníme dva oblouky (obr. c) atd. [Vietoris, 1921, s. 198–200]

Wada proto připojuje další podmínku: jestliže nějaké subkontinuum (continuous component, tj. souvislá dokonalá podmnožina) množiny M, která obsahuje dva různé body E a F, obsahuje rovněž třetí bod G, pak existuje také subkontinuum, které obsahuje bod G a jeden z bodů E a F (ale ne oba zároveň). Wada ukazuje, že jednoduchá křivka může být popsána rovnicemi

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots \quad , \quad x_n = \varphi_n(t),$$

kde $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ jsou spojité funkce parametru $t \in [0,1]$, které pro žádné dvě různé hodnoty t nenabývají společně stejných hodnot; jedná se tedy o jednoduchou Jordanovu křivku.

3.7 Jordanovy křivky a lokální souvislost

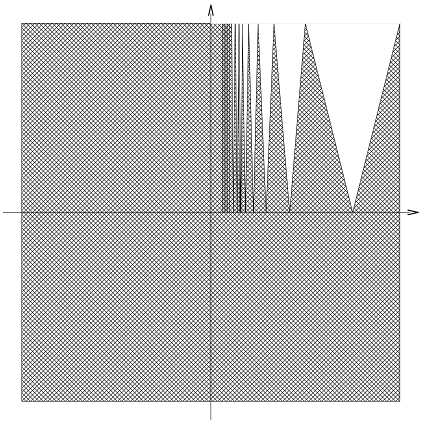
Peanův příklad křivky vyplňující čtverec ukázal, že Jordanova definice křivky je příliš obecná a vyhovují jí i bodové množiny, které za křivky běžně nepovažujeme. Někteří autoři se proto zdráhali používat v tomto kontextu pojem křivka a dávali přednost obecnějšímu označení jordanovské kontinuum. Přestože na počátku 20. století směřovalo úsilí mnoha matematiků k nalezení vyhovující topologické definice křivky, otázka, jaké vlastnosti z topologického hlediska charakterizují Jordanovu křivku (neboli jaké vlastnosti musí mít daná množina, aby byla spojitým obrazem uzavřeného intervalu) nezůstávala stranou.

Jak již bylo uvedeno, tuto otázku si položil Schoenflies. Jeho poměrně komplikovaná věta (s. 80) se opírá o vlastnosti doplňku množiny M a není tedy vnitřní charakteristikou množiny M. Týká se navíc pouze rovinných kontinuí.

Obecnější řešení stejného problému našli nezávisle Hans Hahn (1879 – 1934) a Stefan Mazurkiewicz (1888 – 1945).

Hahn svůj objev prezentoval před vídeňskou akademií v roce 1913 a publikoval jej následující roku v *Jahresbericht der DMV* [Hahn, 1914]. Množina, která je spojitým obrazem jednotkového uzavřeného intervalu (tedy Jordanovou křivkou), je omezená, uzavřená a souvislá. Tyto tři vlastnosti však samy o sobě nestačí; specifickou vlastností, která odlišuje Jordanovy křivky od jiných kontinuí, je *lokální souvislost.* Množina M je lokálně souvislá v bodě P, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ (závisející ovšem na ε i na P) tak, že platí: jestliže X a Y jsou dva body M, jejichž vzdálenost od P je menší než δ, pak oba leží ve stejné uzavřené a souvislé podmnožině M, jejíž každý bod má od P vzdálenost menší než ε. Množinu, která má tuto vlastnost v každém bodě, je nazývána lokálně souvislou (Hahn používá označení zusammenhängend im kleinem).[9]

Množina na obr. 3.5 má první tři vlastnosti, avšak v žádném bodě úsečky s koncovými body $[0,-1]$ a $[0,1]$ není lokálně souvislá. Čtverec $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x,y \in [-1,1]\}$ lze považovat za obraz jednotkového intervalu, to však už neplatí o množině na obr. 3.8, která z tohoto čtverce vznikne odebráním vnitřních bodů rovnoramenných trojúhelníků se základnami tvořenými úsečkami s koncovými body $[1/n, 1]$ a $[1/(n+1), 1]$, $n \in \mathbb{N}$ a vrcholy na ose x, neboť v každém bodě úsečky $\{[x,y] \in \mathbb{R}; 0 \leq y \leq 1, x = 0\}$ je porušena podmínka lokální souvislosti [Hahn, 1914, s. 321].



OBR. 3.8: Kontinuum, které není v každém bodě lokálně souvislé

Hahn se později stal jedním ze spoluautorů manifestu Vídeňského kroužku a předním představitelem logického positivismu. Jeho přednášky měly vliv i na Mengera (viz odst. 3.10).

Hahn explicitně zavedl lokální souvislost jako nový topologický pojem. Ve skutečnosti se však v jiném kontextu stejnou vlastností zabývala Pia Nalliová (1886 – 1964) v článku [Nalli, 1911].

Výše uvedená charakteristika Jordanových křivek je dnes označována jako Hahn–Mazurkiewiczova věta.

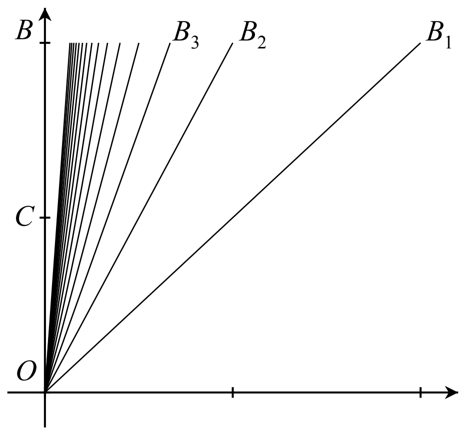
Věta (Hahn–Mazurkiewicz)**.** *Množina A je Jordanovou křivkou právě tehdy, když A je kompaktní*[10]*, souvislá a lokálně souvislá.*

[9] V moderních učebnicích topologie lze nalézt obecnější definici neodvolávající se na metrické vlastnosti prostoru: Prostor T je lokálně souvislý v bodě x, jestliže ke každému okolí $U(x)$ bodu x existuje souvislé okolí $V(x)$ tak, že $V(x) \subset U(x)$. Prostor T je lokálně souvislý, jestliže je lokálně souvislý v každém svém bodě. [Munkres, 2000, s. 161]

[10] Více o kompaktnosti v odstavci 3.9.

Mazurkiewicz se touto problematikou zabýval ve své doktorské disertaci pod vedením Sierpińského. Jeho výsledky byly Sierpińským předloženy ve třech příspěvcích, které byly (polsky) publikovány v letech 1913 a 1914 v *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*. Větší publicity se Mazurkiewiczovým výsledkům dostalo poté, co vyšly v systematickém francouzsky psaném článku v prvním svazku *Fundamenta Mathematicæ* [Mazurkiewicz, 1920].

Dalším pojmem, který byl uveden v souvislosti se studiem Jordanových křivek, je souvislost obloukem. Bodová množina M je *obloukově souvislá*, existuje-li ke každým dvěma bodům $x, y \in M$, $x \neq y$ jednoduchý oblouk s koncovými body x, y [Moore, 1923, s. 294]. Nutnou podmínkou, aby daná množina byla Jordanovou křivkou, je souvislost obloukem. K tomuto výsledku dospěl již dříve Mazurkiewicz a nezávisle na něm také Heinrich Tietze (1880 – 1964) a Robert Lee Moore (1882 – 1974). Není to však podmínka postačující, jak ukazuje následující příklad [Moore, 1923, s. 293]: množina sestávající z intervalů $OB, OB_1, OB_2, \ldots$, kde O je bod $[0,0]$, $B = [0,1]$ a $B_n = [1/n, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, je obloukově souvislá, avšak není Jordanovou křivkou.



OBR. 3.9: Kontinuum, které je obloukově souvislé, ale není Jordanovou křivkou

Moore a jeho žák Raymond L. Wilder (1896 – 1982) dokázali, že nutnou a postačující podmínkou, aby dané kontinuum bylo Jordanovou křivkou, je souvislost obloukem každé maximální souvislé otevřené podmnožiny. Označíme-li bod $[0, 1/2]$ písmenem C, pak množina $M \setminus C$ je otevřená souvislá podmnožina M, avšak body O a B nemohou být spojeny jednoduchým obloukem, který leží v $M \setminus C$.

Sierpiński [1920] ukázal, že dané kontinuum je Jordanovou křivkou právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ jej lze chápat jako sjednocení konečného počtu uzavřených souvislých množin průměru menšího než ε.

Mazurkiewicz se problematikou lokálně souvislých kontinuí zabýval i v pozdější době, zejména s ohledem na tzv. dendrity – lokálně souvislá kontinua, která neobsahují žádnou jednoduchou uzavřenou křivku.

3.8 Příklady Janiszewského a Sierpińského

Pátý ICM se konal roku 1912 v Cambridge. Janiszewski ve svém referátu [Janiszewski, 1912] položil otázku, zda řídká kontinua ve třírozměrném eukleidovském prostoru musí nutně být křivkami nebo plochami (uvažujeme-li pouze ty, které jsou v dimenzi „homogenní"). Konstatoval, že zatímco pro případ dvourozměrného prostoru existuje Zorettiho definice Cantorovy křivky, ve třírozměrném prostoru dosud nemáme obecnou definici, která by ze všech řídkých kontinuí vyčlenila právě linie.

Janiszewski ve svém příspěvku rovněž uvedl, že existuje kontinuum (Cantorova křivka), které neobsahuje jednoduchý oblouk, a naznačil jeho konstrukci. Takovou množinou je kontinuum, jehož každé subkontinuum obsahuje kontinuum zhuštění.

> Získáme je jako limitu posloupnosti linií, jejímž prvním členem je linie $y = \sin(1/x)$ a další získáme metodou kondenzace singularit [11] tak, že jednoduché oblouky nahradíme všude liniiemi homeomorfními (elementarverwandte) s linií $y = \sin \frac{1}{x}$. Je přitom pouze nutno zajistit, že konvergence k nule bude při prováděných změnách dostatečně rychlá.

Podle poznámky připojené k uvedenému citátu byl tentýž příklad znám i Brouwerovi. Obecně každá křivka, která neobsahuje jednoduchý oblouk, se později začala nazývat *Janiszewského křivkou*. Přesnou konstrukci křivky tohoto typu geometrickými prostředky popsal Bronisław Knaster (1893 – 1990) ve své doktorské disertační práci [Knaster, 1922].

Podle Kuratowského [1980] byl Janiszewského příklad ve své době podivný, ale protože dědičně nerozložitelná kontinua neobsahují žádný oblouk, je vlastně skoro každé rovinné kontinuum Janiszewského křivkou.

Janiszewski v závěru svého referátu uvádí podmínky, které by každá přijatelná obecná definice linie měla splňovat:

[11] Metodu *kondenzace singularit* popsal Hermann Hankel (1839 – 1873) roku 1870 jako prostředek pro vytváření patologických funkcí jistého druhu (např. funkce, která je spojitá v každém bodě omezeného intervalu I, ale v žádném bodě nekonečné spočetné množiny husté v I nemá konečnou derivaci). Nechť φ je funkce, která má „singularitu" v bodě 0 (např. funkce φ definovaná předpisem $\varphi(y) = y\sin(1/y)$ pro $y \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ a $\varphi(0) = 0$). Položíme-li

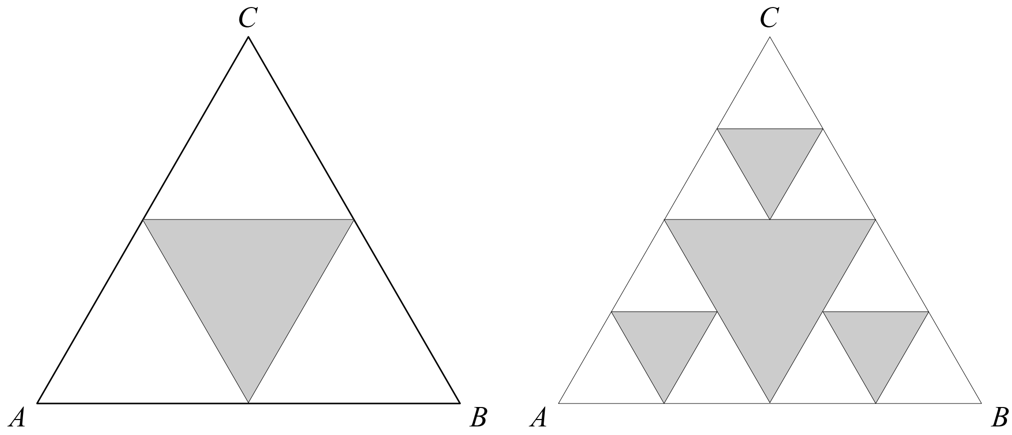
$$f(x) = \sum \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}, \quad s > 3,$$

přenese se podle Hankela chování funkce φ v bodě 0 na chování funkce f v bodech tvořících nekonečnou spočetnou množinu. Hankelovu metodu dále rozpracovali Cantor a zejména Ulisse Dini (1845 – 1918) (viz např. [Volkert, 1987, s. 211–214]).

1. kontinuum homeomorfní s rovinnou Cantorovou křivkou je samo Cantorovou křivkou [12];
2. kontinuum, které je sjednocením konečného počtu Cantorových křivek, je Cantorovou křivkou.

Janiszewského příklad ukázal, že i Cantorova křivka může být dosti vzdálena intuitivní představě o čáře. Mohlo by se zdát, že spojením Zorettiho a Jordanovy definice dostaneme kritérium, které bude nejlépe odpovídat běžné představě čáry. Avšak množiny, které jsou zároveň Cantorovými i Jordanovými křivkami, mohou také vykazovat paradoxní vlastnosti.

Wacław Sierpiński (1882 – 1969), jeden z nejvýznamnějších polských matematiků 20. století a ústřední postava varšavské matematické školy, publikoval příklad rovinného kontinua, které je zároveň Cantorovou i Jordanovou křivkou a jehož každý bod je bodem rozvětvení [Sierpiński, 1915]. Bod $P \in K$ nazývá Sierpiński *bodem rozvětvení* křivky K, jestliže existují tři kontinua, které jsou podmnožinami K a každé dvě z nich mají společný pouze bod P.



OBR. 3.10: Konstrukce Sierpińského trojúhelníku

Prvním krokem při konstrukci křivky je sestrojení rovnostranného trojúhelníku T_0 s vrcholy A, B, C. Spojíme-li úsečkami středy jeho stran, získáme čtyři menší rovnostranné trojúhelníky. Odstraníme vnitřní body trojúhelníku, který neobsahuje žádný z bodů A, B, C. Zbývající tři trojúhelníky tvoří uzavřenou množinu T_1. Každý ze tří trojúhelníků tvořících množinu T_1 rozdělíme stejným způsobem na čtyři rovnostranné trojúhelníky a odebereme vnitřní body těch trojúhelníků, které jsou otočeny vrcholem dolů (obr. 3.10).

[12] Alexandrov [1954, s. 277] poukazuje na to, že sama o sobě vlastnost rovinné množiny být řídkou v rovině není topologicky invariantní; označíme-li R_1 množinu všech racionálních čísel na číselné ose a R_2 množinu všech racionálních bodů v rovině (tj. takových bodů v rovině, jejichž obě souřadnice jsou racionální čísla), lze ukázat, že R_1 a R_2 jsou homeomorfní, přičemž množina R_1 je řídká v rovině a R_2 hustá.

Sjednocení zbylých devíti trojúhelníků označíme T_2. Obecně množina T_k bude tvořena 3^k trojúhelníky.

Uzavřená množina $T = \bigcap_{k=1}^{\infty} T_k$, nazývaná *Sierpińského trojúhelník*, je kontinuum řídké v rovině a je tedy Cantorovou křivkou.

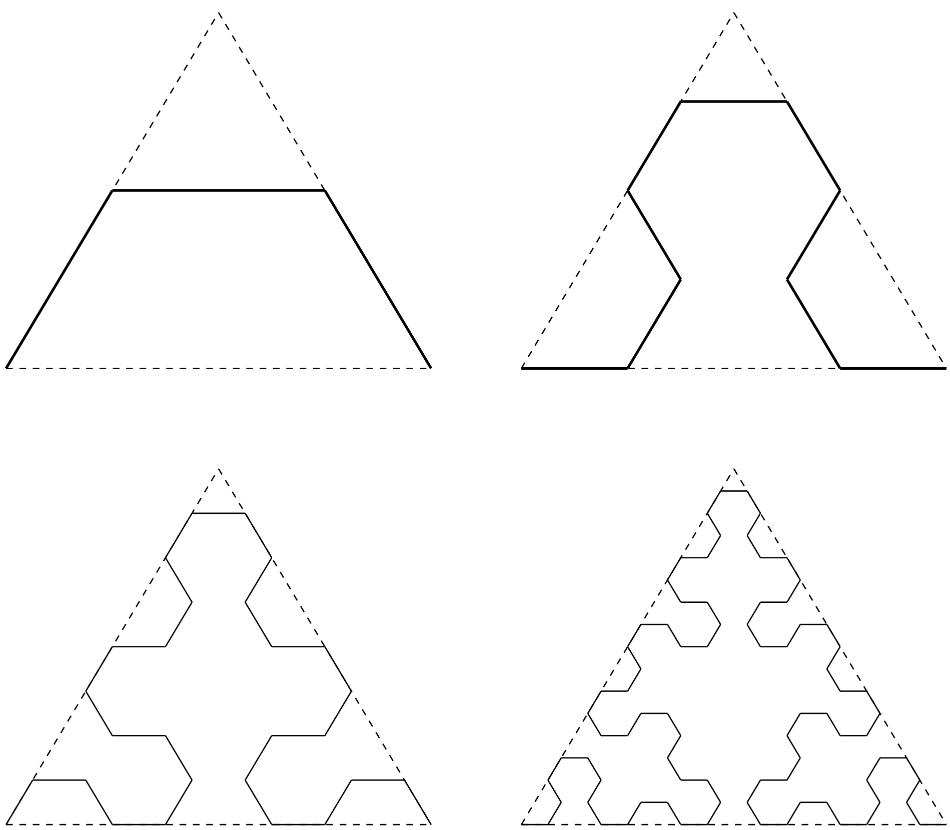
V obsáhlejší polské verzi [Sierpiński, 1916a], která vyšla v časopise *Prace matematyczno-fizyczne*, dokazuje Sierpiński, že kontinuum T je rovněž Jordanovou křivkou. Konstruuje za tím účelem posloupnost lomených čar $\{P_n\}$ (její první čtyři členy jsou znázorněny na obr. 3.11), přičemž body čáry P_n popisuje spojitými funkcemi

$$x = f_n(t), \quad y = \varphi_n(t), \quad t \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Protože posloupnosti $\{f_n\}$, $\{\varphi_n\}$ konvergují stejnoměrně v intervalu $[0,1]$, jsou funkce

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t), \quad \varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t),$$

spojité v $[0,1]$. Sierpiński dokazuje, že křivka popsaná rovnicemi $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $t \in [0,1]$, je totožná s kontinuem T, které je tudíž Jordanovou křivkou.

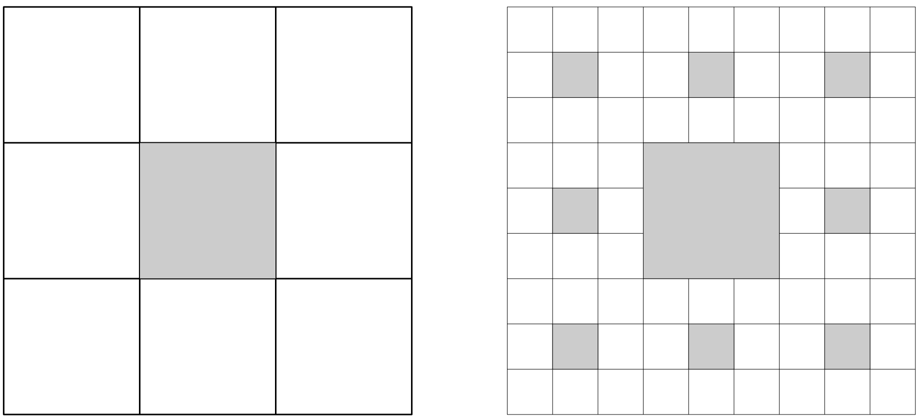


OBR. 3.11: Konstrukce Sierpińského trojúhelníku pomocí posloupnosti lomených čar

Hlavním výsledkem ohlášeným v názvu článku je důkaz, že každý bod křivky (s výjimkou vrcholů A, B, C) je bodem rozvětvení. Křivku, jejíž každý bod je bodem rozvětvení, lze získat tak, že šest kopií křivky T poskládáme do tvaru šestiúhelníku tak, aby jeden vrchol byl společný.

Další příklad uvedl Sierpiński v poznámce, která se objevila v *Comptes rendus* pařížské Akademie roku 1916, a popsal podrobněji v rusky psaném článku [Sierpiński, 1916b] v časopise *Matematičeskij sbornik*.

Jednotkový čtverec Q_0 rozdělíme na 9 stejných čtverců se stranami délky $\frac{1}{3}$ a odstraníme vnitřní body prostředního z nich. Sjednocení zbývajících 8 čtverců označíme Q_1. Každý z nich rozdělíme opět na 9 stejných čtverců a odstraníme vnitřní body prostředních osmi čtverců. Označíme Q_2 sjednocení zbylých 64 čtverců o straně $\frac{1}{9}$. Množina Q_k bude tvořena 8^k čtverci o straně $\frac{1}{3^k}$. Uzavřená množina $Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$, nazývaná *Sierpińského koberec*, tvoří kontinuum řídké v rovině, tedy Cantorovu křivku.



OBR. 3.12: Konstrukce Sierpińského koberce

Sierpiński dokazuje, že ke každé Cantorově křivce K existuje křivka K', která je homeomorfní s K a zároveň $K' \subset Q$.

Při důkazu, že Q je zároveň Jordanova křivka, využívá Sierpiński modifikované konstrukce Peanovy křivky pomocí aproximujících lomených čar, které jsou vedeny tak, aby neprotínaly vnitřek prostředního čtverce.

Mazurkiewicz dokázal, že každý bod Q je bodem rozvětvení nekonečného řádu (tj. že pro každý bod $P \in Q$ existuje nekonečné množství kontinuí procházejících bodem P, přičemž žádné dvě z nich nemají kromě P žádné společné body). Navíc se dá dokázat, že pro každý bod $P \in Q$ existuje nespočetně mnoho jednoduchých oblouků ležících v Q, z nichž každé dva mají jediný společný bod P. (V tomto ohledu je Sierpińského kontinuum opakem Janiszewského křivky.)

Mazurkiewicz svůj výsledek nepublikoval, ale podle Sierpińského poznámky [1916a, s. 86] to byl on, kdo první tuto množinu sestrojil. Přesto je s Mazurkiewiczovým jménem spojována spíše výjimečně.

3.9 Kompaktnost

Zásadní vliv na vývoj topologie měla Hausdorffova kniha *Grundzüge der Mengenlehre* (1914). Na ní stavěla celá nastupující generace topologů, jak o tom svědčí např. počet citací v prvních ročnících časopisu *Fundamenta Mathematicæ*, vycházejícího od roku 1920 [Purkert, 2002, s. 58]. Kniha je připsána Cantorovi, „tvůrci teorie množin“.

Teorie bodových množin dostala v Hausdorffově knize nový obecný tvar.

> Teorie množin slaví svůj nejskvělejší triumf v aplikaci na bodové množiny a ve vyjasnění a zpřesnění základních pojmů geometrie; to připouštějí dokonce i ti, kdo se k abstraktní teorii množin stavějí skepticky. [Hausdorff, 1914, s. 209]

Teorie bodových množin je budována v rámci abstraktních prostorů. Topologickým prostorem je abstraktní prostor splňující čtveřici axiomů založených na obecném pojmu okolí. Obecnost závěrů je spojena s důslednější logickou stavbou a umožňuje vyvarovat se chyb, které pramenily z přílišného spoléhání na intuici (viz např. [Purkert, 2002]).

Přestože Hausdorff věnuje pozornost pojmu kontinua a uvádí výsledky týkající se různých aspektů teorie křivek, samotné definici křivky se vyhýbá.

> Definici pojmu křivky neuvádíme; množiny bodů, které obvykle toto jméno nesou, jsou natolik odlišné povahy, že je nelze zahrnout pod žádný rozumný společný pojem. Bylo by ale účelné zvát křivkami množiny bodů v rovině alespoň tehdy, když nemají žádné vnitřní body; spojitý obraz intervalu pak obecně křivkou není. [Hausdorff, 1914, s. 369]

Zvláštní význam pro teorii kontinua i křivek zvlášť získal pojem *kompaktnosti.* Vedle souvislosti je to druhá základní vlastnost, která v moderním pojetí charakterizuje kontinuum. Studium kompaktnosti bylo motivováno především studiem jistých vlastností omezených uzavřených intervalů na číselné ose, které hrály roli při dokazování některých vět o reálných funkcích, jako např. Weierstrassovy věty [Sundström, 2010].

Věta (Weierstrass)**.** *Každá funkce spojitá v omezeném uzavřeném intervalu nabývá v tomto intervalu svého maxima.*

Prvním, kdo použil pojem kompaktnost, byl Maurice Fréchet (1878 – 1973). Ve své slavné disertaci z roku 1906, v níž se poprvé objevil pojem metrického prostoru, nazval Fréchet [1906, s. 6] kompaktní takovou bodovou množinu A, jejíž každá nekonečná podmnožina má hromadný bod v A. Tato vlastnost je dnes nazývána *sekvenciální* nebo též *Fréchetova kompaktnost.* Pojem kompaktnosti použil Fréchet již v příspěvku [1904] uveřejněném dříve v *Comptes rendus*, kde jej použil při důkazu zobecněné Weierstrassovy věty pro abstraktní prostory.

Teorii kompaktních prostorů věnovali zvláštní pozornost dva představitelé ruské (sovětské) topologické školy: Pavel Sergejevič Alexandrov (1896 – 1982) a Pavel Samuilovič Uryson (1898 – 1924). Podle Urysona [1925, s. 41] každá matematická teorie má přirozený obor existence; pro topologii [13] jím je třída kompaktních metrických prostorů. Alexandrov a Uryson [1924, s. 260] definovali pojem *bikompaktnosti* založený na myšlence otevřeného pokrytí. Jednalo se o zobecnění vlastnosti, kterou pro množiny reálných čísel popisuje Borel – Lebesgueova věta [Alexandrov, 1954, s. 124].

