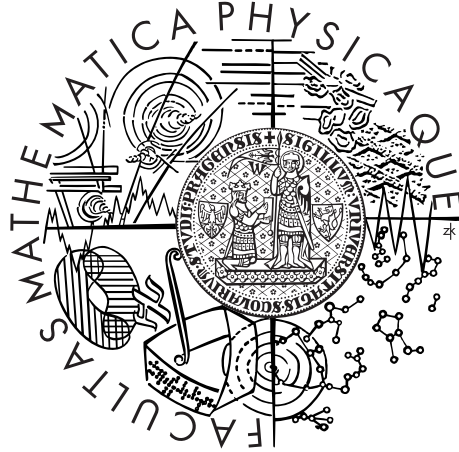


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE



Jan Česenek

Nespojitá Galerkinova metoda pro řešení stlačitelného vazkého proudění

Katedra numerické matematiky

Vedoucí disertační práce: prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., dr.h.c.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Vědecko-technické výpočty

Praha 2011

Rád bych tímto způsobem poděkoval zejména panu prof. RNDr. Miloslavu Feistauerovi, DrSc., dr.h.c. za poskytnuté rady a materiály, za cenné připomínky a odborné vedení a také Nečasovu centru pro matematické modelování (projekt LC06052 financován Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy ČR), za jehož podpory část této disertační práce vznikla. Velký dík patří také mým rodičům za neutuchající podporu během studia.

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 15. června 2011

Název práce: Nespojité Galerkinova metoda pro řešení stlačitelného vazkého proudění

Autor: Jan Česenek

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí disertační práce: prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., dr.h.c., Katedra numerické matematiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá numerickou simulací interakce dvoudimenzionálního stlačitelného vazkého proudění a vibrujícího leteckého profilu. Uvažujeme tuhý letecký profil s dvěma stupni volnosti, který se otáčí kolem elastické osy a osciluje ve vertikálním směru. Numerická simulace tohoto problému se skládá z řešení Navier-Stokesových rovnic pomocí nespojité Galerkinovy metody a řešení systému nelineárních diferenciálních rovnic popisující pohyb profilu. Časově závislá oblast je zahrnuta do řešení pomocí Arbitrary Lagrangian-Eulerian(ALE) formulace. Teoretická část této práce se zabývá odhadem chyby časo-prostorové nespojité Galerkinovy metody pro skalární nestacionární rovnice s nelineární konvekcí a nelineární difuzí.

Klíčová slova: konvektivně-difuzní problémy, nespojité Galerkinova metoda, interakce tekutiny a vibrujícího profilu, ALE metoda

Title: Discontinuous Galerkin method for solving compressible viscous flow

Author: Jan Česenek

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., dr.h.c., Department of Numerical Mathematics

Abstract: The subject of this PhD thesis is the numerical simulation of the interaction of two-dimensional compressible viscous flow and a vibrating airfoil. We consider a solid airfoil with two degrees of freedom which can rotate around the elastic axis and oscillate in the vertical direction. The numerical simulation of this problem consist of the discontinuous Galerkin finite element method solving Navier-Stokes equations coupled with a system of nonlinear ordinary differential equations describing the airfoil motion. The time-dependent domain is taken into account with the aid of the Arbitrary Lagrangian-Eulerian(ALE) formulation. Theoretical part of this paper is concerned with error estimates of the space-time discontinuous Galerkin method for scalar nonstationary equations with nonlinear convection and nonlinear diffusion.

Keywords: convection-diffusion problems, discontinuous Galerkin method, interaction of a fluid with a vibrating airfoil, ALE method

Obsah

1	Úvod	5
2	Formulace skalárního modelového problému	7
3	Diskretizace skalárního modelového problému	9
3.1	Diskrétní problém	12
4	Odhad chyby	13
4.1	Některé pojmy a pomocná tvrzení	13
4.2	Odvození některých odhadů	21
4.3	Odhad pro ξ	34
4.4	Odhad výrazu $\int_{I_m} \ \xi\ ^2$	36
4.5	Dokončení odhadu funkce ξ a abstraktního odhadu chyby	44
5	Odhad chyby vyjádřený pomocí h a τ	46
5.1	Časová interpolace	47
5.2	Odhady členů obsahujících η	50
6	Hlavní výsledek	56
7	Stlačitelné vazké proudění	58
7.1	Navierovy-Stokesovy rovnice	58
7.2	Bezrozměrný tvar Navierových-Stokesových rovnic	59
7.3	ALE-formulace Navierových-Stokesových rovnic	63
7.4	Popis interakce	64
8	Diskretizace	67
8.1	Semidiskretizace	67
8.1.1	Formulace 1	68
8.1.2	Formulace 2	75
8.2	Nespojitá Galerkinova metoda pro semidiskrétní problém	78
8.3	Úplná časoprostorová nespojitá Galerkinova metoda	84
8.4	Diskretizace interakce	85
8.5	Realizace ALE zobrazení	87
9	Algoritmizace	90
9.1	Numerický výpočet integrálů	95
10	Numerické výsledky	100
10.1	Popis programu	100
10.2	Interakce	101
10.3	Interakce profilu s proudícím vzduchem pro vysoké náběžné rychlosti	103
11	Závěr	130

1 Úvod

Zkoumání interakce proudění s obtékaným tělesem hraje v dnešní době důležitou roli v mnoha vědních oborech, jako je např. letectví (vibrující křídlo), stavebnictví (interakce větru s mosty, televizními věžemi nebo chladicími věžemi elektráren) nebo biomechanika (studium proudění v hlasivkách). Cílem zkoumání interakce je studium chování tělesa v proudícím prostředí, studium působících sil na toto těleso (v případě elastického tělesa i studium deformace vlivem působících sil) a předpovídání a odstranění nestabilit. Proto tento obor je velmi významný hlavně z technického hlediska (viz monografie Bisplinghoff et al. [3], Dowell [11] a Naudasher and Rockwell [30]). Dále má tento výzkum velký význam pro provozní bezpečnost letadel a snížení ceny reálných experimentů. Z tohoto důvodu je tento obor velmi rozvinutý a výzkum v posledních letech dosáhl značných výsledků (např. [38]), na rozdíl od teoretických. Hlavními důvody, proč neexistuje dostatečné množství teoretických výsledků, je matematická složitost tohoto problému způsobená časovou závislostí výpočetní oblasti a problémem propojení rovnic popisujících proudění tekutiny a pohyb a deformaci elastického tělesa. Můžeme zmínit např. práci [31], která se věnuje řešitelnosti Navierových-Stokesových rovnic v časově závislé oblasti, a práce [21], [22] a [23], kde je studována interakce vazké tekutiny s elastickým tělesem.

