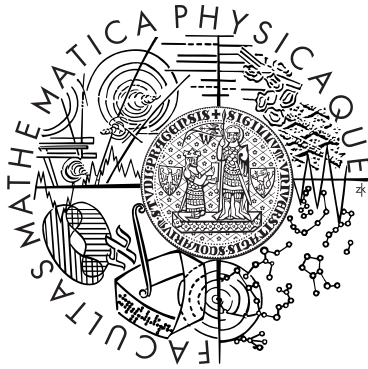


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Petr Švaříček

Apsidální pohyb zákrytových dvojhvězd

Astronomický ústav Univerzity Karlovy
Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Marek Wolf, CSc.**
Studijní program: **Fyzika**
Studijní obor: **Astronomie a astrofyzika**

Chtěl bych poděkovat především docentu Marku Wolfovi za vedení a investovaný čas. Díky patří rovněž docentu Martinu Šolcovi za jeho pomoc s problematikou časových škál.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne

Petr Švaříček

Obsah

1	Úvod	5
1.1	Motivace	5
1.2	Cíle diplomové práce	5
1.3	Studium apsidálního pohybu jako metoda určování dráhových elementů a vnitřní stavby	6
1.3.1	Výhody studia	6
1.3.2	Nevýhody studia	7
2	Teoretický popis	8
2.1	Apsidální pohyb	8
2.2	Konstanta vnitřní stavby	11
3	Analýza časů minim za účelem odvození dráhových elementů	14
3.1	Základní přístupy řešení	14
3.2	„Ephemeris-curve“ problém dle Lacyho	14
4	CO Lacertae	19
5	O–C diagram	23
6	Analýza apsidálního pohybu	25
6.1	Korekce časů měření	25
6.2	Analýza apsidálního pohybu	27
7	Výsledky	34
8	Závěr	41
	Použitá literatura	44
	Dodatek	48
	Legendery polynomy	48
	Výpočet chyby konstanty vnitřní stavby k_2	48

Název práce: *Apsidální pohyb zákrytových dvojhvězd*

Autor: *Petr Švaříček*

Katedra (ústav): *Astronomický ústav Univerzity Karlovy*

Vedoucí diplomové práce: *doc. RNDr. Marek Wolf, CSc., Astronomický ústav Univerzity Karlovy*

E-mail vedoucího: *wolf@cesnet.cz*

Abstrakt: *Poukazujeme na důležitost studia zákrytových dvojhvězd pro určování dráhových parametrů a vnitřní stavby z naměřených časů minim. Uvádíme stručný přehled teorie apsidálního pohybu. Představujeme rovněž metodu pro určování orbitálních elementů vyvinutou Lacym v roce 1992. Pro řešení transcendentních rovnic do libovolné přesnosti jsou použity iterativní numerické metody. K získání optimálních hodnot odvozených parametrů a jejich středních chyb používáme Levenbergovu-Marquardtovu metodu. Tato metoda je použita k analýze apsidálního pohybu CO Lac. Orbitální parametry, stejně jako konstanta vnitřní stavby, jsou odvozeny a zpřesněny pomocí nových fotoelektrických měření časů minim. Konstanta vnitřní stavby k_2 , získaná z pozorování, je porovnána s teoretickými modely vývoje hvězd dle Clareta & Giméneze (1998) respektive dle Clareta (2004).*

Klíčová slova: *apsidální pohyb - CO Lacertae - konstanta vnitřní stavby*

Title: *Apsidal motion of eclipsing binary stars*

Author: *Petr Švaříček*

Department: *Astronomical Institute of Charles University*

Supervisor: *doc. RNDr. Marek Wolf, CSc., Astronomical Institute of Charles University*

Supervisor's e-mail address: *wolf@cesnet.cz*

Abstract: *The importance of eclipsing binaries study for determination of orbital parameters and internal stellar structure due to observed times of minima is presented. The summary of apsidal motion theory is introduced. It is also presented the method for determination of apsidal motion parameters developed by Lacy in 1992. Iterative numerical methods are used to solve the transcendental equations to arbitrarily high precision. We use a Levenberg-Marquardt method to obtain simultaneously the optimum values of fitted parameters and their mean errors. As an example, this method is used to analyze the apsidal motion of CO Lac. The orbital parameters, as well as the internal structure constant, are determined and improved from the recent photoelectric observed times of minima. The internal structure constant k_2 obtained from observations is compared with the stars evolution models computed by Claret & Giménez (1998) and by Claret (2004) respectively.*

Keywords: *apsidal motion - CO Lacertae - internal structure constant*

1 Úvod

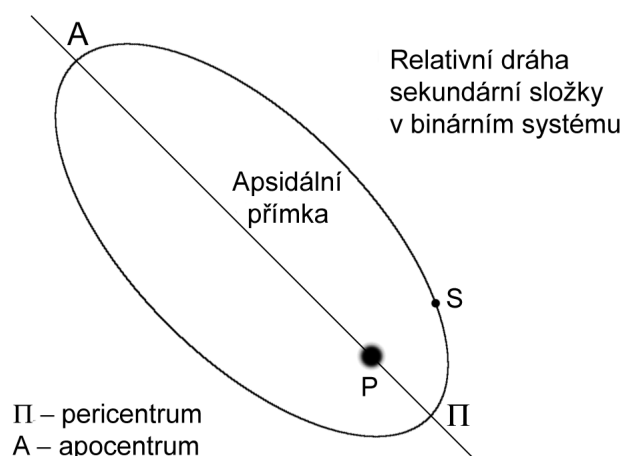
1.1 Motivace

Historie studia apsidálního pohybu na základě pozorování časů zákrytů v zákrytových dvojhvězdách je dlouhá a zajímavá. Již Dunér (1892) při studiu Y Cyg zjistil dva různé typy minim s významně rozdílnými periodami. Zcela správně přisoudil tento efekt rotaci apsidální přímky, tedy stáčení pomyslné spojnice apocentra a pericentra relativní dráhy sekundární složky systému (viz obrázek 1). Z počátku byl za důvod apsidálního pohybu považován gravitační vliv třetího tělesa. Russell (1928) byl první, kdo rozpoznal, že příčinou je rotační a slapová deformace složek dvojhvězdy a použil dostupná pozorování Y Cyg k určení vnitřního rozložení hmoty. Russellova teorie byla později rozpracována a vylepšena Bowlingem (1938) a Sternem (1939). Ve stejné době se Levi-Civita (1937) zabýval relativistickým příspěvkem k rotaci apsid. Z výše uvedeného je zřejmé, že rozložení hmoty ve hvězdě je tedy s tímto jevem úzce spjato, což nás přivádí k hlavnímu významu studia excentrických zákrytových dvojhvězd vykazujících apsidální pohyb. Tyto objekty patří k tradičním zdrojům našich znalostí o vnitřní struktuře hvězd. Slouží jako test modelů hvězd a jejich vývoje jakož i obecné teorie relativity. Počáteční srovnání mezi vnitřní stavbou odvozenou z pozorování a z teorie vykazovala značné nesrovnalosti. Tento problém byl vyřešen teprve poměrně nedávno zlepšením teorie vnitřní stavby a vývoje a novými tabulkami opacit.

1.2 Cíle diplomové práce

Hlavní cíle mé diplomové práce vystihují následující tři tématické okruhy:

1. Vysvětlit příčiny stáčení apsidální přímky u excentrických zákrytových dvojhvězd.
2. V literatuře vyhledat minima, především pak nová fotoelektrická, a pomocí nich určit dráhové elementy resp. zpřesnit jejich hodnoty, které byly odvozeny v dřívějších pracích.
3. Klíčovým úkolem je rovněž určit konstantu vnitřní stavby a porovnat ji se současnými stelárními vývojovými modely za účelem verifikace konzistence evoluční teorie hvězdných niter.



Obrázek 1: Zavedení pojmu apsidální přímky jako myšlené spojnice periastra a apoastra.

1.3 Studium apsidálního pohybu jako metoda určování dráhových elementů a vnitřní stavby

Efekt stáčení apsidální přímky představuje vedle asterozeismologie další nástroj astrofyziky umožňující nahlédnout do nitra hvězd. Díky tomu zaujímají excentrické zákrytové systémy, u kterých je tento efekt snadno měřitelný, jisté vyjímecné postavení. Je ovšem potřeba si uvědomit, že použití tohoto efektu pro analýzu má své určité limity, a to především fyzikální. O výhodách a nevýhodách studia apsidálního pohybu pojednávají následující dva odstavce.

1.3.1 Výhody studia

- Z pozorovatelského úhlu pohledu je velmi příznivé, že studium vyžaduje jednoduché metody analýzy, konkrétně tedy měření časů největších zákrytů. Samotné měření je možné provádět i s malým teleskopem vybaveným dostatečně kvalitním fotoelektrickým zařízením, obvykle CCD čipem.
- Měřitelné veličiny se v poměrně jednoduché matematické reprezentaci tohoto efektu přímo vztahují k orbitálním elementům a vnitřní stavbě.
- Díky efektu stáčení apsidální přímky jsme schopni získat přímé informace o průběhu hustoty na rozdíl od asterozeismologie, která tak činí rychlostí zvuku.

- Neméně důležitým faktem je, že tento efekt slouží jako test samotné gravitační teorie, jejímž jazykem je popsán.

1.3.2 Nevýhody studia

- Obecně je třeba dlouhé pozorovací řady, neboť typické periody apsidálního pohybu U (viz rovnice (33)) jsou v řádu stovek až tisíců let. Naštěstí existují systémy, jejichž periody se pohybují v hodnotách desítek let. U těchto objektů naše měření pokrývají mnohdy celou periodu.
- Snaha určit individuální konstanty vnitřní stavby nebude bohužel korunována úspěchem. Apsidální pohyb je totiž určován rozložením hmoty obou složek systému, tudíž lze určit pouze vážený průměr těchto. V případě, že by hmotnosti obou hvězd byly „stejně“, pak lze říci, že příslušná konstanta charakterizuje jednotlivé složky.
- Získané informace o struktuře mají globální charakter, tzn., že výsledný parametr vnitřní stavby se vztahuje k celému hvězdnému nitru a ne pouze k jeho části, což je ovšem rovněž předmětem zájmu astrofyziky.

2 Teoretický popis

2.1 Apsidální pohyb

Lze ukázat (Kopal 1959), že potenciální energii binárního systému lze vyjádřit jako

$$W = \frac{Gm_1m_2}{r} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=2}^4 k_{ij} \frac{m_{3-i}}{m_i} \left(\frac{a_i}{r} \right)^{2j+1} - \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i^2 k_{ij}}{2\pi G \varrho_{mi}} \left(\frac{a_i}{r} \right)^2 P_2(\cos \Theta_i) \right\}, \quad (1)$$

kde G je gravitační konstanta, m_1 a m_2 jsou hmotnosti složek, r je průvodič jejich relativní dráhy, a_i je poloměr i -té složky, k_{ij} je konstanta vnitřní stavby j -tého řádu i -té složky, ω_i je úhlová rotační rychlost příslušné složky, ϱ_{mi} označuje průměrnou hustotu, Θ_i je úhel mezi r a rotační osou odpovídající hvězdy a P_2 je Legendův polynom stupně 2 (viz Dodatek). Člen s dvojitou sumací v rovnici (1)

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=2}^4 k_{ij} \frac{m_{3-i}}{m_i} \left(\frac{a_i}{r} \right)^{2j+1} \quad (2)$$

lze odvodit ze vzájemné slapové deformace obou komponent v aproximaci 1.řádu. Naproti tomu člen

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i^2 k_{ij}}{2\pi G \varrho_{mi}} \left(\frac{a_i}{r} \right)^2 P_2(\cos \Theta_i) \quad (3)$$

je aproximací popisu rotační deformace pro malé úhlové rychlosti ω_i . Pro další didaktický výklad je vhodné přepsat si rovnici (1) do tvaru

$$W = \frac{Gm_1m_2}{r} \left\{ \frac{1}{r} + S \right\}, \quad (4)$$

kde S označuje poruchu potenciální energie od newtonovské formy. Pokud by platilo, že $S = 0$, relativní dráha dvojhvězdy by byla keplerovská elipsa s konstantními elementy. V opačném případě lze sice dráhu formálně také popsat elipsou, nicméně dráhové elementy již nebudou konstanty, ale funkce času. Z následující Lagrangeovy rovnice je patrné, že právě porucha od sférické symetrie S je zodpovědná za stáčení apsidální přímky.

$$\frac{1}{An} \frac{d\varpi}{dt} = \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial S}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial S}{\partial e}, \quad (5)$$

kde $\varpi = \Omega + \omega$ je délka periastra (Ω - délka výstupního uzlu, ω - argument periastra), A je hlavní poloosa, e excentricita, i sklon dráhy vůči referenční rovině a n označuje střední denní pohyb definovaný jako $\frac{2\pi}{P_S}$ (význam siderické periody P_S viz kapitola 3.2). Pro samotnou změnu délky výstupního uzlu s časem platí

$$\frac{1}{An} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial S}{\partial i}. \quad (6)$$

Vztahy (1) - (5) reprezentují pouze klasický příspěvek k posunu periastra. Při apsidálním pohybu, zvláště pro těsné kompaktní binární systémy, hraje svou důležitost rovněž obecná relativita resp. fyzikální skutečnosti z ní plynoucí. Levi-Civita (1937) ukázal, že rovnice původně odvozené pro apsidální pohyb testovací částice v poli hmotného bodu mají svou platnost i v případě, uvažujeme-li dvojhvězdný systém s podobnými hmotnostmi složek a vyjadřujeme-li je pro relativní dráhu. Obecné podmínky, pro které je výše napsaná pravda, jsou splněny s požadovanou přesností v případě oddělených systémů. Zatímco příčinou klasického apsidálního pohybu je nehomogenní rozložení hmoty ve hvězdě, relativistický příspěvek (viz rovnice (14) a (15)) je zde nahlížen jako čistě obecně relativistický efekt pro hmotné body nad rámcem klasické fyziky. Lze tedy říci, že oba příspěvky, tedy klasický a relativistický, jsou nezávislé a aditivně separabilní. Pro celkovou rychlost posunu periastra, kterou lze z pozorování získat, platí tedy vztah