Věta (Borel – Legesgue)**.** *Z každého nekonečného systému otevřených intervalů, který pokrývá daný uzavřený interval* $[a, b]$*, lze vybrat konečný podsystém, který také pokrývá* $[a, b]$*.*

Dnešní učebnice (např. [Munkres, 2000, s. 164]) definují pojem kompaktního prostoru ve smyslu definice Alexandrova a Urysona. Systém U podmnožin prostoru X nazveme pokrytím X, jestliže sjednocení všech prvků U je rovno X. Jsou-li všechny prvky systému U otevřené podmnožiny X, hovoříme o otevřeném pokrytí.

Definice. Topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

Dříve uvedená (Fréchetova) definice je méně obecná, pro metrické prostory jsou však obě ekvivalentní. Prostory studované v té době byly prakticky výhradně metrické, zpravidla byly v centru zájmu eukleidovské prostory.

Důležitým příkladem kompaktního metrického prostoru je Cantorova množina.

Druhé vydání *Mengenlehre* (1927) Hausdorff zcela přepracoval. Některé části byly vypuštěny, jiné byly revidovány. V části věnované kompaktním prostorům dokazuje Hausdorff [1927, s. 134] větu, k níž nezávisle dospěl i Alexandrov [1927, s. 567].

Věta (Hausdorff–Alexandrov)**.** *Každý kompaktní metrický prostor je spojitým obrazem kompaktní, dokonalé a totálně nesouvislé množiny, tedy např. Cantorovy množiny.*

[13] Doslova topologie intrinsèque; tak označuje Uryson oblast topologie, opírající se o vnitřní charakteristiky objektů, kterými se zabývá.

Hausdorff–Alexandrovova věta má mimo jiné i význam pro charakterizování Jordanových křivek. Hahn [1928] v příspěvku napsaném pro 8. ICM v Boloni navrhl nový důkaz Hahn–Mazurkiewiczovy věty (s. 87), který předčil jeho původní důkaz jednoduchostí a elegancí. Zmíněná věta vyplývá bezprostředně ze tří tvrzení:

- Každá kompaktní množina je spojitým obrazem Cantorovy množiny.
- Je-li množina M kompaktní, souvislá a lokálně souvislá, pak lze spojit každou dvojici bodů $X, Y \in M$ Jordanovou křivkou M', která leží v M.
- Je-li množina M kompaktní, souvislá a lokálně souvislá, pak pro každé $\rho > 0$ existuje $\sigma > 0$ tak, že pro každou dvojici bodů $X, Y \in M$, jejichž vzdálenost je menší než σ, existuje Jordanův oblouk spojující X, Y, který leží celý v M a jehož průměr je menší než ρ.

3.10 Menger–Urysonova teorie

Přestože na začátku 20. století se řada matematiků intenzívně zabývala studiem křivek z topologického hlediska, nebyl problém obecné definice křivky uspokojivě vyřešen. Cantorova definice byla vyhovující, ale platila jen pro rovinné křivky. K řešení problému dospěli až ve dvacátých letech nezávisle dva reprezentanti nastupující generace topologů: Uryson a Menger.

Široké spektrum zájmů, které Uryson na počátku své krátké, ale nesmírně plodné matematické kariéry měl, se časem zúžilo především na topologii. Když Uryson dokončil v roce 1921 aspiranturu na moskevské univerzitě, obrátil se na něj podle Alexandrovova svědectví [Nejman, 1972, s. 142 a n.] Dmitrij Fjodorovič Jegorov (1869 – 1931) s úkolem najít nejobecnější topologickou vnitřní definici křivky a plochy. Tento úkol souvisel s potřebou vytvořit obecnou teorii dimenze a na ni zaměřil Uryson svou mimořádnou tvůrčí energii. Alexandrov vypráví, že o vyřešení problému jej Uryson zpravil při koupání v řece Kljazmě, když trávili léto spolu s dalšími mladými matematiky na chatě ve vsi Burkovo. Koupání se později stalo Urysonovi osudným; roku 1924 tragicky zahynul při plavání v moři poblíž Batz-sur-Mer v Bretani.

Jestliže topologie byla hlavní oblastí Urysonových zájmů, pak teorie dimenze byla jeho nejdůležitějším přínosem v této oblasti. Jegorovovo zadání vyřešil Uryson v ještě obecnější rovině a podal definici *n-rozměrné Cantorovy variety*. I když hlavní výsledky našel již v roce 1921 a celá teorie byla hotova na jaře 1922, cesta k jejímu publikování byla poměrně složitá.

V zimě 1921 – 22 vedl Uryson na moskevské univerzitě kurz *Topologie kontinuí*, vůbec první kurz topologie, který se zde uskutečnil a zároveň „jeden z nejpozoruhodnějších matematických kurzů, přednesených kdy ve zdech moskevské univerzity, výjimečný svou tvůrčí hloubkou“ [Nejman, 1972, s. 141]. Kurz byl postaven na původních Urysonových výsledcích.

Urysonova teorie dimenze byla publikována ve dvoudílném pojednání *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*. Průběžné výsledky jeho práce byly prezentovány (Fréchetem) pařížské Akademii v letech 1922 a 1923. První díl *Mémoire* nese datum 20. 3. 1923. Uryson jej předal redakci časopisu *Fundamenta Mathematicæ*, ale vyšel až po Urysonově tragické smrti ve dvou částech ve svazcích VII (1925) a VIII (1926). Na jaře roku 1923 odjeli Uryson s Alexandrovem do západní Evropy a Uryson o svých výsledcích referoval na zářijovém zasedání DMV. Druhý díl *Mémoire*, který je věnován speciálně křivkám, připravili k tisku Alexandrov a Brouwer po Urysonově smrti; vyšel roku 1927 ve *Verhandelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* (citace jsou zde uváděny podle ruského překladu [Uryson, 1951]).

Urysonova teorie je vybudována v rámci kompaktních metrických prostorů. Opírá se o pojem ε-oddělitelnosti [Uryson, 1925, s. 65]. Symbolem $B(x, \varepsilon)$ budeme rozumět otevřenou kouli se středem v bodě x a poloměrem ε.

Definice. Nechť C je libovolná množina v kompaktním metrickém prostoru. Řekneme, že množina $F \subset C$ ε-odděluje bod $x \in C$, jestliže rozdíl $C \setminus F$ je sjednocením dvou množin E a G, pro které platí

1. E a G jsou odděleny (tzn. jsou disjunktní a žádná z nich neobsahuje hromadný bod druhé),
2. $x \in E$,
3. $E \cup F \subset B(x, \varepsilon)$.

Dimenzi definuje Uryson [1925, s. 65] indukcí.

Definice. Nechť C je libovolná množina v kompaktním metrickém prostoru a $x \in C$.

1. Jestliže pro nějaké ε může být bod x ε-oddělen prázdnou množinou, pak tento bod má dimenzi 0 (vzhledem k C).
2. Jestliže všechny body množiny C mají dimenzi 0 vzhledem k C, pak říkáme, že C má dimenzi 0.
3. Jestliže bod $x \in C$, který nemá dimenzi $< n$ (vzhledem k C), může pro nějaké ε být ε-oddělen množinou B dimenze $< n$, pak tento bod má dimenzi n.
4. Množina C sestávající pouze z bodů dimenze $\leq n$ má dimenzi n, jestliže obsahuje alespoň jeden bod, jehož dimenze je n.

Dimenze prázdné množiny je -1.

Ve vysoce ceněné knize Hurewicze a Wallmana [1941] je teorie dimenze pojednána v rámci obecnějších separabilních metrických prostorů. Prostor má dimenzi n, existuje-li v něm baze, jejíž prvky mají hranice dimenze $\leq n-1$, a zároveň neexistuje baze, jejíž prvky by měly hranice dimenze $\leq n-2$..

Urysonovým původním cílem bylo v souladu s Jegorovovým zadáním podat definici Cantorovy n-rozměrné variety, jejímiž speciálními případy jsou Cantorova křivka a Cantorova plocha. Navazuje v tomto ohledu výslovně na práci Janiszewského [Uryson, 1925, s. 93].

Definice. Kontinuum dimenze 1 se nazývá Cantorovou křivkou.

Uryson dokazuje, že v případě rovinné křivky je jeho definice ekvivalentní s dřívější definicí Cantorovy křivky a že jeho definice splňuje podmínky Janiszewského (viz s. 89).

Druhá část Urysonova memoáru si klade za cíl rozvinout teorii Cantorových křivek stejně a ze stejných metodologických hledisek, jako je v první části rozvinuta teorie dimenze. Základem studia křivek jsou opět lokální vlastnosti, přičemž prostředkem je jako v první části pojem ε-oddělitelnosti. Tento nástroj slouží především k určení indexu větvení bodu křivky, které je kostrou celé teorie. Při studiu bodů rozvětvení reviduje Uryson starší definice Younga a Janiszewského a poukazuje na to, že jeho přístup mu umožňuje lépe zkoumat strukturu křivek. Následující definice je v podstatě převzata z [Uryson, 1951, s. 522–523].

Definice. Nechť C je Cantorova křivka.

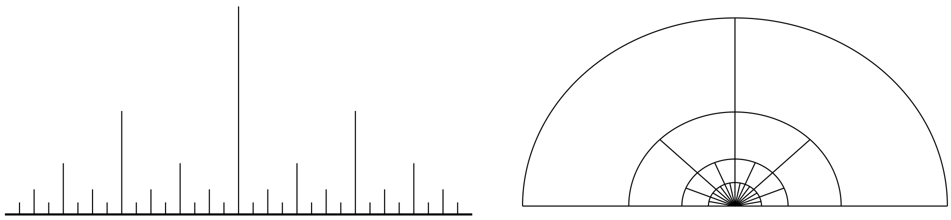
1. Řekneme, že bod $x \in C$ má index $n \in \mathbb{N}$ a píšeme $\operatorname{ind}_x C = n$, jestliže pro nějaké $\varepsilon > 0$ existuje ε-oddělení bodu x množinou B, tvořenou n body, přičemž pro žádné dostatečně malé ε neexistuje ε-oddělení bodu x množinou, tvořenou méně než n body.
2. Jestliže bod x může být vždy ε-oddělen konečnou množinou bodů, jejíž mohutnost neomezeně roste s $1/\varepsilon$, je $\operatorname{ind}_x C = \omega$.
3. Jestliže bod x nepatří ani do jedné z výše uvedených kategorií a může být ε-oddělen spočetnou množinou, je $\operatorname{ind}_x C = \aleph_0$.
4. Jestliže neplatí $\operatorname{ind}_x C \leq \aleph_0$, píšeme $\operatorname{ind}_x K = \mathfrak{c}$.

Je-li index bodu x větší než 2, bude x bodem rozvětvení; koncový bod má index 1. Uzavřenou množinu tvořenou všemi body rozvětvení a jejich hromadnými body nazývá Uryson *množinou větvení* kontinua C.

Kontinuum na obr. 3.13 vlevo ([Uryson, 1951, s. 524], viz též [Janiszewski, 1912, s. 96]) je tvořeno úsečkou $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ a úsečkami kolmými na osu x

s koncovými body $[p/2^n, 0]$ a $[p/2^n, 1/2^n]$, kde $n \in \mathbb{N}$ a p je liché číslo menší než 2^n. Všechny body mají index 1, 2 nebo 3.

Kontinuum na obr. 3.13 vpravo [Uryson, 1951, s. 526] je sjednocením polokružnic $C_n = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1/2^n, y \geq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$ a jejich poloměrů, které svírají s kladnou poloosou x úhly $\pi p/2^n$, kde p nabývá hodnot všech lichých čísel $\leq 2^n - 1$. Bod $[0, 0]$ má index ω.



OBR. 3.13: K analýze struktury křivek pomocí indexu větvení

V případě kontinua na obr 3.5 mají všechny jeho body ležící na ose y index $\aleph_0$. Sierpińského koberec (obr. 3.12) je tvořen pouze body s indexem $\mathfrak{c}$.

Uryson dále věnuje pozornost konvergenci množin v kompaktních metrických prostorech. Jejím jádrem je věta o kompaktnosti prostoru všech uzavřených množin daného kompaktního prostoru. Důkaz je obsažen v Hausdorffově *Mengenlehre*, Uryson však k němu zřejmě dospěl nezávisle. Konvergenci množin zkoumá Uryson pomocí tzv. Hausdorffovy vzdálenosti (více o ní v odst. 5.3).

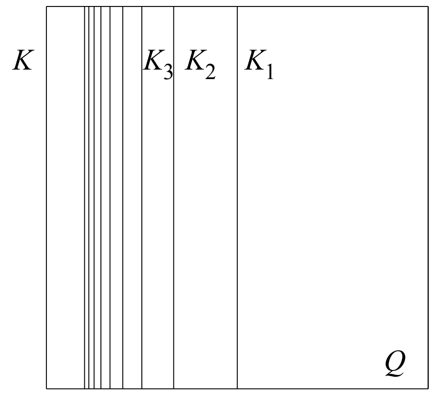
Samostatný význam má Urysonova teorie kontinuí zhuštění. Nově je zaveden pojem *kontinua plného zhuštění* [Uryson, 1951, s. 565].

Definice. Kontinuum $K \subset C$ se nazývá *kontinuem plného zhuštění* (vzhledem k C), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kontinuum $C_\varepsilon \subset C$ nemající společné body s K, pro které platí $d(K, C_\varepsilon) < \varepsilon$. [14]

Příkladem [Whyburn, 1942, s. 18] je množina $C = Q \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)$, kde Q je obvod čtverce s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[1, 1]$ a $[0, 1]$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je K_n úsečka s koncovými body $[1/n, 0]$ a $[1/n, 1]$ (obr. 3.14). Úsečka K s koncovými body $[0, 0]$ a $[0, 1]$ je kontinuum plného zhuštění (vzhledem k C).

Kontinua plného zhuštění mají význam zejména při studiu lokálně souvislých množin. Uryson [1951, s. 570] nazývá (podle Mazurkiewicze) *body druhého druhu* ty body, v nichž kontinuum C není lokálně souvislé, a dokazuje, že každý bod druhého druhu náleží

[14] Symbolem $d(K, C_\varepsilon)$ rozumíme Hausdorffovu vzdálenost množin K a C_ε. Výše uvedenou definici lze formulovat také tak, že K je kontinuem plného zhuštění, jestliže v C existuje posloupnost po dvou disjunktních kontinuí $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ nemajících společné body s K, která konverguje ke K ve smyslu Hausdorffovy vzdálenosti. Kontinuum plného zhuštění se v topologii nazývá také *kontinuum konvergence*.



OBR. 3.14: Kontinuum plného zhuštění

nějakému kontinuu plného zhuštění. (*Body prvního druhu* jsou body, ve kterých je kontinuum C lokálně souvislé.)

Dědičně lokálně souvislým kontinuem se nazývá takové lokálně souvislé kontinuum, jehož každé subkontinuum je rovněž lokálně souvislé. Dědičná lokální souvislost je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby dané kontinuum neobsahovalo kontinuum plného zhuštění [Uryson, 1951, s. 572].

Připomeňme, že Zoretti, který zavedl pojem ireducibilního kontinua, se zprvu domníval, že jde o pojem identický s pojmem jednoduché Jordanovy křivky. Každý jednoduchý oblouk je ireducibilním kontinuem. Sám Zoretti si však záhy uvědomil, že k tomu, aby platilo i opačné tvrzení, je nutné připojit další podmínky. Problémem se zabývali např. Mazurkiewicz a Janiszewski a rovněž Uryson [1951, s. 582], který dokazuje, že k tomu, aby ireducibilní kontinuum C bylo jednoduchým obloukem, je nutné a stačí, aby C neobsahovalo žádné kontinuum plného zhuštění.

V další části svého memoáru dává Uryson závěry týkající se vlastností kontinuí do souvislosti s body rozvětvení. Označíme ve shodě s Urysonem [1951, s. 610] velkými písmeny následující vlastnosti bodu x kontinua C:

A. x je druhého druhu (vzhledem k C)
B. x je prvkem kontinua plného zhuštění (vzhledem k C)
C. x je prvkem kontinua zhuštění (vzhledem k C)
D. $\operatorname{ind}_x C \geq \aleph_0$

Budeme-li výrok „P implikuje Q“ zapisovat jako $P \to Q$, ukazují následující schemata logické vztahy mezi výše uvedenými vlastnostmi [Uryson, 1951, s. 610]:

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \begin{smallmatrix} \nearrow \mathrm{C} \\ \searrow \mathrm{D} \end{smallmatrix} \qquad\qquad \mathrm{D} \nrightarrow \mathrm{C} \nrightarrow \mathrm{B} \nrightarrow \mathrm{A}$$

V případě ireducibilního kontinua jsou vlastnosti A, B, C ekvivalentní; žádná z nich není důsledkem vlastnosti D.

Stejnou problematikou jako Uryson se zhruba ve stejné době zabýval i Karl Menger (1902 – 1985).

Menger byl přijat na vídeňskou univerzitu jako student fyziky (v následujících odstavcích čerpám z práce [Johnson, 1981, s. 233 a n.]). Zhruba ve stejné době přišel do Vídně i Hahn a Menger se zapsal na jeho seminář *Neueres über den Kurvenbegriff*. Úvodní Hahnova přednáška, v níž shrnul dosavadní pokusy o definování pojmu křivka a konstatoval, že navzdory jasné intuitivní představě o křivce dosud schází její obecná přesná definice, byla pro Mengera impulsem k intenzívní práci, jejímž výsledkem bylo nalezení směru, kterým by se úvahy o definici křivky měly ubírat. Menger se svými myšlenkami seznámil Hahna a povzbuzen jeho zájmem pokračoval v práci. Její součástí bylo i vypracování obecné teorie dimenze, protože právě jednorozměrnost považoval Menger, stejně jako Uryson, za nejdůležitější vlastnost křivky.

Cesta od prvních výsledků k jejich publikování nebyla přímočará. Krátký popis prvotních myšlenek s názvem *Der Begriff der Kurve* bez důkazů a formální struktury nebyl nikdy publikován. Další krátké pojednání *Über die Dimensionalität von Kontinuen* s podtitulem *Entwurf* uložil Menger do péče vídeňské Akademie v obavě, aby jej někdo nepřipravil o prvenství objevu. Dva delší články s totožným názvem *Über die Dimensionalität von Punktmengen* z přelomu roku 1921/22 resp. listopadu 1922 byly Hahnem jako redaktorem *Monatshefte für Mathematik und Physik* vráceny, protože obsahovaly chyby. Konečně v závěru roku 1923 předal Menger redakci *Monatshefte* první část přepracovaného pojednání *Über die Dimensionalität von Punktmengen*, která se stala zároveň základem jeho doktorské disertace. Druhou část svého pojednání dokončil Menger o necelý rok později, publikována však byla kvůli finančním potížím *Monatshefte* až roku 1926.

Dimenzi definuje Menger [1926, s. 138] pro množiny v metrických prostorech:

> Množina A se nazývá n-dimenzionální, jestliže n je nejmenší nezáporné celé číslo s následující vlastností:
> Pro každý bod $a \in A$ existuje posloupnost okolí klesající k a s nejvýše $(n-1)$-dimenzionálními hranicemi; tj. pro každé $a \in A$ a každé okolí $U(a)$ existuje okolí $U_1(a) \subset U(a)$ s nejvýše $(n-1)$-dimenzionální hranicí. Pouze prázdná množina a žádná jiná je (-1)-dimenzionální a nejvýše (-1)-dimenzionální.
> Nejvýše n-dimenzionální nazveme přitom množinu, která je n-dimenzionální nebo méně než n-dimenzionální, zatímco množinu, která není nejvýše n-dimenzionální, budeme označovat jako alespoň n-dimenzionální.

Obsáhlé pojednání o teorii křivek, které vyšlo v *Mathematische Annalen*, se opírá o tuto definici křivky v metrickém prostoru [Menger, 1925, s. 278]:

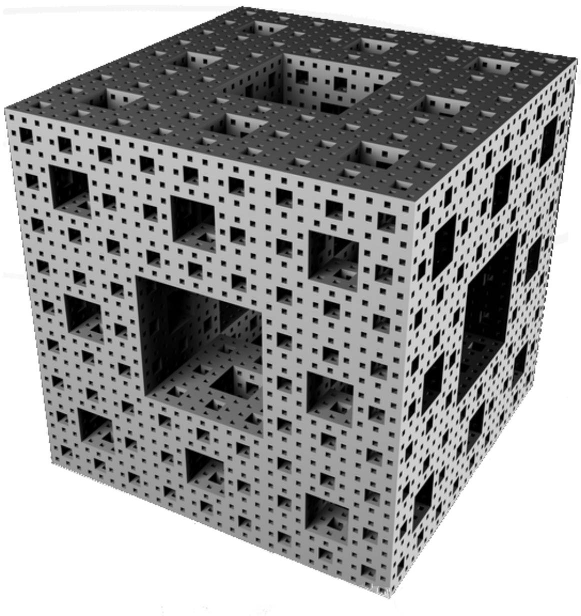
> Kontinuum K se nazývá křivkou, jestliže ke každému bodu množiny K existuje libovolně malé okolí, jehož hranice neobsahuje žádné kontinuum. Kontinuum K, které je vložené v nějakém prostoru, se nazývá křivkou, jestliže ke každému bodu množiny K existuje libovolně malé okolí, jehož hranice nemají s K společné žádné kontinuum.

Křivkami v n-rozměrném eukleidovském (nebo obecně metrickém) prostoru jsou tak jednorozměrná kontinua.

Pro zkoumání struktury křivek zavádí Menger pojem *řádu bodu křivky* (Ordnung des Kurvenpunktes), který koresponduje s Urysonovým indexem. Bod p křivky se nazývá *regulárním bodem*, jestliže jestliže jeho libovolně malé okolí má konečnou hranici.

V březnu 1925 odjel Menger do Amsterodamu za Brouwerem, s nímž byl v kontaktu už v předcházejících měsících. Brouwerův seminář, na který byli pozváni i Alexandrov, Vietoris a Kerékjártó, se stal příležitostí k intenzívní práci v oblasti moderní topologie. Menger se zde zabýval vedle teorie křivek a teorie dimenze rovněž otázkami z oblasti logiky a základů matematiky.

Po Mengerově návratu do Vídně vyšla jeho *Dimensiontheorie* (1928) a o pár let později *Kurventheorie* (1932).



OBR. 3.15: Mengerova univerzální křivka je trojrozměrnou variantou Sierpińského křivky. (Zdroj: Wikimedia Commons)

V první z uvedených knih je dokázána věta, že kompaktní metrický prostor dimenze 1 je homeomorfní s nějakou podmnožinou třírozměrného eukleidovského prostoru. Speciálně, každá křivka je homeomorfní s nějakou podmnožinou jisté „univerzální“ množiny známé jako *Mengerova křivka* či *Mengerova houba* (podle Mandelbrota [1982, s. 134]).

Teorie dimenze představená stručně v tomto odstavci je běžně nazývána teorií Menger–Urysonovou, přičemž se bere v úvahu, že výsledky obou autorů jsou v zásadě ekvivalentní a že oba k nim dospěli nezávisle. Ojedinělé jsou hlasy upřednostňující pouze jednoho autora (např. Alexandrov v předmluvě k ruskému vydání *Dimension Theory* poukazuje na to, že Uryson ke svým výsledkům dospěl dříve než Menger a jeho práce je hlubší, naproti tomu Temple v knize *100 Years of Mathematics* [1981, s. 132] zdůrazňuje větší jednoduchost a obecnost Mengerovy teorie).

Literatura

ALEXANDROV, P. S. 1927. Über stetige Abbildungen kompakter Räume. *Mathematische Annalen.* 1927, Bd. 96, s. 555–571.

ALEXANDROV, P. S. 1954. *Úvod do obecné teorie množin a funkcí.* Praha : Nakladatelství ČSAV, 1954.

ALEXANDROV, P. S.; URYSON, P. S. 1924. Zur Theorie der topologischen Räume. *Mathematische Annalen.* 1924, Bd. 92, s. 258–266.

ARISTOTELÉS 2003. *Metafyzika.* Praha : Rezek, 2003. ISBN 80-86027-27-9.

BAUMGARTEN, A. G. 1779. *Metaphysica.* Editio VII. Halle : Carol Herman Hemmerde, 1779.

BOLZANO, B. 1804. *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie.* Prag : Karl Barth, 1804.

BOLZANO, B. 1810. *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung.* Prag : Caspar Widtmann, 1810.

BOLZANO, B. 1817. *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung.* Leipzig : Paul Gotthelf Kummer, 1817.

BOLZANO, B. 1948. Über Haltung, Richtung, Krümmung und Schnörkelung bei Linien. In *Bernard Bolzano's Schriften. Band 5. Geometrische Arbeiten.* Praha : Královská česká společnost nauk, 1948, s. 139–184.

BOLZANO, B. 1963. *Paradoxy nekonečna.* Praha : Svoboda, 1963.

BROUWER, L. E. J. 1910. Zur Analysis Situs. *Mathematische Annalen.* 1910, Bd. 68, s. 422–434.

CANTOR, G. 1879. Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen.* 1879, Bd. 15, s. 1–7.

CANTOR, G. 1883. Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. 5. Fortsetzung. *Mathematische Annalen*. 1883, Bd. 21, s. 545–586.

CLAVIUS, C. 1612. *Opera Mathematica*, Tomvs Primvs. Mogvntiæ : Anton Hierat, 1612.

DALEN, D. VAN 2005. *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer*. Oxford : Clarendon Press, 2005. ISBN 0-19-851620-7.

DAUBEN, J. W. 1979. *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1979. ISBN 0-691-02447-2.

FLERON, J. F. 1994. A Note on the History of the Cantor Set and Cantor Function. *Mathematics Magazine*. 1994, vol. 67, s. 136–140.

FRÉCHET, M. 1904. Généralisation d'un théorème de Weierstrass. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris*. 1904, t. 139, s. 848–850.

FRÉCHET, M. 1906. Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. 1906, t. 22, s. 1–74.

HAHN, H. 1914. Über die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. 1914, Bd. 23, s. 318–322.