Hlavní pozornost bude věnována numerické simulaci interakce stlačitelného vazkého proudění s vibrujícím profilem. Z hlediska letectví je velmi důležité simulovat proudění způsobující vibrace profilu k určení nestabilit, které vedou k nežádoucímu rozkmitání.

Široce využívané komerční programy, jako jsou NASTRAN, FLUENT nebo ANSYS, umožňují řešit pouze speciální problémy z aerolelasticity nebo hydroelasticity. Pomocí programu NASTRAN lze pouze určit kritickou náběžnou rychlost proudu, při které již nedochází k tlumení vibrací, ale pomocí tohoto programu již nelze zjistit chování vibrací profilu pro vyšší náběžné (nadkritické) rychlosti, kdy dochází ke kmitání s velkými amplitudami.

Existují dva hlavní přístupy k simulaci interakce proudění s tělesem. První přístup řeší rovnice proudění a interakci tělesa zároveň pomocí jednoho řešiče. Druhý přístup řeší rovnice proudění a interakci tělesa odděleně pomocí rozdílných řešičů, kdy je možné řešit rovnice proudění a rovnice interakce tělesa různými a zřejmě i efektivnějšími technikami, které byly vyvinuty speciálně buď pro rovnice proudění, nebo rovnice interakce. My budeme využívat druhý přístup.

Pro nízké náběžné rychlosti lze použít jednodušší model nestlačitelného vazkého proudění, kdy stlačitelnost vzduchu má na výsledky malý vliv. Tento vliv ale s rostoucí náběžnou rychlostí proudu roste a pro reálné situace je vhodné použít model stlačitelného vazkého proudění. Při řešení rovnic stlačitelného vazkého proudění se ukazuje, že klasické metody, jako je metoda konečných diferencí, metoda konečných objemů nebo i standartní metoda konečných prvků, neposkytují vždy dostatečně přesné numerické řešení. Ukazuje se, že vhodná metoda pro zmíněný problém je nespojitá Galerkinova metoda (DGFEM). U této metody jsou možné dva hlavní přístupy.

V prvním přístupu v diskretizaci nestacionárních problémů se používá tzv. prostorová semidiskretizace, kdy aplikujeme diskretizaci na prostorové proměnné, ale čas zatím necháváme spojitý. Tento postup vede na velký systém obyčejných diferenciálních rovnic, který může být řešen pomocí vhodného numerického řešiče (např. Runge-Kuttovy metody,

kteřá je ale podmíněně stabilní). Ukazuje se ale, že pro řešení rovnic proudění je vhodnější aplikovat implicitní nebo semi-implicitní metodu (např. [35], [19], [7], [9]). Bohužel tyto metody mají nízký řád přesnosti v čase. Vhodná metoda vyššího řádu v čase, která je nepodmíněně stabilní, je tzv. backward difference formula (BDF) (např. [7], [10]). Druhý přístup, kdy aplikujeme diskretizaci pomocí nespojitě Galerkinovy metody jak v prostoru, tak i v čase, je tzv. úplná časoprostorová nespojitě Galerkinova metoda (space-time discontinuous Galerkin method (STDGM)). Pomocí tohoto schématu dostáváme numerické schéma vyššího řádu přesnosti jak v prostoru, tak i v čase.

Původní DGFEM byla uvedena v [33] jako numerická metoda pro řešení neutronové transportní rovnice. První analýza této metody byla provedena v [29] a později vylepšena v [27]. Časová DG diskretizace byla uvedena a analyzovaná v [12] pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic. V [1], [13], [14], [36] a [37] je řešena parabolická rovnice za pomoci konformních konečných prvků v prostoru kombinovaných s časovou diskretizací. Práce [26] a [39] již používají STDGM na časoprostorové oblasti.

V této dizertační práci se budeme nejprve v kapitole 4 zabývat odvozením odhadu chyby časoprostorové nespojitě Galerkinovy metody problému z kapitoly 2 s nelineární konvekcí a nelineární difuzí. Tento problém s lineární difuzí byl řešen v [20]. Nicméně pro nelineární difuzi postup použitý v [20] není vhodný. Proto v této práci použijeme jiný přístup k řešení problému s nelineární difuzí. V kapitole 5 vyjádříme odhad chyby za pomoci parametrů h a τ prostorové a časové sítě. V kapitole 7 nejprve uvedeme Navierovy-Stokesovy rovnice popisující stlačitelné proudění a ukážeme, jak tyto rovnice převedeme na tzv. bezrozměrný tvar, s kterým se lépe pracuje. Dále časovou závislost výpočetní oblasti vezmeme v úvahu pomocí ALE (arbitrary Lagrangian-Eulerian) metody a Navierovy-Stokesovy rovnice převedeme na ALE tvar. Na závěr této kapitoly uvedeme rovnice popisující pohyb profilu, které budou představovat interakci profilu s obtékaným plynem. V kapitole 8 nejprve popíšeme postup pro semidiskretizaci v prostoru. Potom nejprve ukážeme postup řešení pomocí semiimplicitního schématu a metody BDF na časově závislých oblastech a následně i postup použití úplné časoprostorové nespojitě Galerkinovy metody rovněž na časově závislých oblastech. V kapitole 9 popíšeme postup algoritmizace těchto dvou zmíněných metod pro počítačovou realizaci. V kapitole 10 nejprve popíšeme program, pomocí něhož byly vypočítány všechny příklady, a potom uvedeme numerické výsledky, které byly dosaženy oběma metodami v reálné situaci pro nízké náběžné rychlosti řešené již v [24] pomocí metody konečných prvků s vhodnou stabilizací. V závěru této kapitoly ukážeme robustnost těchto metod, a to zejména STDGM řešením reálných situací stlačitelného vazkého proudění při vysokých náběžných rychlostech proudu s velkými Reynoldsovými čísly.