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_N + \dot{\omega}_{GR}. \quad (7)$$

Pro klasický příspěvek platí

$$\dot{\omega}_N = \frac{360^\circ}{P_A} \left\{ k_{2,1} \left(15qg(e) + (1+q) \left(\frac{\omega_1}{\omega_K} \right)^2 f(e) \right) r_1^5 + k_{2,2} \left(\frac{15g(e)}{q} + \left(1 + \frac{1}{q} \right) \left(\frac{\omega_2}{\omega_K} \right)^2 f(e) \right) r_2^5 \right\}, \quad (8)$$

kde $k_{2,1}$ a $k_{2,2}$ jsou konstanty vnitřní stavby jednotlivých složek (viz kapitola 2.2), P_A značí anomalistickou periodu (význam anomalistické periody P_A viz kapitola 3.2) a q je hmotový poměr obou složek $\frac{m_2}{m_1}$ a r_1 a r_2 jsou poloměry jednotlivých hvězd v jednotkách hlavní poloosy relativní dráhy. Dále platí

$$c_i = r_i^5 \left[15 \frac{m_{3-i}}{m_i} g(e) + \left(\frac{m_{3-i}}{m_i} \right) \left(\frac{\omega_i}{\omega_K} \right)^2 f(e) \right], \quad (9)$$

$$f(e) = \frac{1}{(1 - e^2)^2}, \quad (10)$$

$$g(e) = \frac{(e^4 + 12e^2 + 8)f(e)^{2,5}}{8}, \quad (11)$$

$$\frac{\omega_i}{\omega_K} = \sqrt{\frac{1 + e}{(1 - e)^3}}, \quad (12)$$

$$\omega_K = \frac{2\pi}{P_S}. \quad (13)$$

U excentrických systému lze očekávat tendence synchronizace rotační a oběžné rychlosti z důvodu proměnnosti slapových sil v závislosti na aktuální vzdálenosti obou složek. Při průchodu periastronem nabývá slapová síla svého maxima. Tyto skutečnosti zachycuje právě vztah (12) vycházející ze statistické analýzy. Ukazuje se býti nejlepší možnou aproximací v případě, kdy nám chybí údaje o úhlové rychlosti složek. Pro obecně relativistický člen plynoucí z první post-Newtonovské aproximace platí (Levi-Civita 1937, Robertson 1938)

$$\dot{\omega}_{\text{GR}} = \frac{6\pi G}{c^2} \frac{m_1 + m_2}{AP_A(1 - e^2)} \quad (14)$$

resp. (Giménez 1985)

$$\dot{\omega}_{\text{GR}} = 5,45 \times 10^{-4} \frac{1}{1 - e^2} \left(\frac{m_1 + m_2}{P_A} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (15)$$

Vztah (14) lze přepsat pomocí poloviční amplitudy křivky radiálních rychlostí $K = K_1 + K_2$ vyjádřené v km s^{-1} . Nejen, že dojde ke zpřesnění díky vymizení gravitační konstanty G , ale takto upravený vztah je přímo použitelný pro pozorovatelská data. Platí tedy

$$\dot{\omega}_{\text{GR}} = 1,2 \times 10^{-8} K^2 \sin^{-2} i. \quad (16)$$

Vzorec (14) je vyjádřen v jednotkách soustavy SI. Druhý, vztah (15), je

upraven pomocí 3. Keplerova zákona a posun periastra vychází ve stupních za anomalistickou periodu, stejně tak z rovnice (16).

2.2 Konstanta vnitřní stavby

Velikost příspěvků od slapové resp. rotační deformace v klasickém potenciálu závisí mimo jiné na numerické hodnotě konstanty vnitřní stavby k_{ij} definované (Russell 1928) pro i -tou složku a řád j jako

$$k_j = \frac{1}{2} \frac{j + 1 - \eta_j(1)}{j + \eta_j(1)}, \quad (17)$$

kde $\eta_j(1)$ označuje povrchovou hodnotu funkce normovaného poloměru hvězdy a ($a = 0$ ve středu, $a = 1$ na povrchu), která je řešením Radauovy diferenciální rovnice 1.řádu

$$a \frac{d\eta_j}{da} + 6 \frac{\rho(a)}{\bar{\rho}(a)} (\eta_j + 1) + \eta_j (\eta_j - 1) = j(j + 1) \quad (18)$$

s okrajovou podmínkou ve středu hvězdy

$$\eta_j(0) = j - 2. \quad (19)$$

Pro funkci $\eta_j(a)$ dále platí následující vztah

$$\eta_j(a) = \frac{d \ln \varepsilon(a)}{d \ln a}, \quad (20)$$

kde $\varepsilon(a)$ popisuje odchylky povrchu ekvipotenciál na daném poloměru od sférické symetrie. Hodnota konstanty k_j závisí na vnitřní struktuře prostřednictvím členu $\frac{\rho(a)}{\bar{\rho}(a)}$ v rovnici (18), tedy poměru aktuální hustoty ρ na poloměru a průměrné hustoty $\bar{\rho}$ uvnitř sféry o poloměru a . Pakliže $\frac{\rho(a)}{\bar{\rho}(a)} = 0$ pro $a > 0$, potom příslušné partikulární řešení rovnic (18) a (19) má tvar

$$\eta_j(a) = j + 1, \quad (21)$$

což nám v kombinaci se vztahem (17) určuje hodnotu $k_j = 0$ pro všechny hodnoty parametru j . V takovém případě mohou být příslušné komponenty systému považovány z dynamického hlediska za hmotné body. Naopak pro zcela homogenní hvězdu (tedy $\frac{\rho(a)}{\bar{\rho}(a)} = 1$ pro $a < 1$) dostáváme z (18) a (19)

řešení

$$\eta_j(a) = j - 2, \quad (22)$$

což vede ze vztahu (17) na

$$k_j = \frac{3}{4(j-1)}. \quad (23)$$

Pro praktické účely můžeme tedy předpokládat, že platí následující relace

$$0 < k_j \ll \frac{3}{4(j-1)} \quad \text{pro } j = 2, 3, 4, \dots \quad (24)$$

Ve většině případů je ale velmi dobře splněn předpoklad vysoké centrální koncentrovanosti hvězd, tudíž lze přesné řešení (18) a (19) aproximovat (Kopal 1953) integrálním výrazem

$$k_j = \frac{3(j+2)}{2j+1} \int_0^1 \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right) a^{2j} da. \quad (25)$$

Pokud navíc $\bar{\rho}$ aproximujeme výrazem

$$\bar{\rho} = \frac{3m}{4\pi a^3}, \quad (26)$$

který přesně platí pro model hmotného bodu, dostáváme pro hodnotu konstanty vnitřní stavby relaci

$$k_j = \frac{4\pi(j+2)}{(2j+1)m} \int_0^1 \rho a^{2j+3} da. \quad (27)$$

Z tohoto vztahu je patrné, že znalost jedné hodnoty či konečného souboru hodnot k_j nám neumožní určit průběh hustoty ve hvězdě $\rho(a)$ jednoznačně. Nicméně, již znalost pouhé jediné hodnoty nám dovolí rozhodnout, zda jsou naše modely hvězdného vývoje konzistentní s pozorováním. Z následující rovnice je evidentní, že ze znalosti orbitálních elementů, jež jsou řešením „*ephemeris-curve*“ problému (viz kapitola 3.2), nelze určit individuální konstanty vnitřní stavby, ale jen vážený průměr. Pro průměrnou hodnotu konstanty k_2 , kterou lze získat z pozorování, platí následující vztah

$$\bar{k}_{2,\text{obs}} = \frac{k_{2,1}c_1 + k_{2,2}c_2}{c_1 + c_2} = \frac{1}{c_1 + c_2} \frac{P_A}{U} = \frac{1}{c_1 + c_2} \frac{\dot{\omega}_N}{360^\circ}, \quad (28)$$

kde U značí celkovou periodu stáčení apsidální přímky. Význam koeficientů c_1 a c_2 a jejich parametrů je demonstrován rovnicemi (9) – (13). Třetí rovnost zleva platí za předpokladu koplanarity ekvatoreální roviny s rovinou oběhu a absence slapového zpoždění (Kopal 1978).

Při konstrukci vývojových diagramů konstanty vnitřní stavby jsme vycházeli z modelů hvězdného vývoje, které, pro různá počáteční chemická složení a počáteční hmotnosti, propočítali Claret & Giménez (1998) se zvláštním důrazem na modelování těsných binárních systémů. Využívali jsme pokročilé modely zahrnující i ztrátu hmoty během vývoje a konvektivní přestřelování. Při srovnávání teoretických hodnot k_2 s observačními pro několik systémů podobných CO Lacertae jsme použili novější model Clareta (2004), lišící se od předešlých především opacitami a koeficientem ztráty hmoty, ovšem pouze pro jedno dostupné počáteční chemické složení.

Modely byly propočteny pro cca 24 počátečních hmotností s krokem po $0,1 \log M_\odot$ v intervalu relevantním pro naše účely. Pro hmotnosti, které jsme použili pro naše výpočty, bylo třeba interpolovat příslušné křivky vývoje k_2 . Vzhledem k malému rozdílu s modelovanými hodnotami hmot jsme zvolili jednoduchou lineární interpolaci.

3 Analýza časů minim za účelem odvození dráhových elementů

3.1 Základní přístupy řešení

Dle deKorta (1956) budeme dále problém analýzy časů minim za účelem odvození dráhových elementů nazývat „*ephemeris-curve*“ problém. Tradičně se k této věci přistupovalo použitím konečných mocninných řad v excentricitě resp. rozvoje střední anomálie podle sinu pravé anomálie jako aproximace transcendentních rovnic, které jsou během výpočtu používány. Dugan (1931) ukázal, že je postačující řada do druhé mocniny v excentricitě, zvláště pro systémy s malou výstředností, za předpokladu, že na dráhu je nahlíženo přesně z boku (tedy, že sklon relativní dráhy $i = 90^\circ$). Todoran (1972) zobecnil tento přístup a doplnil řadu o členy s třetí mocninou excentricity. O několik let později Giménez & García-Pelayo (1983), dále zmiňováni jako GG–P, rozšířili tuto řadu až do páté mocniny v excentricitě. Konečně Giménez & Bastero (1995) revidovali rovnice z předchozí práce a rozšířili příslušné výrazy o člen s šestou mocninou výstřednosti.

Jinou možností je optimalizovat parametry systému pomocí přímého řešení Keplerovy rovnice. Tato metoda, kterou navrhl Claud H. Sandberg Lacy (1992), nepoužívá aproximace při řešení používaných rovnic. Rovnice je možné pomocí iterativních numerických metod řešit s libovolnou přesností.

3.2 „Ephemeris-curve“ problém dle Lacyho

Tato metoda je založena na předpokladu, že dráhu sekundární složky lze aproximovat elipsou, jejíž hlavní poloosa (apsidální přímka) se stáčí v rovině elipsy. Pro argument periastra ω v čase t do lineárního řádu v E platí vztah

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}E, \quad (29)$$

kde ω_0 je argument periastra v námi zvoleném referenčním čase t_0 a $\dot{\omega}$ je úhlová rychlost stáčení apsidální přímky. Epoque E je čas uplynulý od t_0 v jednotkách anomalistické periody P_A . Pro epochu E tedy platí následující vztah

$$E = \frac{t - t_0}{P_A}. \quad (30)$$

V případě apsidálního pohybu definujeme dvě různé periody, siderickou P_S

a anomalistickou P_A , mezi nimiž platí vztah

$$P_A = P_S \left(1 + \frac{\dot{\omega}}{360^\circ} \right), \quad (31)$$

kde siderická perioda P_S je doba mezi dvěma následujícími průchody určitým bodem na dráze vzhledem ke hvězdám, zatímco anomalistická perioda P_A je doba mezi dvěma následujícími průchody periastrum. Z výše uvedeného je patrné, že v případě stáčení periastra, je vždy anomalistická perioda delší než siderická. $\dot{\omega}$ značí celkovou rychlost posunu periastra v jednotkách stupňů za anomalistickou periodu. Pro teoretický čas zákrytu C lze psát lineární vztah

$$C = P_S E + t_0, \quad (32)$$

kde t_0 je námi zvolený referenční čas vybraného primárního zákrytu (základní minimum). Pro celkovou periodu apsidálního U platí

$$U = P_A \left(\frac{360^\circ}{\dot{\omega}} \right). \quad (33)$$

Během této doby nastane

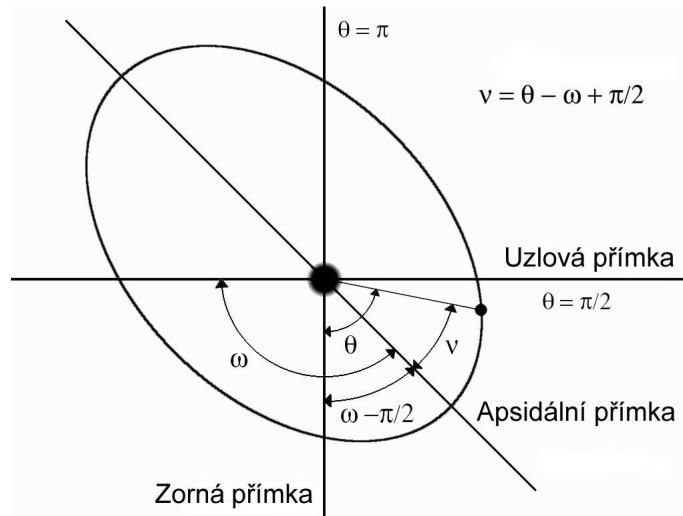
$$n = \frac{U}{P_A} \quad (34)$$

primárních zákrytů a $n - 1$ průchodů periastrum. V každém čase t má periastrum argument ω . Pravou anomálii sekundáru budeme značit ν . Pro další postup je výhodné zavést si pomocný úhel θ tak, že platí

$$\nu = \theta - \omega + \frac{\pi}{2}, \quad (35)$$

což je patrné i z obrázku 2.