HAHN, H. 1928. Über stetige Streckenbilder. In *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 3–10 Settembre, 1928,*, t. 2. Bologna : Zanichelli, 1929, s. 217–220.

HAUSDORFF, F. 1914. *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig : Veit & Co., 1914.

HAUSDORFF, F. 1927. *Mengenlehre*. Zweite, neubearbeitete Auflage. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1927.

HOBBES, T. 1839. *The English works of Thomas Hobbes of Malmesbury*, vol. 1. London : John Bohn, 1839.

HUGGETT, N. 2010. Zeno's Paradoxes. In ZALTA, E. N. (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2010 edition. Dostupný z WWW: http://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/.

HUREWICZ, W.; WALLMAN, H. 1941. *Dimension Theory*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1941.

JANISZEWSKI, Z. 1912. Sur les continus irréductibles entre deux points. *Journal de l'École Polytechnique*. 1912, t. 16, s. 79–170.

JOHNSON, D. 1976. Prelude to Dimension Theory: The Geometrical Investigations of Bernard Bolzano. *Archive for History of Exact Sciences*. 1976, vol. 17, no. 3, s. 261–295.

JOHNSON, D. 1981. The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part II. *Archive for History of Exact Sciences*. 1981, vol. 25, no. 2, 85–267.

JORDAN, C. 1893. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, tome 1. 2e édition. Paris : Gauthier-Villars, 1893, KÄSTNER, A. G. 1779. *Anfangsgründe der Arithmetik.* 6. Auflage. Göttingen : Vandenhoef und Ruprecht, 1779.

KLEIN, F. 1897. Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Vertheilung des Lobatschewsky–Preises. *Mathematische Annalen.* 1897, Bd. 50, s. 583–600.

KNASTER, B. 1922. Un continu dont tout sous-continu est indécomposable. *Fundamenta Mathematicæ.* 1922, vol. 3, s. 247–286.

KURATOWSKI, K. 1933. *Topologie.* Warszawa-Lwów : Monografie Matematyczne, 1933.

KURATOWSKI, K. 1980. Some Remarks on the Origins of the Theory of Functions of a Real Variable and of the Descriptive Set Theory. *Rocky Mountain Journal of Mathematics.* 1980, vol. 10, no. 1, s. 25–33.

LENNES, N. J. 1911. Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations. *American Journal of Mathematics.* 1911, vol. 33, no. 1, s. 287–326.

MANDELBROT, B. 1982. *The Fractal Geometry of Nature.* New York : W. H. Freeman, 1982.

MAZURKIEWICZ, S. 1915. Sur la théorie des ensembles. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris.* 1910, t. 151, s. 296–298.

MAZURKIEWICZ, S. 1920. Sur les lignes de Jordan. *Fundamenta Mathematicæ.* 1920, vol. 1, s. 166–209.

MENGER, K. 1925. Grundzüge einer Theorie der Kurven. *Mathematische Annalen.* 1925, Bd. 95, s. 277–306.

MENGER, K. 1926. Über die Dimension von Punktmengen. II. Teil.. *Monatshefte für Mathematik und Physik.* 1926, Bd. 34, s. 137–161.

MOORE, R. L. 1923. Report on Continuous Curves from the Viewpoint of Analysis Situs. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1923, vol. 29, s. 289–302.

MUNKRES, J. R. (2000). *Topology.* 2nd edition. Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall, 2000. ISBN 0-13-181629-2.

NALLI, P. (1911). Sopra una definizioni di dominio piano limitato da una curva continua, senza punti multipli. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.* 1911, t. 32, s. 391–401.

NEJMAN, L. S. 1972. *Radost otkrytija. Matematik Pavel Uryson.* Moskva : Dětskaja literatura, 1972.

PAINLEVÉ, P. 1888. Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse.* 1888, t. 1, s. B1–B130.

PURKERT, W. 2002. Grundzüge der Mengenlehre – Historische Einführung. In *Felix Hausdorff Gesammelte Werke Band II.* Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2002, s. 1–89. ISBN 3-540-42224-2.

SCHOENFLIES, A. 1904. Beiträge zur Theorie der Punktmengen. I. *Mathematische Annalen.* 1904, Bd. 58, s. 195–234.

SCHOENFLIES, A. 1908. *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.* Zweiter Teil. Leipzig : B. G. Teubner, 1908.

SCHUBRING, G. 2005. *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th–19th Century France and Germany.* New York : Springer, 2005. ISBN 0-387-22836-5.

SIERPIŃSKI, W. 1915. Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris.* 1915, t. 160, s. 302–305.

SIERPIŃSKI, W. 1916. O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgałezienia. *Prace matematyczno-fizyczne.* 1916, t. 27, s. 77–86.

SIERPIŃSKI, W. 1916. O krivoj, soderžajuščej v sebe obraz vsjakoj krivoj. *Matematičeskij sbornik.* 1916, t. 30, s. 267–287.

SIERPIŃSKI, W. 1920. Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne. *Fundamenta Mathematicæ.* 1920, vol. 1, s. 44–60.

SIMON, P. 1981. Bernard Bolzano a teorie dimenze. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* 1981, sv. 26, č. 5, s. 248–258.

STEEN, L. A.; SEEBACH, J. A. Jr. 1995. *Counterexamples in Topology.* New York : Dover Publications, 1995. ISBN 0-486-68735-X.

SUNDSTRÖM, M. R. 2010. A pedagogical history of compactness. arXiv:1006.4131v1 [math.HO].

TEMPLE, G. 1981. *100 Years of Mathematics: A Personal Viewpoint.* New York : Springer, 1981. ISBN 0-7156-1130-5.

URYSON, P. S. 1925. Mémoire sur les multiplicités cantoriennes. *Fundamenta Mathematicæ.* 1925, vol. 7, s. 30–137.

URYSON, P. S. 1951. *Trudy po topologii i drugim oblasťam matematiky.* Tom II. Moskva, Leningrad : GITTL, 1951.

VEBLEN, O. 1905. Theory on plane curves in non-metrical analysis situs. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1905, vol. 6, no. 1, s. 83–98.

VIETORIS, L. 1921. Stetige Mengen. *Monatschefte für Mathematik und Physik.* 1921, Bd. 31, s. 173–204.

VOLKERT, K. 1987. Die Geschichte der pathologischen Funktionen–Ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Methodologie. *Archive for History of Exact Sciences.* 1987, vol. 37, s. 193–232.

WADA, T. 1911. The conception of a curve. *Memoirs of the College of Science and Engineering, Kyoto Imperial University.* 1911, vol. 3, s. 265–275.

WHYBURN, G. T. 1942. *Analytic Topology.* New York : AMS, 1942.

WILDER, R. L. 1978. Evolution of the Topological Concept of "Connected". *The American Mathematical Monthly.* 1978, vol. 85, no. 9, s. 720–726.

YONEYAMA, K. 1917. Theory of Continuous Set of Points. *Tôhoku Mathematical Journal.* 1917, vol. 12, s. 43–158.

YOUNG, W. H. 1906. On regions and sets of regions. *Quarterly Journal for Pure and Applied Mathematics.* 1906, vol. 27, s. 1–35.

YOUNG, W. H.; YOUNG, G. C. 1906. *The Theory of Sets of Points.* Cambridge University Press : Cambridge, 1906.

ZORETTI, L. 1905. Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.* 6e série. 1905, t. 1, s. 1–52.

ZORETTI, L. 1909. La notion de ligne. *Annales scientifiques de l'É.N.S.* 3e série. 1909, t. 26, s. 485–497.

Kapitola 4

Délka, míra a dimenze

V první kapitole jsme viděli, jak se od starověku do konce 19. století vyvíjely představy o tom, co znamená pojem délky křivky, které křivky jsou rektifikovatelné a jak lze délku křivky počítat. Další pokrok při řešení těchto otázek byl podmíněn formulováním obecnější teorie integrálu. Na začátku 20. století se navíc hledaly i jiné metody vyjádření délky křivky, zejména v souvislosti s rozvíjející se teorií míry. Pojem lineární míry měl dát především odpověď na otázku, jaká je „délka“ množin obecnějších než jsou oblouky rektifikovatelných křivek. Vyvstala rovněž otázka, jak určovat „velikost“ oblouku v případě nerektifikovatelných křivek. Pojem dimenze, který byl v této souvislosti zaveden, vychází (na rozdíl od topologické dimenze z předchozí kapitoly) z metrických vlastností prostoru a má úzkou souvislost s pojmem míry.

4.1 Délka křivky v Lebesgueově teorii

Jedním z nejvýznamnějších objevů v matematice na přelomu 19. a 20. století byla Lebesgueova teorie integrálu. Henri Lebesgue (1875 – 1941) ji poprvé v ucelené formě představil ve své doktorské disertační práci *Intégrale, longueur, aire*, jež byla publikována roku 1902 v časopise *Annali di Matematica.* Její kostru tvořily výsledky, které byly prezentovány pařížské Akademii v letech 1899 – 1901 a uveřejněny v *Comptes rendus*.

Délka křivky byla jedním z ústředních témat Lebesgueovy disertační práce, která začíná následujícími slovy [Lebesgue, 1902, s. 231]:

> V této práci se pokusím dát co nejobecnější a nejpřesnější definice některých pojmů (v orig. nombres, tedy čísel), kterými se zabýváme v analýze: určitého integrálu, délky křivky, obsahu plochy.

Vedle nové definice integrálu bylo Lebesgueovým záměrem především zavést pojem obsahu zakřivené plochy podobně, jako je definována délka oblouku křivky; její definici pak případně upravit či zobecnit.

Lebesgue se opíral vedle práce Jordana hlavně o Borelovy výsledky. Borelův axiomatický přístup použil při definování míry bodové množiny, ale analogicky postupoval i při zavádění dalších pojmů.

V první kapitole formuloval Lebesgue pojem míry bodové množiny na přímce jako zobecnění pojmu délky intervalu. V Lebesgueově teorii je vnější míra $\lambda^*(A)$ libovolné množiny $A \subset \mathbb{R}$ definována pomocí spočetného pokrytí intervaly. Vnitřní míra omezené množiny $A \subset I$, kde I je omezený interval, je definována pomocí vztahu $\lambda_*(A) = \lambda^*(I) - \lambda^*(I \setminus A)$. Množina A je podle Lebesguea měřitelná právě tehdy, když $\lambda^*(A) = \lambda_*(A)$.

Lebesgue [1902, s. 233] poznamenává v předmluvě, že zobecněním pojmu délky intervalu (úsečky) v jiném smyslu je délka (oblouku) křivky, které je věnována třetí kapitola. Lebesgue definuje délku oblouku křivky C jako limitu posloupnosti délek lomených čar, které konvergují stejnoměrně k C v následujícím smyslu: Je-li C prostorová křivka popsaná rovnicemi

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \quad t \in [a, b], \tag{4.1}$$

a $\{C_n\}$ posloupnost lomených čar, přičemž pro body čáry C_n platí

$$x = f_n(t), \quad y = \varphi_n(t), \quad z = \psi_n(t), \quad t \in [a, b], \tag{4.2}$$

a funkce f_n, φ_n resp. ψ_n konvergují stejnoměrně k f, φ resp. ψ v intervalu $[a, b]$, pak říkáme, že C je limitou posloupnosti $\{C_n\}$. Lebesgue poukazuje na to, že jeho definice a „klasická“ definice délky oblouku (Scheefferova a Jordanova) jako limity délek vepsaných lomených čar jsou ekvivalentní.

Jestliže křivka C má mezi dvěma svými body konečnou délku, říkáme, že je mezi těmito body rektifikovatelná. Existují křivky, které nejsou rektifikovatelné mezi žádnými dvěma svými body: např. křivka popsaná rovnicemi

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos a^n \pi t, \quad y = 0, \quad z = 0, \tag{4.3}$$

pro jisté hodnoty a, b (tedy graf Weierstrassovy funkce) [Lebesgue, 1902, s. 286].

Pro hladkou křivku pak Lebesgue odvozuje následující výsledek.

Věta. *Je-li C křivka popsaná rovnicemi (4.1) a f', φ', ψ' existují, pak k tomu, aby C byla rektifikovatelná, je nutné a stačí, aby existoval integrál funkce $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$. Tento integrál pak vyjadřuje délku oblouku.*

Lebesgue, který byl dobře obeznámen s předchozími výsledky týkajícími se problému rektifikace, poznamenává, že du Bois-Reymondova definice délky křivky (viz s. 38) je speciálním případem „klasické“ definice.

Podle Hawkinse [1975, 131] byl Lebesgueův zájem o problém rektifikace spojen s jeho objevem, že každá funkce, která má v intervalu $[a, b]$ konečnou variaci, má skoro všude v $[a, b]$ konečnou derivaci. Přepracovaná a zkrácená podoba teorie rektifikace, doplněná však o novější poznatky, se objevila v Lebesgueových *Leçons*. Hlavní výsledek představuje následující věta [Lebesgue, 1904, s. 125].

Věta. *Nechť oblouk křivky C popsaný rovnicemi (4.1) má konečnou délku a funkce $x(t), y(t), z(t)$ mají ohraničené Diniho derivace.*[1] *Pak $x'(t), y'(t), z'(t)$ existují zároveň skoro všude v $[a, b]$ a délka oblouku křivky je dána vzorcem*

$$l = \int_{\mathcal{E}} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt, \tag{4.4}$$

kde $\mathcal{E}$ označuje množinu těch $t \in [a, b]$, pro která $x'(t), y'(t), z'(t)$ existují.

Lebesgue [1904, s. 127] v té souvislosti konstatuje, že rektifikovatelná křivka má skoro všude (en général) tečnu. Body, kde tečna neexistuje, odpovídají hodnotám t, které nejsou součástí integračního oboru v (4.4). Hawkins [1975, 141] připojuje poznámku, že Lebesgue tím vrátil integrálu význam, který původně měl pro teorii rektifikace.

4.2 Singulární funkce

Funkce f s konečnou variací v intervalu $[a, b]$ má konečnou derivaci pro všechny hodnoty $x \in [a, b] \setminus K$, kde K je množina míry nula. V samém závěru *Leçons* Lebesgue [1904, s. 129] uvádí, že i když je tato derivace integrovatelná (sommable) ve všech bodech, kde je konečná, není její primitivní funkce nutně rovna f.

Existují tedy funkce, které nejsou v $[a, b]$ „neurčitými integrály své derivace“ (podle tehdejší terminologie). Aby toto platilo (tj. aby pro danou funkci f platilo $\int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a)$ pro $a \le x \le b$), je podle Lebesguea nutné připojit další předpoklad, který znamená absolutní spojitost funkce f v $[a, b]$.[2] Pojem absolutní spojitosti zavedl

[1] Podrobné informace o Diniho derivacích najde čtenář např. v knize [Kannan, 1996, s. 55 a n.].

[2] Formálně: Funkce f je absolutně spojitá v $[a, b]$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý systém intervalů $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ s $a \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots \le a_n < b_n \le b$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

(viz. [Kannan, 1996, s. 154]).

Giuseppe Vitali (1875 – 1932), který také publikoval první důkaz uvedeného tvrzení. Lebesgue je dokázal (jednoduššími prostředky) až roku 1907 [Hawkins, 1975, s. 145].

Příkladem spojité funkce s variací konečnou, která není absolutně spojitá, je Cantorova funkce. Je-li F Cantorova množina, pak každý její bod x lze vyjádřit ve tvaru

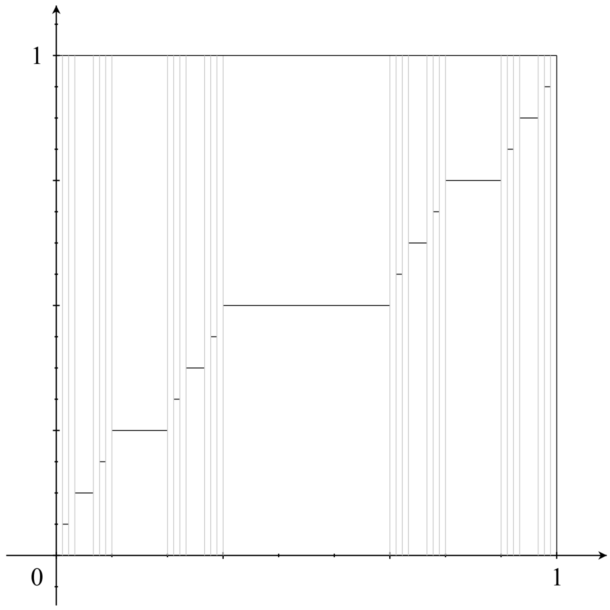
$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots \tag{4.5}$$

s koeficienty a_n nabývajími pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pouze hodnot 0 a 2. Pro $x \in F$ pak definujeme

$$\psi(x) = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_n}{2^n} + \cdots \tag{4.6}$$

kde $b_n = a_n/2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ve styčných intervalech Cantorovy množiny definujeme $\psi(x)$ jako společnou hodnotu v obou koncových bodech intervalu a dále klademe $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$.

Cantorova funkce je monotonní, spojitá a má konečnou variaci v intervalu $[0, 1]$ a platí $\psi'(x) = 0$ s.v. v intervalu $[0, 1]$. Délka jejího grafu mezi $[0, 0]$ a $[1, 1]$ je rovna 2, ale $\int_0^1 \sqrt{1 + [\psi'(x)]^2}\, dx = 1$.



OBR. 4.1: Znázornění grafu Cantorovy funkce, který Mandelbrot [1975, s. 62] nazval „ďáblovým schodištěm“

Cantorova funkce je jedním z prvních příkladů tzv. *singulárních funkcí*, které v Lebesgueově teorii hrají významnou roli.[3]

Cantor k objevu singulárních funkcí dospěl v souvislosti se svým studiem mohutností nekonečných bodových množin. Nezávisle na Cantorovi se tímto typem funkcí zabýval

[3] Singulární funkcí se nazývá funkce f definovaná v intervalu $[a, b]$, která není v $[a, b]$ konstantní a pro kterou platí $f'(x) = 0$ skoro všude v $[a, b]$ [Kannan, 1996, s. 170].

Ludwig Scheeffer (1859 – 1885), který na příkladu singulární funkce ukázal nesprávnost Harnackovy domněnky, že funkce f spojitá v intervalu $[a, b]$, pro niž v každém bodě $x \in (a, b)$, s možnou výjimkou „diskrétní“ množiny bodů [4], platí $f'(x) = 0$, je v tomto intervalu konstantní. Sám Harnack si význam funkcí Cantorova typu se zpožděním uvědomil a popsal vlastní konstrukci stupňovité funkce Cantorova typu (více je o historii prvních singulárních funkcí uvedeno v článku [Koudela, 2011]).

Axel Harnack (1851 – 1888) se narodil a vyrůstal v Dorpatu (dnešní Tartu, Estonsko). Od roku 1874 pobýval v Německu, jeho nejproduktivnější období je spojeno s působením na Technische Hochschule v Drážďanech. Známé jsou především jeho výsledky v algebraické geometrii a analýze. Byl poměrně plodným autorem a přestože některé jeho práce obsahovaly chyby, přinášely i nesporný pokrok.

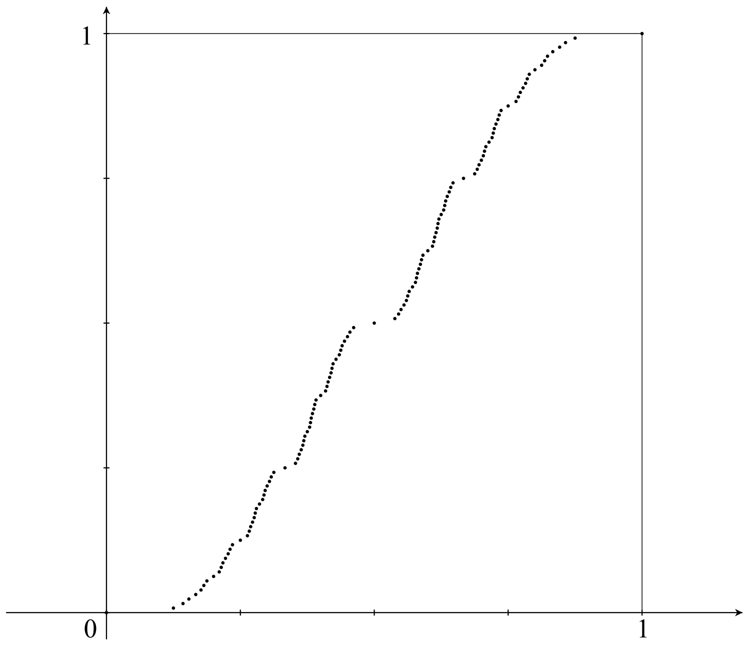
Uvedené singulární funkce jsou konstantní ve styčných intervalech dokonalé řídké množiny Cantorova typu. Postupem času se objevily ještě podivnější příklady singulárních funkcí, které jsou ryze monotonní. Jejich konstrukce však většinou postrádá geometrickou názornost, kterou se vyznačuje konstrukce Cantorovy či Harnackovy funkce. Klasickým příkladem je Minkowského funkce, kterou Hermann Minkowski (1864 – 1909) sestrojil v souvislosti s úvahami o přiřazení kvadratických iracionalit intervalu $[0, 1]$ racionálním číslům.

Minkowski [1904] definoval funkci označovanou otazníkem následujícím způsobem. V jednotkovém čtverci s vrcholy $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 0]$ a $[1, 1]$ vyznačíme na ose y dyadicky racionální čísla postupným půlením intervalů, počínaje intervalem $[0, 1]$. Číslu, které půlí interval a/b, a'/b', přičemž o číslech a, b a a', b' předpokládáme, že jsou nesoudělná, přiřadíme bod $x = (a + a')/(b + b')$.[5] Hodnotám $y = 0$ resp. $y = 1$ přiřadíme hodnoty $x = 0$ resp. $x = 1$. V ostatních bodech $x \in [0, 1]$ dodefinujeme funkci $y = ?(x)$ tak, aby byla v intervalu $[0, 1]$ spojitá.

Vlastnosti Minkowského funkce studoval později Arnaud Denjoy (1884 – 1974), který mj. dokázal, že se jedná o singulární funkci. Další příklady ryze monotonních singulárních funkcí získané pomocí odlišných postupů jsou popsány např. v [Kannan, 1996, s. 208–213].

[4] Nekonečnou množinu $M \subset [a, b]$ nazývá Harnack [1882, s. 238] *diskrétní*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečný systém intervalů, který pokrývá množinu M a má celkovou délku menší než ε. Označení „diskrétní“ pro množiny nulové míry souvisí s tím, že v integrálním počtu jim Harnack přikládal stejný význam jako konečným souborům izolovaných bodů [Hawkins, 1975, s. 59].

[5] Body na ose x tvoří binární strukturu známou v teorii čísel jako Stern–Brocotův strom. Minkowského funkce představuje prosté zobrazení mezi dyadicky racionálními čísly a odpovídajícími členy Stern–Brocotovy posloupnosti.



OBR. 4.2: Bodová konstrukce Minkowského funkce

4.3 Lineární míra

Jedním z prvních, kteří se zabývali pojmem míry (velikosti) bodové množiny, byl Cantor.[6] V šestém dílu série *Über unedliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* zavedl Cantor [1884b, 473–479] pojem míry (v orig. Inhalt, tedy obsah) omezené množiny $A \in \mathbb{R}^n$. Je-li A sjednocením konečného počtu omezených n-rozměrných částí (Stücken), je její míra $I(A)$ rovna (Riemannovu) integrálu $\int_A dx_1 dx_2 \dots dx_n$. V ostatních případech postupujeme následujícím způsobem. Pro libovolný bod $x \in \mathbb{R}^n$ označíme symbolem $K(x,r)$ n-rozměrnou uzavřenou kouli se středem v bodě x a s poloměrem r. Sjednocení $A_r = \cup_{x \in \bar{A}} K(x,r)$ všech koulí, jejichž středy jsou všechny body uzávěru množiny A, lze rozdělit na konečný počet částí, z nichž každá je n-rozměrným kontinuem. Míru množiny A pak Cantor definuje jako

$$I(A) = \lim_{r \to 0^+} \int_{A_r} dx_1 dx_2 \dots dx_n. \tag{4.7}$$

Cantor věnoval pozornost pojmu míry i v dopise Mittag-Lefflerovi, který byl otištěn ve čtvrtém svazku *Acta mathematica*. Upozorňuje v něm [Cantor, 1884a, 389–390], že míra množiny A závisí na prostoru, za jehož součást A považujeme; speciálně pak závisí na n. Jednotkový čtverec uvažovaný jako podmnožina $\mathbb{R}^3$ má míru 0, avšak jako součást $\mathbb{R}^2$ má míru 1. Cantor se zde dotkl tématu p-dimenzionální míry v $\mathbb{R}^n$, které ale dále nerozpracoval.

[6] Prvním, kdo zavedl pojem míry bodové množiny v $\mathbb{R}^1$ a $\mathbb{R}^2$, byl Otto Stolz (1842 – 1905) v roce 1884. Cantor ke svým výsledkům, které mají obecnější charakter, dospěl nezávisle [Hawkins, 1975, s. 61–62].

Minkowski [1901] se opíral o Cantorovu míru při definování délky oblouku prostorové křivky a obsahu zakřivené plochy v $\mathbb{R}^3$. Jako výchozí pojem mu posloužil pojem objemu (ve smyslu integrálu $\int dx_1 dx_2 dx_3$), který „patří k nejelementárnějším pojmům analýzy nekonečna“ [Minkowski, 1901, s. 115]. Minkowski se domníval, že jeho přístup je přímočařejší než zavádění délky oblouku pomocí délek vepsaných lomených čar. V každém bodě křivky C sestrojíme uzavřenou kouli o poloměru r; sjednocení všech těchto koulí tvoří množinu C_r bodů, jejichž vzdálenost od křivky C je nejvýše r. Objem této množiny označíme symbolem $V(C_r)$. Pokud existuje limita

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{V(C_r)}{\pi r^2}, \tag{4.8}$$

představuje podle Minkowského délku křivky C. Dá se ukázat, že v případě omezených uzavřených či otevřených bodových množin na přímce odpovídá limita (4.8) jejich Lebesgueově míře; u rektifikovatelné Jordanovy křivky odpovídá délce oblouku.