2 Formulace skalárního modelového problému

Uvažujme následující nestacionární nelineární konvektivně-difuzní problém: Najděte $u : Q_T = \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{s=1}^d \frac{\partial f_s(u)}{\partial x_s} - \operatorname{div}(\beta(u)\nabla u) = g \quad \text{v } Q_T, \\ b) \quad & u|_{\partial\Omega \times (0, T)} = u_D, \\ c) \quad & u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Předpokládejme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ je omezená polygonální (pro $d = 2$) resp. omezená polyhedrální (pro $d = 3$) oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí $\Gamma_D = \partial\Omega$, $T > 0$. Necht' dále $g : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$, $u_D : \partial\Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ a $u^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jsou dané funkce a $f_s \in C^1(\mathbb{R})$, $s = 1, \dots, d$ jsou dané nevazké toky. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f_s(0) = 0$, $s = 1, \dots, d$, protože $\frac{\partial}{\partial x_s} f_s(u) = \frac{\partial}{\partial x_s} (f_s(u) - f_s(0))$, a tudíž místo $f_s(u)$ můžeme uvažovat $f_s(u) := f_s(u) - f_s(0)$. Dále předpokládejme, že funkce β splňuje následující podmínky

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow [\beta_0, \beta_1], \quad 0 < \beta_0 < \beta_1 < \infty, \quad (2.2)$$

$$|\beta(u_1) - \beta(u_2)| \leq L_\beta |u_1 - u_2|, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Navíc předpokládejme, že slabé řešení u je dostatečně regulární, tedy

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0, T); H^{p+1}(\Omega)), \quad (2.4)$$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_R \quad \text{pro s.v. } t \in (0, T) \quad (2.5)$$

pro celé $p \geq 1$. V důsledku (2.4) máme $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T])$.

Budeme používat následující standardní značení prostorů funkcí. Jestliže Ω je omezená oblast, potom definujeme Lebesgueovy prostory následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) &= \left\{ \text{měřitelná funkce } \varphi; \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |\varphi| < \infty \right\}, \\ L^2(\Omega) &= \left\{ \text{měřitelná funkce } \varphi; \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \right\} \end{aligned}$$

a Sobolevovy prostory

$$H^k(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega); \|\varphi\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

se seminormou

$$|\varphi|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Navíc budeme používat Bochnerovy prostory. Nechť X je Banachův prostor s normou $\|\cdot\|_X$ a seminormou $|\cdot|_X$ a nechť s je přirozené číslo. Potom definujeme (viz. např. [18]):

$$\begin{aligned} C([0, T]; X) &= \left\{ \varphi : [0, T] \rightarrow X, \text{spojité, } \|\varphi\|_{C([0, T]; X)} = \sup_{t \in [0, T]} \|\varphi\|_X < \infty \right\}, \\ L^2(0, T; X) &= \left\{ \varphi : (0, T) \rightarrow X, \text{měřitelná, } \|\varphi\|_{L^2(0, T; X)}^2 = \int_0^T \|\varphi\|_X^2 dt < \infty \right\}, \\ H^s(0, T; X) &= \left\{ \varphi \in L^2(0, T; X); \|\varphi\|_{H^s(0, T; X)}^2 = \int_0^T \sum_{\alpha=0}^s \left\| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial t^\alpha} \right\|_X^2 dt < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Navíc značíme

$$\begin{aligned} |\varphi|_{C([0, T]; X)} &= \sup_{t \in [0, T]} |\varphi|_X, \\ |\varphi|_{L^2(0, T; X)} &= \left(\int_0^T |\varphi|_X^2 dt \right)^{1/2}, \\ |\varphi|_{H^s(0, T; X)} &= \left(\int_0^T \left| \frac{\partial^s \varphi}{\partial t^s} \right|_X^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Dále, je-li J interval, pak $P^q(J, X)$ bude značit prostor všech funkcí tvaru $\sum_{i=0}^q t^i v_i$, kde $v_i \in X$ pro $i = 0, \dots, q$. Symbolem (\cdot, \cdot) budeme značit skalární součin v prostoru $L^2(\Omega)$, tj.

$$(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi \psi dx \quad \text{pro } \phi, \psi \in L^2(\Omega).$$

3 Diskretizace skalárního modelového problému

Abychom mohli provést diskretizaci v čase, uvažujme dělení $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ časového intervalu $[0, T]$. Označme $I_m = (t_{m-1}, t_m)$, $\bar{I}_m = [t_{m-1}, t_m]$, $\tau_m = t_m - t_{m-1}$, pro $m = 1, \dots, M$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Oblast $\Omega \times I_m$ bude tzv. *m-tá časová vrstva*. Z toho již plyne, že

$$[0, T] = \bigcup_{m=1}^M \bar{I}_m, \quad I_m \cap I_n = \emptyset \quad \text{pro } m \neq n. \quad (3.1)$$

Dále pro funkci φ definovanou v $\cup_{m=1}^M I_m$ zavádíme následující značení:

$$\varphi_m^\pm = \varphi(t_m^\pm) = \lim_{t \rightarrow t_m^\pm} \varphi(t), \quad (3.2)$$

$$\{\varphi\}_m = \varphi_m^+ - \varphi_m^-. \quad (3.3)$$

Obecně pro každý časový interval I_m definujeme $\mathcal{T}_{h,m}$ ($h > 0$) jako dělení uzávěru $\bar{\Omega}$ oblasti Ω na konečný počet uzavřených trojúhelníků K (pro $d = 2$) resp. čtyřstěnů (pro $d = 3$) s navzájem disjunktními vnitřky. Pak $\mathcal{T}_{h,m}$ nazýváme triangulací oblasti Ω a K elementy (prvky) triangulace $\mathcal{T}_{h,m}$. Pro jednoduchost budeme dále předpokládat, že triangulace jsou ve všech časových vrstvách identické, tedy $\mathcal{T}_{h,m} = \mathcal{T}_h$ pro $m = 1, \dots, M$.

Označme $h_K = \text{diam}(K)$ jako průměr množiny K , $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, $|K|$ jako Lebesgueovu míru elementu K a ρ_K jako poloměr největšího kruhu (koule) vepsaného do K . Elementy triangulace $\mathcal{T}_h = \{K_i\}_{i \in I}$ očíslovujeme tak, že $I \subset \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ je vhodná indexová množina. Jestliže pro dva elementy $K_i \neq K_j$ má množina $\partial K_i \cap \partial K_j$ kladnou $(d-1)$ -rozměrnou míru, nazýváme tyto dva elementy sousedy. Pak v tomto případě značíme $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} = \partial K_i \cap \partial K_j$.