Okamžik největšího zákrytu nastává, pokud je vzdálenost středů (viz rovnice (36)) složek dvojhvězdy minimální. V případě sklonu relativní dráhy $i = 90^\circ$, nastává minimum při konjunkci a úhel θ pro primární respektive sekundární zákryty nabývá hodnot $\theta = 0$ respektive $\theta = \pi$ radiánů. Při sklonu $i \neq 90^\circ$, není okamžik konjunkce shodný s okamžikem největšího zákrytu a minima nastávají v blízkosti výše zmíněných hodnot úhlu, což je jasně demonstrováno na obrázku 3.

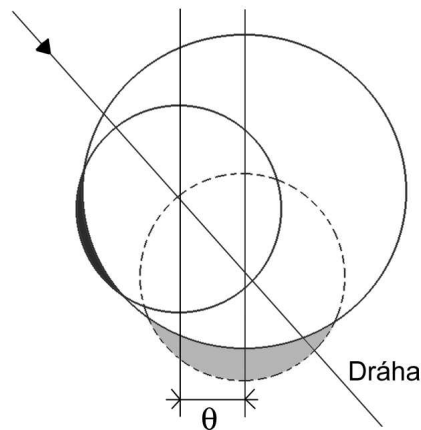


Obrázek 2: Význam pomocného úhlu θ .

Pro vzdálenost středů δ platí vztah, který je jedním z klíčových v Lacyho metodě

$$\delta = \frac{(1 - e^2)\sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2 \theta}}{1 - e \sin(\theta - \omega)}, \quad (36)$$

kde i je sklon dráhy, e její excentricita a ω argument periastra. Hlavní poloosa je zde brána jako jednotka délky.



Obrázek 3: Malá čerchovaná kružnice reprezentuje pozici sekundáru vůči primáru (velká plná kružnice) při konjunkci, zatímco malá plná kružnice pozici při největším zákrytu pro sklon dráhy různý od 90° .

Základním problémem, který je třeba nyní vyřešit, je získat sadu šesti dráhových parametrů $(e, P_A, \omega_0, \dot{\omega}, t_0, i)$, určit časy zákrytů a jejich epochu. Ze znalosti odhadu ω pomocí rovnic (29), (30) a (32) a následně úhlu θ , který získáme minimalizací (36), lze na základě rovnice (35) určit pravou anomálii sekundáru ν a následně excentrickou anomálii \mathbb{E} dle následujícího vztahu

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\mathbb{E}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg}\left(\frac{\nu}{2}\right). \quad (37)$$

Fundamentálním vztahem Lacyho metody je Keplerova rovnice

$$M = n(t - t_0) = \frac{2\pi}{P_S} \Delta t = \mathbb{E} - e \sin \mathbb{E}, \quad (38)$$

kde n je střední denní pohyb a t_0 je čas průchodu periastrum. Při řešení Keplerovy rovnice známe střední anomálii M a počítáme excentrickou anomálii \mathbb{E} . V tomto případě ovšem postupujeme opačně. Ze znalosti \mathbb{E} spočteme M respektive časový interval Δt od posledního průchodu periastrum v obvyklém keplerovském významu. Určíme-li T_0 (viz dále), čas průchodu periastrum předcházející základnímu minimu v t_0 , lze spočítat celočíselný počet průchodů pericentrem m od času T_0 , což lze vyjádřit jako

$$m = \left[\frac{C - T_0}{P_A} \right], \quad (39)$$

kde hranaté závorky označují celou část. Konečným vztahem pro předpověď času minima je

$$T = T_0 + mP_A + \Delta t. \quad (40)$$

Chceme-li určit čas T_0 , je třeba spočítat hodnotu úhlu θ_0 v čase t_0 (když $\omega = \omega_0$) minimalizací (36) a dále určit ν_0 , \mathbb{E}_0 , M_0 a Δt_0 z rovnic (35) - (38). Potom tedy platí rovnice

$$T_0 = t_0 - \Delta t_0. \quad (41)$$

Pro určité hodnoty argumentu periastra vychází v průběhu této metody pravá anomálie ν respektive Δt menší než nula. Tato zdánlivá patologie je pouze důsledkem aktuální geometrie systému. Tento fakt lze interpretovat tak, že sekundár ještě nedosáhl periastra. Avšak Δt v obvyklém keplerovském smyslu vztahujeme k nejbližšímu předcházejícímu průchodu periastrum, což

zohledníme přičtením anomalistické periody P_A k hodnotě Δt .

Nyní je třeba si uvědomit, že čas získaný z rovnice (40) je pouze první odhad vycházející z hodnoty spočtené na základě hrubého odhadu času zákrytu C z rovnice (32). Je nutné dále iterovat, dokud rozdíl mezi dvěma následujícími iteracemi nebude menší než námi zvolená mez. Použili jsme podmínku konvergence 10^{-8} dne. Dále postupujeme stejně jako při jakémkoliv jiném nelineárním problému řešeném metodou nejmenších čtverců (zvolili jsme Levenbergovu-Marquardtovu minimalizační metodu v programu Mathematica 5.0). Oproti GG-P metodě má tento postup jednu výraznou výhodu. Umožňuje totiž simultánně konvergovat libovolný počet parametrů včetně excentricity, což u GG-P nebylo možné. Jako každá podobná metoda ovšem vyžaduje počáteční odhady parametrů, především při závěrečných výpočtech, kdy minimalizační metoda prochází N rozměrný fázový prostor. Ty je však možné získat z fotometrické či spektroskopické analýzy.

4 CO Lacertae

Tento zákrytový systém byl objeven jako proměnná hvězda fotograficky Zonnem (1933). Uitterdijk (1934) navrhl, že hvězda vykazuje apsidální pohyb s periodou kolem 40 let. Zonn (1950) poprvé odvodil periodu apsidálního pohybu na 35 let s excentricitou $e = 0,028$. O plných 17 let později slečna Semeniuková (1967) při své fotometrické studii našla periodu apsidálního pohybu 42,3 let. Spektroskopické orbitální elementy (především m_1 , m_2) byly odvozeny Smakem (1968). Fotometrické elementy byly revidovány Mezzetti et al. (1980). Je třeba zmínit rovněž analýzu světelných křivek, kterou provedli Wilson & Woodward (1983), a kteří odvodili celou řadu parametrů (především r_1 , r_2). V neposlední řadě Mossakovskaya & Khaliullin (1987) spočetli periodu apsidálního pohybu na 44,5 let a rovněž diskutovali přítomnost třetího tělesa. Poslední mně známá práce pochází od Wolfa (1994). CO Lacertae je zákrytová proměnná typu Algol, což znamená, že mimo zákryty je světelná křivka prakticky plochá.

Tabulka 1: Historie určení parametrů CO Lacertae

e	P_S [d]	U [yr]	i [°]	m_1 [M_\odot]	m_2 [M_\odot]	r_1 [A]	r_2 [A]	Zdroj
—	0,771106	—	—	—	—	—	—	Zonn (1933)
0,028	—	35	—	—	—	0,245	0,245	Zonn (1950)
0,027	1,5422075	42,3	85,5	—	—	0,255	0,216	Semeniuk (1967)
—	—	—	—	4,5	3,7	—	—	Smak (1967)
0,025	—	—	—	—	—	—	—	Mezzetti et al. (1980)
0,0322	—	—	85,29	m_1	$0,82m_1$	0,2362	0,2321	Wilson, Woodward (1983)
0,027	—	44,5	87,8	3,13	2,75	0,2510	0,2111	Mossakovskaya, Khaliullin (1987)
0,0298	1,54220717	43,36	—	—	—	—	—	Wolf (1994)

Jedním z důvodem, proč jsme si ke studiu zvolili právě tento systém, je poměrně krátká perioda apsidálního pohybu, která, jak již bylo zmíněno výše, činí přibližně 40 let. V současné době máme k dispozici pokrytí prakticky celé periody kvalitními fotoelektrickými daty. Vizualní měření a rovněž starší data, především pak první Zonnova měření z fotografických desek a data z přelomu století, vykazují poměrně značný rozptyl. Přesto i tato data, patřičně ováhována, byla vzata v úvahu při naší analýze. Ačkoliv byl systém CO Lacertae objeven až v roce 1933, podařilo se na starých fotografických deskách, kde byla mimoděk tato proměnná zachycena, dohledat příslušná měření minim zpětně až do roku 1892. I tato data byla s patřičnou vahou, definovanou jako převrácená hodnota kvadrátu absolutní

chyby normovaná součtem kvadrátů převrácených hodnot absolutních chyb jednotlivých měření, začleněna do analýzy především za účelem konsolidace periody. V následující tabulce 2 jsou uvedeny základní informace.

Tabulka 2: Základní informace o CO Lacertae

Parametr	Hodnota	Zdroj
$m_1 [M_{\odot}]$	3,13(30)	Mossakovskaya, Khaliullin (1987)
$m_2 [M_{\odot}]$	2,75(30)	Mossakovskaya, Khaliullin (1987)
$r_1 [A]$	0,2432(27)	Mezzetti at al. (1980) Wilson, Woodward (1983)
$r_2 [A]$	0,2192(56)	Mezzetti at al. (1980) Wilson, Woodward (1983)
$A [AU]$	0,052808(7)	Smak (1967)
$R_1 [R_{\odot}]$	2,76(3)	Mezzetti at al. (1980) Smak (1967) Wilson, Woodward (1983)
$R_2 [R_{\odot}]$	2,49(6)	Mezzetti at al. (1980) Smak (1967) Wilson, Woodward (1983)
$T_1 [K]$	11640(40)	Mezzetti et al. (1980) Wilson, Woodward (1983)
$T_2 [K]$	11190(30)	Mezzetti et al. (1980) Wilson, Woodward (1983)
$i [^{\circ}]$	85,35(31)	Mezzetti at al. (1980) Semeniuk (1967) Wilson, Woodward (1983)

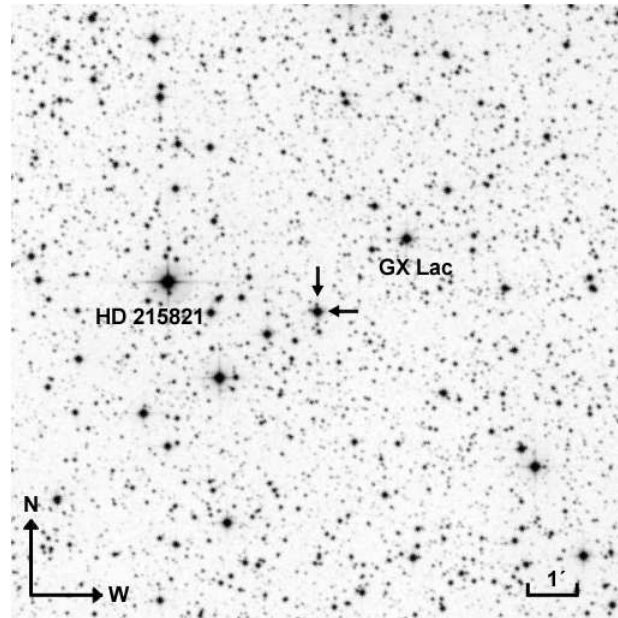
Tabulka 3: Základní informace o CO Lacertae

Rektascenze (ICRS 2000,0)	22 ^h 48 ^m 30,002 ^s
Deklinace (ICRS 2000,0)	56°49'31,645''
Spektrální typ	B8,5V + B9,5V
Vizuální hvězdná velikost [V mag]	10,28

Pro přepočet $A [\text{km}] \rightarrow A [\text{AU}]$, $r \rightarrow R [R_{\odot}]$ a další dílčí výpočty jsme použili hodnoty následujících odvozených jednotek a konstant uvedených v tabulce 4.

Tabulka 4: Použité konstanty

$1 \text{ AU} [\text{m}]$	$1,49597870691 \times 10^{11}$	
$R_{\odot} [\text{m}]$	$6,95835 \times 10^8$	
$M_{\odot} [\text{kg}]$	$1,988435(27) \times 10^{30}$	Gundlach & Merkowitz (2000)
$G [\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}]$	$6,674215(92) \times 10^{-11}$	Gundlach & Merkowitz (2000)



Obrázek 4: CO Lacertae spolu s blízkým hvězdným polem

Hvězdy spektrálního typu B, ke kterým se řadí i námi pozorovaný systém, se vyznačují optickými spektry, v nichž dominují silné čáry vodíku a neutrálního helia. Na rozdíl od typu O chybí čáry He II, přítomny jsou naopak čáry lehčích ionizovaných prvků jako C II, O II, N II atd. Pro objekty na hlavní posloupnosti, tedy i složek CO Lacertae, jsou hmotnosti v rozsahu 2,2 až 15 M_{\odot} , poloměry 2,1 až 6 R_{\odot} a efektivní teploty v mezích 9400 až 30000 K.

V tabulce 1 je možné si všimnout, že existují dvě různé dvojice hodnot pro hmotnosti primáru a sekundáru. Hmotnosti, které ve své práci uvádí Smak

(1967), jsou výsledkem spektroskopické analýzy. Vycházejí tedy z měření radiálních rychlostí obou složek respektive hodnot K-rychlostí (amplitud křivek radiálních rychlostí). Zatímco hodnoty, které prezentují Mossakovskaya a Khaliullin (1987), vyplývají ze semiempirické metody popsané Khaliullinem (1985). Rozhodli jsme se vzít v úvahu pro naše výpočty hodnoty druhých jmenovaných autorů a to z následujících důvodů.