Obecně by Minkowského p-rozměrná míra množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ byla definována jako

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{V(A_r)}{J_{n-p}(r)}, \tag{4.9}$$

kde A_r je sjednocení všech n-rozměrných koulí se středy tvořenými body množiny A a poloměry r a $J_{n-p}(r)$ je objem $(n-p)$-rozměrné koule s poloměrem r [Zoretti, 1927].

Nevýhody Minkowského lineární míry jsou vyváženy relativní jednoduchostí jejího zavedení. To přispělo k tomu, že Minkowského míra nebyla zapomenuta ani poté, co byly publikovány sofistikovanější definice lineární míry. Na Minkowského míře je založena tzv. Minkowského–Bouligandova fraktální dimenze, která je efektivním nástrojem pro kvantitativní vyjadřování „velikosti“ nerektifikovatelných křivek a jiných složitějších bodových množin (viz odst. 4.7).

Poměrně velkou pozornost věnují lineární míře William Henry Young (1863 – 1942) a Grace Youngová (1868 – 1944) v knize *The Theory of Sets of Points*. Zavádějí nejprve pojem lineární míry (linear content) bodové množiny ležící na rektifikovatelné Jordanově křivce vzhledem k této křivce analogicky, jako předtím definují lineární míru bodové množiny ležící na reálné ose. Dále věnují pozornost obecnému pojmu lineární míry. Množina bodů ležících na rektifikovatelné Jordanově křivce v rovině má plošný obsah rovný nule. Youngovi kladou otázku, zda množina nulového plošného obsahu musí vždy ležet na nějaké křivce. Podle nich je nutné zabývat se teorií lineární míry nezávisle na úvahách o křivkách.

V knize jsou podány dvě definice lineární míry. V první z nich je zavedena míra (označovaná v textu jako I) v podstatě stejně jako Minkowského délka křivky v $\mathbb{R}^2$. V případě, že limita (4.8) neexistuje, může ji podle Youngových nahradit limes superior. Youngovi nicméně poukazují na obtíže, které jsou s touto definicí spojeny. Navrhují proto další definici [Young, 1906, s. 273].

Nechť malé oblasti o průměru d (v orig. span, viz s. 78) jsou opsány kolem každého bodu dané uzavřené množiny A. Jejich sjednocení označíme jako A_d a jeho obsah $P(A_d)$. Lineární mírou J množiny A pak nazývají autoři výraz

$$\limsup_{d \to 0^+} \frac{P(A_d)}{d}\,. \tag{4.10}$$

V případě oblouků běžných křivek (kuželoseček apod.) mají lineární míry I a J stejnou hodnotu a jsou rovny délce oblouku. Obecně v případě rektifikovatelné Jordanovy křivky je jejich hodnota nejvýše rovna délce oblouku. Youngovi [1906, s. 273] však uvádějí i příklady množin, u kterých oba přístupy vedou k paradoxním hodnotám. Jedná se o

1. systém oblouků rektifikovatelné Jordanovy křivky, pro který je lineární míra vzhledem k této křivce menší než jeho lineární míra;
2. uzavřenou spočetnou množinu bodů v rovině s kladnou lineární mírou;
3. uzavřenou spočetnou množinu bodů v rovině s nekonečnou lineární mírou.

Youngovi [1906, s. 270] konstatují, že teorie lineární míry v rovině je teprve v plenkách a jak nasvědčují uvedené příklady, v žádném případě nejde o jednoduchou a snadno pochopitelnou teoriii.

Přibližně ve stejné době se problematiky lineární míry dotkl i Dimitrie Pompeiu (1873–1954) ve své disertační práci [Pompeiu, 1905], kterou napsal pod vedením Poincarého a obhájil v Paříži roku 1905. Pompeiu, jeden z prvních rumunských matematiků, kteří dosáhli mezinárodního věhlasu, se ve své práci zabýval analýzou rozložení singularit holomorfních funkcí v návaznosti zejména na práci Painlevého. Lineární míru (délku, longueur) množiny $C \subset \mathbb{R}^2$ definuje Pompeiu [1905, 283–284] podobně jako Youngovi lineární míru I, tedy jako limes superior podílu $V(C_r)/(2r)$ pro $r \to 0^+$. Podle Pompeia lze každou uzavřenou množinu A bodů v rovině jediným způsobem vyjádřit jako

$$A = A_0 \cup P, \tag{4.11}$$

kde A_0 je spočetná a P dokonalá. Dále zavádí následující klasifikaci bodů dokonalé množiny P. Bod p je *bodem prvního druhu* (point de première espèce), jestliže existuje kruh s poloměrem r opsaný bodu p tak, že všechny body množiny P, které leží uvnitř tohoto kruhu, tvoří spočetný systém podmnožin konečné délky. Když takový kruh neexistuje, bude bod p nazýván *bodem druhého druhu* (point de seconde espèce). Pro libovolnou dokonalou množinu $P \subset \mathbb{R}^2$ pak platí

$$P = A_1 \cup A_2, \tag{4.12}$$

kde A_1 resp. A_2 jsou množiny bodů prvního resp. druhého druhu, přičemž A_1 je spočetným systémem podmnožin konečné délky a A_2 je dokonalá. Pompeiova práce obsahovala i další podnětné myšlenky; mimo jiné definici vzdálenosti mezi množinami (konkrétně rovinnými křivkami), kterou později rozpracoval Hausdorff (viz odst. 5.3).

Oscar Janzen ve své disertační práci z roku 1907 napsané v Královci pod vedením Schoenfliese a Meyera definoval lineární míru odlišným způsobem. Libovolnou omezenou množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ pokryjeme soustavou polouzavřených vzájemně se nepřekrývajících obdélníků se stranami s, r, $s \leq r$. Pravoúhlé průměty části A ležící v obdélníku R_n do souřadnicových os budou mít (vnější) míru $m'_n(r)$, $m''_n(r)$. Lineární míru L_J množiny A pak definujeme jako

$$L_J(A) = \lim_{r \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m'_n(r) + m''_n(r)}, \tag{4.13}$$

Uvedenou definici lze snadno zobecnit na případ lineární míry v $\mathbb{R}^n$. Nevýhodou Janzenovy míry je její závislost na způsobu volby soustavy souřadnic. Na s. 118 je uveden příklad množiny, jejíž Janzenova míra je $\sqrt{2}$ při stejné volbě os jako na obrázku 4.3 a 0 v případě otočení soustavy souřadnic o 45° (viz též [Morse, 1940]). Janzenova míra je nicméně příkladem míry, která splňuje požadavky, jež na míru bodových množin v $\mathbb{R}^n$ (se zvláštním zřetelem k lineární míře) kladl Carathéodory.

4.4 Carathéodoryho teorie jednorozměrné míry v $\mathbb{R}^n$

Constantin Carathéodory (1873 – 1950), původem turecký Řek, jehož otec byl zaměstnán v diplomatických službách osmanské říše, získal vzdělání v evropských školách. Matematiku studoval v Berlíně a poté v Göttingen, kde roku 1904 obhájil doktorskou disertační práci na téma z variačního počtu, kterou napsal pod vedením Minkowského. Kromě krátkodobého pobytu v Řecku, kde se podílel na založení nové univerzity ve Smyrně, působil na různých místech v Německu (nejdéle v Mnichově, kde byl nástupcem Lindemanna).

Carathéodory se v pojednání [Carathéodory, 1914], přečteném na zasedání Královské společnosti nauk v Göttingen 24. 10. 1914 Felixem Kleinem (1849 – 1925), zabýval zobecněním Lebesgueovy teorie pro vyjádření pojmu délky v $\mathbb{R}^n$. Jeho práce je rozdělena na dvě kapitoly. V první je podána formální teorie míry. Carathéodory nejprve zavedl vnější míru jako nezápornou monotonní σ-subaditivní funkci definovanou na systému všech podmnožin $\mathbb{R}^n$ a prostřednictvím jejího omezení na měřitelné množiny zavedl míru a vybudoval obecnou teorii míry. V jejím rámci pak ve druhé kapitole definoval lineární (jednorozměrnou) míru jako speciální případ míry v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Vnější mírou nazývá Carathéodory každou množinovou funkci μ^*, která vyhovuje následujícím pěti axiomům:

1. pro každou $A \subset \mathbb{R}^n$ je $\mu^*(A) \geq 0$ (nevylučujeme případ, že $\mu^*(A)$ nabývá nekonečné hodnoty);
2. je-li $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, pak $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. je-li $\{A_n\}$ spočetný systém podmnožin $\mathbb{R}^n$, platí $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ nazývá Carathéodory *měřitelnou*, jestliže pro libovolnou $W \subset \mathbb{R}^n$ platí

$$\mu^*(W) = \mu^*(A \cap W) + \mu^*(W \setminus (A \cap W)).$$

Pro měřitelné množiny píšeme $\mu(A) = \mu^*(A)$. Carathéodoryho definice měřitelnosti nevyžaduje zavedení vnitřní míry. První tři axiomy stačí k odvození základních tvrzení teorie míry. Aby však vůbec bylo možné ukázat existenci měřitelných množin, doplňuje Carathéodory systém axiomů dalšími dvěma podmínkami:

4. jestliže je vzdálenost $d(A, B)$ množin $A, B \subset \mathbb{R}^n$ definovaná pomocí předpisu $d(A, B) = \inf\{|x - y|; x \in A, y \in B\}$ kladná, platí

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

5. $\mu^*(A) = \inf\{\mu(B); A \subset B, B \text{ je měřitelná}\}$.

Poté přistupuje Carathéodory k zavedení *vnitřní míry* $\mu_*(A)$ množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ jako suprema měr všech měřitelných množin obsažených v A a odvozuje obvyklou formulaci měřitelnosti: množina A je měřitelná právě tehdy, když $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

Ve druhé kapitole se Carathéodory věnuje konstrukci jednorozměrné míry množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ pro $n > 1$. Je-li $\mathscr{U}$ spočetný systém množin $U_i \subset \mathbb{R}^n$ takový, že

a) $A \subset \bigcup U_i$,

b) průměr $\mathrm{diam}(U_i)$ množiny U_i definovaný předpisem $\mathrm{diam}(U_i) = \sup\{|x-y|; x, y \in U_i\}$ je pro všechna i menší než dané kladné číslo δ,

pak výraz

$$L^*(A) = \lim_{\delta \to 0^+} L_\delta(A), \text{ kde } \quad L_\delta(A) = \inf\left\{ \sum \mathrm{diam}(U_i); U_i \in \mathscr{U}, \mathrm{diam}(U_i) < \delta \right\} \quad (4.14)$$

nazveme *vnější lineární mírou* množiny A. Na množiny U_i lze klást další požadavky; speciálně lze obecné množiny U_i nahradit jejich konvexními obaly. Všechny vlastnosti vnější míry odvozené v první kapitole platí i pro $L^*(A)$ a celá teorie tak může být aplikována i na případ lineární míry. Dá se ukázat, že množina konečné lineární míry větší než nula má n-rozměrnou Lebesgueovu míru pro $n \geq 2$ rovnou nule a rektifikovatelná Jordanova křivka má lineární míru rovnou supremu délek všech lomených čar vepsaných dané křivce, tedy běžně chápané délky oblouku.

V závěrečném odstavci druhé kapitoly je naznačena možnost zobecnit výše uvedený postup i na obecnější případ p-dimenzionální míry v $\mathbb{R}^n$ pro $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$. Obě podmínky, které musí splňovat systém $\mathcal{U}$, zůstávají v platnosti.

4.5 Některé další práce o lineární míře

Carathéodoryho teorie byla přijímána jako dostatečně obecná a vyhovující teorie lineární míry v $\mathbb{R}^n$. Přesto se v následujících letech objevily další definice lineární míry, které se od Carathéodoryho pojetí lišily. Seymour Sherman (1917 – 1977), který se ve své disertační práci věnoval srovnání různých definic lineární míry v rovině, uvádí tři otázky, které je nutné při posuzování těchto definic brát v úvahu [Sherman, 1942]:

1. Dávají nové míry očekávané hodnoty pro bodové množiny, kterým lze přiřadit délku běžným způsobem?
2. Je nová míra invariantní vůči eukleidovským transformacím?
3. Splňuje nová míra obvyklé podmínky kladené na míru (speciálně Carathéodoryho axiomy)?

Problematikou lineární a plošné míry se zabýval rovněž Wilhelm Gross (1886 – 1918). Gross patří spolu s Radonem, Blaschkem a dalšími k výrazným představitelům rakouské matematiky, kteří na počátku minulého století studovali na vídeňské univerzitě. Doktorskou disertační práci z teorie diferenciálních rovnic napsanou pod vedením Wirtingera a Mertense obhájil Gross roku 1910. Jeho dva články věnované míře vyšly posmrtně roku 1918 ve 29. svazku *Monatshefte für Mathematik und Physik*.

V prvním z nich se Gross [1918a] zabýval Minkowského definicí délky křivky. Je-li $A \subset \mathbb{R}^2$ (Gross uvažoval dvourozměrný případ) a $P(A_R)$ obsah množiny A_r, která je sjednocením kruhů se středy v bodech množiny A a s poloměrem r, je míra $L_M^0(A)$ množiny A (ein lineares Punktmaß) definována podle Minkowského jako

$$L_M^0(A) = \lim_{r \to 0^+} \frac{P(A_r)}{2r}, \tag{4.15}$$

pokud tato limita existuje. Gross dále modifikuje Minkowského definici tak, aby byly splněny všechny Carathéodoryho podmínky pro vnější míru. Protože limita (4.15) nemusí pro každou uzavřenou omezenou množinu v $\mathbb{R}^2$ existovat, nahrazuje Gross nejprve symbol lim ve vztahu (4.15) symbolem lim inf a zavádí míru

$$l_M(A) = \liminf_{r\to 0^+} \frac{P(A_r)}{2r}, \tag{4.16}$$

která však nesplňuje třetí podmínku Carathéodoryho.

Nechť $\mathscr{U}$ je systém spočetně mnoha množin $U_i \subset \mathbb{R}^2$ takových, že $A \subset \bigcup U_i$. Gross [1918a, s. 180] definuje vnější míru $L^*_M(A)$ množiny A vztahem

$$L^*_M(A) = \inf\{\sum l_M(U_i); U_i \in \mathscr{U}\}, \tag{4.17}$$

kde se infimum bere přes všechna pokrytí množiny A.

V poznámce pod čarou nabízí Gross [1918a, s. 180] ještě další definici lineární míry. Nechť $\mathscr{U}$ je systém spočetně mnoha množin $U_i \subset \mathbb{R}^2$ takových, že $A \subset \bigcup U_i$. Označíme $r_1, r_2, \ldots$ posloupnost kladných čísel vesměs menších než dané δ a $\mathscr{V}$ systém množin V_i tvořených těmi body U_i, jejichž vzdálenost od A je menší než r_i. Výraz

$$\Lambda^*_M(A) = \liminf_{\delta\to 0}\{\sum \frac{m(V_i)}{2r}; V_i \in \mathscr{V}\}, \tag{4.18}$$

kde $m(V_i)$ je objem množiny V_i, potom představuje vnější (lineární) míru množiny A. Zřejmě je $\Lambda^*_M(A) \le L^*_M(A)$.

Gross [1918a, s. 184 a n.] věnuje pozornost příkladu dokonalé řidké množiny v rovině, která má z hlediska lineární míry zajímavé vlastnosti. Čtverec W_0 s vrcholy $[0,0]$, $[0,1]$, $[1,0]$ a $[1,1]$ rozdělíme na 3^4 stejných čtverců o straně $\frac{1}{3^2}$. Z nich vybereme 3^2 čtverců, pro které platí

$$\frac{h_1}{3} + \frac{h_2}{3^2} \le x \le \frac{h_1}{3} + \frac{h_2+1}{3^2}, \quad \frac{h_2}{3} + \frac{h_1}{3^2} \le y \le \frac{h_2}{3} + \frac{h_1+1}{3^2},$$

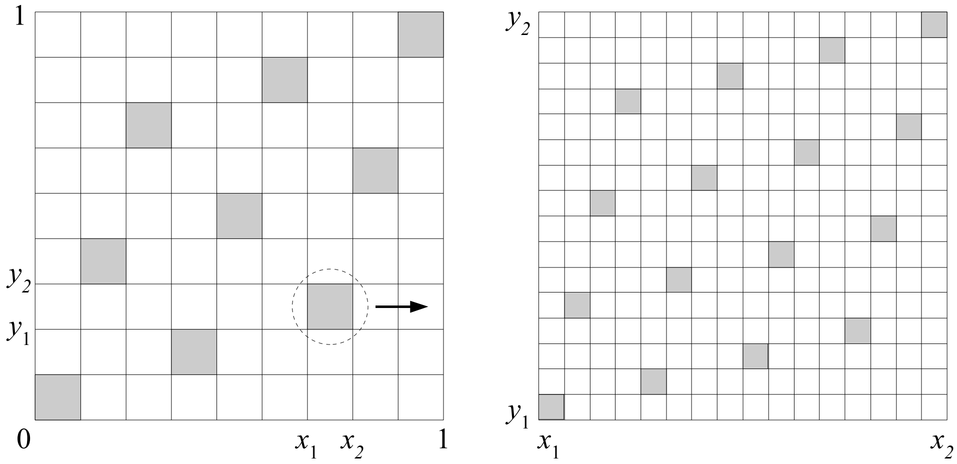
přičemž čísla h_1, h_2 nabývají hodnot $0, 1, 2$. Systém těchto čtverců označíme W_1. Každý z nich rozdělíme na 4^4 stejných čtverců o straně $\frac{1}{3^2\cdot 4^2}$, z nichž vybereme 4^2 čtverců splňujících

$$\frac{h_1}{3} + \frac{h_2}{3^2} \le 3^2(x-x_1) \le \frac{h_1}{3} + \frac{h_2+1}{3^2}, \quad \frac{h_2}{3} + \frac{h_1}{3^2} \le 3^2(y-y_1) \le \frac{h_2}{3} + \frac{h_1+1}{3^2},$$

kde x_1, y_1 jsou souřadnice levého dolního vrcholu daného čtverce a čísla h_1, h_2 nabývají hodnot $0, 1, 2, 3$ (obr. 4.3). Systém těchto $3^2 \cdot 4^2$ čtverců označíme W_2. Každý z nich dále rozdělíme na 5^4 stejných čtverců o straně $\frac{1}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2}$ atd. Označíme

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} W_n.$$

Gross dokazuje, že $\sqrt{2} \geq L(A) \neq L_M(A) = \sqrt{\pi}+2 = l_M(A)$. Minkowského míra množiny A neexistuje.



OBR. 4.3: Konstrukce Grossovy množiny

Grossova množina má nenulovou lineární míru, ale její průměty do souřadnicových os mají míru nula. Gross i Radon, který Grossův článek připravil k vydání, se domnívali, že lineární míra $L(A)$ Grossovy množiny je $\sqrt{2}$. Bezikovič [1928, s. 435] dokázal, že ve skutečnosti je $L(A) < \frac{4}{\pi}$. Bezikovič rovněž zkonstruoval příklad množiny s nenulovou lineární mírou, jejíž průmět na libovolnou přímku má míru nula.

Ve druhém z uvedených článků zavádí Gross [1918b] plošnou míru způsobem, kterým lze definovat i lineární míru v $\mathbb{R}^2$, příp. v $\mathbb{R}^n$ [Nöbeling, 1942, s. 135]. Rovinu s kartézskou soustavou souřadnic rozdělíme pro $k \in \mathbb{N}$ sítí vzájemně kolmých přímek na čtverce $p/2^k \leq x < (p+1)/2^k$, $p/2^k \leq x < (p+1)/2^k$. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je libovolná množina a $M_k^i = M \cap Q_k^i$ její průnik se čtvercem Q_k^i. Dále označíme $\Pi(M_k^i)$ supremum (vnějších) Lebesgueových měr pravoúhlého průmětu M_k^i na přímku $g \subset \mathbb{R}^2$, kde supremum se bere přes všechny přímky v $\mathbb{R}^2$. Označíme $S_k(A) = \sum_i \Pi(M_k^i)$; posloupnost $\{S_k(A)\}$ je neklesající a má limitu (vlastní nebo nevlastní). Tato limita je vnější Grossovou lineární mírou množiny A, která splňuje první čtyři Carathéodoryho axiomy. Všechny uvedené definice se týkají lineární míry množin ve dvou– či vícerozměrných eukleidovských prostorech.

Zobecněním pojmů délky a lineární míry pro množiny v obecném metrickém prostoru se zabýval Karl Menger (1902 – 1985). Definice délky oblouku v metrickém prostoru je podle Mengera [1930, s. 467] přirozeným zobecněním definice délky oblouku v $\mathbb{R}^n$. Je dán jednoduchý oblouk C v metrickém prostoru X (prosté a spojité zobrazení $[0,1] \to X$) s koncovými body a a c a jeho konečná podmnožina E. Zvolíme orientaci oblouku C a v souladu s ní označíme body množiny E jako $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Jako délku oblouku C

budeme pak chápat supremum množiny $l(E,B) = \sum_{i=1}^{n-1} d(b_i, b_{i+1})$, kde supremum se bere přes všechny konečné podmnožiny bodů oblouku C.

Další zobecnění pojmu délky lze podle Mengera [1930, s. 473] provést následujícím způsobem. Nechť je dána symetrická, ireflexívní relace ρ prvků množiny $M \subset X$. Množinu M budeme nazývat souvislou vzhledem k relaci ρ, jestliže ke každým dvěma prvkům $a, b \in M$ existuje konečně mnoho prvků $m_1, m_2, \ldots m_n$ tak, že $a = m_1$, $b = m_n$ a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-1$ platí $m_i \, \rho \, m_{i+1}$.

Je-li dána např. množina C jako sjednocení konečně mnoha oblouků, z nichž každé dva mají společné nejvýše své koncové body. Označíme M (konečnou) množinu bodů, které jsou koncovými body alespoň jednoho oblouku a definujeme relaci ρ tak, že pro $a, b \in M$ platí $a \, \rho \, b$ právě tehdy, když a a b jsou spojeny jedním obloukem, který je součástí C; pak je M s ohledem na tuto relaci souvislá právě tehdy, když je C souvislá v běžném smyslu.

Každé symetrické ireflexívní relaci ρ definované v množině M přiřadíme číslo, rovné součtu vzdáleností všech dvojic prvků M, pro které relace ρ platí. Toto číslo budeme nazývat lineární mírou (Längeninhalt) množiny M vzhledem k relaci ρ.

Je-li M konečná, existuje zřejmě jen konečný počet možností, jak symetrickou ireflexívní relaci v M definovat. Každé takové relaci odpovídá nějaká lineární míra množiny M. Nejmenší z čísel, které jsou lineárními mírami M vzhledem k nějaké relaci, pro niž je M souvislá, nazývá pak Menger prostě lineární mírou M a označuje $\mu(M)$.

Výše uvedený příklad Grossovy množiny ukazuje, že lineární míry definované odlišnými způsoby mohou vést k různým hodnotám. Přehled těchto definic podal Nöbeling [1942] a zároveň ukázal, že v případě kontinua (souvislé kompaktní množiny) v $\mathbb{R}^n$ dávají všechny stejný výsledek. V takovém případě lze podle Nöbelinga mluvit prostě o délce $L(K)$ kontinua K.

Georg Nöbeling (1907 – 2008) studoval v Göttingen a ve Vídni. Ve své disertační práci napsané pod vedením Mengera se zabýval univerzálními n-rozměrnými množinami v $(2n+1)$-rozměrném prostoru (zobecněním Mengerovy univerzální množiny). Jeho vídeňský pobyt, při němž měl blízko k členům Vídeňského kroužku, mu přinesl v matematickém světě věhlas. Další období jeho života je spojeno především s působením na univerzitě v Erlangen.

Nöbeling [1942, s. 139] uvádí ještě další definici lineární míry kontinua K v $\mathbb{R}^n$, kterou označuje $L_B(K)$. Pokud K je lokálně souvislé, klademe $L_B(K) = \sup\{l(S)\}$, kde $l(S) = l(B_1) + l(B_2) + \ldots l(B_k)$ a supremum se bere přes všechna sjednocení konečně mnoha vzájemně disjunktních oblouků obsažených v K ($l(B)$ má obvyklý význam délky oblouku jako suprema délek vepsaných lomených čar). Pokud K není lokálně souvislé, klademe $L_B(K) = +\infty$.

Podle Nöbelinga je každému kontinuu K přiřazeno nezáporné číslo $L_*(K) \leq +\infty$, které splňuje dvě podmínky:

1. pro konečný systém po dvou disjunktních subkontinuí $K_1, \dots, K_m \subset K$ je $L_*(K_1) + \cdots + L_*(K_m) \leq L_*(K)$;
2. $L_*(K) \geq d(K)$.

Mezi všemi funkcemi splňujícími tyto dvě podmínky existuje minimální funkce $L(K)$ a je rovna $L_B(K)$. Všechny běžné lineární míry až na jednu výjimku dávají tutéž hodnotu.

Onou výjimkou je délka definovaná Mengerem. Nöbeling [1942, s. 159] uvádí příklad kontinua $K \subset \mathbb{R}^2$, které je sjednocením úseček $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x = 0, 0 \leq y \leq 2\}$ a $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$. Zatímco $L(K) = 4$, Mengerova délka kontinua K je rovna $2 + \sqrt{5}$.

Zajímavou oblast dalšího výzkumu související původně s lineární mírou otevřel Abram Samojlovič Bezikovič (1891 – 1970), který svými pracemi o regulárních a iregulárních množinách položil základy tzv. geometrické teorie míry.

Podle Bezikoviče [1928] tvoří lineárně měřitelné množiny (tedy množiny s konečnou lineární mírou v Carathéodoryho smyslu) důležitou třídu bodových množin v rovině, která obsahuje jako podtřídu všechny rektifikovatelné křivky.

Nechť množina $A \subset \mathbb{R}^2$ je lineárně měřitelná, $L(A)$ je její míra a $B(a,r)$ kruh se středem a a poloměrem r. Výraz

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{L(A \cap B(a,r))}{2r} \quad \text{resp.} \quad \liminf_{r \to 0^+} \frac{L(A \cap B(a,r))}{2r} \tag{4.19}$$

nazveme *horní* resp. *dolní hustotou* množiny A v bodě a a budeme jej značit $D^*(a,A)$ resp. $D_*(a,A)$. Platí-li $D^*(a,A) = D_*(a,A)$, budeme jejich společnou hodnotu označovat prostě $D(a,A)$ a nazývat *hustotou* množiny A v bodě a.