Pro každé $i \in I$ definujeme množinu $s(i) = \{j \in I; K_j \text{ je soused } K_i\}$. Hranice $\partial\Omega$ je tvořena konečným počtem stran (resp. stěn) elementů K_i přilehlých k $\partial\Omega$. Tyto strany (resp. stěny) označíme S_j , kde $j \in I_b \subset \mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$, a definujeme množinu $\gamma_D(i) = \{j \in I_b; S_j \text{ je strana (resp. stěna) } K_i\}$, $\Gamma_{ij} = S_j$ pro $K_i \in \mathcal{T}_h$ takové, pro které je $S_j \subset \partial K_i$, $j \in I_b$. Pro element K_i , který není hraničním elementem, pokládáme $\gamma_D(i) = \emptyset$. Zřejmě platí, že $s(i) \cap \gamma_D(i) = \emptyset$ pro libovolné $i \in I$. Pokud označíme $S(i) = s(i) \cup \gamma_D(i)$, pak můžeme psát

$$\partial K_i = \bigcup_{j \in S(i)} \Gamma_{ij}, \quad \partial K_i \cap \partial\Omega = \bigcup_{j \in \gamma_D(i)} \Gamma_{ij}.$$

Dále používáme následující značení: $\mathbf{n}_{ij} = ((n_{ij})_1, \dots, (n_{ij})_d)$ je vnější jednotková normála k ∂K_i na hraně Γ_{ij} (\mathbf{n}_{ij} je konstantní vektor na Γ_{ij}), $h(\Gamma_{ij}) = |\Gamma_{ij}| = (d-1)$ -dimenzionální Lebesgueova míra Γ_{ij} .

Na triangulaci \mathcal{T}_h definujeme prostor:

$$H^k(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v; v|_K \in H^k(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (3.4)$$

Seminormu na tomto prostoru definujeme vztahem

$$|v|_{H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^k(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in H^k(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (3.5)$$

Pro $v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ zavádíme označení:

$$\begin{aligned} v|_{\Gamma_{ij}} &= \text{stopa } v|_{K_i} \text{ na } \Gamma_{ij}, \\ v|_{\Gamma_{ji}} &= \text{stopa } v|_{K_j} \text{ na } \Gamma_{ji}, \\ \langle v \rangle_{\Gamma_{ij}} &= \frac{1}{2}(v|_{\Gamma_{ij}} + v|_{\Gamma_{ji}}), \\ [v]_{\Gamma_{ij}} &= v|_{\Gamma_{ij}} - v|_{\Gamma_{ji}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

definující *stopu*, *průměr* a *skok stop* funkce v na $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$. Je zřejmé z těchto definic, že

$$\begin{aligned} \langle v \rangle_{\Gamma_{ij}} &= \langle v \rangle_{\Gamma_{ji}}, \\ [v]_{\Gamma_{ij}} &= -[v]_{\Gamma_{ji}}, \\ [v]_{\Gamma_{ij}} \mathbf{n}_{ij} &= [v]_{\Gamma_{ji}} \mathbf{n}_{ji}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pro jednoduchost zápisu budeme pro skok a průměr index Γ_{ij} vynechávat. Dále definujeme S_h^p jako prostor obecně nespojitých po částech polynomiálních funkcí, který je definován takto:

$$S_h^p = \{v \in L^2(\Omega); v|_K \in P^p(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.8)$$

kde p je kladné celé číslo a $P^p(K)$ je prostor polynomů na elementu K stupně $\leq p$.

Jestliže $u, v, \varphi \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$, pak definujeme následující formy

$$\begin{aligned} a_h(u, v, \varphi) &= \sum_{i \in I} \int_{K_i} \beta(u) \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &- \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \langle \beta(u) \nabla v \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij} [\varphi] \, dS \\ &- \theta \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \langle \beta(u) \nabla \varphi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij} [v] \, dS \\ &- \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \beta(u) \nabla v \cdot \mathbf{n}_{ij} \varphi \, dS \\ &- \theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \beta(u) \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij} v \, dS \\ &+ \theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \beta(u) \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij} u_D \, dS, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$b_h(u, \varphi) = - \sum_{i \in I} \int_{K_i} \sum_{s=1}^d f_s(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} dx \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} H(u|_{\Gamma_{ij}}, u|_{\Gamma_{ji}}, \mathbf{n}_{ij}) [\varphi] dS \\ &+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} H(u|_{\Gamma_{ij}}, u|_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{n}_{ij}) \varphi dS, \\ J_h(u, \varphi) &= \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \int_{\Gamma_{ij}} [u] [\varphi] dS \quad (3.11) \\ &+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \int_{\Gamma_{ij}} u \varphi dS, \end{aligned}$$

$$A_h(u, v, \varphi) = a_h(u, v, \varphi) + \beta_0 J_h(u, \varphi), \quad (3.12)$$

$$l_h(\varphi) = (g, \varphi) + \beta_0 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \int_{\Gamma_{ij}} u_D \varphi dS, \quad (3.13)$$

kde $C_W > 0$ je vhodně zvolená konstanta. Pro volbu $\theta = 1$ resp. $\theta = 0$ resp. $\theta = -1$ dostáváme symetrický (SIPG) resp. nekompletní (IIPG) resp. nesymetrický (NIPG) tvar difuzního členu. Dále předpokládáme, že funkce $H(u, v, \mathbf{n})$, tzv. numerický tok vystupující ve formě b_h , splňuje následující podmínky (H):

1. $H(u, v, \mathbf{n})$ je definován v $\mathbb{R}^2 \times B_1$, kde $B_1 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d; |\mathbf{n}| = 1\}$, a je lipschitzovsky spojitý v proměnných u, v :

$$|H(u, v, \mathbf{n}) - H(u^*, v^*, \mathbf{n})| \leq L_H (|u - u^*| + |v - v^*|) \quad (3.14)$$

$$u, v, u^*, v^* \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in B_1.$$

2. $H(u, v, \mathbf{n})$ je konzistentní:

$$H(u, u, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^d f_s(u) n_s, \quad u \in \mathbb{R}, \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in B_1. \quad (3.15)$$

3. $H(u, v, \mathbf{n})$ je konzervativní:

$$H(u, v, \mathbf{n}) = -H(v, u, -\mathbf{n}) \quad u, v \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in B_1. \quad (3.16)$$

Z předpokladů (3.14) a (3.15) plyne, že funkce f_s , $s = 1, \dots, d$ jsou lipschitzovsky spojitě s konstantou $L_f = 2L_H$.