Domníváme se, že Smakem odvozené hodnoty K-rychlostí nejsou zcela správné a chyby (1 – 2 %) jsou značně podhodnoceny. Data, ze kterých Smak vycházel, vykazují poměrně velký rozptyl. Rovněž technické prostředky použité při získávání spekter (fotografické desky) a nízký počet použitých spektrogramů (pouze 5) nás utvrzují v tom, že skutečné střední hodnoty a jejich chyby se liší od hodnot publikovaných, které jsou pouze výsledkem matematického fitu. Přístup Khaliullina byl odlišný a hmotnosti byly odvozeny z dostupných fotometrických dat. Hodnoty vycházejí z empirického vztahu „*hmota* – *svítivost*“ (Popper 1980; Smith 1983). Takto určené hmotnosti dobře korespondují i s výsledky danými rovněž empirickým polynomiálním vztahem „*hmota* – *teplota*“ z práce Harmance (1988). Hlavní bernou mincí byly ovšem vývojové modely Giméneze a Clareta (1998) respektive Clareta (2004). Z těch vyplývá, že pro Smakovy hmotnosti by složky CO Lacertae byly raného spektrálního typu B vzhledem k o mnoho stovek kelvinů vyšší povrchové teplotě než udává tabulka 3. Rovněž luminozitní třída primáru, kterou Smak určil jako IV, se zdá být vzhledem k velkým neurčitostem nepravděpodobná a v souladu s prací Mezzettiho et al. (1980) považujeme obě složky za málo vyvinuté hvězdy hlavní posloupnosti.

5 O–C diagram

Tzv. O–C diagram (z anglického *observed – computed* ; naměřené – teoretické) je graf hodnot např. časů minim či maxim, maxim radiálních rychlostí apod. v závislosti na juliánském datu, epoše či letopočtu. Jde o klasický nástroj pro studium oběžné periody v zákrytových dvojhvězdách, jakož i periody fyzikálních proměnných hvězd. Pro výpočet teoretických hodnot obvykle začínáme s lineární efemeridou, v našem případě dle rovnice (32). Na základě funkční závislosti výsledného O–C diagramu lze analyzovat přesnost našeho odhadu či případné neperiodické respektive periodické změny periody způsobené jevy jako light-time efekt (dále jen LITE) či námi studovaný apsidální pohyb.

Fyzikální příčina LITE, tedy efektu rozdílné dráhy světla, který byl teoreticky popsán již na konci 19. století, je přítomnost dalšího tělesa v „binárním“ systému. Oběžná perioda zůstává stejná, pozorovaná perioda se ale mění podle toho, zda se dvojhvězda při oběhu kolem společného těžiště s další složkou od nás vzdaluje nebo se k nám přibližuje. V tomto případě se v O–C diagramu primární i sekundární minima chovají stejně, tzn. leží na jedné křivce.

V případě apsidálního pohybu je situace jiná a minima leží na různých sinusoidálních křivkách (*the ephemeris curve* – efemeridová křivka) s opačnou fází. Je tedy velmi snadné odlišit jednotlivé příčiny periodických změn periody. Oba jevy mohou být samozřejmě kombinovány, jak například diskutovali Mossakovskaya & Khaliullin (1987) v případě CO Lacertae.

Z podstaty jevu stáčení apsidální přímky je evidentní, že sekundární minima neleží přesně ve fázi 0.5, ale dochází k jistému posunu. Rozdíl mezi časy obou zákrytů, $t_2 - t_1$, se zanedbáním vyšších mocnin excentricity, lze vyjádřit jako (Tsesevich 1971)

$$t_2 - t_1 \cong \frac{P_S}{2} + \frac{P_S e}{\pi} \left(\frac{1}{\sin^2 i} + 1 \right) \cos(\omega_0 + \dot{\omega} E). \quad (42)$$

Pro analytickou efemeridovou, tedy O–C, křivku lze odvodit následující vztah do druhého řádu excentricity. Pro primární respektive sekundární minima platí (Tsesevich 1971)

$$\begin{aligned} (O - C)_{p,s} = \text{konst.} \mp \frac{P_S e}{\pi} \left(\frac{1}{\sin^2 i} + 1 \right) \cos(\omega_0 + \dot{\omega} E) + \\ + \frac{3}{4} \frac{P_S e^2}{2\pi} \left(1 + \frac{4}{3} \cotg^2 i + \frac{2}{3} \cotg^2 i \frac{1}{\sin^2 i} \right) \sin 2(\omega_0 + \dot{\omega} E). \end{aligned} \quad (43)$$

Bývá zvykem určovat základní minimum jako tzv. střední, tak, aby horizontální osa O–C diagramu splývala s nulou. Takové minimum tedy nemusí být reálně změřené. Není samozřejmě žádnou chybou, označíme-li za základní minimum jakékoliv kvalitní měření primárního zákrytu. Důsledek toho bude pouze určitý vertikální posun celé dvojité sinusoidy. Tento posun lze jednoduše odhadnout respektive spočítat jako amplitudu efemeridové křivky pro primární minima v místě s epochou $E = 0$ za předpokladu, že střední hodnota odvozeného základního minima leží přesně na křivce. Chyba, které se tímto dopustíme není větší než chyba určení základního minima (tedy 0,00004 dne v našem případě). Další chyba tohoto posunutí samozřejmě souvisí s chybami orbitálních elementů, které figurují v definici analytické O–C funkce. Přesto lze říci, že výsledný O–C diagram bude kvalitativně i kvantitativně v pořádku.

6 Analýza apsidálního pohybu

6.1 Korekce časů měření

Existují dva základní systémy definice časové škály. První skupinu tvoří časy, založené na rotaci Země. Ty mají jednu značnou nevýhodu a tou je jejich nerovnoměrné plynutí, což je dáno variacemi a dalšími nepředvídatelnými komponentami rotace planety. Je tedy nezbytné rotaci neustále sledovat, což se nyní děje především pomocí VLBI (very long baseline interferometry). Do této skupiny patří např. GMST (greenwich mean sidereal time) či světové časy UT (universal time). Do skupiny druhé náleží časy založené na tzv. SI „atomové“ sekundě. Ta je definována jako 9 192 631 770 period záření emitovaného při přechodu mezi dvěma hyperjemnými hladinami základního stavu atomu Cesia 133 na povrchu geoidu. Je to například dále zmiňovaný TAI (international atomic time). Takto definované časy jsou rovnoměrně plynoucí. Současné moderní atomové hodiny vykazují odchylky od rovnoměrného plynutí okolo 1 sekundy za stovky tisíc až milion let.

Pro občanské účely je užíván tzv. univerzální koordinovaný čas UTC. Je to hybridní čas mezi dvěma výše popsanými systémy. Základní jednotkou je sice SI sekunda, ale je vztahen k času UT1 tak, aby byla splněna podmínka $|\text{UTC} - \text{UT1}| < 0,9 \text{ s}$. V opačném případě se tento problém řeší přidáním či odebráním tzv. přestupná sekundy k UTC.

V roce 1972 byl zaveden mezinárodní atomový čas TAI, který patří mezi časy založené na SI sekundě. Je výsledkem analýzy BIMB (Bureau International des Poids et Mesures) dat o atomových standardech v mnoha zemích od roku 1956. TAI může být tedy extrapolován zpět do epochy 1956 - 1971. Současný trend vykazuje zpoždění UTC za TAI. Přesto se naneštěstí většinou i pro astronomické účely stále používá čas UTC, což je značně nekorektní. Vzhledem k tomu, že současný rozdíl $\Delta T = \text{TAI} - \text{UTC}$ činí již 33 sekund, vnáší se tím do měření zbytečné nepřesnosti, zvláště pak při měření časů minim v zákrytových binárních systémech, která jsou pro naši analýzu určující.

O pět let později byl na valném shromáždění IAU ve francouzském Grenoblu zadefinován čas TDT (terrestrial dynamical time) vztahený k povrchu Země. Jednotkou TDT je SI sekunda a platí, že 1.1.1977 0^h00^m00^s TAI odpovídá 1.1.1977 0^h00^m32,184^s TDT. Rozdíl 32,184 sekundy rovněž odpovídá rozdílu mezi TAI a časem ET (viz dále) ve výše uvedený den a umožňuje tak kontinuální přechod mezi starším ET a nově definovaným TDT. Čas TT, zave-

dený v roce 1991 spolu s TCG (geocentric coordinate time) a TCB (barycentric coordinate time), je ekvivalentní s TDT. TT je svázán s časem TCG poměrem

$$\frac{dTT}{dT_{CG}} = 1 - L_G = 1 - 6,969290134 \times 10^{-10}, \quad (44)$$

takže čas TT plyne stejně jako čas založený na SI sekundě, přestože TCG je vázán na GCRS (geocentric celestial reference system).

Před zavedením atomového času se jako nejlepší aproximace rovnoměrně plynoucího času používal efemeridový čas ET. Tato časová škála nebyla založena na zemské rotaci, ale na pohyby Měsíce. Vycházela ze zákrytů hvězd naším souputníkem a jeho přesnost tedy závisela na úrovni teorie pohybu tohoto tělesa. Vzhledem k poměrně malému rozsahu našich dat (100 let) lze bez nadsázky říci, že ET je prodloužením TT resp. TDT do minulosti. Případné drobné odchylky od rovnoměrného plynutí (řádově sekundy za století) nehrají v našem případě roli vzhledem k poměrně velkým chybám starších měření.

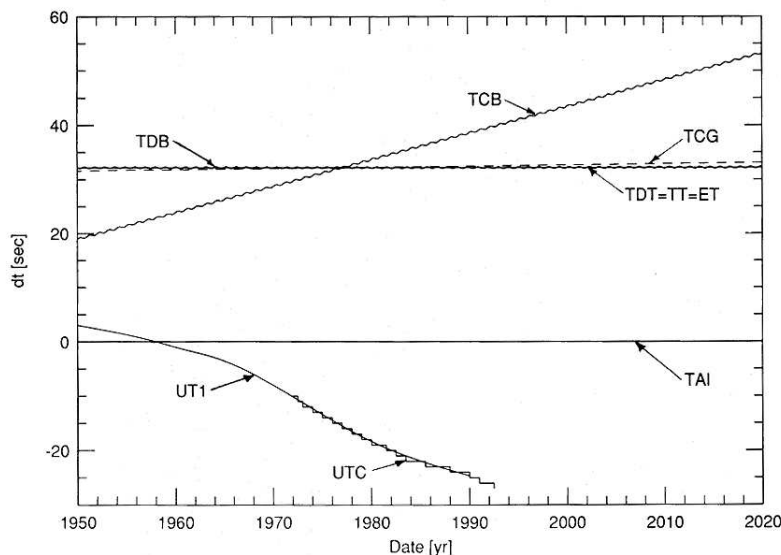
Pro data od roku 1961 (v letech 1961 až 1972 se jedná o extrapolaci TAI–UTC) jsme použili přesnou korekci z UTC na TAI z The International Earth Rotation Service (IERS). Pro korekci měření starších než 1961 nejsou údaje o UTC k dispozici, tudíž jsme použili data z The Astronomical Almanac zachycující vývoj TT–UT respektive ET–UT. Vztah mezi TT(či ET) a TAI je jednoduše aditivní.

$$TAI = TT - 32,184 \text{ s}. \quad (45)$$

Data od roku 1892 do 1960 vykazují natolik velkou chybu, že malé rozdíly časů UT a UTC jsou v porovnání s nimi zanedbatelné. Při korekci celého souboru měření jsme se ovšem dopustili další drobné nekorektnosti. Korekce času by měla být správně provedena na geocentrických datech. Data, ze kterých jsme vycházeli, však již byla korigována na HJD (heliocentrické juliánské datum). Ukazuje se však, že tato nepřesnost se projeví až na nevýznamných rádech, což výsledky naší analýzy neovlivní. Všechna data byla korigována na časovou škálu, která se od TT respektive ET liší o 32,184 sekundy.

Další informace o časových škálách lze získat na internetových stránkách IERS a BIMP, ze kterých vycházela i naše analýza. Následující tabulka 5 ukazuje vývoj UT vůči TT resp. TDT resp. ET v letech 1890-1961. Tabulka

6 pak zachycuje vývoj UTC vůči TAI od roku 1961. Vztahy mezi časovými škálami ilustruje následující obrázek 5.

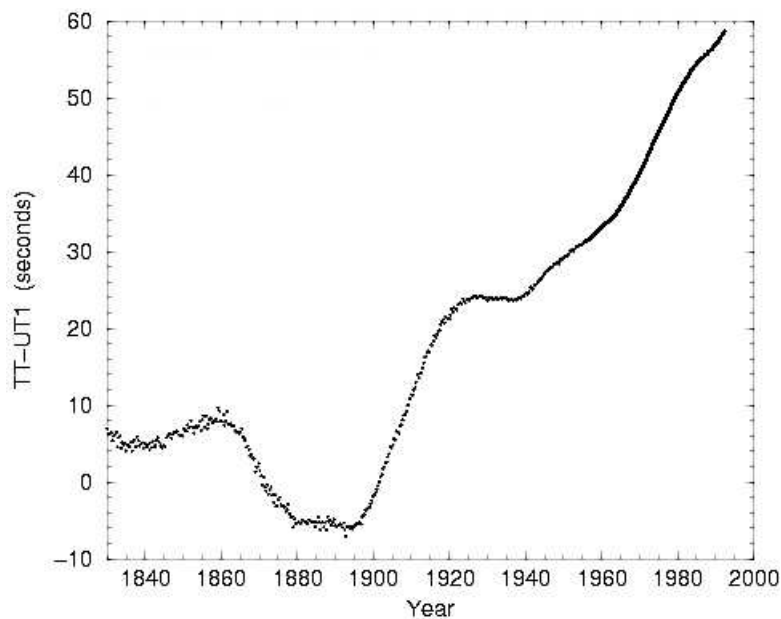


Obrázek 5: Obrázek (Seidelmann a Fukushima 1992) ukazuje rozdíly mezi různými časovými škálami mezi lety 1950 – 2020. Periodické člen v TCB a TDB jsou pro zviditelnění zvětšena stokrát. TAI je použit jako referenční a ET, TDT a TT jsou vzaty jako $32,184\text{s} + \text{TAI}$.