Platí-li $D(a,A) = 1$, nazýváme a *regulárním bodem* (*bodem hustoty*) množiny A; každý jiný bod se nazývá *iregulárním bodem*. Jestliže skoro všechny body množiny A (všechny body až na body tvořící množinu míry 0) jsou regulární, budeme A nazývat *regulární množinou*; jestliže skoro všechny body množiny A jsou iregulární, budeme A nazývat *iregulární množinou*.

Zatímco všechny měřitelné množiny na číselné ose jsou regulární, v případě obecných lineárně měřitelných množin to neplatí. Bezikovič uvádí odhad pro horní a dolní hustotu:

Ve skoro všech bodech lineárně měřitelné množiny A je

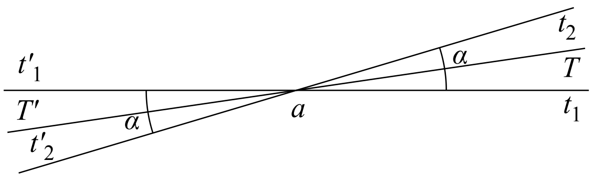
$$\frac{1}{2} \leq D^*(a, A) \leq 1, \quad 0 \leq D_*(a, A) \leq 1. \tag{4.20}$$

Příkladem množiny s $D_*(a, A) = 0$ je Grossova množina.

Množina všech regulárních bodů lineárně měřitelné množiny je regulární množina a množina všech jejích iregulárních bodů je iregulární množina.

Regulární množiny mají některé vlastnosti analogické vlastnostem rektifikovatelných křivek. Rektifikovatelná křivka má tečnu skoro všude. Zobecníme-li vhodným způsobem pojem tečny, lze podobné tvrzení vyslovit i o regulární množině.

Nechť A je měřitelná a pro $a \in A$ platí $D^*(a, A) > 0$. Nechť TT' je přímka procházející bodem a a nechť přímky t_1t_1' a t_2t_2' procházející rovněž bodem A tvoří úhly $\frac{\alpha}{2}$ $(0 < \alpha < \pi)$ po obou stranách TT' (obr. 4.4). Označíme $S(a, \alpha)$ sjednocení výsečí t_1at_2 a $t_1'at_2'$. Jestliže pro každé $\alpha > 0$ je $D(a, A \setminus A \cap S(a, \alpha)) = 0$, řekneme, že přímka TT' je *tečnou* k množině A v bodě a [Besicovitch, 1928, s. 425].



OBR. 4.4: K definici tečny lineárně měřitelné množiny

Bezikovič dokazuje, že ve skoro všech regulárních bodech lineárně měřitelné množiny A existuje tečna k A; ve skoro všech iregulárních bodech tečna k A neexistuje. Regulární množiny mají podle Bezikoviče vlastnosti podobné vlastnostem rektifikovatelných křivek, zatímco iregulární množiny se chovají zcela odlišně (opačně).

Ke každé regulární množině A a číslu $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše spočetný systém rektifikovatelných křivek míry $< L(A) + \varepsilon$, který obsahuje skoro všechny body A. Regulární množinu tak lze aproximovat systémem rektifikovatelných křivek, přičemž obě množiny se liší o množinu, jejíž míra je menší než ε.

Třída regulárních množin, na rozdíl od třídy lineárně měřitelných množin, je zobecněním třídy rektifikovatelných křivek. Třída iregulárních množin se od třídy rektifikovatelných křivek zásadně liší.

Bezikovičova práce představovala první krok při studiu lokální struktury množin, kterému se začali záhy věnovat i další autoři. Sám Bezikovič se k tématu vrátil o 10 let později v článku [1938]. Zavádí zde pojem „Y-set“ pro měřitelnou množinu, která je podmnožinou spočetného systému rektifikovatelných křivek. Každá taková množina je regulární a má tečnu skoro ve všech bodech. Bezikovič věnuje pozornost rovněž kontinuím konečné lineární míry. Dokazuje, že každá obloukově souvislá množina je regulární. Každé kontinuum konečné lineární míry je obloukově souvislá množina.

Samostatnou kapitolu tvoří lineární míry, jejichž definice se opírají o pojem geometrické pravděpodobnosti. Vedle citovaných prací Shermana [1942] a Nöbelinga [1942] je tomuto typu lineární míry věnována pozornost např. v knize Tricota [1995], kde jsou uvedeny další odkazy.

4.6 Hausdorffova míra a dimenze

Felix Hausdorff (1868 – 1942) navázal na Carathéodoryho v pojednání *Dimension und äußeres Maß*, které bylo dokončeno v březnu 1918 a vyšlo následujícího roku v 79. svazku *Mathematische Annalen* [Hausdorff, 1919]. Hausdorff navázal zejména na poslední odstavec Carathéodoryho práce, v němž je naznačena konstrukce p-dimenzionální míry v n-rozměrném eukleidovském prostoru. Carathéodoryho definice připouštěla pouze celočíselné hodnoty p; Hausdorffovým záměrem bylo rozšířit ji i na neceločíselné hodnoty.

V úvodní části Hausdorff analyzuje podmínky, za nichž lze vnější míry vzájemně srovnávat. Dvě vnější míry L^*, M^* jsou *stejného řádu*, jesliže existují čísla $c, c' > 0$ taková, že pro každé $A \subset \mathbb{R}^n$ platí $cL^*(A) \leq M^*(A) \leq c'L^*(A)$. (Míry stejného řádu zároveň nabývají nulové hodnoty, konečné kladné hodnoty nebo nekonečné hodnoty). Jestliže pro každé kladné ε platí $M^*(A) \leq \varepsilon L^*(A)$, nazýváme L^* mírou *nižšího* a M^* mírou *vyššího řádu*. (Tento případ nastává např. tehdy, když $M^*(A) = 0$, zatímco $L^*(A) > 0$).

Hausdorff nejprve ukazuje obecnou metodu konstrukce množinové funkce, která splňuje Carathéodoryho axiomy pro vnější míru. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $\mathscr{U}$ je spočetný systém množin $U_i \subset \mathbb{R}^n$ takových, že $A \subset \bigcup U_i$ a $\operatorname{diam}(U_i)$ průměr množiny U_i. Pro libovolnou nezápornou spojitou či omezenou funkci l definovanou pro všechny omezené množiny v $\mathbb{R}^n$ splňuje funkce

$$L(A) = \lim_{\delta \to 0^+} L_\delta(A), \quad \text{kde} \quad L_\delta(A) = \inf\Big\{\sum l(U_i); U_i \in \mathscr{U}, \operatorname{diam}(U_i) < \delta\Big\} \tag{4.21}$$

axiomy uvedené v odstavci 4.4 a je tedy vnější mírou v Carathéodoryho smyslu.

Za příklad množinové funkce $l(U_i)$ může sloužit průměr množiny U_i, či p-dimenzionální objem nejmenší konvexní množiny C_i obsahující U_i, případně Carathéodoryho p-dimenzionální průměr U_i. Složením libovolné nezáporné spojité monotonní funkce $h(t)$

definvané pro $t \geq 0$ a funkce $l(U)$ lze získat další „vytvářející“ funkce a podobně volba systému $\mathscr{U}$ dává široké spektrum možností tvorby konkrétní vnější míry.

Volba p-dimenzionálních koulí jako množin systému $\mathscr{U}$ a jejich p-dimenzionálního objemu jako funkce $l(U_i)$ umožňuje definovat p-dimenzionální míru následujícím způsobem: Nechť $\mathscr{B}$ je spočetný systém p-dimenzionálních koulí B_i v $\mathbb{R}^n$ takových, že $A \subset \bigcup B_i$. Výraz

$$L^p(A) = \lim_{\delta \to 0^+} L^p_\delta, \quad \text{kde} \quad L^p_\delta = \inf \left\{ c_p \sum [\operatorname{diam}(B_i)]^p; B_i \in \mathscr{B}, \operatorname{diam}(B_i) < \delta \right\}, \tag{4.22}$$

kde c_p je průměr jednotkové p-dimenzionální koule, představuje vnější míru v $\mathbb{R}^n$. Hausdorff dále ukazuje, že pro $p = 1, p = 2, p = 3$ dává právě definovaná míra v případě některých jednoduchých množin obvyklé hodnoty délky, obsahu a objemu.

Poté Hausdorff přistupuje k modifikaci předchozí definice tak, aby bylo možné získat netriviální (různou od nuly i $+\infty$) p-dimenzionální míru i pro případ neceločíselných hodnot p. Pro nezápornou, spojitou a neklesající funkci h definovanou pro $t \geq 0$ a splňující podmínku $h(t) \to 0$ pro $t \to 0$ definujeme (Hausdorffovu) míru množiny A odpovídající funkci h předpisem

$$\begin{aligned} H(A) = \lim_{\delta \to 0^+} H_\delta(A), \quad &\text{kde} \\ &H_\delta(A) = \inf \left\{ \sum h(\operatorname{diam}(B_i)); B_i \in \mathscr{B}, \operatorname{diam}(B_i) < \delta \right\}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Obecně vnější míře s vytvářející funkcí h přiřazujeme podle Hausdorffa dimenzi $[h]$; dimenzi $[t^p]$ zapisujeme také (p); množina této dimenze je množinou dimenze p v dřívějším smyslu, obrácené tvrzení však obecně neplatí.

V systému dimenzí odpovídajících množině A zavádíme uspořádání následujícím způsobem: Jsou-li λ, μ dvě funkce, jimž odpovídají míry $L(A), M(A)$, které jsou stejného řádu, pak říkáme, že $[\lambda]$ a $[\mu]$ jsou si rovny; každá množina dimenze $[\lambda]$ je současně množinou dimenze $[\mu]$ a naopak. Je-li $M(A)$ mírou vyššího řádu než $L(A)$, pak nazveme $[\mu]$ vyšší a $[\lambda]$ nižší dimenzí. Množina určité dimenze má pro každou vyšší dimenzi míru 0 a pro každou nižší dimenzi míru $+\infty$.

Důležité je chování funkce h používané ke konstrukci Hausdorffovy míry v okolí bodu $t = 0$; dimenze se pak jeví jako „Ordnung des Nullwerdens“.[7] K tomu, aby bylo možné dimenzi kvantifikovat, potřebujeme uspořádanou škálu funkcí.

[7] Tento pojem slouží k porovnávání „rychlosti“, s níž dané funkce konvergují k nule. Nechť pro nezáporné funkce f a g definované pro $t \geq 0$ platí $f(t) \to 0$ a $g(t) \to 0$ pro $t \to 0^+$. Limitu $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{g(t)}$ (pokud existuje) označíme L. Jestliže $0 < L < +\infty$, říkáme, že f a g jsou stejného řádu; jestliže $L = 0$, je f je nižšího řádu než g; jestliže $L = +\infty$, je f vyššího řádu než g.

Zvláštní pozornost věnuje Hausdorff funkcím

- $h(t) = t^p$ pro $p > 0$
- $h(t) = t^{p_0} \left(\frac{1}{l\frac{1}{t}}\right)^{p_1} \left(\frac{1}{l_2\frac{1}{t}}\right)^{p_2} \cdots \left(\frac{1}{l_k\frac{1}{t}}\right)^{p_k}$

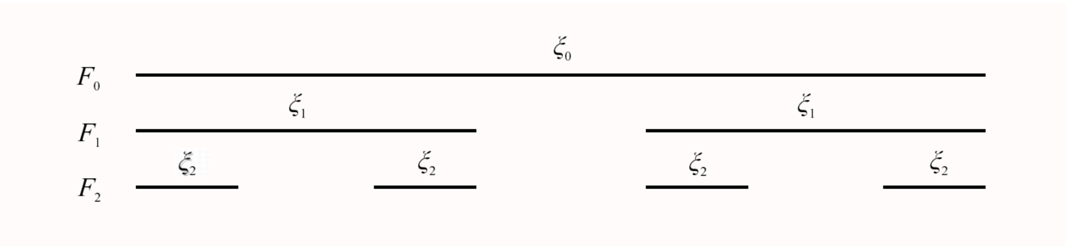
které umožňují uspořádání dimenzí pomocí reálných čísel p resp. n-tic reálných čísel $(p_0, p_1, \ldots, p_k)$. (Označujeme $l_k t = \underbrace{\log\log\ldots\log}_{k\times} t$).

Konstrukce p-dimenzionální míry s neceločíselnou hodnotou p má rozumný smysl pouze tehdy, pokud skutečně existují množiny, pro které Hausdorffova míra nabývá netriviálních hodnot ($0 < H(A) < \infty$). V další části svého pojednání dává proto Hausdorff příklad takové množiny.

Nechť $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ jsou kladná čísla splňující podmínky

$$\xi_0 > 2\xi_1, \xi_1 > 2\xi_2, \ldots \tag{4.24}$$

Označme F_0 interval $[0, \xi_0]$. Množinu F_1 dostaneme tak, že vyjmeme vnitřní body prostřední části F_0 o délce $\xi_0 - 2\xi_1$; F_1 je tak tvořena dvěma uzavřenými intervaly o délce ξ_1. Oba tyto intervaly opět rozdělíme stejným způsobem na tři části a vyjmeme vnitřní body obou prostředních částí o délce $\xi_1 - 2\xi_2$; dostaneme množinu F_2, kterou tvoří čtyři uzavřené intervaly o délce ξ_2 (viz obr. 4.5). Po n-tém kroku získáme množinu F_n tvořenou 2^n uzavřenými intervaly délky ξ_n.



OBR. 4.5: Konstrukce množiny Cantorova typu

Označíme-li $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$, pak F je dokonalá řídká množina Cantorova typu, jejíž Lebesgueova míra je rovna nule. Hausdorffova míra bude nejvýše rovna $2^n h(\xi_n)$. Zvolíme ξ_n tak, aby byla splněna podmínka

$$2^n h(\xi_n) = 1, \tag{4.25}$$

pak bude platit $H(F) \leq 1$. S větším úsilím se potom dokáže, že zároveň musí platit $H(F) \geq 1$. Množina F má tedy Hausdorffovu míru odpovídající funkci h rovnou 1 a v souladu s předchozím značením je její Hausdorffova dimenze $[h(t)]$. Speciálně pro $h(t) = t^p$ máme podle (4.25) $2^n\xi_n^p = 1$. Klasická Cantorova množina, při jejíž konstrukci se odstraňují v každém kroku vnitřní body prostřední třetiny ($\xi_k = 1/3, k \in \mathbb{N}$) dostáváme dimenzi $p = \log 2/\log 3$.

Hausdorffova práce o dimenzi a vnější míře se dočkala významnějšího ohlasu až přibližně po deseti letech. Roku 1929 vyšel první ze série Bezikovičových článků, které byly věnovány Hausdorffově míře a dimenzi. Díky Bezikovičovým pracím se pojem Hausdorffovy dimenze stal známým; o půl století později Mandelbrot navrhl označení Hausdorffova-Bezikovičova dimenze, které se však příliš neujalo.

Bezikovič a Ursell [1937] se zabývali Hausdorffovou dimenzí grafů spojitých funkcí jedné proměnné. Dimenze je zde dána do souvislosti s Lipschitzovou podmínkou [8] a je dokázána věta:

Věta. *Jestliže funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je δ-lipschitzovská, pak Hausdorffova dimenze křivky $C : y = f(x)$ splňuje*

$$1 \le \dim_H C \le 2 - \delta.$$

Z této věty plyne, že Hausdorffova dimenze grafu diferencovatelné funkce je rovna jedné. Autoři uvádějí příklad funkce $f \in \operatorname{Lip}\delta$ s $\delta < 1$ definované předpisem

$$y = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(b_n x), \tag{4.26}$$

kde φ je pilovitá funkce, pro niž platí $\varphi(x) = 2x$ pro $0 \le x \le \frac{1}{2}$ a $\varphi(x) = \varphi(-x) = \varphi(x+1)$, a koeficienty a_n a b_n splňují $a_n = b_n^{-\delta}$ s $0 < \delta < 1$. Diskutovány jsou různé případy odpovídající různým hodnotám b_n a δ včetně případu, kdy graf funkce f má dimenzi rovnou $2 - \delta$.

4.7 Fraktální dimenze

Hausdorffova dimenze se ukázala být vhodným kvantitativním prostředkem při vyjadřování komplexnosti struktur, pro které Mandelbrot zavedl označení fraktály. Právě pojem fraktální (Hausdorffovy) dimenze posloužil Mandelbrotovi k vymezení pojmu fraktálu. Podle původní Mandelbrotovy definice je fraktál objekt, jehož fraktální dimenze je větší než jeho dimenze topologická [Mandelbrot, 1975, s. 12]. V konkrétních

[8] Funkce f splňuje Lipschitzovu podmínku s exponentem $\delta > 0$ (f je δ-lipschitzovská, symbolicky $f \in \operatorname{Lip}\delta$) jestliže existuje číslo C tak, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\delta.$$

Uvedená podmínka se někdy nazývána Hölderova a název Lipschitzova je vyhrazen pro případ $\delta = 1$.

případech může být nicméně určení Hausdorffovy dimenze úkolem značně náročným. I z tohoto důvodu byla navržena další pojetí dimenze, která ve speciálních případech umožňují snadnější a rychlejší výpočet.

Georges Bouligand (1889 – 1979) vycházel z Minkowského definice míry množiny $A \subset \mathbb{R}^3$. Objem množiny A_r (sjednocení koulí s poloměrem r a středy tvořenými body množiny A) je úměrný r^{3-s}, kde s je rovno běžně chápané dimenzi množiny A ($s = 1$ v případě linie, $s = 2$ v případě plochy atd.). Koeficient u r^{3-s} pak označuje Minkowského míru. Bouligand použil podobnou myšlenku pro zavedení neceločíselné dimenze. Jestliže pro $A \subset \mathbb{R}^n$ má poměr $V(A_r)/r^{n-s}$ konečnou limitu pro $r \to 0^+$, pak považujeme množinu A za s-dimenzionální.

Definice. Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$, pak

$$\dim_B A := n - \lim_{r \to 0^+} \frac{\log V(A_r)}{\log r}\,. \tag{4.27}$$

Bouligand vystudoval École Normale Superieure. Působil v Rennes, Poitiers a od roku 1938 na Sorbonně v Paříži. Zabýval se mnoha oblastmi matematiky a fyziky a rovněž pedagogikou a metodologií přírodních věd. Určování velikosti bodových množin v $\mathbb{R}^3$ pomocí neceločíselné dimenze, k níž dospěl nezávisle na Hausdorffovi, je patrně jeho nejznámějším objevem.

První stručná zpráva o Bouligandových výsledcích byla publikována v *Comptes rendus* roku 1925. Původně byla uložena v zapečetěné obálce a svěřena pařížské Akademii, aby mohla být použita jako doklad v případě sporu o prvenství. Fraktální dimenze označovaná dnes zpravidla jako Minkowského-Bouligandova je podrobně popsána v článku [Bouligand, 1928].

Bouligand uvádí několik způsobů zavedení dimenze: pokrytí množiny A koulemi se středy ležícími v A, pokrytí vzájemně disjunktními nebo dotýkajícími se koulemi se středy v A nebo pokrytí pravoúhlou sítí stejných čtverců (krychlí). Poslední způsob, který z hlediska praktického využití má značný význam, souvisí s tím, že Minkowského–Bouligandova dimenze se v anglicky psané literatuře nazývá rovněž *box dimension* či *box–counting dimension*.[9]

Analogicky tak lze definovat

$$\dim_B A = \lim_{r \to 0} \frac{\log N_r(A)}{-\log r}, \tag{4.28}$$

[9] Čeština v tomto případě nenabízí ustálený termín. Označení mřížková či krabicová dimenze se příliš nevžila a proto se v této práci držím označení Minkowského–Boulgandova dimenze.

kde $N_r(A)$ je počet čtverců (krychlí) se stranou r, které mají s množinou A neprázdný průnik. Minkowského–Bouligandova dimenze má proto značný praktický význam, neboť uvedený postup a vzorec (4.28) lze dobře použít pro odhad dimenze např. i v případě experimentálně zjištěných dat.

Nahradíme-li ve vzorci (4.28) znak lim znakem lim sup resp. lim inf, dostaneme tzv. horní resp. dolní Minkowského–Bouligandovu dimenzi (označovanou $\overline{\dim}_B$ resp. $\underline{\dim}_B$). Pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ platí [Falconer, 2003, s. 46]

$$\dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A. \tag{4.29}$$

Hausdorffova a Minkowského–Bouligandova dimenze nabývají u poměrně široké třídy množin stejných hodnot, bohužel to ale neplatí zcela obecně. Např. množina racionálních čísel v intervalu [0, 1] má Minkowského-Bouligandovu dimenzi 1, avšak její Hausdorffova dimenze je rovna 0.

Bouligandovi náleží zřejmě i zásluha za formulování pojmu dimenze vycházejícího ze soběpodobnosti, vlastnosti, která je charakteristická pro řadu fraktálů. Tento druh dimenze se stal díky Mandelbrotovi známý jako *soběpodobnostní dimenze* (self-similarity dimension, více v odst. 5.2).

Pojem neceločíselná dimenze založená na stejných či podobných úvahách se pod různými názvy objevoval v pracích dalších autorů. Jiná formulace pochází od Lva Semjonoviče Pontrjagina (1908 – 1988) a Lva Genrichoviče Šnirel'mana (1905 – 1938).

Pontrjagin a Šnirel'man [1932] zavádějí pojem *metrického řádu* (ordre métrique) kompaktního metrického prostoru X. Uvažují pokrytí X konečným systémem uzavřených množin s průměrem nejvýše ε. Nejmenší počet takových množin nutný k pokrytí X označíme $N_\varepsilon(X)$. Jedná se o funkci rostoucí nade všechny meze pro $\varepsilon \to 0^+$ a závisející zřejmě na metrice X.

K definování metrického řádu je použita škála mocninných funkcí t^a a metrický řád k prostoru X je pak definován jako řez v množině všech a. Lze jej vyjádřit rovností

$$k = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{\log N_\varepsilon(X)}{\log \varepsilon} \right) \tag{4.30}$$

Metrický řád není topologicky invariantní charakteristikou X. Autoři nicméně dokazují větu, která ukazuje na překvapivou souvislost mezi metrickými vlastnostmi daného prostoru a jeho topologickou dimenzí.

Věta. *Nejmenší z metrických řádů* (4.30) *pro všechny metriky kompaktního prostoru X je roven jeho topologické dimenzi.*

Rozdíl mezi Hausdorffovou dimenzí a metrickým řádem Pontrjagina a Šnirel'mana spočívá v tom, že v prvním případě se daná množina pokrývá množinami průměru nejvýše ε a sčítají se s-té mocniny jejich průměrů, zatímco ve druhém případě se daná množina pokrývá množinami průměru nejvýše ε a sčítají se s-té mocniny ε. Hausdorffova dimenze je tudíž vždy nejvýše rovna metrickému řádu. Výše uvedená hlavní věta Pontrjaginova a Šnirel'manova článku platí i pro Hausdorffovu dimenzi [Edgar, 1993, s. 141].

Tricot [1995] nazývá Minkowského–Bouligandovu dimenzi definovanou pomocí vzorce (4.7) prostě fraktální dimenzí. Podobně Barnsley [1988, s. 174] definuje fraktální dimenzi pomocí vzorce (4.28), v němž $N_r(A)$ představuje nejmenší počet koulí $B(x, r)$ nutných k pokrytí A. Význam pojmu fraktální dimenze nicméně není ustálen a může být použit i pro některou z obecně neceločíselných dimenzí, které byly popsány v novější době. Tricot [1981] podává přehled 12 různých definic pro množiny na číselné ose. Přehled významnějších definic dimenze lze najít např. v knihách Falconera [2003] nebo Mattily [1995].

Literatura

BARNSLEY, M. 1988. *Fractals Everywhere.* San Diego : Academic Press, 1988. ISBN 0-12-079062-9.

BESICOVITCH, A. S. 1928. On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points. *Mathematische Annalen.* 1928, Bd. 98, s. 422–464.

BESICOVITCH, A. S. 1938. On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points (ii). *Mathematische Annalen.* 1938, Bd. 115, s. 296–329.

BESICOVITCH, A. S.; URSELL, H. D. 1937. Sets of fractional dimension (v): On dimensional numbers of some continuous curves. *Journal of the London Mathematical Society.* 1937, vol. 12, s. 18–25. (Přetištěno v EDGAR, G. (ed.), *Classics on Fractals*, s. 170–180.)

BOULIGAND, G. 1928. Ensembles impropres et nombre dimensionnel. *Bulletin des Sciences Mathématiques.* 1928, t. 52, s. 320–344, 361–76. (Angl. překlad první části EDGAR, G. (ed.), *Classics on Fractals*, s. 118–131.)

CANTOR, G. 1884a. De la puissance des ensembles parfaits de points. *Acta mathematica.* 1884, vol. 4, s. 381–392.

CANTOR, G. 1884b. Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. 6. Fortsetzung. *Mathematische Annalen.* 1884, Bd. 23, s. 453–488.

CARATHÉODORY, C. 1914. Über das lineare Mass von Punktmengen – eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs. *Nachrichten de K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch–Physikalische Klasse.* 1904, s. 404–426.

EDGAR, G. 1993. *Classics on Fractals.* Addison–Wesley, 1993. ISBN 0-201-58701-7.

FALCONER, K. 2003. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*, 2nd edition. Chichester : Wiley, 2003. ISBN 0-470-84862-6.

GROSS, W. 1918a. Über das lineare Maß von Punktmengen. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 1918, Bd. 29, s. 177–193.

GROSS, W. 1918b. Über Flächenmaß von Punktmengen. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 1918, Bd. 29, s. 145–176.

HARNACK, A. 1882. Vereinfachung der beweise in der theorie der fourier'schen reihe. *Mathematische Annalen*. 1882, Bd. 19, s. 235–279.

HAUSDORFF, F. 1919. Dimension und äußeres Maß. *Mathematische Annalen*. 1919, Bd. 79, s. 157–179.

HAWKINS, T. 1975. *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development*, 2nd edition. New York : Chelsea Publishing Company, 1975. ISBN 0-8284-0282-5.

KANNAN, R.; KRUEGER, C. K. 1996. *Advanced Analysis on the Real Line*. New York : Springer,1996. ISBN 0-387-94642-X.