Za předpokladu, že $f_s(0) = 0$ pro $s = 1, \dots, d$, platí:

$$H(0, 0, \mathbf{n}) = 0 \quad \forall \mathbf{n} \in B_1. \quad (3.17)$$

Na prostoru $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ definujeme následující normu

$$\|\varphi\|_{DG} = \left(\sum_{i \in I} |\varphi|_{H^1(K_i)}^2 + J_h(\varphi, \varphi) \right)^{1/2}, \quad \text{kde } \varphi \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (3.18)$$

3.1 Diskrétní problém

Definujme Π jako $L^2(\Omega)$ -projekci na prostor S_h^p . Tzn., že jestliže $\varphi \in L^2(\Omega)$, potom $\Pi\varphi \in S_h^p$ a

$$(\Pi\varphi - \varphi, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in S_h^p. \quad (3.19)$$

Nechť $p, q \geq 1$ jsou přirozená čísla. Potom přibližné řešení problému (2.1) budeme hledat v prostoru

$$S_{h,\tau}^{p,q} = \left\{ \varphi \in L^2(Q_T); \varphi|_{I_m} = \sum_{i=0}^q t^i \varphi_i, \quad \text{kde } \varphi_i \in S_h^p \right\}. \quad (3.20)$$

Dále budeme používat označení $U' = \frac{\partial U}{\partial t}$ a $u' = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Definice: Řekneme, že funkce $U \in S_{h,\tau}^{p,q}$ je přibližné řešení problému (2.1), jestliže splňuje

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} ((U', \varphi) + A_h(U, U, \varphi) + b_h(U, \varphi)) dt + (\{U\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \\ &= \int_{I_m} l_h(\varphi) dt \quad \forall \varphi \in S_{h,\tau}^{p,q} \quad \forall m = 1, \dots, M, \\ U(0-) &= U_0^- = \Pi u^0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Podobně jako v [20] lze dokázat, že přesné dostatečně regulární řešení u splňuje rovnici

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} ((u', \varphi) + A_h(u, u, \varphi) + b_h(u, \varphi)) dt + (\{u\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \\ &= \int_{I_m} l_h(\varphi) dt \quad \forall \varphi \in S_{h,\tau}^{p,q}, \quad \forall m = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (3.22)$$

4 Odhad chyby

4.1 Některé pojmy a pomocná tvrzení

Pro analýzu chyby budeme používat $S_{h,\tau}^{p,q}$ -interpolaci π funkce $v \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ definovanou následujícím způsobem

$$\begin{aligned} a) \quad & \pi v \in S_{h,\tau}^{p,q}, \\ b) \quad & (\pi v)(t_m -) = \Pi v(t_m -), \\ c) \quad & \int_{I_m} (\pi v - v, \varphi^*) dt = 0 \quad \forall \varphi^* \in S_{h,\tau}^{p,q-1}, \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned} \tag{4.1}$$

K důkazu existence a jednoznačnosti projekce $\pi : C([0, T]; L^2(\Omega)) \rightarrow S_{h,\tau}^{p,q}$ nejprve zavedeme následující definice.

Legendrový polynomy na $(-1, 1)$ jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned} L_0(\vartheta) &= 1, \\ L_1(\vartheta) &= \vartheta, \\ L_{i+1}(\vartheta) &= \frac{2i+1}{i+1} \vartheta L_i(\vartheta) - \frac{i}{i+1} L_{i-1}(\vartheta). \end{aligned}$$

Indukcí lze ukázat, že polynomy L_i jsou L^2 -ortogonální na $(-1, 1)$ a splňují $L_i(1) = 1$. Nakonec definujeme projekci $\hat{\pi}$:

$$\begin{aligned} a) \quad & \hat{\pi} \hat{v} \in P^q(-1, 1; S_h^p), \\ b) \quad & (\hat{\pi} \hat{v})(1-) = \Pi \hat{v}(1-), \\ c) \quad & \int_{-1}^1 (\hat{\pi} \hat{v} - \hat{v}, \varphi^*) d\vartheta = 0 \quad \forall \varphi^* \in P^{q-1}(-1, 1; S_h^p). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Lemma 1 *Projekci $\hat{\pi}$ lze jednoznačně vyjádřit za použití Legendrových polynomů následujícím způsobem. Pro $\hat{v} \in C([-1, 1]; L^2(\Omega))$ máme*

$$\hat{\pi} \hat{v} = \sum_{i=0}^{q-1} \hat{v}_i L_i + \left(\Pi \hat{v}(1) - \sum_{i=0}^{q-1} \hat{v}_i \right) L_q, \tag{4.3}$$

kde

$$\Pi \hat{v} = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{v}_i L_i, \quad \hat{v}_i \in S_h^p. \tag{4.4}$$

Důkaz. Nejprve ukažme, že $\hat{\pi} \hat{v}$ definované v (4.3) a (4.4) splňuje (4.2). Je zřejmé, že $\hat{\pi} \hat{v} \in P^q(-1, 1; S_h^p)$ a $\hat{\pi} \hat{v}(1-) = \sum_{i=0}^{q-1} \hat{v}_i L_i(1) + (\Pi \hat{v}(1) - \sum_{i=0}^{q-1} \hat{v}_i) L_q(1) = \sum_{i=0}^{q-1} \hat{v}_i +$

$\Pi\hat{v}(1) - \sum_{i=0}^{q-1} \hat{v}_i = \Pi\hat{v}(1)$. Dále zvolme libovolné $w \in S_h^p$ a $k < q$. S využitím (3.19), (4.3) a (4.4) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{\pi}\hat{v} - \hat{v}, wL_k) \, d\vartheta &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=0}^{q-1} \hat{v}_i L_i + \left(\Pi\hat{v}(1) - \sum_{i=0}^{q-1} \hat{v}_i \right) L_q - \Pi\hat{v}, wL_k \right) \, d\vartheta \\ &= \int_{-1}^1 \left(- \sum_{i=q}^{\infty} \hat{v}_i L_i + \left(\Pi\hat{v}(1) - \sum_{i=0}^{q-1} \hat{v}_i \right) L_q, wL_k \right) \, d\vartheta = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

díky ortogonalitě polynomů L_i .

Nyní je třeba dokázat jednoznačnost. Předpokládejme, že existují $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in P^q(-1, 1; S_h^p)$ splňující (4.2)b) a (4.2)c). Z (4.2)b) plyne, že $\hat{v}_1(1-) = \hat{v}_2(1-) \in S_h^p$. Potom existuje $\tilde{w} \in P^{q-1}(-1, 1; S_h^p)$ takové, že $\hat{v}_1(\vartheta) - \hat{v}_2(\vartheta) = (\vartheta - 1)\tilde{w}(\vartheta)$. Z (4.2)c) pak plyne, že

$$0 = \int_{-1}^1 (\hat{v}_1(\vartheta) - \hat{v}_2(\vartheta), \tilde{w}(\vartheta)) \, d\vartheta = \int_{-1}^1 (\vartheta - 1) \|\tilde{w}(\vartheta)\|^2 \, d\vartheta. \quad (4.6)$$

Vzhledem k tomu, že funkce $(\vartheta - 1) \|\tilde{w}(\vartheta)\|^2$ je spojitá a záporná na intervalu $(-1; 1)$, potom platí, že $\|\tilde{w}(\vartheta)\|^2 = 0$ pro všechna $\vartheta \in (-1, 1)$, a tedy $\tilde{w} = 0$. ■