6.2 Analýza apsidálního pohybu

Jak již bylo řečeno na samém konci kapitoly 3.2, vyžaduje Lacyho metoda počáteční odhady parametrů. Pro tyto odhady jsme použili hodnoty, které ve své práci odvodil GG-P metodou doc. Wolf (1994). Rovněž většina měření minim byla shromážděna, a některá z nich i pořizena, doc. Wolfem, dvě pochází od RNDr. Zejdy a některá z dalších veřejně dostupných zdrojů na internetu. Vzhledem k faktu, že jsme volili jiné základní minimum než v práci doc. Wolfa, bylo rovněž nutné přepočítat argument periastra ω_0 v čase t_0 . Konvergovány byly tyto parametry : e , P_A , ω_0 , $\dot{\omega}$, t_0 .

Programy, použité pro korekce dat a výpočty, byly napsány autorem této diplomové práce v jazyce C nebo byl použit již existující software umožňující zobrazování a matematické operace s daty.



Obrázek 6: Rozdíl mezi TT a UT1 (či ET a UT1) v letech 1830-1992. Hodnoty v letech 1830-1955,5 byly odvozeny ze zákrytů jiných nebeských těles Měsícem, po 1955,5 přímo z UT1-TAI. Tento graf je převzat z práce Jordiho et al. (1994), kde lze nalézt podrobnější komentář.

Tabulka 5: Vývoj $\Delta T = ET-UT1$

Rok (0 ^h 1.1.)	ΔT [s]	Rok (0 ^h 1.1.)	ΔT [s]	Rok (0 ^h 1.1.)	ΔT [s]	Rok (0 ^h 1.1.)	ΔT [s]
1890	-5,87	1908	7,75	1926	23,86	1944	26,24
1891	-6,01	1909	9,13	1927	24,49	1945	26,77
1892	-6,19	1910	10,46	1928	24,34	1946	27,28
1893	-6,64	1911	11,53	1929	24,08	1947	27,78
1894	-6,44	1912	13,36	1930	24,02	1948	28,25
1895	-6,47	1913	14,65	1931	24,00	1949	28,71
1896	-6,09	1914	16,01	1932	23,87	1950	29,15
1897	-5,76	1915	17,20	1933	23,95	1951	29,57
1898	-4,66	1916	18,24	1934	23,86	1952	29,97
1899	-3,74	1917	19,06	1935	23,93	1953	30,36
1900	-2,72	1918	20,25	1936	23,73	1954	30,72
1901	-1,54	1919	20,95	1937	23,92	1955	31,07
1902	-0,02	1920	21,16	1938	23,96	1956	31,35
1903	1,24	1921	22,25	1939	24,02	1957	31,68
1904	2,64	1922	22,41	1940	24,33	1958	32,18
1905	3,86	1923	23,03	1941	24,83	1959	32,68
1906	5,37	1924	23,49	1942	25,30	1960	33,15
1907	6,14	1925	23,62	1943	25,70	1961	33,59

Tabulka 6: Vývoj TAI-UTC

Meze platnosti (0 ^h UTC)		TAI-UTC [s]	Meze platnosti (0 ^h UTC)		TAI-UTC [s]
1.1.1961	1.8.1961	$1,422818 + (\text{MJD} - 37300) \times 0,001296$	1.1.1977	1.1.1978	16
1.8.1961	1.1.1962	$1,372818 + \dots$	1.1.1978	1.1.1979	17
1.1.1962	1.11.1963	$1,845858 + (\text{MJD} - 37665) \times 0,0011232$	1.1.1979	1.1.1980	18
1.11.1963	1.1.1964	$1,945858 + \dots$	1.1.1980	1.7.1981	19
1.4.1964	1.9.1964	$3,34013 + \dots$	1.7.1981	1.7.1982	20
1.9.1964	1.1.1965	$3,44013 + \dots$	1.7.1982	1.7.1983	21
1.1.1965	1.3.1965	$3,54013 + \dots$	1.7.1983	1.7.1985	22
1.3.1965	1.7.1965	$3,64013 + \dots$	1.7.1985	1.1.1988	23
1.7.1965	1.9.1965	$3,74013 + \dots$	1.1.1988	1.1.1990	24
1.9.1965	1.1.1966	$3,84013 + \dots$	1.1.1990	1.1.1991	25
1.1.1966	1.2.1968	$4,31317 + (\text{MJD} - 39126) \times 0,002592$	1.1.1991	1.7.1992	26
1.2.1968	1.1.1972	$4,21317 + \dots$	1.7.1992	1.7.1993	27
1.1.1972	1.7.1972	10	1.7.1993	1.7.1994	28
1.7.1972	1.1.1973	11	1.7.1994	1.1.1994	29
1.1.1973	1.1.1974	12	1.1.1994	1.7.1997	30
1.1.1974	1.1.1975	13	1.7.1997	1.1.1999	31
1.1.1975	1.1.1976	14	1.1.1999	1.1.2006	32
1.1.1976	1.1.1977	15	1.1.2006	?	33

Před vlastním výpočtem bylo třeba zdrojová data korigovat z UTC na rovnoměrně plynoucí TAI. Měření z let 1892 až 1960 byla zpracována na základě tabulky 5 v programu **TableCurve2D v5.01** umožňujícím rychlé pokročilé fitování. Předpokládali jsme polynomiální závislost. Z dostupných fitů nejlépe naše data vystihoval Fourierův polynom 10. stupně tvaru

$$f(\sin x, \cos x) = \sum_{n=0}^{10} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx). \quad (46)$$

Na základě této funkce jsme potom přepočítali příslušné časy pro hodnoty RJD, tedy HJD-2400000, v rozmezí 12395,785 až 37149,7223. Fotoelektrická data odpovídající rozsahu RJD od 39020,4289 do 53746,2111, tedy z let 1961 až 2006, byla korigována pomocí dat z tabulky 6 v programu **jdcor.c**. Vstupem tohoto programu je prostý ASCII soubor obsahující juliánská data v redukovaném tvaru formátovaná do sloupce. Korigovaná heliocentrická juliánská data zákrytů lze nalézt v tabulce 7.

Na takto zpracovaná dat lze již korektně aplikovat Lacyho metodu popsanou v kapitole 3.2. Pro tuto analýzu byl autorem diplomové práce napsán program **eebis.c**, kde je tato metoda přesně zreprodukována. Vstupem programu je formátovaný soubor s daty a sklon dráhy systému. Tento program zpracovává korigovaná data pro finální výpočet, při kterém se konvergují samotné elementy. Ten byl naprogramován v prostředí programu **Mathematica 5.0**. Ukazuje se, že výpočet popsany v tomto odstavci, konverguje již při 2-3 iteracích. To tedy znamená, že výstupní hodnoty z „matematiky“

jsou vstupními parametry pro **eebis.c** *et vice versa*. V našem případě jsme iterovali třikrát.

Při určování chyb konvergovaných parametrů jsme zprvu vycházeli z postupu popsaném Lacym. Tedy provést výpočet v mezích sklonu dráhy odvozených z fotometrické analýzy. Ukázalo se však, že výsledné chyby jsou nereálně malé a o několik řádů přesahují technické možnosti. Zvolili jsme proto následující postup, který lépe reflektuje povahu souboru měření. Výpočet jsme provedli pro několik souborů vstupních dat, jejichž průnikem byla řada fotoelektrických dat definující periodu. Z takto získaných výsledků vykazujících určitý rozptyl jsme potom odhadli resp. spočetli chyby orbitálních parametrů pomocí příslušného statistického vzorce pro směrodatnou odchylku. Sklon dráhy jsem uvažovali jako fixní odvozený z fotometrických měření.

Tabulka 7: Časy minim CO Lacertae v letech 1892 až 2006

HJD-2400000	HJD _{cor} -2400000	Chyba [d]	Epocha	Zdroj/Pozorovatel
12395,785	12395,78455	0,01*	-26751,0	Dugan, Wright (1939)
12519,903	12519,90255	0,01*	-26670,5	Dugan, Wright (1939)
13105,936	13105,93555	0,01*	-26290,5	Dugan, Wright (1939)
13552,428	13552,42756	0,01*	-26001,0	Dugan, Wright (1939)
14801,618	14801,61759	0,01*	-25191,0	Dugan, Wright (1939)
15357,574	15357,57361	0,01*	-24830,5	Dugan, Wright (1939)
15603,574	15603,57362	0,01*	-24671,0	Dugan, Wright (1939)
16451,787	16451,78666	0,01*	-24121,0	Dugan, Wright (1939)
16452,538	16452,53766	0,01*	-24120,5	Dugan, Wright (1939)
17299,974	17299,97369	0,01*	-23571,0	Dugan, Wright (1939)
17454,979	17454,9787	0,01*	-23470,5	Dugan, Wright (1939)
18595,426	18595,42574	0,01*	-22731,0	Dugan, Wright (1939)
18596,23	18596,22974	0,01*	-22730,5	Dugan, Wright (1939)
19243,163	19243,16277	0,01*	-22311,0	Dugan, Wright (1939)
19305,639	19305,63878	0,01*	-22270,5	Dugan, Wright (1939)
20400,61	20400,60982	0,01*	-21560,5	Dugan, Wright (1939)
20646,563	20646,56283	0,01*	-21401,0	Dugan, Wright (1939)
20800,782	20800,78184	0,01*	-21301,0	Dugan, Wright (1939)
20801,579	20801,57884	0,01*	-21300,5	Dugan, Wright (1939)
21494,778	21494,77786	0,01*	-20851,0	Dugan, Wright (1939)
21495,568	21495,56786	0,01*	-20850,5	Dugan, Wright (1939)
22543,474	22543,47388	0,01*	-20171,0	Dugan, Wright (1939)
22544,251	22544,25088	0,01*	-20170,5	Dugan, Wright (1939)
23391,706	23391,70589	0,01*	-19621,0	Dugan, Wright (1939)
23392,462	23392,46189	0,01*	-19620,5	Dugan, Wright (1939)
24502,082	24502,0819	0,01*	-18901,0	Dugan, Wright (1939)
24595,395	24595,39491	0,01*	-18840,5	Dugan, Wright (1939)
25597,824	25597,82391	0,01*	-18190,5	Dugan, Wright (1939)
25905,519	25905,51891	0,01*	-17991,0	Dugan, Wright (1939)
26506,974	26506,97391	0,01*	-17601,0	Dugan, Wright (1939)
26507,723	26507,72291	0,01*	-17600,5	Dugan, Wright (1939)
26812,333	26812,3329	0,06*	-17403,0	Zonn (1936)
26813,081	26813,0809	0,06*	-17402,5	Zonn (1936)
26830,82	26830,8199	0,06*	-17391,0	Zonn (1933)
27280,37	27280,3699	0,06*	-17099,5	Zonn (1933)
27283,47	27283,4699	0,06*	-17097,5	Zonn (1933)
27300,42	27300,4199	0,06*	-17086,5	Zonn (1933)
27313,54	27313,5399	0,06*	-17078,0	Zonn (1933)
27368,28	27368,2799	0,06*	-17042,5	Zonn (1933)
27345,95	27345,9499	0,06*	-17057,0	Uitterdijk (1934)
27346,691	27346,6909	0,06*	-17056,5	Uitterdijk (1934)
27370,595	27370,5949	0,06*	-17041,0	Zonn (1933)
27534,088	27534,0879	0,06*	-16935,0	Zonn (1936)
27534,83	27534,8299	0,06*	-16934,5	Zonn (1936)
34266,593	34266,59298	0,01*	-12569,5	Ashbrook (1953)
34760,848	34760,84798	0,005*	-12249,0	Semeniuk (1967)
34761,649	34761,64898	0,005*	-12248,5	Semeniuk (1967)
34974,4684	34974,46839	0,005*	-12110,5	Smak, Kruszewski (1955)
37149,7223	37149,72231	0,001*	-10700,0	Serkowski (1960)
39020,4289	39020,42895	0,0004	-9487,0	Semeniuk (1967)
39027,3798	39027,37985	0,00015	-9482,5	Semeniuk (1967)
39033,549	39033,54905	0,00025	-9478,5	Semeniuk (1967)
39377,4596	39377,45966	0,0005*	-9255,5	Smak (unpublished)
39741,4175	39741,41757	0,0005*	-9019,5	Kreiner (1968)
39745,2717	39745,27177	0,0005*	-9017,0	Kreiner (1968)
39748,3561	39748,35617	0,0005*	-9015,0	Kreiner (1968)

... pokračování tabulky (7)