KOUDELA, L. 2011. O prvních spojitých singulárních funkcích. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 2011, sv. 56, s. 44–53.

LEBESGUE, H. 1902. Intégrale, longueur, aire. *Annali di Matematica*. 1902, t. 7, s. 231–359.

LEBESGUE, H. 1904. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris : Gauthier-Villars, 1904.

MANDELBROT, B. 1975. *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. Paris : Flammarion, 1975.

MATTILA, P. (1995). *Geometry of Sets and Measures inEuclidean Spaces*. Cambridge : Cambridge University Press, 1995. ISBN 0-521-65595-1.

MENGER, K. 1930. Untersuchungen über allgemeine Metrik. Vierte Untersuchung. Zur Metrik der Kurven. *Mathematische Annalen*. 1930, Bd. 103, s. 466–501.

MINKOWSKI, H. 1901. Ueber die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung*. 1901, Bd. 9, s. 115–121. (= *Gesammelte Abhandlungen*, Zweiter Band. Leipzig und Berlin : B. G. Teubner, 1911, s. 122–127).

MINKOWSKI, H. (1904). Zur Geometrie der Zahlen. In *Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresses*, S. 164–173. (= *Gesammelte Abhandlungen*, Zweiter Band. Leipzig und Berlin : B. G. Teubner, 1911, s. 43–52).

MORSE, A. P.; RANDOLPH, J. F. 1940. Gillespie measure. *Duke Mathematical Journal*. 1940, vol. 6, no. 2, s. 408–419.

NÖBELING, G. 1942. Über die Länge der Euklidischen Kontinuen I. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung*. 1942, Bd. 52, s. 132–160.

POMPEIU, D. 1905. Sur la continuite des fonctions de variables complexes. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série. 1905, t. 7, s. 265–315.

PONTRJAGIN, L. S.; SCHNIRELMANN, L. G. 1932. Sur une propriété métrique de la dimension. *Annals of Mathematics*. 1932, vol. 33, s. 156–162. (Angl. překlad EDGAR, G. (ed.), *Classics on Fractals*, s. 132–142.)

SHERMAN, S. 1942. A comparison of linear measures in the plane. *Duke Mathematical Journal*. 1942, vol. 9, no. 1, s. 1–9.

TRICOT, C. 1981. Douze définitions de la densité logarithmique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I. Mathématique*. 1981, t. 293, s. 549–552.

TRICOT, C. 1995. *Curves and Fractal Dimension*. New York : Springer, 1995. ISBN 0-387-94095-2.

YOUNG, W. H.; YOUNG, G. C. 1906. *The Theory of Sets of Points*. Cambridge : Cambridge University Press, 1906.

ZORETTI, L.; ROSENTHAL, A. 1923. Die Punktmengen. In *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Band 2, Teil 3, 2. Hälfte. Leipzig : B. G. Teubner, 1923, s. 856–1031.

Kapitola 5

Fraktální křivky

Objekty, označované v matematice jako patologické, byly často popsány jako hraniční příklady či protipříklady ukazující potřebu přesného vymezení pojmů, chápaných jako intuitivně jasné. V průběhu 20. století se poměr k těmto objektům měnil. Patologické zvláštnosti, mezi nimiž hrály významnou roli křivky, začaly být systematicky studovány. Výrazný podnět v tomto ohledu představovala teorie fraktálů, která se objevila na konci 70. let. Mandelbrotovy práce měly značnou odezvu a fraktální geometrie byla některými jeho stoupenci považována za vhodnější prostředek k popisu reálného světa než geometrie klasická. Nadšení z nové teorie časem do jisté míry vyprchalo, zájem o fraktály však podnítil i další studium matematických vlastností těchto objektů, např. autoafinity apod.

5.1 Pojem fraktálu a fraktální křivky

Pojem „fraktál" je relativně nový; poprvé se objevuje v roce 1975 v knize *Les objets fractals, forme, hasard et dimension* Benoîta Mandelbrota (1922 – 2010). Rozšířená verze Mandelbrotovy knihy vyšla o dva roky později v anglickém překladu pod názvem *Fractals: Form, chance and dimension* (český překlad čtvrtého vydání z roku 1995 vydalo nakladatelství Mladá fronta v edici Kolumbus v roce 2003).

Mandelbrot shromáždil doklady o tom, že patologické objekty v matematice mají některé společné znaky s tvary, které nacházíme v přírodě. Začal je nazývat fraktály (z lat. fractus, zlomený). Podle Mandelbrota [1975, s. 16] jsou fraktály objekty, jejichž Hausdorffova dimenze je větší než jejich dimenze topologická. Sám Mandelbrot později [1982, s. 159] připustil, že jeho definice je na jedné straně příliš úzká a vylučuje z kategorie fraktálů objekty, které tam pro jiné své vlastnosti patří, na druhé straně ponechává otevřenou hranici se „skutečným geometrickým chaosem", tj. s objekty, které nemají z hlediska případného dalšího zkoumání žádné rozumné vlastnosti.

Taylor [1992] navrhl jinou definici fraktálu založenou na porovnání Hausdorffovy dimenze a tzv. packing dimension.[1] Fraktálem nazývá borelovskou množinu v $\mathbb{R}^n$, pro kterou obě dimenze mají stejnou hodnotu.

Barnsley [1988, s. 35] chápe fraktály jako prvky „prostoru fraktálů"; tak nazývá systém všech neprázdných kompaktních podmnožin nějakého metrického prostoru. Zdůrazňuje však, že pojem fraktálu je otevřený a je zpravidla vymezen pomocí množství příkladů, obrázků a vztahů.

Falconer [2003, s. xxv] volí podobný neformální přístup a popisuje fraktály jako množiny bodů, vyznačující se jistými typickými vlastnostmi, ne nutně ale všemi najednou. Následující vlastnosti jsou podle něj pro fraktály charakteristické:

- jemná struktura, patrná při libovolném zvětšení;
- nemožnost nebo obtížnost popisu jazykem tradiční geometrie;
- jednoduchá (často rekurzívní) definice;
- fraktální dimenze větší než dimenze topologická;
- určitá forma soběpodobnosti.

Množiny, které se běžně uvádějí jako příklady fraktálů, jsou často rovinnými křivkami ve smyslu Jordanovy, příp. Cantorovy definice. Typickými příklady jsou Sierpińského křivky popsané v odstavci 3.8. Fraktální křivky se vedle výše uvedených znaků vyznačují některými specifickými vlastnostmi, které mohou sloužit k samostatnému vymezení pojmu fraktální křivka.

To je způsob, který volí např. Tricot [1995, s. 136]; podle něj můžeme fraktální křivku kvalitativně charakterizovat jako křivku, jejíž žádná část není rektifikovatelná a která je „homogenní", tedy každá její část je v jistém smyslu podobná celku. Při definování fraktální křivky je podle Tricota podstatná interpretace pojmů „stejná struktura" a „podobnost". Přesný význam lze tomuto popisu dát pouze kvantitativně. Buď lze zvolit vhodný parametr (např. fraktální dimenzi) a považovat za podobné dvě struktury, pro které tento parametr nabývá stejné hodnoty nebo hodnoty stejného řádu. Druhou možností je popisovat podobné struktury pomocí jistého typu transformací, které vedou např. k vymezení tříd soběpodobných nebo autoafinních křivek.

[1] Tento pojem zavedl Claude Tricot roku 1982. Zatímco Hausdorffova dimenze je založena na představě pokrytí dané množiny množinami, jejichž průměr je menší dané δ, definice packing dimension vychází z představy vyplnění dané množiny množinami dostatečně malého průměru. Této definici dimenze, která je nesporně z hlediska některých aplikací důležitá, nevěnuji v této práci zvláštní pozornost; podrobnosti lze nalézt např. v knize [Edgar, 2008, s. 169 a n.]. Stranou ponechávám i otázku vhodného českého překladu anglického označení. Někteří autoři volí název „pakovací dimenze", jehož výhodou je, že odkazuje bezprostředně na původní anglický termín.

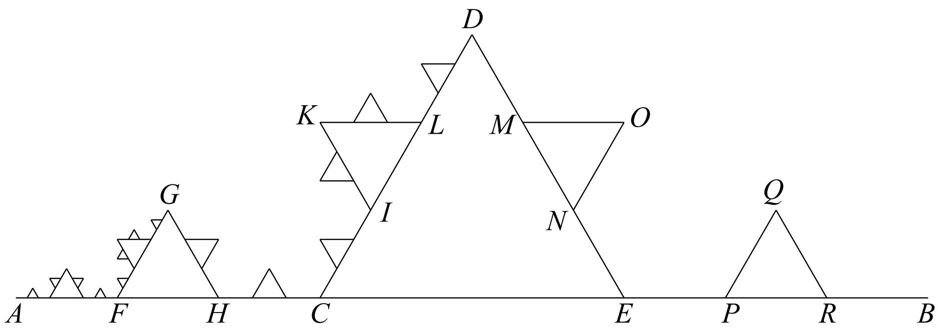
5.2 Soběpodobné křivky

Soběpodobnou se nazývá množina, která zhruba řečeno je sjednocením konečného počtu částí, z nichž každá je zmenšenou kopií celku. Mandelbrot [1975, s. 41 a n.] chápal soběpodobnost jako jednu z charakteristických vlastností fraktálů. Klasickým příkladem soběpodobné množiny je proslulá *von Kochova křivka*, popsaná roku 1904 švédským matematikem von Kochem.

Helge von Koch (1870 – 1924) studoval na stockholmské univerzitě, doktorskou disertační práci z teorie diferenciálních rovnic napsal pod vedením Mittag–Leflera a obhájil roku 1892. Von Kochovým záměrem v článku [1904] bylo uvést příklad křivky, která nemá v žádném bodě tečnu a jejíž konstrukce, na rozdíl např. od grafu Weierstrassovy funkce, nepostrádá geometrickou názornost.

> I když Weierstrassův příklad uvedl tuto mylnou domněnku [o diferencovatelnosti spojitých funkcí] jednou provždy na pravou míru, zdá se mi, že není uspokojující z geometrického hlediska, neboť jeho funkce je definována analytickým výrazem, který skrývá geometrickou povahu související křivky a z tohoto pohledu není zřejmé, proč tato křivka nemá tečny. (Cit. podle [Edgar, 1993, s. 25])

Konstrukce von Kochovy křivky vychází z úsečky AB se zvolenou orientací (např. od A do B). Na ni je uplatněna tzv. operace Ω, která danou úsečku nahradí lomenou čárou $ACDEB$ složenou ze čtyř úseček, které mají stejnou délku a jejichž orientace odpovídá uvedenému pořadí jejich koncových bodů (obr. 5.1). V dalším kroku je tatáž operace Ω aplikována na každý z úseků lomené čáry $ACDEB$, čímž se získá lomená čára $AFGH\dots$ sestávající z 4^2 úseků.



OBR. 5.1: Konstrukce von Kochovy křivky [Edgar, 1993, s. 29]

Označíme úsečku AB jako P_0, lomenou čáru $ACDEB$ jako P_1 atd. Popsanou konstrukcí získáme posloupnost lomených čar

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots . \tag{5.1}$$

Von Koch podrobně dokazuje, že sjednocení P množiny S vrcholů lomených čar P_n, $n \in \mathbb{N}$, a množiny S' hromadných bodů množiny S je (Jordanovou) křivkou, která nemá v žádném bodě tečnu. Délka oblouku mezi libovolnými dvěma body této křivky je nekonečná a zvolíme-li $AB = 1$, bude obsah obrazce ohraničeného čarami P_0 a P roven $\frac{1}{20}\sqrt{3}$.

Von Koch se soběpodobností „své" křivky nezabýval. Její význam si ale uvědomil Ernesto Cesàro (1859 – 1906), který v pojednání [1905], jež vyšlo pouhý rok po von Kochově memoáru, napsal:

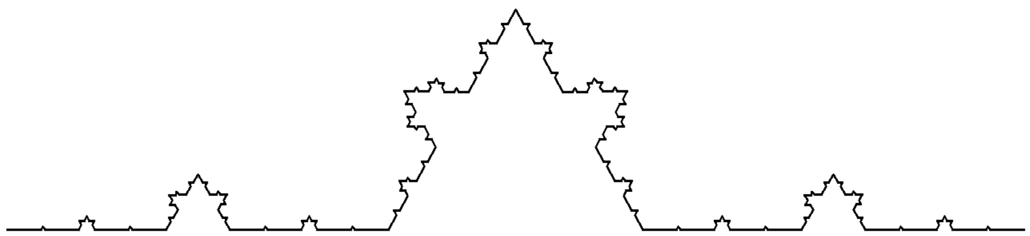
> Kdyby [tato křivka] byla obdařena životem, nebylo by možné ji celou zahubit, neboť by se znovu a znovu rodila z hlubin svých trojúhelníků, podobně jako se rodí život ve vesmíru.

Rozšířená verze von Kochova článku vyšla následujícího roku v *Acta mathematica*. Von Koch [1906] se v ní zabýval i zobecněním své konstrukce. Operace Ω nahrazovala úsečku AB lomenou čárou $ACDEB$ tvořenou čtyřmi úsečkami stejné délky. Připustíme-li, že úseky této čáry nejsou stejně dlouhé (jejich délky nechť jsou $AC = a$, $CD = DE = b$, $EB = c$), získáme možnost sestrojit celou třídu křivek vyznačujících se různými vlastnostmi v závislosti na volbě parametrů a, b, c. Zvolíme např. klesající posloupnost kladných čísel $b_1, b_2, b_3, \ldots$ a na $P_0 = AB$ provedeme operaci Ω s b_1 jako druhým parametrem, na každém z úseků P_1 provedeme operaci Ω s b_2 jako druhým parametrem atd. První a třetí parametr bude v každém kroku stejný. Označíme-li L_n délku čáry P_n, bude

$$\begin{aligned} L_0 &= 1, \\ L_1 &= L_0 + b_1, \\ L_2 &= L_1 + 4b_2, \\ \ldots & \\ L_n &= L_{n-1} + 4^{n-1} b_n, \\ \ldots & \end{aligned} \tag{5.2}$$

Hodnota $L = \lim L_n$ bude záviset na tom, zda řada $\sum 4^n b_n$ konverguje či diverguje. Na obr. 5.2 je naznačena konstrukce s $b_n = 5^{-n}$. V závěru ponechává von Koch otevřenou otázku existence rektifikovatelné křivky nemající v žádném bodě tečnu. Touto otázkou se nicméně zabýval už Lebesgue [1904, s. 127], který dokázal, že body, v nichž rektifikovatelná křivka popsaná rovnicemi (4.1) nemá tečnu, odpovídají hodnotám parametru t, které tvoří množinu nulové míry.

Z podobného způsobu konstrukce von Kochovy křivky a křivek Peanova a Osgoodova typu vyšel při odvozování jejich parametrického popisu Konrad Knopp (1881 – 1957). Knopp [1917] nazývá Peanovou křivkou křivku vyplňující trojúhelník, kterou popsal



OBR. 5.2: Aproximace rektifikovatelné křivky von Kochova typu, která není soběpodobná

Sierpiński (viz např. [Sagan, 1994, s. 51 a n.]). Osgoodovou křivkou rozumí Jordanovu křivku s nenulovou plošnou mírou, která se však liší od původní Osgoodovy verze, neboť uvedenou vlastnost má každá její část. Sagan [1994, s. 136] tuto křivku nazývá Knoppovou křivkou (Osgoodova typu). Jordanovu křivku lze obecně v komplexní rovině popsat rovnicí $z = f(t)$, kde f je spojitá komplexní funkce parametru $t \in [0,1]$. Vyjádříme-li body intervalu $[0,1]$ dyadickým rozvojem

$$t = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \cdots, \tag{5.3}$$

kde a_n nabývá pro každé n pouze hodnot 0 nebo 1, platí pro von Kochovu i Sierpińského křivku

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n^{-1}}{q^n} a_n, \tag{5.4}$$

kde $\varepsilon_0 = 1$ a $\varepsilon_k = e^{\pm(-1)^{k-1}\alpha i}$ pro $k \in \mathbb{N}$ (horní znaménko platí pro $a_k = 0$, dolní pro $a_k = 1$). Pro von Kochovu křivku je $q = \sqrt{3}$ a $\alpha = \pi/6$, pro Sierpińského křivku je $q = \sqrt{2}$ a $\alpha = \pi/4$. Knoppova křivka není soběpodobná a její parametrický popis je o něco komplikovanější.

Obecné pojednání o křivkách sestávajících z částí, které jsou podobné celé křivce, pochází od Paula Lévyho (1886 – 1971). Lévy [1938] se soustředil na soběpodobnost, kterou se nevyznačuje jen von Kochova křivka, ale množství dalších rovinných i prostorových křivek i některé plochy. V úvodu poznamenává, že ta část jeho pojednání, která je věnována von Kochově křivce, je založena na výsledcích pocházejících již z doby na začátku století; nezávisle dospěl k objevu téže křivky jako von Koch, ale nedocenil tehdy význam své práce a výsledky nepublikoval.

Lévy studoval a později působil na École Polytechnique, École des Mines a na Sorbonně; zabýval se mnoha oblastmi matematiky, především funkcionální analýzou a teorií pravděpodobnosti. Mezi jeho žáky patřil mimo jiné i Mandelbrot.

V první kapitole buduje obecnou teorii soběpodobných křivek včetně jejich klasifikace. Křivku chápe Lévy jako Jordanovu křivku ve smyslu definice na s. 48. Dva oblouky odpovídající hodnotám parametru $t \in [t_0, t_1]$ resp. $t \in [t'_0, t'_1]$ jsou *přímo podobné* jestliže existuje spojitá rostoucí funkce $t' = \varphi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ s oborem hodnot $[t'_0, t'_1]$, přičemž body t a t' si odpovídají na základě podobnosti „s kladným funkčním determinantem" (tj. bez zrcadlení). Křivkou řádu r ($r \in \mathbb{N}, r > 1$) nazývá Lévy křivku, která může být rozložena na r oblouků s $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{r-1} < t_r = 1$, z nichž každý je podobný křivce C. Jsou-li všechny podobnosti přímé, označuje Lévy křivku jako C_0. Nejsou-li podobnosti přímé, ale jsou téhož typu, jde o křivku typu C'. Všechny ostatní jsou označovány jako C''.

Druhá kapitola je věnována soběpodobným křivkám v rovině. Sierpińského křivka vyplňující trojúhelník (Lévym nazývaná Peanova) je typu C_1 a řádu 2. Von Kochova křivka je typu C_1 a řádu 2 nebo typu C_0 a řádu 4. Rovněž křivku Peanovova typu (Lévy ji nazývá Hilbertovou křivkou) lze chápat jako křivku typu C_0 řádu n, kde n je druhá mocnina lichého čísla.

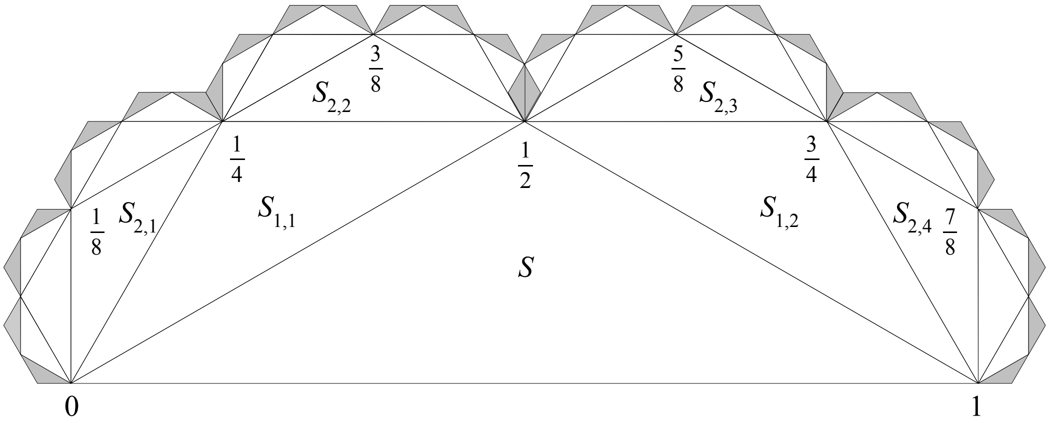
Každá křivka řádu r je pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ zároveň křivkou řádu r^n. Pro parametrické vyjádření křivky je účelné volit ekvidistantní dělení intervalu $[0, 1]$ pomocí bodů $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r-1} < t_r = 1$, přičemž každý z intervalů $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, r$ odpovídá jednomu z r oblouků křivky podobných celé křivce. Konstrukce křivky C je pak založena na konstrukci posloupnosti lomených čar $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$ vepsaných křivce C. Čára P_n prochází body, které odpovídají hodnotám parametru

$$t = \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \cdots + \frac{a_n}{r^n}, \tag{5.5}$$

kde koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ nabývají hodnot $0, 1, \ldots, r-1$. Křivka C (s výjimkou případu, kdy C je úsečka) má zřejmě lokálně nekonečnou délku a v žádném bodě nemá tečnu.

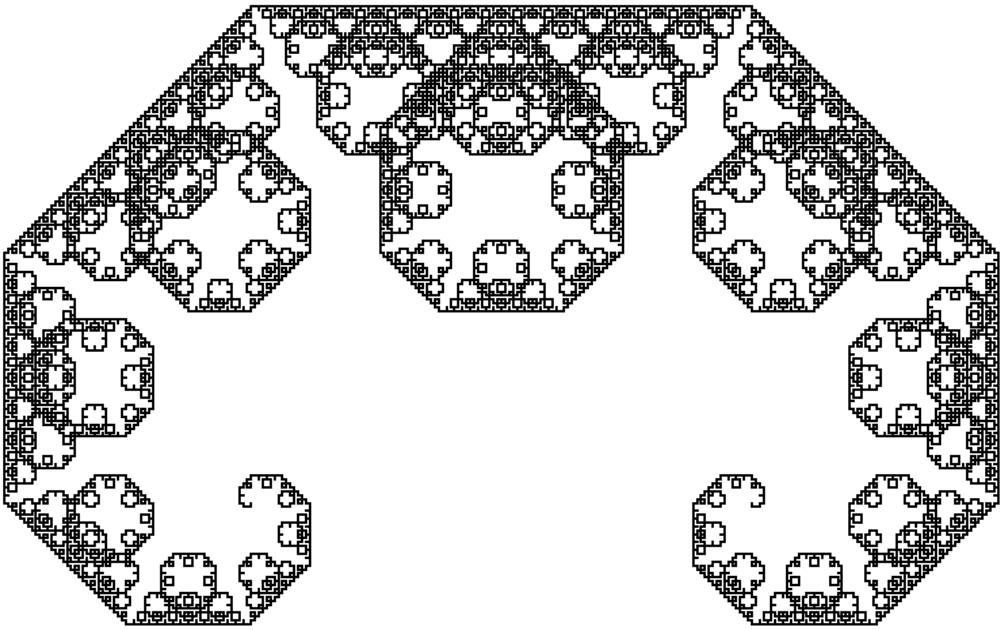
Lévy dále představuje křivku typu C_0 řádu 2 označovanou dnes jako *Lévyho křivka*. Její konstrukce začíná rovnoramenným trojúhelníkem S (obr. 5.3) s úhlem α při základně menším než $\pi/3$. Jeho vrcholy odpovídají po řadě hodnotám 0, 1/2, 1 parametru t. Lomená čára tvořená oběma kratšími stranami trojúhelníku S je první aproximací P_1 Lévyho křivky. Druhou aproximaci získáme spojením kratších stran trojúhelníků $S_{1,1}$ a $S_{1,2}$, které jsou podobné S, jejich základny jsou kratší strany S a oba leží vně S. Analogicky postupuje při konstrukci lomené čáry P_n pro $n \geq 3$.

Lévy upozorňuje také na zajímavou vlastnosti Lévyho křivky s $\alpha = \pi/4$ (obr. 5.4), totiž že pomocí kopií této křivky lze „vydláždit" rovinu. Přesněji řečeno, existuje posloupnost C_j, $j \in \mathbb{N}$, přesných kopií této křivky, které se vzájemně nepřekrývají (žádné dvě nemají



OBR. 5.3: Konstrukce Lévyho křivky s $\alpha = \pi/6$ [Edgar, 1993, s. 207]

společné vnitřní body) a které pokrývají rovinu, tj. $\mathbb{R}^2 = \bigcup C_j$ [Edgar, 1993, s. 236]. Tuto vlastnost mají i některé další tzv. dračí křivky.



OBR. 5.4: Konstrukce Lévyho křivky s $\alpha = \pi/4$

5.3 Hausdorffova vzdálenost

Při konstrukci fraktálních křivek zpravidla vycházíme z vhodně zvolené počáteční množiny a nějaké základní operace, jejímž opakovaným aplikováním dostáváme posloupnost množin (většinou lomených čar), které aproximují danou křivku tím lépe, čím větší je počet iterací. Konstruovaná křivka je při tom chápána jako limita posloupnosti těchto množin.

Aby bylo možné mluvit o konvergenci množin, je nutné vyjasnit pojem vzdálenosti množin. Vzdálenost bodu x od neprázdné omezené množiny A v metrickém prostoru (X, d) definujeme vztahem

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y); y \in A\}. \tag{5.6}$$

Označíme dále $\rho(A, B)$ supremum vzdáleností bodů množiny A od množiny B.

$$\rho(A, B) = \sup \{d(x, B); x \in A\}. \tag{5.7}$$

Výrazy $\rho(A, B)$ a $\rho(B, A)$ si obecně nejsou rovny. *Hausdorffovu vzdálenost* množin A a B definujeme jako větší z těchto dvou výrazů;

$$d(A, B) = \max \{\rho(A, B), \rho(B, A)\}. \tag{5.8}$$

Takto definovaná funkce má všechny vlastnosti vzdálenosti: pro libovolné množiny A, B je $d(A, B) \geq 0$, přičemž rovnost platí právě tehdy, když $A = B$, dále $d(A, B) = d(B, A)$ a pro libovolné A, B, C je $d(A, C) + d(C, B) \geq d(A, B)$. V metrickém prostoru $\mathscr{K}(X)$, jehož prvky jsou kompaktní podmnožiny prostoru X, znamená pojem konvergence $A_n \to A$ jednoduše $d(A, A_n) \to 0$.