Nyní pokud definujeme zobrazení $Q_m : (-1, 1) \rightarrow I_m = (t_{m-1}, t_m)$ takové, že

$$Q_m(\vartheta) := \frac{t_m + t_{m-1} + \vartheta\tau_m}{2}, \quad \vartheta \in (-1, 1),$$

potom můžeme definovat

$$(\pi v)|_{I_m} = (\hat{\pi}(v \circ Q_m)) \circ Q_m^{-1}.$$

Je zřejmé, že takto definovaná projekce π splňuje (4.1). Vzhledem k tomu, že $\hat{\pi}$ je definováno jednoznačně, dostáváme i jednoznačnost projekce π . Navíc platí

$$(\pi v)|_{I_m} = \pi(\Pi v)|_{I_m}. \quad (4.7)$$

V dalším budeme dále předpokládat, že triangulace je tzv. *regulární* a *lokálně kvaziuniformní*. Existují tedy konstanty $C_Q, C_Z > 0$ takové, že

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq C_Z, \quad K \in \mathcal{T}_h, \quad h \in (0, h_0), \quad (4.8)$$

$$h_K \leq C_Q h_{K'}, \quad \text{pro sousední elementy } K, K' \in \mathcal{T}_h, \quad (4.9)$$

a existuje taková kladná konstanta C_T , že

$$C_T h_{K_i} \leq h(\Gamma_{ij}) \leq h_{K_j}, \quad \text{kde } i \in I, j \in S(i). \quad (4.10)$$

Dále budeme potřebovat následující tvrzení.

Tvrzení 2 (*Multiplikativní věta o stopách*) Existuje konstanta $C_M > 0$ nezávislá na v, h a K taková, že

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\partial K)}^2 &\leq C_M \left(\|v\|_{L^2(K)} |v|_{H^1(K)} + h_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)}^2 \right), \\ v &\in H^1(K), K \in \mathcal{T}_h, h \in (0, h_0). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Důkaz je proveden např. v [8].

Tvrzení 3 (*Inverzní nerovnost*) Existuje konstanta $C_I > 0$ nezávislá na v, h a K taková, že platí

$$|v|_{H^1(K)} \leq C_I h_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)}, \quad v \in P^p(K), K \in \mathcal{T}_h, h \in (0, h_0). \quad (4.12)$$

Pro důkaz odkazujeme čtenáře na [2].

Tvrzení 4 Existuje konstanta $C_{MI} > 0$ nezávislá na v, h a K taková, že platí

$$h_K \|v\|_{L^2(\partial K)}^2 \leq C_{MI} \|v\|_{L^2(K)}^2, \quad v \in P^p(K), K \in \mathcal{T}_h, h \in (0, h_0). \quad (4.13)$$

Důkaz. Vyjdeme z tvrzení 2 a $|v|_{H^1(K)}$ odhadneme podle (4.12) z tvrzení 3 a dostaneme

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\partial K)}^2 &\leq C_M \left(\|v\|_{L^2(K)} C_I h_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)} + h_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)}^2 \right) \\ &= h_K^{-1} C_M (C_I + 1) \|v\|_{L^2(K)}^2, \end{aligned}$$

z čeho již pro volbu $C_{MI} = C_M(C_I + 1)$ plyne (4.13). ■

Tvrzení 5 Existuje konstanta $C_O > 0$ nezávislá na v, h a K taková, že

$$\begin{aligned} h_K \|v\|_{L^2(\partial K)}^2 &\leq C_O \left(\|v\|_{L^2(K)}^2 + h_K^2 |v|_{H^1(K)}^2 \right), \\ v &\in H^1(K), K \in \mathcal{T}_h, h \in (0, h_0). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Důkaz. Vyjdeme z tvrzení 2 a s využitím Youngovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} h_K \|v\|_{L^2(\partial K)}^2 &\leq C_M \left(\|v\|_{L^2(K)} h_K |v|_{H^1(K)} + \|v\|_{L^2(K)}^2 \right) \\ &\leq C_M \left(\|v\|_{L^2(K)}^2 + h_K^2 |v|_{H^1(K)}^2 + \|v\|_{L^2(K)}^2 \right) \leq C_O \left(\|v\|_{L^2(K)}^2 + h_K^2 |v|_{H^1(K)}^2 \right), \end{aligned}$$

kde $C_O := 2C_M$. ■

Tvrzení 6 Existuje konstanta $C_N > 0$ nezávislá na v, h a K taková, že

$$\begin{aligned} h_K |\nabla v|_{L^2(\partial K)}^2 &\leq C_N \left(|v|_{H^1(K)}^2 + h_K^2 |v|_{H^2(K)}^2 \right), \\ v &\in H^2(K), K \in \mathcal{T}_h, h \in (0, h_0). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Důkaz. Zřejmé z předchozího tvrzení. ■

Definice: Řekneme, že pro libovolné $y \in I_m$ je funkce $\zeta_y \in S_{h,\tau}^{p,q}$ *diskrétní charakteristická funkce* k funkci $\xi \in S_{h,\tau}^{p,q}$ v bodě y , jestliže splňuje následující podmínky:

$$\int_{I_m} (\zeta_y, \varphi) dt = \int_{t_{m-1}}^y (\xi, \varphi) dt \quad \forall \varphi \in S_{h,\tau}^{p,q-1}, \quad (4.16)$$

$$\zeta_y(t_{m-1}^+) = \xi(t_{m-1}^+). \quad (4.17)$$

Pro existenci a jednoznačnost funkce ζ_y dokážeme nejprve následující dvě lemmata.