HJD-2400000	HJD _{cor} - 2400000	Chyba [d]	Epocha	Zdroj/Pozorovatel
39755,2973	39755,29737	0,0005*	-9010,5	Kreiner (1968)
42336,943	42336,94315	0,0005*	-7336,5	Wilson, Woodward (1983)
42337,732	42337,73215	0,0005*	-7336,0	Wilson, Woodward (1983)
44808,3533	44808,35353	0,0008	-5734,0	Kreiner et al. (1983)
44821,4349	44821,43513	0,0009	-5725,5	Kreiner et al. (1983)
45171,5153	45171,51554	0,0003	-5498,5	Kreiner et al. (1983)
45181,5666	45181,56684	0,0005	-5492,0	Kreiner et al. (1983)
45232,46	45232,46024	0,01*	-5459,0	Frank (1984)
45950,3326	45950,33286	0,0005*	-4993,5	Mossakovskaya, Khaliullin (1987)
46327,422	46327,42227	0,01*	-4749,0	Viertelmetter (1986)
46344,3854	46344,38567	0,0005*	-4738,0	Mossakovskaya, Khaliullin (1987)
46354,3928	46354,39307	0,0005*	-4731,5	Mossakovskaya, Khaliullin (1987)
46704,48	46704,48027	0,06*	-4504,5	Frank (1988)
46708,3441	46708,34437	0,0005*	-4502,0	Agerer (1988)
47024,495	47024,49527	0,01*	-4297,0	Viertelmetter (1988)
47084,6427	47084,64297	0,0005	-4258,0	Caton et al. (1989)
47097,74215	47097,74242	0,00015	-4249,5	Caton et al. (1989)
47495,63488	47495,63516	0,00022	-3991,5	Caton et al. (1989)
47502,57676	47502,57704	0,00019	-3987,0	Caton et al. (1989)
48628,3816	48628,3819	0,001	-3257,0	Wolf (1994)
48840,4439	48840,44421	0,0005*	-3119,5	Agerer (1993)
48850,4573	48850,45761	0,0005*	-3113,0	Agerer (1993)
48884,3855	48884,38581	0,0005*	-3091,0	Agerer (1993)
48887,4711	48887,47141	0,0005*	-3089,0	Agerer (1993)
49275,3499	49275,35022	0,0005	-2837,5	Wolf (1994)
50110,441	50110,44135	0,004	-2296,0	Kohl (1996)
50248,4859	50248,48625	0,0004	-2206,5	Agerer, Hübscher (1997)
50369,5259	50369,52625	0,0004	-2128,0	Agerer, Hübscher (1998)
50370,3286	50370,32895	0,0027	-2127,5	Diethelm (1996)
50710,3531	50710,35346	0,0009	-1907,0	Diethelm (1998)
50726,5711	50726,57146	0,0004	-1896,5	Diethelm (1998)
51107,4978	51107,49816	0,0005	-1649,5	Ak, Filiz (2003)
51108,2418	51108,24216	0,0004	-1649,0	Ak, Filiz (2003)
51549,3114	51549,31177	0,0006	-1363,0	Diethelm (2000)
51809,94477	51809,94514	0,00023	-1194,0	Nelson (2000)
52094,511	52094,51137	0,0008	-1009,5	Diethelm (2001)
52121,4712	52121,47157	0,0007	-992,0	Agerer, Hübscher (2002)
52148,4892	52148,48957	0,001	-974,5	Agerer, Hübscher (2002)
52151,5723	52151,57267	0,0072	-972,5	Agerer, Hübscher (2002)
52185,50171	52185,50208	0,0001*	-950,5	Ondřejov
52202,4647	52202,46507	0,0009	-939,5	Agerer, Hübscher (2002)
52216,3446	52216,34497	0,0007	-930,5	Blaettler (2002)
52485,433	52485,43337	0,0004	-756,0	Agerer, Hübscher (2003)
52505,48108	52505,48145	0,0001*	-743,0	Ondřejov
52536,3248	52536,32517	0,0011	-723,0	Agerer, Hübscher (2003)
52546,377	52546,37737	0,0003	-716,5	Agerer, Hübscher (2003)
52549,4613	52549,46167	0,0001*	-714,5	Ondřejov
52835,5136	52835,51397	0,0007	-529,0	Hübscher (2005)
52856,36009	52856,36046	0,0001*	-515,5	Ondřejov
52900,28728	52900,28765	0,0001*	-487,0	Ondřejov
52968,1442	52968,14457	0,0004	-443,0	Krajčí (2005)
53516,42362	53516,42399	0,0001*	-87,5	Ondřejov
53607,41301	53607,41338	0,00009	-28,5	Ondřejov
53613,58221	53613,58258	0,00007	-24,5	Zejda
53651,34418	53651,34455	0,00007	0,0	Zejda
53746,2111	53746,21148	0,00007	61,5	Kotková

Chyby označené symbolem *, jsou hodnoty odhadnuté na základě použité metody, neboť původní publikace nebyly nalezeny či údaje o chybách chyběly, což bylo poměrně častým jevem. Celočíslná epocha odpovídá primárnímu zákrytu, neceločíslná pak sekundárnímu.

7 Výsledky

Hodnoty orbitálních elementů, které vstupovaly do výpočtu, a hodnoty výstupní jsou uvedeny v tabulce 8, přičemž konvergovány byly parametry e , P_A , ω_0 , $\dot{\omega}$ a t_0 .

Tabulka 8: Orbitální parametry

Parametr	Počáteční hodnota	Odvozená hodnota
e	0,0298(2)	0,02888(2)
P_A [d]	1,54235729(12)	1,54235744(13)
P_S [d]	1,54220717(12)	1,54220727(18)
ω_0 [°]	42,3(4)	42,5(1)
$\dot{\omega}$ [° P_A^{-1}]	0,0351(3)	0,03505(3)
t_0	53651,34455(7)	53651,34521(4)
i [°]	85,35(31)	—
U [roky]	43,31(37)*	43,37(4)*

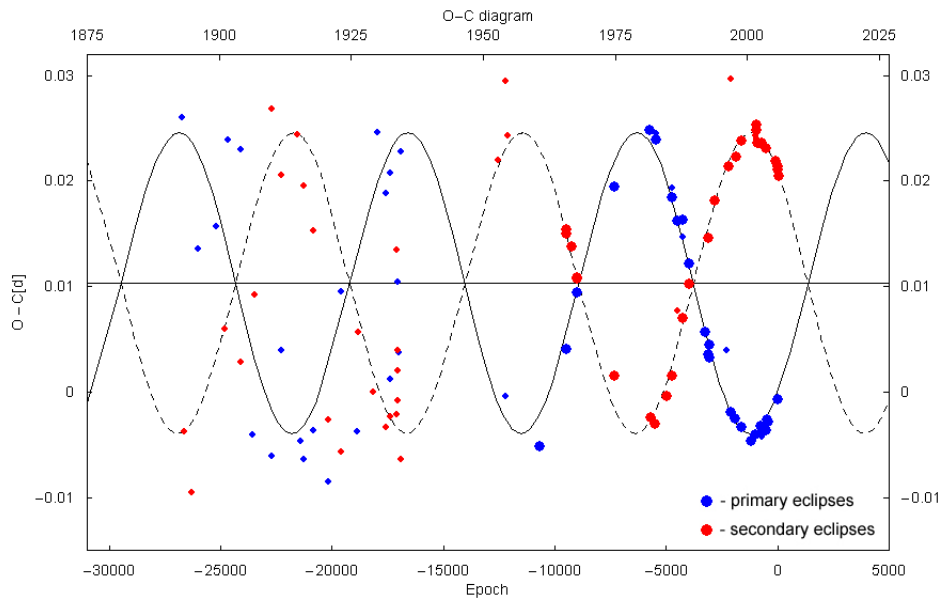
* roky jsou vyjádřeny v jednotkách juliánského roku tedy 365,25 dne.

Hodnoty odvozených parametrů jsou plně konzistentní s hodnotami odvozenými GG–P metodou, ale jsou ve většině případů přesnější. V případě excentricity doc. Wolf poznamenává, že jimi odvozená hodnota je vyšší než uvádějí jiné práce, což tedy nutně nevylučuje konzistenci naší hodnoty. Je možné si také všimnout, že došlo k prodloužení period, což se dalo samozřejmě očekávat. Ovšem vzhledem k poměrně malému rozsahu souboru dat a především velkým chybám starších měření se změna pohybuje pouze v řádu chyb. Většina měření byla ve fázi rostoucího rozdílu TAI–UTC a tedy příslušná minima nastávala čím dál víc později. Měření, ze kterých Wolf vycházel, nebyla korigovaná na rovnoměrně plynoucí čas.

Na základě odvozených hodnot z tabulky 8, měření z tabulky 7 a rovnice (43) jsme zkonstruovali O–C diagram. V našem případě přechází rovnice (43) na

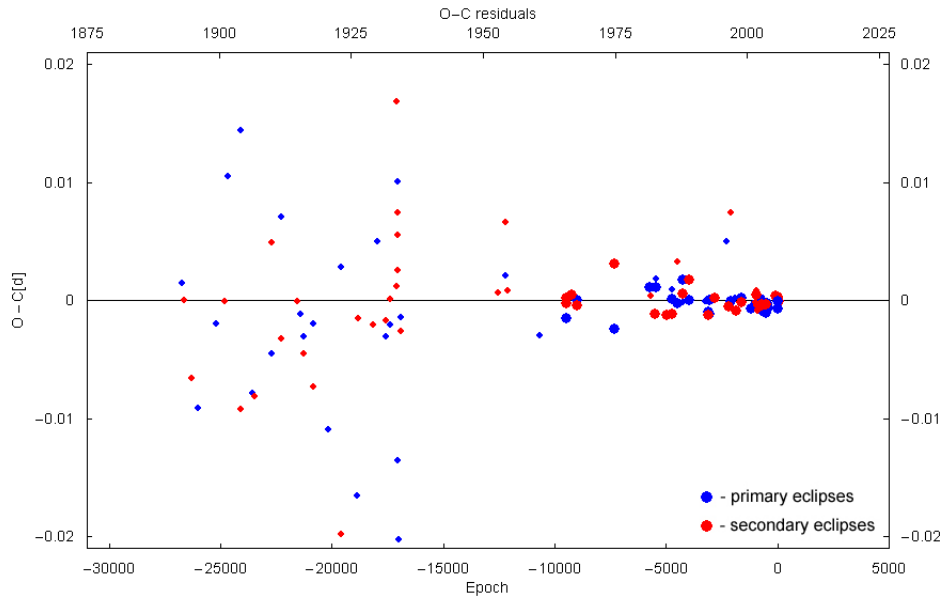
$$\begin{aligned}
 (O - C)_{p,s} = & 0,01033(25)^d \mp \\
 & \mp 0,01422(36)^d \cos[0,7148(17) + 0,0006117(5)E] + \\
 & + 0,000156(16)^d \sin 2[0,7148(17) + 0,0006117(5)E],
 \end{aligned} \tag{47}$$

přičemž argumenty v sinu a kosinu jsou v jednotkách radiánů.



Obrázek 7: O-C diagram

Z O-C diagramu je patrné, že námi spočtená periody je v dobré shodě s měřeními. Rovněž hodnoty dalších orbitálních elementů, které figurují v rovnici (43), tedy analytické efemeridové křivky, se zdají být v dobré shodě s experimentem. Novější fotoelektrická data (označena velkými body) dobře kopírují analytickou křivku, zatímco starší stejně jako novější vizuální (značena malými body) dle očekávání vykazují značný rozptyl.



Obrázek 8: O-C rezidua

Graf na obrázku 8 vznikl odečtením analytické křivky od O-C hodnot. I zde je patrná kumulace fotoelektrických dat kolem horizontální osy, což opět indikuje správnost hodnot orbitálních elementů. Přítomnost třetího tělesa, jak diskutovali Mossakovskaya Khaliullin (1987), není z našich dat prokazatelná. Velké body opět označují fotoelektrická měření, zatímco body malé značí méně přesná fotografická či vizuální pozorování.

Konstanta vnitřní stavby k_2 nám poskytuje informaci o koncentrovanosti hmoty ve hvězdě, což je zřejmé i z rozsahu hodnot, kterých nabývá. Konkrétně tedy 0 pro hmotný bod a 0,75 pro zcela homogenní hvězdu. Při určování možného počátečního chemického složení jsme vycházeli z Claretových modelů (1998). Jako nejpravděpodobnější se nám během naší analýzy vyjevila čtyři složení, především pak poslední dvě zmiňovaná. Jsou to

$$\begin{aligned}
 Z = 0,01 & \quad X = 0,73 \\
 Z = 0,01 & \quad X = 0,80 \\
 Z = 0,02 & \quad X = 0,70 \\
 Z = 0,03 & \quad X = 0,65
 \end{aligned}$$

Následující grafy zobrazují časový vývoj k_2 v raném stádiu života dvojhvězdy pro různá počáteční chemická složení a počáteční hmotnosti odpovídající hmotnostem obou složek uvedených v tabulce 2. Zobrazené závislosti jsou polynomiální čtvrtého stupně, jak se nám je podařilo nafitovat z dostupných

modelových dat. Horizontální příčka reprezentuje námi spočtenou hodnotu konstanty vnitřní stavby. Ze srovnání teorie a experimentu lze tedy usuzovat i na stáří daného systému. Hodnota k_2 odvozená z pozorování činí

$$k_{2,\text{obs}} = 0,004075 \pm 0,000150,$$

respektive v logaritmickém tvaru

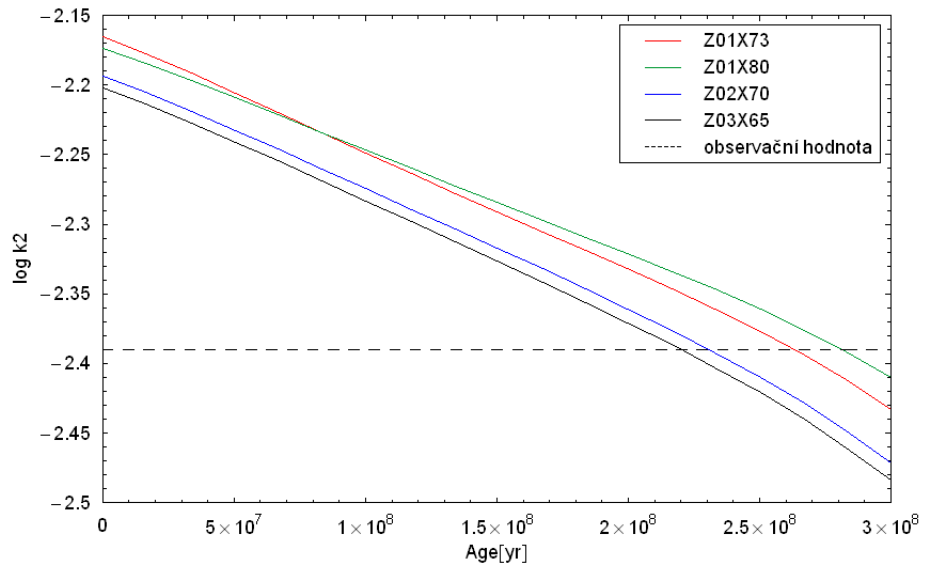
$$\log k_{2,\text{obs}} = -2,390 \pm 0,037,$$

což ukazuje na značnou koncentrovanost ke středu. V některých modelových situacích tedy není úplně od věci považovat z důvodu zjednodušení hvězdu z dynamického hlediska za hmotný bod. Pro srovnání konstanta vnitřní stavby k_2 spočtená z modelů Clareta (2004) má hodnotu