Úvahami o vzdálenosti a konvergenci množin se zabýval ve své disertační práci Dimitrie Pompeiu (1873 – 1954). Je-li $\mathcal{A}$ spočetný systém uzavřených množin A_i (v komplexní rovině), pak vzájemnou vzálenost (écart mutuel) množin A_j a A_k definuje Pompeiu [1905, s. 281–282] jako

$$\rho(A_j, A_k) + \rho(A_k, A_j). \tag{5.9}$$

Pompeiu se zabýval především případem, kdy A_i jsou rektifikovatelné křivky. Pojem vzdálenosti umožnil pohlížet na systémy křivek jako na bodové množiny; Pompeiu si byl však zároveň vědom obtíží, které jsou s takovou analogií spojeny. Křivka, která je limitou posloupnosti křivek, se může od prvků této posloupnosti značně odlišovat; limita posloupnosti rektifikovatelných křivek nemusí být nutně rektifikovatelná křivka, limita posloupusti spojitých křivek nemusí být nutně spojitá křivka atd. Oba výrazy (5.8) a (5.9) mají ekvivalentní vlastnosti [Birsan, 2006]. Hausdorff, který definoval vzdálenost množin způsobem popsaným výše ve své knize *Grundzüge der Mengenlehre*, Pompeiovu práci cituje, přesto se však výše uvedená definice spojuje většinou jen s jeho jménem.

Pojem ε-okolí množiny

$$A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon) \tag{5.10}$$

používaný při definování Minkowského míry (s. 113) lze rovněž použít k definování Hausdorffovy vzdálenosti. Platí [Tricot, 1995, s. 49]

$$\sup \{d(x, B); x \in A\} \leq \varepsilon \Longleftrightarrow A \subset B_\varepsilon. \tag{5.11}$$

Můžeme proto definovat

$$d(A, B) = \inf \{\varepsilon; A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon\}. \tag{5.12}$$

5.4 Systémy iterovaných funkcí

Vydání Mandelbrotovy knihy *Fractal Geometry of Nature* (1982) vyvolalo zájem o fraktály i mezi těmi, kdo se o matematiku nikdy hlouběji nezajímali. Mandelbrotovy úvahy ale inspirovaly i seriózní matematický výzkum. O obou aspektech svědčí kniha Michaela Barnsleyho *Fractals Everywhere* (1988), jež vznikla na základě kursu fraktální geometrie, který Barnsley vedl na Georgia Institute of Technology. Barnsley uvádí, že jeho kurs navštěvovali studenti, jejichž specializací byly nejrůznější obory od leteckého inženýrství po psychologii. *Fractals Everywhere* je jednou z prvních knih, v nichž je fraktální geometrie vykládána systematicky a formálním způsobem.

Jedním z klíčových pojmů, o které se Barnsley opírá, je pojem *systému iterovaných funkcí* (iterated function system, IFS), který „poskytuje vhodný rámec pro popis, klasifikaci a komunikaci fraktálů“ [Barnsley, 1988, s. 2].

Nechť (X, d) je metrický prostor a $d(x, y)$ vzdálenost prvků x a y v (X, d). Zobrazení $S : (X, d) \to (X, d)$ budeme nazývat *kontrakcí* s koeficientem c, jestliže existuje číslo $0 \leq c < 1$ takové, že pro všechna $x, y \in (X, d)$ platí $d(S(x), S(y)) \leq c\, d(x, y)$. Nahradíme-li v tomto vztahu znak nerovnosti rovnítkem, je uvedená kontrakce *podobností*. Dvě množiny jsou podobné, je-li jedna obrazem druhé při transformaci S.

Definice. Systémem iterovaných funkcí v úplném metrickém prostoru (X, d) rozumíme konečný systém kontrakcí $S_i : (X, d) \to (X, d)$ s koeficienty c_i, $i = 1, \ldots, m$.

Množina $A \subset (X,d)$, pro kterou platí

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(A), \tag{5.13}$$

se nazývá *invariantní množinou* (*atraktorem*) systému iterovaných funkcí $S_1, S_2, \dots, S_m$. Množina A má často vlastnosti typické pro fraktály. Jsou-li všechna zobrazení v rovnici (5.13) podobnostmi, je množina A soběpodobná.

Pojem IFS zavedli Barnsley a Demko [1985] jako nástroj pro generování široké třídy fraktálů. Stejný či podobný přístup byl však v matematické literatuře popsán mnohem dříve.

P. A. P. Moran (1917 – 1988) se v článku [Moran, 1946] zabýval Hausdorffovou dimenzí množin v $\mathbb{R}^n$, které lze vyjádřit jako sjednocení konečného počtu zmenšených kopií sebe sama (tedy soběpodobných množin). Moran formuloval tzv. podmínku otevřené množiny a odvodil důležitý výsledek týkající se Hausdorffovy dimenze soběpodobných množin. Systém transformací $S_1, S_2, \dots, S_m$ splňuje *podmínku otevřené množiny*, jestliže existuje neprázdná omezená otevřená množina U taková, že $S_i(U) \subset U$ pro $i = 1, 2, \dots, m$ a $S_i(U) \cap S_j(U) = \emptyset$ pro $i \neq j$.

Věta. *Nechť $S_1, \dots, S_m$ je systém podobností s koeficienty $c_1, \dots, c_m$, který splňuje podmínku otevřené množiny. Nechť pro nějaké $D > 0$ je $\sum_{k=1}^{m} c_k^D = 1$. Pak $\dim_H(F) = D$.*

Moranova věta umožňuje snadný výpočet dimenze soběpodobných množiny splňujících podmínku otevřené množiny (někdy se v tomto smylu používá pojem podobnostní či soběpodobnostní dimenze). Množina U se nazývá rovněž *Moranova otevřená množina* [Edgar, 2008, s. 191].

Von Kochovu křivku můžeme v množině $\mathbb{C}$ komplexních čísel s běžně definovanou vzdáleností vyjádřit jako sjednocení $K = S_1(K) \cup S_2(K)$, kde

$$S_1(z) = a\bar{z}, \quad S_2(z) = a + (1-a)\bar{z} \tag{5.14}$$

s $a = 1/2 + \sqrt{3}i/6$. Transformace S_1 a S_2 jsou podobnosti s koeficienty $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{3}$ a Hausdorffova dimenze množiny K je řešením rovnice

$$2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^D = 1,$$

tedy $\dim_H K = D = \log 4 / \log 3$. Podmínka otevřené množiny je splněna, vezmeme-li jako množinu U množinu vnitřních bodů rovnoramenného trojúhelníku s vrcholy $0, 1, a$. Ne vždy je ale podmínku otevřené množiny snadné ověřit.

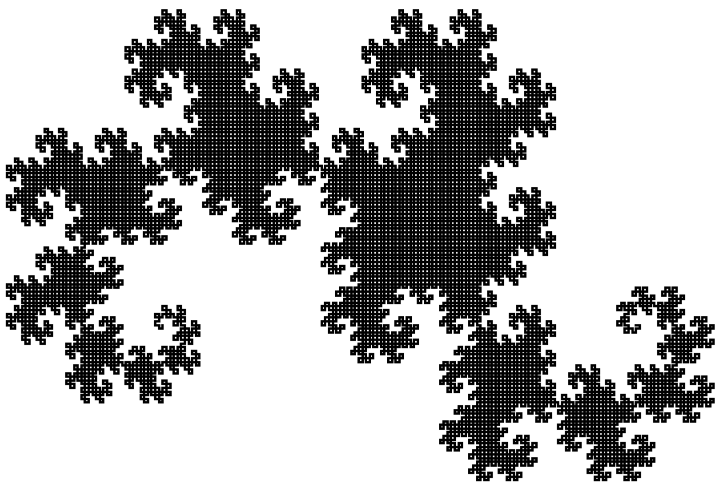
Blízkým příbuzným Lévyho křivky je tzv. *Heighwayův drak*. Jedná se o soběpodobnou rovinnou křivku, kterou poprvé sestrojil fyzik John E. Heighway z NASA. Název, který je narážkou na vzdálenou podobu křivky s plovoucím drakem, nepochází výjimečně od Mandelbrota, nýbrž od Heighwayova kolegy Williama G. Hartera. V časopise *Scientific American* popsal křivku roku 1967 Martin Gardner (1914 – 2010) ve svém sloupku Mathematical Games (knižní vydání [Gardner, 1989, s. 207]).

Gardner zmiňuje tři způsoby popisu křivky: číselné vyjádření pomocí binárních posloupností, skládání papíru, které původně použil Heighway, a rekurzívní geometrickou konstrukci.

Heighwayova dračí křivka je invariantní množinou systému transformací

$$S_1(z) = az, \quad S_2(z) = 1 - \bar{a}z, \tag{5.15}$$

kde $a = 1/2 + (1/2)i$. Heighwayova křivka má Hausdorffovu i topologickou dimenzi rovnou 2 (a není tudíž fraktálem ve smyslu původní Mandelbrotovy definice). Podmínka otevřené množiny je splněna, vezmeme-li za U množinu vnitřních bodů křivky [Edgar, 2008, s. 191].



OBR. 5.5: Heighwayův drak

Strukturou a vlastnostmi invariantních množin systému kontrakcí se zabýval Robert F. Williams na přelomu 60. a 70. let 20. století. Williams publikoval v době, kdy byl hostem Instituto Matematica Pura y Applicada v Rio de Janeiru, článek [Williams, 1971], který se dočkal významnějšího ohlasu až v souvislosti se studiem fraktálů a soběpodobných množin. Williams se zabýval systémem kontrakcí $S_1, \ldots, S_m$ v úplném metrickém prostoru a vlastnostmi uzávěru $\overline{F}$ množiny pevných bodů všech zobrazení

$S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_p}$, $1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq m$. Dokázal v podstatě, že existuje právě jedno kompaktní řešení rovnice (5.13) a má tvar $\overline{F}$.

Základem úvah o kontrakcích a jejich pevných bodech je Banachova věta, kterou Stefan Banach (1892 – 1945) dokázal roku 1920 [Veselý, 2009, s. 374].

Věta (Banach)**.** *Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a S kontrakce v (X, d). Pak existuje právě jeden bod $\xi \in X$, který je pevným bodem zobrazení S (tj. $S(\xi) = \xi$).*

Zvolíme-li libovolný bod $x_0 \in X$ a definujeme $x_n = S^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, pak posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská a konverguje k bodu ξ.

Rozsáhlou studii o soběpodobných množinách publikoval roku 1981 John E. Hutchinson, kterého inspirovaly Mandelbrotovy knihy o fraktálech. Pojednání [Hutchinson, 1981] se opírá o základní poznatky shrnuté v následující větě.

Věta. *Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a $S_i : (X, d) \to (X, d)$, $i = 1, \ldots, m$ konečný systém kontrakcí. Pak platí:*

1. *Existuje jediná uzavřená a omezená množina A , která je řešením rovnice (5.13).*
2. *Množina A je kompaktní a je uzávěrem množiny pevných bodů $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ zobrazení $S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_p}$, $1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq m$.*
3. *Pro libovolnou $F \subset X$ definujeme $\mathcal{S}(F) = \bigcup_{i=1}^n S_i(F)$, $\mathcal{S}^n(F) = \mathcal{S}(\mathcal{S}^{n-1}(F))$. Je-li F uzavřená a omezená, pak $\mathcal{S}^n(F) \to A$ pro $n \to \infty$ ve smyslu Haudorffovy metriky.*

Obecnější rámec pro studium soběpodobných množin zvolil Masajoši Hata. Hata [1985] definoval soběpodobnou množinu jako množinu $A \in \mathscr{K}(X)$, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$A = \bigcup_{i \in L} f_i(A), \tag{5.16}$$

kde $L = \{1, 2, \ldots, m\}$ nebo $L = \mathbb{N}$ a f_i jsou neexpanzívní zobrazení v (X, d) [2]. Hata věnoval pozornost topologické struktuře i metrickým vlastnostem soběpodobných množin.

Zabýval se mimo jiné otázkou, za jakých podmínek je soběpodobná množina lokálně souvislým kontinuem, tedy Jordanovou křivkou v (X, d). Zavádí pojem konečného řetězce spojujícího množiny $Q_1, Q_n \subset (X, d)$. Tak nazývá konečnou posloupnost $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$, pro která platí $Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset$ pro všechna $1 \leq i < n$. Nutnou a postačující podmínkou,

[2] Neexpanzívním zobrazením (Hata používá pojem weak contraction) se nazývá zobrazení $f : (X, d) \to (X, d)$, při kterém pro všechna $x, y \in (X, d)$, $x \neq y$ platí $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

aby invariantní množina konečného systému neexpanzívních zobrazení byla lokálně souvislým kontinuem, je, že pro libovolná $1 \leq i < j \leq m$ existuje posloupnost $\{r_1, \dots, r_n\} \subset$ $\subset \{1, 2, \dots, m\}$ taková, že $\{f_i(A), f_{r_1}(A), \dots, f_{r_n}(A), f_j(A)\}$ tvoří konečný řetězec.

5.5 Fraktální křivky a funkcionální rovnice

Jiný pohled na množiny jako je von Kochova křivka, Lévyho křivka apod. souvisí s jejich popisem pomocí funkcionálních rovnic. Jedním z matematiků, kteří se tímto problémem zabývali, je Walter Wunderlich (1910 – 1998).

Wunderlich patří k předním představitelům vídeňské geometrické školy. Jeho rodina měla kořeny částečně i v Čechách a Wunderlich mluvil plynně česky. Studoval matematiku na vídeňské univerzitě a deskriptivní geometrii na vídeňské technice, mezi jeho učitele patřili např. Furtwängler, Hahn, Kruppa a další.

Aritmetické vyjádření křivek Peana, Hilberta, Sierpińského, von Kocha apod. jej přivedlo k myšlence, že

> uvažované křivky lze úplně popsat jistými funkcionálními rovnicemi, které souvisejí s automorfními transformacemi těchto křivek. [Wunderlich, 1954]

Nechť Γ je souvislá, omezená a uzavřená množina v $\mathbb{R}^2$ a $F_1, \dots, F_r$, $r \geq 2$ systém „fundamentálních transformací", tj. zobrazení $F_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $k = 1, \dots, r$, které splňují následující podmínky.

1. $F_k(\Gamma)$, $k = 1, \dots, r$ jsou vlastní podmnožiny Γ a žádné dvě nemají společné vnitřní body;
2. pro každé $k = 1, \dots, r$ platí $d(F_k(p), F_k(q))/d(p, q) \leq \theta < 1$ pro všechna $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$ (F_k je tedy kontrakce v $\mathbb{R}^2$). Označíme-li $F_k^n(\Gamma) = F_k^n(F_k^{n-1}(\Gamma))$, pak posloupnost $\{F_k^n(\Gamma)\}$ konverguje k bodu $\xi_k \in \Gamma$, který je invariantním bodem transformace F_k.
3. Označíme-li $a = \xi_1$ a $b = \xi_m$, pak $a \neq b$ a $F_k(b) = F_{k+1}(a)$, $k = 1, \dots, r-1$.

Aby získal aritmetický popis křivky C, vyjadřuje Wunderlich každé $t \in [0, 1]$ pomocí r-adického rozvoje

$$\frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \dots \frac{a_k}{r^k} + \dots, \tag{5.17}$$

ve kterém každé a_k nabývá některé z hodnot $0, 1, \dots, r-1$. Každému $t \in [0, 1]$ přiřadíme bod

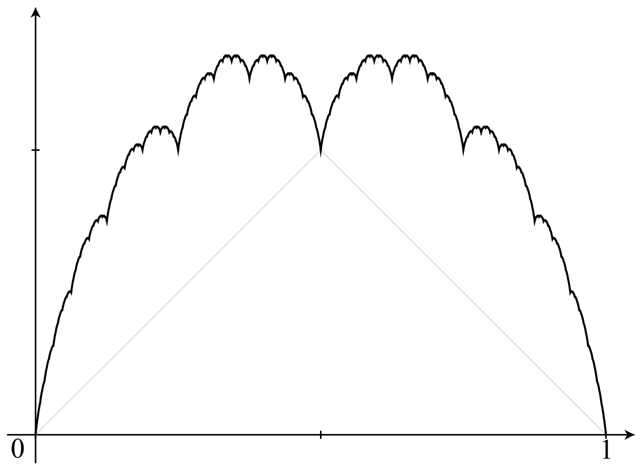
$$p = \lim_{n \to \infty} T_1 \circ T_2 \circ \dots T_n(\Gamma), \quad \text{kde } T_k = A_{a_k+1}, k = 1, \dots, n. \tag{5.18}$$

Prvním příkladem, který Wunderlich uvádí, je Takagiho křivka. Jedná se o graf funkce

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Psi(2^n x) \tag{5.19}$$

kde výraz $\Psi(x) = d(x, \mathbb{Z})$ (představující tzv. pilovitou funkci) znamená vzdálenost mezi číslem x a nejbližším celým číslem. Takagi [1903] popsal funkci (5.19) jako příklad spojité funkce, která v žádném bodě nemá konečnou derivaci.

Teidži Takagi (1875 – 1960) je nazýván otcem moderní japonské matematiky. Studoval na Tokijské císařské univerzitě, roku 1898 byl japonskou vládou vybrán ke studiu v zahraničí a strávil tři roky v Německu (převážně v Göttingen). Takagi se stal prvním japonským matematikem, jehož pověst se rozšířila v Evropě i v Americe. Jeho výsledky pomohly Artinovi formulovat obecný zákon reciprocity a řešit devátý Hilbertův problém.



OBR. 5.6: Aproximace grafu Takagiho funkce. Uvnitř oblouku je vidět jeden „zub" pilovité funkce Ψ.

Wunderlich volí jako f_1, f_2 afinní transformace, které bodu $p = [x, y]$ přiřazují bod $p' = [x', y']$ resp. $p'' = [x'', y'']$, kde

$$x' = \frac{1}{2}x, \qquad y' = \frac{1}{2}(x + y),$$
$$x'' = \frac{1}{2}(1 + x), \qquad y'' = \frac{1}{2}(1 - x + y).$$

Podmínky 1)-3) jsou splněny pro $\Gamma = [0, 1]^2$, $\theta = (1 + \sqrt{5})/4$ a $a = [0, 1]$, $b = [1, 0]$. Z parametrického vyjádření Takagiho křivky odvozuje Wunderlich funkcionální rovnice

$$y\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}[x + y(x)], \quad y(1 - x) = y(x). \tag{5.20}$$

Řešením těchto rovnic pro $x \in [0, 1]$ je funkce (5.19). Takagiho křivka má tečnu rovnoběžnou s osou y v každém bodě, který je prvkem husté podmnožiny intervalu $[0, 1]$ a který odpovídá číslu s ukončeným dyadickým rozvojem.

O křivkách a funkcích definovaných pomocí funkcionálních rovnic publikoval několik článků Georges de Rham (1903 – 1990). De Rham studoval na univerzitě v Lausanne, doktorát získal v Paříži pod vedením Lebesguea. Později působil na univerzitách v Lausanne a v Ženevě, zabýval se geometrií a topologií.

V článku [1957] hledal de Rham řešení následující úlohy: *Jsou dány transformace* $F_1, F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *Je třeba nalézt zobrazení* $M : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, *které vyhovuje rovnicím*

$$M\left(\frac{t}{2}\right) = F_1(M(t)), \quad M\left(\frac{1+t}{2}\right) = F_2(M(t)). \tag{5.21}$$

De Rham dokázal tuto větu:

Věta. *Jsou-li* F_1, F_2 *kontrakce,* ξ_1, ξ_2 *jejich pevné body a platí-li* $F_1(\xi_2) = F_2(\xi_1)$, *pak rovnice* (5.21) *mají jediné omezené řešení a toto řešení je spojité.*

Je-li M omezené řešení rovnic (5.21), pak obraz libovolné omezené množiny při zobrazení $F_{a_1} \circ F_{a_2} \circ \cdots \circ F_{a_n}$, kde a_i nabývá pro každé $i = 1, \ldots, n$ hodnoty 0 nebo 1, konverguje pro $n \to \infty$ k bodu $M(t)$. Tento bod tak lze vyjádřit jako

$$M(t) = \lim_{n\to\infty} (F_{a_1} \circ F_{a_2} \circ \cdots \circ F_{a_n})(P), \tag{5.22}$$

kde P je bod nezávislý na t.

Rovnice (5.21) vyžadují ještě podmínku týkající se pevných bodů zobrazení F_1, F_2. Je-li $M(t)$ řešení, $M(0)$ pevný bod F_1 a $M(1)$ pevný bod F_2, dostaneme

$$F_1(M(1)) = F_2(M(0)) = M\left(\frac{1}{2}\right). \tag{5.23}$$

Jako příklad uvádí de Rham lineární transformace

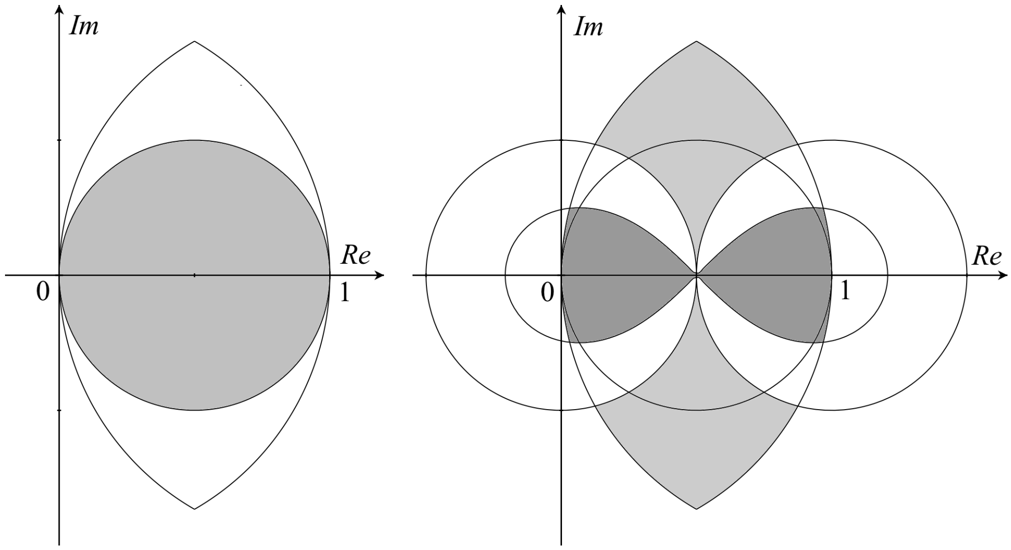
$$F_1(z) = az, \quad F_2(z) = a + (1-a)z \tag{5.24}$$

s pevnými body $\xi_1 = 0$ a $\xi_2 = 1$ a podmínkami $|a| < 1$, $|1-a| < 1$, které zaručují, že F_1 a F_2 jsou kontrakce. Pro $a = 1/2$ vychází $M(t) = t$. Mezi řešeními rovnic (5.21) se však vyskytuje i řada „podivných“ křivek, z nichž některé byly v této práci popsány. Je-li $a \neq 1/2$, pak v každém bodě $t \in [0,1]$ je derivace buď rovná nule nebo neexistuje. Je-li navíc a reálné, je M ryze monotonní singulární funkce. Je-li $\min\{|a|, |1-a|\} > 1/2$, je $M(t)$ spojitá funkce, která v žádném bodě není diferencovatelná. Např. hodnota $a = 1/2 + i/2$ vede na Lévyho křivku (obr. 5.4).

Jiným jednoduchým příkladem jsou transformace

$$F_1(z) = a\bar{z}, \quad F_2(z) = a + (1-a)\bar{z} \tag{5.25}$$

s $|a| < 1$, $|1-a| < 1$. Křivka definovaná rovnicemi (5.21) je obsažena v trojúhelníku T s vrcholy 0, 1, a (přesněji v 2^n trojúhelnících, které jsou obrazy T při transformacích $F_{a_1} \circ F_{a_2} \circ \cdots \circ F_{a_n}$. Hodnota $a = 1/2 + (\sqrt{3}/6)i$ odpovídá von Kochově křivce.



(a) (b)

OBR. 5.7: Řešení rovnic (5.21) pro různé hodnoty komplexního parametru a v případě transformací (5.25) [Hata, 1985]

Hata [1985] věnoval pozornost řešení rovnic (5.21) pro různé hodnoty komplexního parametru a v případě transformací (5.25). Podmínky $|a| < 1$, $|1-a| < 1$ vymezují v komplexní rovině oblast podobnou čočce (obr. 5.7 a). V případě $|a - 1/2| < 1/2$ (vnitřní body šedého kruhu vlevo) je křivka prostým obloukem s vnější plošnou mírou rovnou 0; ve všech ostatních bodech jde o křivku Peanova typu.

Hata rovněž dokázal, že funkce, která je řešením rovnic (5.21), je lipschitzovská s exponentem $\alpha = -\log\delta/\log 2$, kde $\delta = \max\{\mathrm{Lip}(F_1), \mathrm{Lip}(F_2)\}$. Symbol $\mathrm{Lip}(F_i)$, $i = 1, 2$, označuje Lipschitzovu konstantu zobrazení F_i,

$$\mathrm{Lip}(F_i) = \sup\Big\{\frac{d(F_i(x), F_i(y))}{d(x,y)}; x \neq y\Big\}.$$

Např. řešení odpovídající von Kochově křivce je lipschitzovské s exponentem $\log 3/\log 4$. V případě $|\alpha(1-\alpha)| < 1/4$ je řešením funkce s derivací rovnou 0 s. v (tmavě šedá oblast ohraničená lemniskátou $|\alpha(1-\alpha)| = 1/4$ na obr. 5.7 b), v případě $|\alpha(1-\alpha)| > 1/4$ derivace neexistuje s. v. Pro $|\alpha| > 1/2$ je $|1-\alpha| > 1/2$ nemá derivaci v žádném bodě.

5.6 Autoafinní křivky

Řadu fraktálů lze chápat jako invariantní množiny konečného systému kontrakcí, které jsou afinními transformacemi. Takové množiny sestávají z částí, jež sice nejsou přesnými kopiemi celku, ale vykazují přesto jistou podobnost s celkem.