Lemma 7 *Nechť $\tau > 0$. Zvolme libovolné, ale pevné $t \in (0, \tau)$. Potom pro libovolné $p \in P^q(0, \tau)$ existuje právě jedno $\tilde{p} \in P^q(0, \tau)$ splňující*

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \tilde{p} z d\vartheta &= \int_0^t p z d\vartheta \quad \forall z \in P^{q-1}(0, \tau), \\ \tilde{p}(0) &= p(0). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Zobrazení $\tilde{\psi}_t : p \mapsto \tilde{p}$ v $P^q(0, \tau)$ je lineární, spojitě a existuje konstanta \tilde{C}_q závislá pouze na q taková, že platí $\|\tilde{p} - p\|_{L^2(0,\tau)} \leq \tilde{C}_q \|p\|_{L^2(t,\tau)}$. Navíc

$$\|\tilde{p}\|_{L^2(0,\tau)} \leq (1 + \tilde{C}_q) \|p\|_{L^2(0,\tau)}. \quad (4.19)$$

Důkaz. 1. Nejprve dokážeme existenci a jednoznačnost funkce \tilde{p} . Jelikož $\tilde{p} \in P^q(0, \tau)$, můžeme pro dané p hledat \tilde{p} ve tvaru $\tilde{p}(\vartheta) = \sum_{i=0}^q c_i \vartheta^i$. Z (4.18) je zřejmé, že $\tilde{p}(0) = p(0) = c_0$. Protože funkce $\vartheta^j, j = 0, \dots, q-1$ tvoří bázi prostoru $P^{q-1}(0, \tau)$, potom z (4.18) pro libovolné $j = 0, \dots, q-1$ máme

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \sum_{i=0}^q c_i \vartheta^i \vartheta^j d\vartheta &= \int_0^t p \vartheta^j d\vartheta \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^q c_i \int_0^\tau \vartheta^{i+j} d\vartheta &= \int_0^t p \vartheta^j d\vartheta - c_0 \int_0^\tau \vartheta^j d\vartheta. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Položme $a_{ij} = \int_0^\tau \vartheta^{i+j} d\vartheta$ a $b_j = \int_0^t p \vartheta^j d\vartheta - c_0 \int_0^\tau \vartheta^j d\vartheta$. Jelikož matice $A = (a_{ij})$, která je tvořena skalárním součinem bázeových prvků ϑ^j (je to tzv. Gramova matice), je regulární, a tedy soustava $Ac = b$ má jednoznačné řešení. Tím je dokázána existence a jednoznačnost funkce \tilde{p} .

2. Linearita zobrazení je zřejmá. Nyní ukážeme spojitost. Protože $\tilde{p}(0) = p(0)$, potom můžeme psát, že $\tilde{p} - p = \vartheta \bar{p}$, kde $\bar{p} \in P^{q-1}(0, \tau)$. S využitím (4.18) pro libovolné $z \in P^{q-1}(0, \tau)$ máme

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \vartheta \bar{p} z d\vartheta &= \int_0^\tau (\tilde{p} - p) z d\vartheta = \int_0^\tau \tilde{p} z d\vartheta - \int_0^t p z d\vartheta - \int_t^\tau p z d\vartheta \\ &= - \int_t^\tau p z d\vartheta. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Protože prostor $P^{q-1}(0, 1)$ je konečně-dimenzionální a výrazy

$$\int_0^1 \hat{p}^2 dx, \quad \int_0^1 x \hat{p}^2 dx \quad a \quad \int_0^1 x^2 \hat{p}^2 dx \quad (4.22)$$

jsou normy na prostoru $P^{q-1}(0, 1)$, potom z věty o ekvivalenci norem na konečně-dimenzionálním prostoru plyne, že existují konstanty C_{q_1} a C_{q_2} závislé pouze na q takové, že

$$\begin{aligned} C_{q_1} \int_0^1 \hat{p}^2 dx &\leq \int_0^1 x \hat{p}^2 dx \quad \text{pro } \forall \hat{p} \in P^{q-1}(0, 1), \\ C_{q_2} \int_0^1 x^2 \hat{p}^2 dx &\leq \int_0^1 \hat{p}^2 dx \quad \text{pro } \forall \hat{p} \in P^{q-1}(0, 1). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Poněvadž $x^2 \leq 1$ pro $x \in [0, 1]$, máme $C_{q_2} = 1$. Jestliže položíme $x = \frac{\vartheta}{\tau}$ a použijeme větu o substituci, dostaneme

$$\begin{aligned} C_{q_1} \tau \int_0^\tau \bar{p}^2 d\vartheta &\leq \int_0^\tau \vartheta \bar{p}^2 d\vartheta \quad \text{pro } \forall \bar{p} \in P^{q-1}(0, \tau), \\ \int_0^\tau \vartheta^2 \bar{p}^2 d\vartheta &\leq \tau^2 \int_0^\tau \bar{p}^2 d\vartheta \quad \text{pro } \forall \bar{p} \in P^{q-1}(0, 1). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nyní v (4.21) položme $z := \bar{p}$. S využitím (4.24), (4.21) a *Cauchy–Schwarzovy* nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} C_{q_1} \tau \int_0^\tau \bar{p}^2 d\vartheta &\leq \int_0^\tau \vartheta \bar{p}^2 d\vartheta = - \int_t^\tau p \bar{p} d\vartheta \leq \sqrt{\int_t^\tau p^2 d\vartheta} \sqrt{\int_t^\tau \bar{p}^2 d\vartheta} \\ &\leq \sqrt{\int_t^\tau p^2 d\vartheta} \sqrt{\int_0^\tau \bar{p}^2 d\vartheta}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$(C_{q_1} \tau)^2 \int_0^\tau \bar{p}^2 d\vartheta \leq \int_t^\tau p^2 d\vartheta,$$

z čehož s využitím (4.24) máme

$$\begin{aligned} C_{q_1}^2 \int_0^\tau (\tilde{p} - p)^2 d\vartheta &= C_{q_1}^2 \int_0^\tau \vartheta^2 \bar{p}^2 d\vartheta \\ &\leq (C_{q_1} \tau)^2 \int_0^\tau \bar{p}^2 d\vartheta \leq \int_t^\tau p^2 d\vartheta. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Celkově tedy máme

$$\begin{aligned}\|\tilde{p}\|_{L^2(0,\tau)} &\leq \|\tilde{p} - p\|_{L^2(0,\tau)} + \|p\|_{L^2(0,\tau)} \leq \frac{1}{C_{q1}} \|p\|_{L^2(t,\tau)} + \|p\|_{L^2(0,\tau)} \\ &\leq (1 + \tilde{C}_q) \|p\|_{L^2(0,\tau)},\end{aligned}$$

kde

$$\tilde{C}_q = \frac{1}{C_{q1}}.$$

V dalších úvahách budeme v prostoru $P^q(0, \tau)$ uvažovat ortonormální bázi $\{p_m(\vartheta)\}_{m=0}^q$ zkonstruovanou tak, že $p_m \in P^m(0, \tau)$ pro $m = 0, \dots, q$. (Tato báze existuje v důsledku ortogonalizačního procesu báze $\{\vartheta^m\}_{m=0}^q$.)