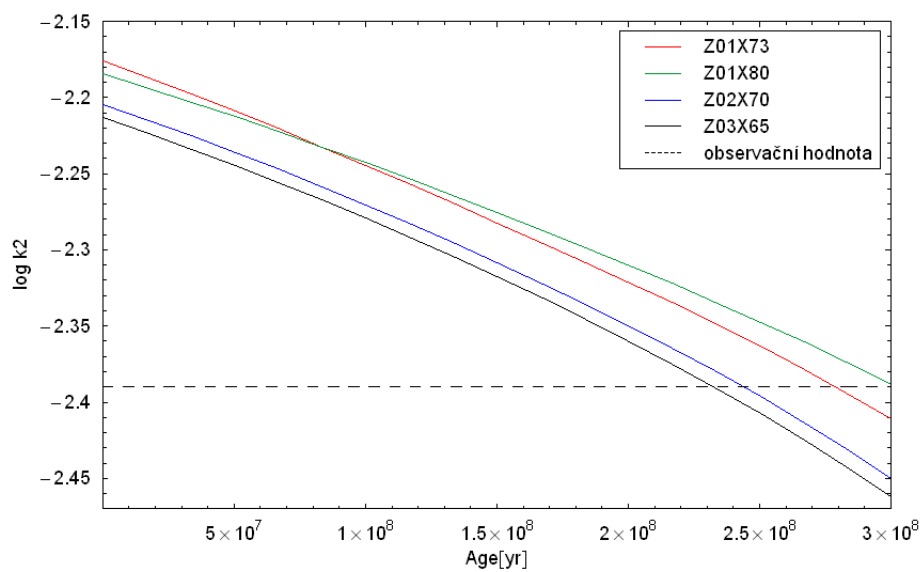
$$k_{2,\text{teor}} = 0,003975,$$

respektive v logaritmickém tvaru

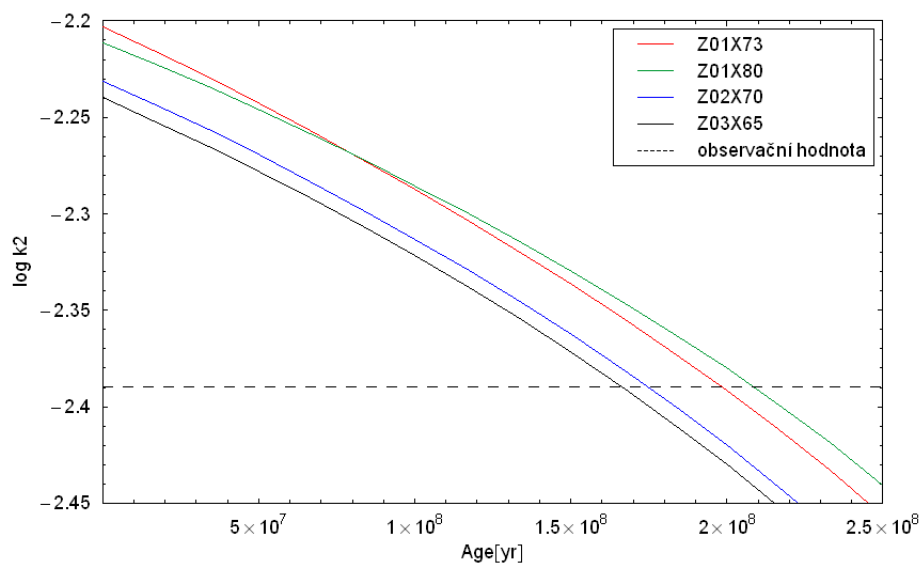
$$\log k_{2,\text{teor}} = -2,400$$



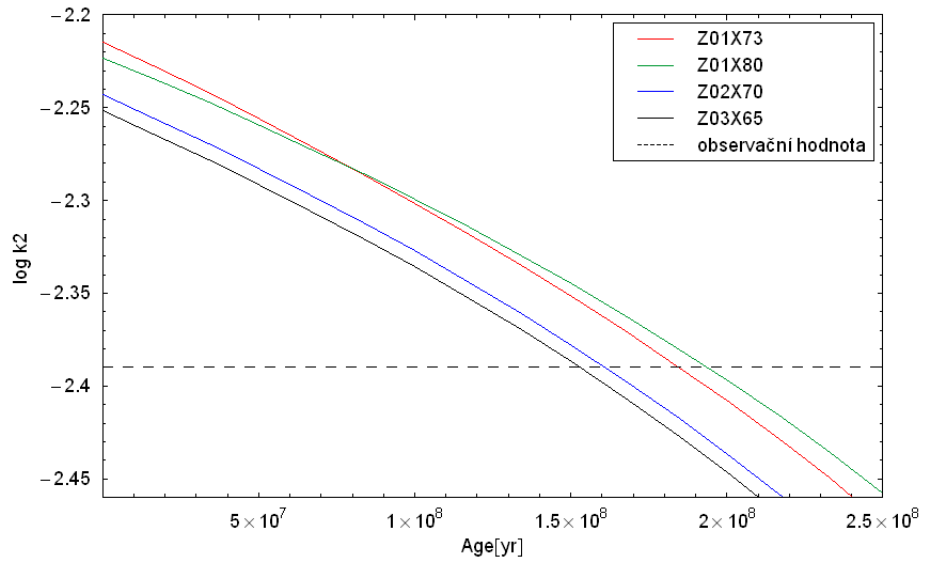
Obrázek 9: Evoluce k_2 pro chemické složení primáru $Z = 0,01$ a $X = 0,73$ v kombinaci se sekundární složkou pro všechna jmenovaná složení.



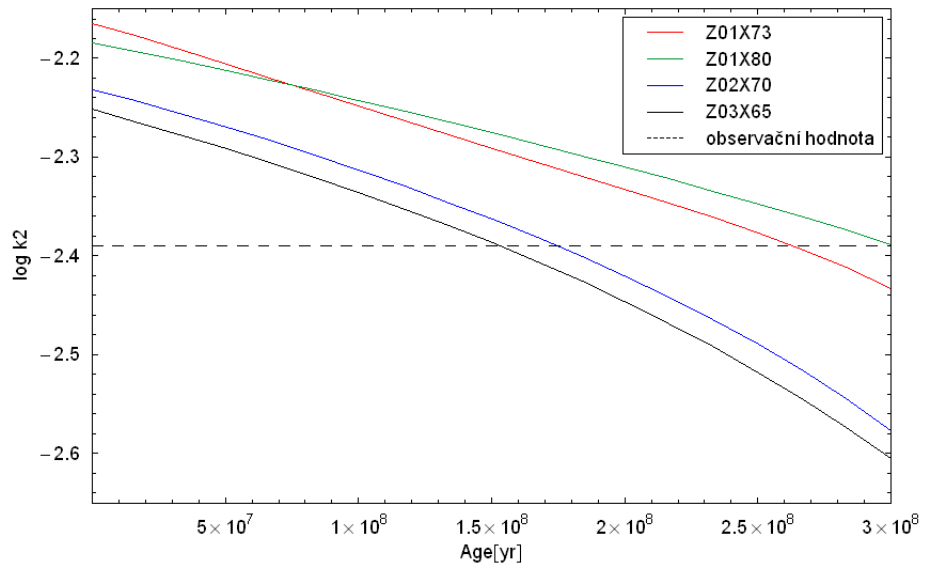
Obrázek 10: Evoluce k_2 pro chemické složení primáru $Z = 0,01$ a $X = 0,80$ v kombinaci se sekundární složkou pro všechna jmenovaná složení.



Obrázek 11: Evoluce k_2 pro chemické složení primáru $Z = 0,02$ a $X = 0,70$ v kombinaci se sekundární složkou pro všechna jmenovaná složení.



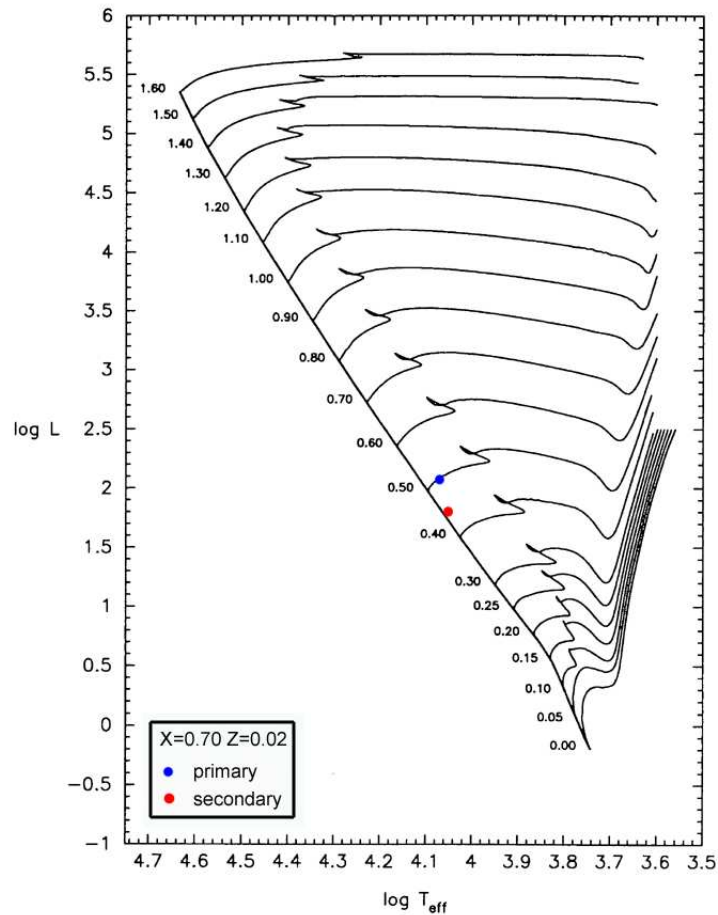
Obrázek 12: Evoluce k_2 pro chemické složení primáru $Z = 0,03$ a $X = 0,65$ v kombinaci se sekundární složkou pro všechna jmenovaná složení.



Obrázek 13: Evoluce k_2 pro shodná chemické složení primáru a sekundáru.

Z obrázků 9 až 13 je patrné, že složky dvojhvězdy se v této fázi svého života stávají s časem koncentrovanější. Vezmeme-li v potaz jako nejpravděpodobnější

chemické složení $Z = 0,02$ $X = 0,70$ a $Z = 0,03$ $X = 0,65$, lze z obrázků 11 a 12, za předpokladu správnosti teoretických modelů, rovněž usuzovat na stáří systému. Stáří CO Lacertae dle obrázku 11 činí přibližně 165 – 175 Myr. Je to tedy mladý systém, což je patrné i z následujícího Hertzsprungova-Russelova diagramu získaného z Claretových stelárních modelů (1998).



Obrázek 14: Pozice primární a sekundární složky v HR diagramu dle Clareta (1998). Zářivý výkon na vertikální ose je v jednotkách L_{\odot} . Hodnoty asociované s hlavní posloupností označují $\log M_{\odot}$.

Rád bych podotkl, že pro finální srovnání hodnoty k_2 z teorie a pozorování je použit nejnovější dostupný model dle Clareta (2004). Obrázky 9 až 13 vycházejí ze starších modelů z roku 1998 spočteného pro několik počátečních chemických složení a tudíž na nich lze demonstrovat vliv různého počátečního obsahu vodíku respektive kovů. Nový model počítá pouze s chemickým složením $Z = 0,02$ a $X = 0,70$.

8 Závěr

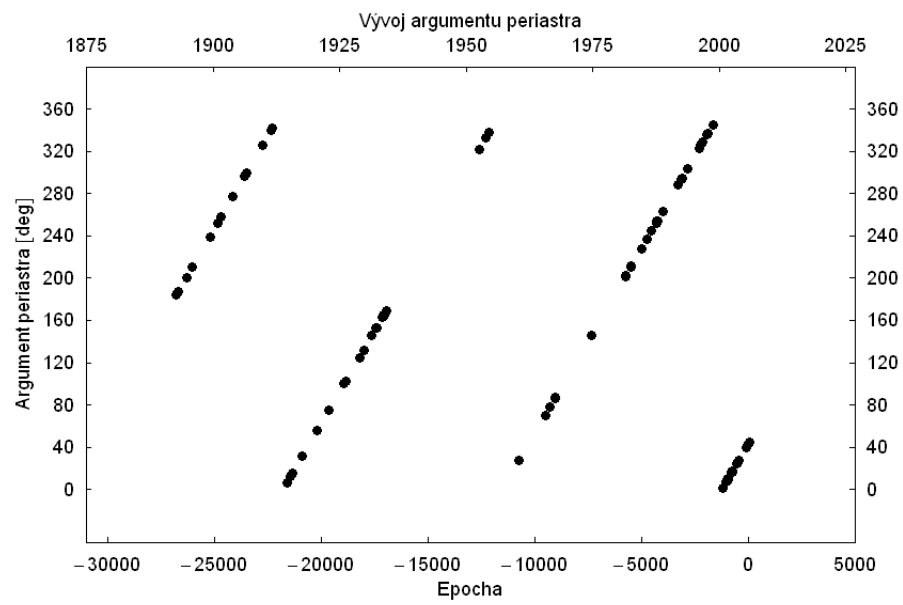
Naše analýza a především prezentované výsledky prokázaly plnou použitelnost Lacyho metody pro „ephemeris-curve“ problém. Hlavní devizou této metody je přehlednost, používané systémy rovnic vedou přímočaře k výsledku, a možnost simultánní konvergence libovolného počtu parametrů, a to včetně excentricity, což GG-P neumožňuje. Z výsledků je patrné, že konvergované hodnoty jsou plně v souladu s hodnotami odvozenými pomocí GG-P, ale jsou většinou přesnější.