Afinní transformací $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazýváme transformaci, složenou z lineárního zobrazení a posunutí

$$S(x) = T(x) + b, \tag{5.26}$$

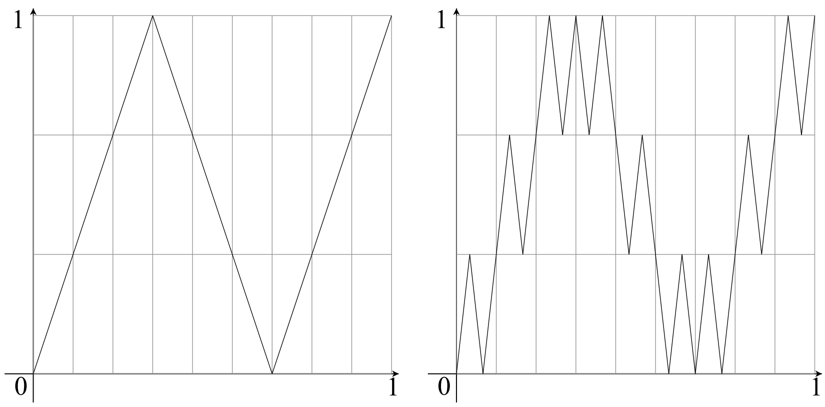
kde $T(x)$ je lineární transformace reprezentovaná maticí $n \times n$ a b je sloupcový vektor [Falconer, 2003, s. 139]. Je-li IFS tvořen afinními transformacemi, nazýváme jeho atraktor *autoafinní množinou.*

Rovinné křivky je někdy účelné popisovat v komplexní rovině; rovnice (5.26) pak má podobu

$$S(z) = \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma. \tag{5.27}$$

Mandelbrot [1982, s. 237] použil označení autoafinní (self-affine) pro souřadnicové funkce modelující dráhu Brownova pohybu, aby odlišil jejich charakter od soběpodobných funkcí. Rozsáhlé dvoudílné pojednání o vlastnostech autoafinních funkcí publikoval Norio Kôno ([1986], [1988]).

Kôno vycházel z Moorova článku [1900], v němž jsou popsány a zobrazeny autoafinní grafy souřadnicových funkcí Peanovy křivky.



OBR. 5.8: Konstrukce grafu souřadnicové funkce $y = y(t)$ Peanovy křivky [Moore, 1900]

Kôno definoval autoafinní funkci s koeficientem H vzhledem k základu r jako reálnou funkci definovanou v intervalu $[0, 1]$, která splňuje následující podmínky: existuje přirozené číslo $r > 1$ takové, že pro každé $t_k = kr^{-N}$, $k = 0, 1, \dots, r^N - 1$, $N \in \mathbb{N}$ a $0 \leq h < r^{-N}$

platí

$$f(t_{N,k}+h)-f(t_{N,k})=T_{N,k}r^{-NH}f(r^Nh), \tag{5.28}$$

kde $T_{N,k}=1$ nebo -1. Souřadnicová funkce Peanovy křivky $y=y(t)$ (obr. 5.8) je autoafinní s koeficientem $H=1/2$ a $r=9$.

Peano bez důkazu uvedl, že souřadnicové funkce „jeho“ křivky nemají konečnou derivaci v žádném bodě. Kôno dokázal, že autoafinní funkce s koeficientem $0<H<1$ není v žádném bodě lipschitzovská s exponentem $H'>H$. Hausdorffova dimenze grafů souřadnicových funkcí Peanovy křivky je rovna $3/2$.

Mírně obecnější definici autoafinní funkce podal Kônův krajan Teturo Kamae [1986]. Kamae původně nazýval funkce, které byly předmětem jeho studie, soběpodobnými; na Mandelbrotovu radu použil v konečné verzi označení autoafinní. Kamae charakterizoval autoafinní funkce jako funkce generované konečnými automaty.

McMullen [1984] studoval autoaffiní množinu, kterou nazval zobecněným Sierpińského kobercem. Nechť $m,n\in\mathbb{N}$, $1<m\le n$ a nechť

$$S_{ij}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n^{-1}&0\\0&m^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}j/n\\i/m\end{pmatrix} \tag{5.29}$$

je afinní transformace, která zobrazuje jednotkový čtverec $[0,1]^2$ na obdélník R_{ij}. Nechť Z je libovolná neprázdná podmnožina $\{0,\dots,m-1\}\times\{0,\dots,n-1\}$. Pak existuje jediná neprázdná kompaktní množina $M\subset[0,1]^2$, která je řešením rovnice

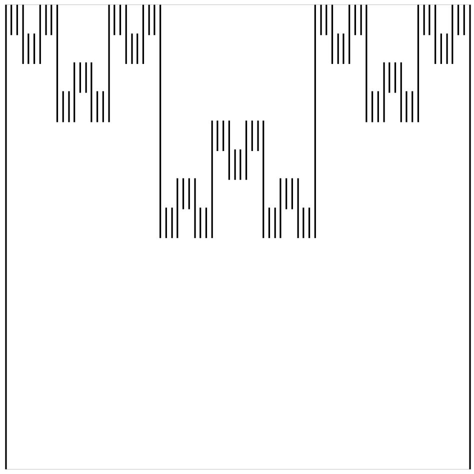
$$M=\bigcup_{(i,j)\in Z}S_{ij}(M). \tag{5.30}$$

Množina M se občas nazývá *McMullenův koberec*. V případě $m=n$ jsou transformace (5.29) podobnostmi. McMullen dokázal, že

$$\dim_H M=\log_m\left(\sum_{i=0}^{m-1}t_j^{\log_n m}\right), \tag{5.31}$$

kde t_j je počet hodnot i takových, že $(i,j)\in Z$.

Do této třídy patří podle McMullena v podstatě i tzv. *Hironakova křivka* (obr. 5.9), spojitá rovinná křivka tvořená zobecněným Sierpińského kobercem s $m=2$, $n=3$ a $Z=\{(0,0),(1,1),(2,0)\}$ a svislými spojnicemi. Podle (5.31) je dimenze Hironakovy křivky $\log_2(1+2^{\log_3 2})$.



OBR. 5.9: Aproximace Hironakovy křivky po pěti iteracích

Řada autorů se v následujících letech zabývala Hausdorffovou dimenzí autoafinních křivek v různých speciálních případech (např. [Falconer, 1988], [Lalley, 1992], [Allaart, 2007]). Ukazuje se však, že situace je o hodně složitější než v případě soběpodobných křivek a žádné přirozené zobecnění Moranova vzorce pro autoafinní množiny není známo [Falconer, 2003, s. 139].

5.7 Bolzanova funkce

Historicky první fraktální křivkou (a prvním fraktálem vůbec) je graf Bolzanovy funkce. Bernard Bolzano (1781 – 1848) ji popsal před rokem 1834 ve spise *Functionenlehre*, který však vyšel tiskem až dlouho po jeho smrti. V Bolzanově pozůstalosti objevil její popis plzeňský středoškolský profesor Martin Jašek (1879 – 1945) a svůj objev zveřejnil roku 1921 (viz např. Hykšová [2003, s. 176]).

Konstrukci Bolzanovy funkce začneme tak, že zvolíme body $A = [x_0, y_0]$, $B = [x_1, y_1]$, $x_1 > x_0$, $y_1 > y_0$, které budou koncovými body jejího grafu. Úsečka AB bude grafem lineární funkce f_1. Dále sestrojíme čtyři body, které označíme C, D, E a jejichž souřadnice budou po řadě dány vztahy

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \tfrac{3}{8}(x_1 - x_0), & y &= y_0 + \tfrac{5}{8}(y_1 - y_0), \\ x &= x_0 + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_0), & y &= y_0 + \tfrac{1}{2}(y_1 - y_0), \\ x &= x_0 + \tfrac{7}{8}(x_1 - x_0), & y &= y_0 + \tfrac{9}{8}(y_1 - y_0). \end{aligned} \tag{5.32}$$

Lomená čára $ACDEB$ bude grafem po částech lineární funkce f_2. Každou ze čtyř úseček AC, CD, DE, EB nahradíme lomenou čárou procházející body, které sestrojíme analogickým způsobem jako body C, D, E v případě úsečky AB, přičemž x_0, y_0 a x_1, y_1

ve vztazích (5.32) nahradíme souřadnicemi koncových bodů každé z těchto tří úseček. Dostaneme lomenou čáru, která je grafem funkce f_3.

Bolzanova funkce je limitou spojitých funkcí $f_1, f_2, f_3, \dots$. Bolzano [1930, s. 66 a n.] ji sestrojil jako příklad funkce, která je spojitá v intervalu $[a, b]$, avšak není monotonní v žádném podintervalu. Ve druhé části svého spisu Bolzano [1930, s. 98–99] dokázal, že mezi každými dvěma body, ve kterých f nemá derivaci, leží třetí bod, ve kterém derivace rovněž neexistuje.

Vlastnostmi Bolzanovy funkce se zabýval Karel Rychlík (1885 – 1968), který opravil Bolzanův důkaz spojitosti (Bolzano si ještě neuvědomoval význam stejnoměrné konvergence) a dokázal, že v žádném bodě intervalu $(0, 1)$ nemá konečnou ani nekonečnou derivaci, v bodě $x_0 = 0$ nemá konečnou derivaci zprava a v bodě $x_1 = 1$ nemá konečnou ani nekonečnou derivaci zleva. Vojtěch Jarník (1897 – 1970) se zabýval i existencí jednostranných derivací a vyšetřoval rovněž Diniho derivace Bolzanovy funkce (další podrobnosti a odkazy uvádí Hykšová [2003, s. 178]).

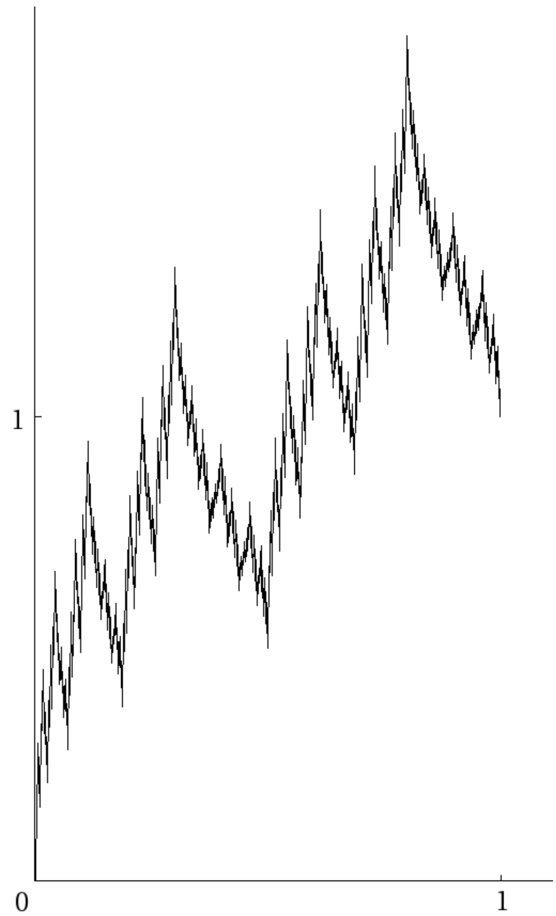
Gerhard Kowalewski (1876 – 1950) popsal [1923] modifikovanou verzi konstrukce Bolzanovy funkce. Rozpůlíme danou úsečku PQ bodem M, rozdělíme každou polovinu na čtyři stejné díly pomocí bodů P_1, P_2, P_3 resp. Q_1, Q_2, Q_3 a sestrojíme body P_3' resp. Q_3', které leží na stejné svislé přímce jako P_3 resp. Q_3, přičemž úsečky PP_3' a MQ_3' mají dvakrát větší směrnici než PQ. Nahrazení úsečky PQ lomenou čárou $PP_3'MQ_3'Q$ je „základní operací“, která se opakuje v dalších krocích konstrukce (obr. 5.10; srv. také obr. 2 na s. 6). Kowalewski se také zabýval spojitostí a diferencovatelostí Bolzanovy funkce.

Wunderlich [1954] popisuje graf Bolzano–Kowalewského křivky pomocí čtyř afinních transformací

$$\begin{aligned}
\varphi_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{3}{8} & 0\\ 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, & \varphi_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-\frac{1}{8} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},\\
\varphi_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{3}{8} & 0\\ 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, & \varphi_4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-\frac{1}{8} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{5.33}$$

s $\Gamma = [0, 1] \times [0, 2]$ a $\theta = \frac{3}{4}$. Ačkoliv třetí Wunderlichova podmínka v tomto případě splněna není, konverguje řetězec přilehlých obdélníků $A_{k_1} \circ A_{k_2} \circ \dots A_{k_n}(\Gamma)$ ke křivce, která je grafem Bolzanovy funkce. Z (5.33) Wunderlich odvozuje funkcionální rovnice popisující Bolzanovu křivku.

$$\begin{gathered}
y\left(\tfrac{3}{8}x\right) = \tfrac{3}{4}y(x), \quad y\left(1 - \tfrac{x}{8}\right) = 1 + \tfrac{1}{4}y(x),\\
y\left(\tfrac{1+x}{2}\right) = \tfrac{1}{2} + y\left(\tfrac{x}{2}\right).
\end{gathered} \tag{5.34}$$



OBR. 5.10: Aproximace Bolzano–Kowalewského křivky s $P = [0, 0]$ a $Q = [1, 1]$

Literatura

ALLAART, P.; KAWAMURA, K. 2007. Dimensions of coordinate functions of space filling curves. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2007, vol. 335, s. 1161–1175.

BARNSLEY, M. 1988. *Fractals Everywhere*. San Diego : Academic Press, 1988. ISBN 0-12-079062-9.

BARNSLEY, M. F.; DEMKO, S. 1985. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de la théorie des courbes planes. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1985, vol. 399, s. 243–275.

BIRSAN, T.; TIBA, D. 2006. One hundred years since the introduction of the set distance by Dimitrie Pompeiu. In Ceragioli, F., Dontchev, A., Futura, H., Marti, K., and Pandolfi, L., editors, *System Modeling and Optimization*, vol. 199 of *IFIP International Federation for Information Processing*, s. 35–39. Boston : Springer, 2006.

BOLZANO, B. 1930. *Bernard Bolzano's Schriften. Band 1. Functionenlehre*. Praha : Královská česká společnost nauk v Praze, 1930.

CESÀRO, E. 1905. Remarques sur la courbe de von Koch. *Atti delle Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli.* 1905, t. 12 (15), s. 1–12. (= *Opere scelte, tomo 2: Geometria, analisi, fisica matematica.* Roma : Edizioni Cremonese, 1964, s. 464–479).

DE RHAM, G. 1957. Sur quelques courbes definies par des equations fonctionnelles. *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico del Torino.* 1957, t. 16, s. 101–113. (Angl. překlad EDGAR, G. (ed.). *Classics on Fractals*, s. 284–297).

EDGAR, G. 1993. *Classics on Fractals.* Addison–Wesley, 1993. ISBN 0-201-58701-7.

EDGAR, G. 2008. *Measure, Topology and Fractal Geometry.* 2nd edition. New York : Springer, 2008. ISBN 978-0-387-74748-4.

FALCONER, K. 1988. The Hausdorff Dimension of Self–affine Fractals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1988, vol. 103, s. 339–350.

FALCONER, K. 2003. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications.* 2nd edition. Chichester : Wiley, 2003. ISBN 0-470-84862-6.

GARDNER, M. 1989. *Mathematical Magic Show*, 2nd edition. Washington : The Mathematical Association of America, 1989. ISBN 0-88385.

HATA, M. 1985. On the structure of self-similar sets. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics.* 1985, vol. 2, s. 381–414.

HUTCHINSON, J. E. 1981. Fractals and Self Similarity. *Indiana University Mathematics Journal.* 1981, vol. 30, no. 5, s. 713–747.

HYKŠOVÁ, M. 2003. *Karel Rychlík (1885 – 1968).* Praha : Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-259-7.

KAMAE, T. 1986. A Characterization of Self-Affine Functions. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics.* 1986, vol. 3, s. 271–280.

KNOPP, K. 1917. Einheitliche Erzeugung und Darstellung der Kurven von Peano, Osgood und v. Koch. *Archiv der Mathematik und Physik.* 1917, Bd. 26, s. 103–115.

KÔNO, N. 1986. On Self-Affine Functions. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics.* 1986, vol. 3, s. 259–269.

KÔNO, N. 1988. On Self-Affine Functions II. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics.* vol. 5, s. 441–454.

KOWALEWSKI, G. 1923. Über Bolzanos nichtdifferenzierbare stetige Funktion. *Acta mathematica.* 1923, vol. 44, s. 315–319.

LALLEY, S.; GATZOURAS, D. 1992. Hausdorff and Box Dimensions of Certain Self–affine Fractals. *Indiana University Mathematical Journal.* 1992, vol. 41, s. 533–568.

LEBESGUE, H. 1904. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Paris : Gauthier-Villars, 1904.

LÉVY, P. 1938. Les courbes planes ou gauches et les surfaces composée de parties semblables au tout. *Journal de l'École Polytechnique*. 1938, s. 227–247, 249–291. (Angl. překlad EDGAR, G. (ed.), *Classics on Fractals*, s. 180–239).

MANDELBROT, B. 1975. *Les objets fractals: forme, hasard et dimension.* Paris : Flammarion, 1975. ISBN 2-08-210647-0.

MANDELBROT, B. 1982. *The Fractal Geometry of Nature.* New York : W. H. Freedman and Co., 1982. 460 s. ISBN 0-7167-1186-9.

MC MULLEN, C. 1984. The Hausdorff Dimension of General Sierpiński Carpet. *Nagoya Mathematical Journal.* 1984, vol. 96, s. 1–9.

MOORE, E. H. 1900. On Certain Crinkly Curves. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1900, vol. 1, no. 1, s. 72–90.

MORAN, P. A. P. 1946. Additive Functions of Intervals and Hausdorff Measure. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1946, vol. 42, s. 15–23. (Přetištěno v EDGAR, G. (ed.), *Classics on Fractals*, s. 240–257).

POMPEIU, D. 1905. Sur la continuite des fonctions de variables complexes. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série. 1905, t. 7, s. 265–315.

SAGAN, H. 1994. *Space-Filling Curves.* New York : Springer-Verlag, 1994. ISBN 0-387-94265-3.

TAKAGI, T. 1903. A Simple Example of the Continuous Function Without Derivative. *Proceedings of the Physico–Mathematical Society of Japan.* 1903, vol. 1, s. 176–177.

TAYLOR, J. 1992. A measure theory definition of fractals. In *Measure Theory, Oberwolfach, 1990 (Proceedings of the Conference). Rendiconti del Circolo Matemàtico di Palermo. Serie II, Tomo 28*, s. 371–378.

TRICOT, C. 1995. *Curves and Fractal Dimension.* New York : Springer, 1995. ISBN 0-387-94095-2.

VESELÝ, J. 2009. *Základy matematické analýzy.* Praha : Matfyzpress, 2009. ISBN 978-80-7378-063-0.

VON KOCH, H. 1904. Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik.* Bd. 1, s. 681–702. (Angl. překlad EDGAR, G. (ed.), *Classics on Fractals*, s. 24–45).

VON KOCH, H. 1906. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de la théorie des courbes planes. *Acta mathematica.* 1906, vol. 30, s. 145–174.

WILLIAMS, R. F. 1971. Composition of contractions. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática.* 1971, t. 2, n. 2, s. 55–59.

WUNDERLICH, W. 1954. Irregular Curves and Functional Equations. *Ganita.* 1954, vol. 5, s. 215–230.

Závěr

V této práci je popsána řada „podivných“ křivek. Jejich role při ujasňování představ o křivkách byla důležitá a proto je jim věnován poměrně velký prostor. Označení „podivné“, „patologické“ jim dáváme spíše ze zvyku a ze setrvačnosti; názory na to, co je „normální“, „přirozené“, „intuitivní“ se v průběhu vývoje měnily.

Fraktální křivky jsou většinou konstruovány iterativním procesem, při němž je na vhodně zvolenou počáteční množinu opakovaně aplikována relativně jednoduchá základní operace. První kroky konstrukce jsme schopni znázornit, ale podobu křivky samé si představit nedokážeme.

V souvislosti s rozšiřováním souboru patologických křivek na konci 19. století byla kladena otázka, jak a zda vůbec je vymezena třída „názorných“ křivek, tj. křivek, u kterých lze z jejich geometrického znázornění usuzovat na jejich vlastnosti. Ve druhé kapitole jsme zmínili názor du Bois-Reymonda, podle kterého alespoň v geometrii či v mechanice pojem křivky předpokládá existenci tečen. Uvedenou otázku si kladl i Köpcke [1], podle nějž „názornost“ křivky je spojena s představou křivky jako dráhy pohybujícího se bodu, kterou Köpcke chápe ve fyzikálním smyslu a požaduje její hladkost.

Ani hladkost křivky nebyla vždy něčím, co by automaticky zaručovalo intuitivní přijatelnost. Antické dělení křivek na geometrické a mechanické vylučovalo z geometrie křivky vytvářené mechanicky. V první kapitole jsme viděli, že k určení délky oblouku hladké křivky musíme stejně uplatnit limitní proces, neboť jedinou křivkou, jejíž délku jsme schopni přímo změřit, je úsečka nebo lomená čára. Mandelbrot [2] dokonce vyslovil názor, že pro nepřipravenou mysl je přijatelnější představa křivky, která v žádném bodě nemá tečnu, než křivky hladké.

[1] KÖPCKE, A. Über Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Functionen. *Mathematische Annalen.* 1887, Bd. 29, Heft 1, s. 123–140.

[2] MANDELBROT, B. *The Fractal Geometry of Nature.* New York : W. H. Freedman and Co., 1982. ISBN 0-7167-1186-9.

Zájem o oblast „podivných“ křivek vzrostl v posledních desetiletích i díky novým možnostem, které při jejich zobrazování nabízejí nové technologie. Aniž bychom chtěli přeceňovat význam počítačů při vizualizaci fraktálních křivek, můžeme připustit, že výpočetní technika zpřístupnila tuto oblast matematiky a umožňuje experimentování, které přinejmenším z pedagogického hlediska má smysl. Počítače vedle toho umožňují analyzovat některé vlastnosti křivek, získaných empirickou cestou.

Mohlo by se zdát, že s pomocí počítače se dokážeme přiblížit až k limitní podobě konstruované křivky. Aproximace grafu Takagiho funkce nebo von Kochovy křivky se navíc po nějakých osmi iteracích vizuálne již příliš neodlišuje od aproximace po padesáti iteracích. Náš názor zůstává nicméně limitován rozlišením monitoru či tiskárny a možnostmi našeho zraku.

Takagiho funkce je příkladem spojité nediferencovatelné funkce, jejíž konstrukce je geometricky poměrně názorná. Přesto částečný součet řady (5.19) již pro nepříliš velké n podle Hahna[3] uniká intuici, která nás zcela zrazuje, pokud jde o výsledný obrazec. Pouze logická analýza je schopna sledovat konstrukci až k jejímu konečnému výsledku.

Při konstrukci Takagiho funkce se uplatňuje pilovitá funkce $f_n(x) = \Psi(2^n x)/2^n$, $x \in [0,1]$, kde $\Psi(x) = d(x, \mathbb{Z})$ je vzdálenost mezi x a nejbližším celým číslem (viz s. 145). Pro dostatečně velké n se čára $y = f_n(x)$ nedá vizuálně odlišit od úsečky $\{[x,y]; 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$, obě čáry však mají zcela odlišné vlastnosti.

Přesto nelze vizuální přístup ke křivkám odmítat; tvar je jejich důležitou charakteristikou. Těžko si např. představit, že Jakob Bernoulli by věnoval logaritmické spirále svá nadšená slova,[4] kdyby ji znal jen na základě vzorců a vztahů.

Počítačové znázornění fraktálních křivek je přitažlivé především svou snadností a možnostmi. Počítače do jisté míry rehabilitovaly roli obrázků v analýze. Spolu s procesem emancipace analýzy na geometrii se obrázky z učebnic vytrácely. V učebnicích analýzy vydaných v 19. století je skutečně obtížné najít ilustrace, které by přiblížily uváděná tvrzení, vzorce a jejich odvozování. Po jistou dobu převládalo přesvědčení, že pouze formální symbolický přístup patří do matematiky. Edgar[5] v poznámce doprovázející překlad von Kochova pojednání o křivce bez tečen nicméně zdůrazňuje, že pro matematické myšlení jsou důležité obě stránky: formálně symbolická i vizuálně geometrická. Svědčí o tom i nedávno vydaná kniha *Curious Curves*[6] autorů Darsta, Palagallové a Price, kterou lze zájemcům o tuto oblast matematiky doporučit.

[3] HAHN, H. Die Krisis der Anschauung. In *Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften.* Leipzig und Wien : Franz Deuticke, 1933, s. 41–64.

[4] BERNOULLI, J. *Jacobi Bernoulli Basileensis Opera.* Genevæ: Sumptibus haeredum Cramer & fratrum Philibert, 1744, s. 502.

[5] EDGAR, G. *Classics on Fractals.* Addison–Wesley, 1993, s. 24. ISBN 0-201-58701-7.

[6] DARST, R. et al. *Curious Curves.* World Scientific, 2010.

Častěji užívané symboly

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbb{R}^n$	n-rozměrný eukleidovský prostor
ρ, ϑ	polární souřadnice bodu v rovině
$[a, b]$	uzavřený interval s koncovými body a a b
(a, b)	otevřený interval s koncovými body a a b
$\overline{z}$	číslo komplexně sdružené se z
$B(x, r)$	otevřená koule se středem x a s poloměrem r
$K(x, r)$	uzavřená koule se středem x a s poloměrem r
AB	úsečka nebo délka úsečky s koncovými body A a B
$\overline{AB}$	oblouk nebo délka oblouku s koncovými body A a B
(X, d)	metrický prostor (s metrikou d)
$\overline{A}$	uzávěr množiny A
$\operatorname{Int} A$	vnitřek množiny A
$\operatorname{diam}(A)$	průměr množiny A
$d(x, y)$	vzdálenost bodů x a y
$d(x, A)$	vzdálenost bodu x od množiny A
$d(A, B)$	vzdálenost množin A a B
$L(A)$	lineární míra množiny A
$D(a, A)$	hustota množiny A v bodě a
$\dim_H A$	Hausdorffova dimenze množiny A
$\dim_B A$	Minkowského–Bouligandova dimenze množiny A

Seznam obrázků

Rejstřík