Domníváme se rovněž, že je korektní provádět opravy časů měření, udávané většinou v UTC, na rovnoměrně plynoucí časovou škálu např. TAI či ekvivalentní škály založené na SI sekundě. Současný rozdíl TAI-UTC činí již 33 sekund a tak je neuvážené tuto skutečnost v měřeních ignorovat. Zvláště pak při analýze binárních systémů, jakou je i tato práce, kde měření nezřídka pokrývají mnohaleté časové intervaly a tím se do souboru dat vnášejí zbytečné nekonzistence v důsledku nerovnoměrného chodu UTC respektive UT v různých obdobích. Lze namítnout, že pro starší data, která vykazují poměrně značné chyby je tato korekce irelevantní. To je samozřejmě pravda. Nicméně nová měření dosahující sekundových přesností by byla dalším rozdílem jednotek až desítek sekund UTC a TAI, dle mého mínění zbytečně, znehodnocena.

Výběr CO Lac pro analýzu se ukázal být šťastným z několika důvodů. Jednak má tento systém poměrně krátkou apsidální periodu ($U = 43,37$ let), druhak je prakticky celá perioda pokryta kvalitními fotoelektrickými měřeními, což nám poskytuje možnost získat relevantní výsledky.

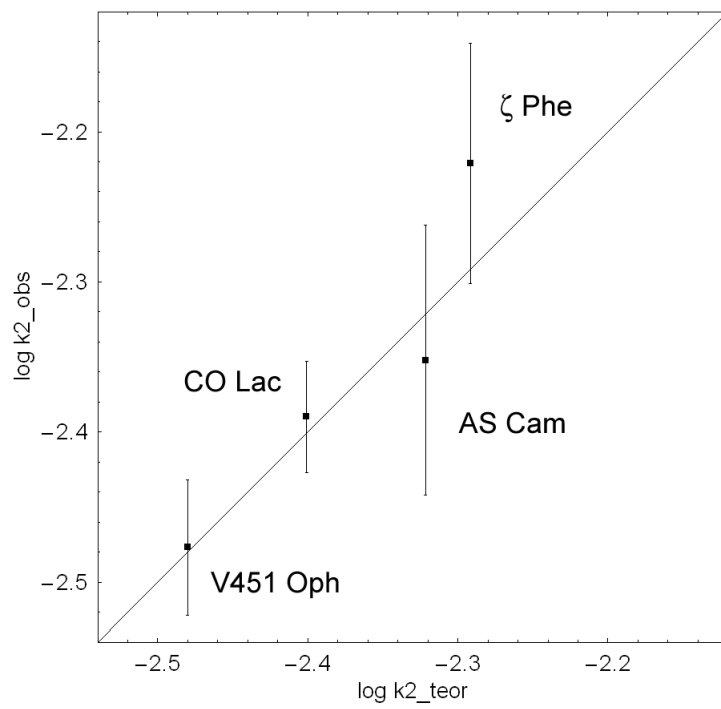
Tabulka 9: Zákrytové dvojhvězdy s nejkratší periodou pohybu apsid (Wolf 2000)

Systém	U [roky]	e	P [d]	Spektrální typ	Zdroj
U Oph	21,2	0,0031	1,677	B5+B5	Kämper (1984)
GL Car	25,2	0,1457	2,422	B0,5+B1	Giménez & Clausen (1986)
V478 Cyg	26,3	0,0190	2,881	O9,5V+O9,5V	Mossakovskaya & Khaliullin (1996)
DR Vul	36,3	0,0950	2,251	B0V+B0,5V	Wolf et al. (1999)
NO Pup	37,2	0,1255	1,257	B8V+A7V	Giménez et al. (1986)
OX Cas	37,3	0,0415	2,489	B2V+B2V	Wolf et al. (1997)
V760 Sco	38,5	0,0265	1,731	B4V+B4V	Wolf (2000)
CO Lac ¹	43,4	0,0289	1,542	B8,5V+B9,5V	tato práce
ζ Phe	44,2	0,0113	1,670	B6V+B8V	Giménez et al. (1986)
CW Cep	45,6	0,0293	2,730	B0,5V+B1V	Clausen & Giménez (1991)
Y Cyg	47,6	0,1458	2,996	O9,5+O9,5	Holmgren et al. (1995)



Obrázek 15: Časový vývoj argumentu periastra.

¹Data z původní práce Wolfa (1994) byla aktualizována na základě našich výsledků



Obrázek 16: Srovnání $k_{2, \text{obs}}$ s $k_{2, \text{teor}}$ pro CO Lac a několik dalších systémů s podobnými hmotnostmi a periodami, avšak s různými excentricitami. Teoretické hodnoty k_2 vycházejí z modelů Clareta (2004).

Použitá literatura

- Agerer, F. 1988, BAV Mitteilung, 50, 4
- Agerer, F. 1993, BAV Mitteilung, 62, 5
- Agerer, F., Hübscher, J. 1997, IBVS, No. 4472
- Agerer, F., Hübscher, J. 1998, IBVS, No. 4562
- Agerer, F., Hübscher, J. 2002, IBVS, No. 5296
- Agerer, F., Hübscher, J. 2003, IBVS, No. 5484
- Ak, H., Filiz, N. 2003, IBVS, No. 5462
- Ashbrook, J. 1953, AJ, 58, 171
- Astronomical Almanac 2005
- Bastian, U. 2004, The Time Coordinate Used In The Variable-star Community, IBVS 4822
- Blaettler, E. 2002, BBSAG Bulletin, No. 127
- Bozkurt, Z., Degirmenci, Ö.L. 2005, The light-time effect in astrophysics, Causes and cures of the O-C diagram, ASP Conference series, Vol. 335, 277
- Catton, D.B., Hawkins, R.L., Burns, W.C. 1989, IBVS, No. 3408
- Claret, A., Giménez, A. 1998, Stellar models, Research on stellar structure and evolution with especial attention to modeling close binaries, CD-ROM
- Claret, A. 2004, A&A, 424, 919
- deKort, J. 1956, in Vistas in Astronomy, 2, edited by A. Beer (Pergamon, London), p. 1187
- Diethelm, R. 1996, BBSAG Bulletin, No. 113
- Diethelm, R. 1998, BBSAG Bulletin, No. 116

- Diethelm, R. 2000, BBSAG Bulletin, No. 122
- Diethelm, R. 2001, BBSAG Bulletin, No. 126
- Dugan, R.S. 1931, Contrib. Princeton Univ. Obs., No. 12
- Dugan R.S., Wright, F.W. 1939, Contrib. Princeton Univ. Obs., vol. 19, p. 12
- Erdem, A., Soydugan, E., Soydugan, F., Özdemir, S., Çiçek, C., Bulut, I., Demircan, O., Budding, E. 2004, Astron. Nachr. , Vol. 325, No. 4, 336
- Frank, P. 1983, BAV Mitteilung, 36
- Frank, P. 1988, BAV Mitteilung, 50, 4
- Giménez, A. 1985, AJ, 297, 405
- Giménez, A., Bastero, M. 1995, Ap&SS, 226, 99
- Giménez, A., García-Pelayo, J.M. 1983, Ap&SS, 92, 203
- Gundlach, J.H., Merkwitz, S.M 2000, PhRvL, 85, 2869
- Harmanec, P. 1988, BAICz, 39, 329
- Hegedüs, T., Giménez, A., Claret, A. 2005, Tidal Evolution and Oscillation in Binary Stars, ASP Conference Series, Vol. 333, 88
- Hübscher, J. 2005, IBVS, No. 5643
- Khaliullin, Kh.F. 1985, ApJ, 299, 668
- Kohl, M. 1996, BBSAG Bulletin, No. 111
- Kopal, Z 1953, MNRAS, 113, 769
- Kopal, Z. 1959, Close Binary Systems, Vol. 5, Chapman & Hall ltd., London
- Kopal, Z. 1965, Advances in Astronomy and Astrophysics, Vol. 3, Academic

Press, New York and London

Kopal, Z. 1978, Dynamics of Close Binary Systems, Reidel, Dordrecht

Krajci, T. 2005, IBVS, No. 5592

Kreiner, J.M. 1968, Acta Astron., 18, 543

Kreiner, J.M., Kurpińska-Winiarska, M., Winiarski, M. 1983, IBVS, No. 2312

Lacy, C.H.S. 1992, AJ, 104, 6

Levi-Civita, T. 1937, Amer. J. Math., 59, 225

Mayer, P. 1991, BAICz, 42, 98

Mezzetti, M., Predolin, F., Giuricin, G., Mardirossian, F. 1980, A&AS, 42, 15

Mossakovskaya, L.V., Khaliullin, Kh.F. 1987, Astron. Tsirk., 1495, 5

Nelson, R.H., 2000, IBVS, No. 5040

Petrova, A.V., Orlov V.V. 1999, AJ, 117, 587

Popper, M.D. 1980, Ann. Rev. Astr. Ap., 18, 115

Rektorys, K. et al. 1968, Přehled užití matematiky, 2.opravené vydání, SNTL, Praha

Roberts, H.P. 1938, Annals of Mathem., 39, 101

Russell, H.N. 1928, MNRAS, 88, 641

Seidelmann, P.K., Fukushima, T 1992, A&A, 265, 833

Semeniuk, I. 1967, Acta Astron., 17, 223

Smak, J., Kruszewski, A. 1955, Perem. Zvezdy, 10, 329

- Smak, J. 1967, *Acta Astron.*, 17, 245
- Smith, R.C. 1983, *Observatory*, Vol. 103, No. 1052, p. 29
- Todoran, J. 1972, *Ap&SS*, 15, 229
- Tsesevich, V. P. : 1971, *Zatmennyje Peremennyje Zvezdy*
- Tudose, V., Dumitrescu, A., Rusu, M. 2000, *RoAJ*, 10, 35
- Uitterdijk, J. 1934, *Bull. Astron. Inst. Neth.*, 7, 159
- Vielmetter, H. 1986, *BAV Mitteilung*, 42
- Vielmetter, H. 1988, *BAV Mitteilung*, 50, 4
- Wilson, R.R., Woodward, E.J. 1983, *Ap&SS*, 89, 5
- Wolf, M. 1994, *A&A*, 286, 875
- Wolf, M. 2000, *A&A*, 356, 134
- Zonn, W. 1933, *Wilno Bull.*, 14, 3
- Zonn, W. 1950, *Toruń Bull.*, 9, 18

Dodatek

Legenderovy polynomy

Legenderovy polynomy (viz rovnice (1)) lze definovat několika způsoby. Pro analytické vyjádření polynomu stupně n platí následující Rodrigueův vzorec

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (48)$$

Funkce $y = P_n(x)$ vyhovuje diferenciální rovnici (Legenderově)

$$(1 - x^2)y^{(2)} - 2xy^{(1)} + n(n + 1)y = 0, \quad (49)$$

kde $y^{(j)} = \frac{d^j y}{dx^j}$. Respektive po substituci $x = \cos \vartheta$ vyhovuje polynom $P_n(\cos \vartheta)$ diferenciální rovnici

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dy}{d\vartheta} \right) + n(n + 1)y = 0. \quad (50)$$

Pro $|x| \leq 1$, $|t| \leq 1$ dále platí

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (51)$$

Tímto vztahem jsou Legendery polynomy jednoznačně určeny.

Výpočet chyby konstanty vnitřní stavby k_2

Stejně jako u ostatních parametrů, které jsme nezískali řešením „ephemeris-curve“ problému, jsme chybu konstanty vnitřní stavby počítali pomocí vztahu pro přenos chyb, který lze psát jako

$$\Delta f(\vec{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df}{dx_i} \right)^2 (\Delta x_i)^2}, \quad (52)$$

kde \vec{x} je vektor parametrů funkce f . Výsledný vztah má tedy tvar

$$\begin{aligned}
\delta \bar{k}_{2,obs}^2 \Psi &= 25\beta^2 r_1^8 (\delta r_1)^2 + 25\gamma^2 r_2^8 (\delta r_2)^2 + \\
&+ \left[\left(\frac{-\beta - (-1+e)^{-5}(1+e)^{-1}}{m_1} \right) r_1^5 + \left(\frac{\gamma - (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}(1-e)^{-2}}{m_1} \right) r_2^5 \right]^2 (\delta m_1)^2 + \\
&+ \left[\left(\frac{-\beta - (-1+e)^{-5}(1+e)^{-1}}{m_2} \right) r_1^5 + \left(\frac{-\gamma - (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}(1-e)^{-2}}{m_2} \right) r_2^5 \right]^2 (\delta m_2)^2 + \\
&+ \left(\frac{\beta r_1^2 + \gamma r_2^2}{\dot{\omega}_N} \right)^2 (\delta \dot{\omega}_N)^2 + \\
&+ \left\{ (r_1^5 m_2^2 + r_2^5 m_1^2) \lambda + \right. \\
&\left. + \frac{m_1 + m_2}{(-1+e)^6(1+e)^2} \left[m_1 r_1^5 (4 + 6e) + m_2 r_2^5 (2 + 5e) \sqrt{\frac{(1-e)^3}{1+e}} \right] \right\}^2 (\delta e)^2
\end{aligned} \tag{53}$$

kde

$$\Psi = \alpha^2 (\beta r_1^2 + \gamma r_2^2)^4 \tag{54}$$

$$\alpha = \frac{\dot{\omega}_N}{2\pi} \tag{55}$$

$$\beta = m_1^{-1} \left[\frac{15}{8} \left(\frac{1}{-1+e^2} \right)^{2,5} (e^4 + 12e^2 + 8) m_2 - \frac{m_1 + m_2}{(-1+e)^5(1+e)} \right] \tag{56}$$

$$\gamma = m_2^{-1} \left[\frac{15}{8} \left(\frac{1}{-1+e^2} \right)^{2,5} (e^4 + 12e^2 + 8) m_1 - \frac{\sqrt{\frac{1+e}{(1-e)^3}} (m_1 + m_2)}{(-1+e^2)^2} \right] \tag{57}$$

$$\lambda = m_1^{-1} m_2^{-1} \left[7,5e \frac{(6+e^2)}{(-1+e^2)^{2,5}} - \frac{150}{8} \left(\frac{e^{\frac{1}{1,5}}}{-1+e^2} \right)^{1,5} \frac{(e^4 + 12e^2 + 8)}{(-1+e^2)^3} \right] \tag{58}$$