Lemma 8 *Zvolme libovolně, ale pevně $t \in (0, \tau)$. Potom k libovolné funkci $v \in P^q(0, \tau; S_h^p)$ existuje právě jedna funkce $\tilde{v} \in P^q(0, \tau; S_h^p)$ splňující podmínky*

$$\begin{aligned}\int_0^\tau (\tilde{v}, w) dt &= \int_0^t (v, w) dt \quad \forall w \in P^{q-1}(0, \tau; S_h^p), \\ \tilde{v}(0) &= v(0).\end{aligned}\tag{4.26}$$

Napišeme-li funkci v ve tvaru $v = \sum_{m=0}^q p_m v_m$, kde $v_m \in S_h^p$, potom

$$\tilde{v} = \sum_{m=0}^q \tilde{p}_m v_m,\tag{4.27}$$

kde $\tilde{p}_m = \tilde{\psi}_t(p_m)$ a $\tilde{\psi}_t$ je zobrazení z lemmatu 7. Navíc existuje kladná konstanta C_{CH} závislá pouze na q taková, že

$$\int_0^\tau \|\tilde{v}\|_{DG}^2 dt \leq C_{CH} \int_0^\tau \|v\|_{DG}^2 dt.\tag{4.28}$$

Důkaz. 1. Nejprve ukážeme, že funkce \tilde{v} definovaná předpisem (4.27) splňuje (4.26). Je zřejmé, že $\tilde{v}(0) = \sum_{m=0}^q \tilde{p}_m(0)v_m = \sum_{m=0}^q p_m(0)v_m = v(0)$. Dále necht' $w \in P^{q-1}(0, \tau; S_h^p)$. Tuto funkci můžeme vyjádřit ve tvaru $w = \sum_{n=0}^{q-1} p_n(\vartheta)w_n$, kde $w_n \in S_h^p$. Potom

$$\begin{aligned}\int_0^\tau (\tilde{v}, w) d\vartheta &= \int_0^\tau \left(\sum_{m=0}^q \tilde{p}_m(\vartheta)v_m, \sum_{n=0}^{q-1} p_n(\vartheta)w_n \right) d\vartheta \\ &= \sum_{m=0}^q \sum_{n=0}^{q-1} (v_m, w_n) \int_0^\tau \tilde{p}_m(\vartheta) p_n(\vartheta) d\vartheta = \sum_{m=0}^q \sum_{n=0}^{q-1} (v_m, w_n) \int_0^t p_m(\vartheta) p_n(\vartheta) d\vartheta \\ &= \int_0^t \left(\sum_{m=0}^q p_m(\vartheta)v_m, \sum_{n=0}^{q-1} p_n(\vartheta)w_n \right) d\vartheta = \int_0^t (v, w) d\vartheta.\end{aligned}\tag{4.29}$$

2. Dále dokážeme jednoznačnost. Předpokládejme, že existují funkce $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in P^q(0, \tau; S_h^p)$ splňující (4.26). Protože $\tilde{v}_1(0) = \tilde{v}_2(0) = v(0)$, potom existuje $w_1 \in P^{q-1}(0, \tau; S_h^p)$ taková, že $\tilde{v}_1(\vartheta) - \tilde{v}_2(\vartheta) = \vartheta w_1(\vartheta)$. Jelikož

$$\int_0^\tau (\tilde{v}_1, w) \, d\vartheta = \int_0^\tau (\tilde{v}_2, w) \, d\vartheta = \int_0^\tau (v, w) \, d\vartheta \quad \forall w \in P^{q-1}(0, \tau; S_h^p),$$

potom můžeme položit $w := w_1$ a dostaneme

$$\int_0^\tau (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2, w_1) \, d\vartheta = \int_0^\tau (\vartheta w_1, w_1) \, d\vartheta = \int_0^\tau \vartheta (w_1, w_1) \, d\vartheta = 0.$$

Vzhledem k tomu, že funkce $\vartheta \|w_1(\vartheta)\|^2$ je spojitá a kladná na intervalu $(0, \tau)$, potom platí, že $\|w_1(\vartheta)\|^2 = 0$ pro všechna $\vartheta \in (0, \tau)$. Tudíž $w_1(\vartheta) = 0$ a z toho plyne, že $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2$.

3. Postupně s využitím Fubiniho věty, Cauchy-Schwarzovy nerovnosti, nerovnosti (4.19), nerovnosti $\sum_{i,j=0}^q a_i a_j \leq (q+1) \sum_{i=0}^q a_i^2$ a ortonormality funkcí p_m máme

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \int_0^\tau |\tilde{v}|_{H^1(K_i)}^2 \, d\vartheta = \sum_{i \in I} \int_0^\tau \left(\int_{K_i} (\nabla \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{v}) \, dx \right) \, d\vartheta \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{m,n=0}^q \int_0^\tau \tilde{p}_m(\vartheta) \tilde{p}_n(\vartheta) \, d\vartheta \int_{K_i} (\nabla v_m \cdot \nabla v_n) \, dx \\ &\leq \sum_{i \in I} \sum_{m,n=0}^q \|\tilde{p}_m\|_{L^2(0,\tau)} \|\tilde{p}_n\|_{L^2(0,\tau)} |v_m|_{H^1(K_i)} |v_n|_{H^1(K_i)} \\ &\leq (1 + \tilde{C}_q)^2 \sum_{i \in I} \sum_{m,n=0}^q \|p_m\|_{L^2(0,\tau)} \|p_n\|_{L^2(0,\tau)} |v_m|_{H^1(K_i)} |v_n|_{H^1(K_i)} \\ &\leq (1 + \tilde{C}_q)^2 (q+1) \sum_{i \in I} \sum_{m=0}^q \|p_m\|_{L^2(0,\tau)}^2 |v_m|_{H^1(K_i)}^2 \\ &= C_{CH} \sum_{i \in I} \sum_{m=0}^q \int_0^\tau p_m^2(\vartheta) \, d\vartheta \int_{K_i} |\nabla v_m|^2 \, dx \\ &= C_{CH} \sum_{i \in I} \sum_{m,n=0}^q \int_0^\tau p_m(\vartheta) p_n(\vartheta) \, d\vartheta \int_{K_i} (\nabla v_m \cdot \nabla v_n) \, dx \\ &= C_{CH} \sum_{i \in I} \int_0^\tau \left(\int_{K_i} (\nabla v \cdot \nabla v) \, dx \right) \, d\vartheta = C_{CH} \sum_{i \in I} \int_0^\tau |v|_{H^1(K_i)}^2 \, d\vartheta, \end{aligned} \tag{4.30}$$

kde jsme položili $C_{CH} = (1 + \tilde{C}_q)^2 (q+1)$. Podobným způsobem ukážeme, že

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_0^\tau \left(\int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [\tilde{v}]^2 \, dS \right) \, d\vartheta \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_0^\tau \left(\int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \left[\sum_{m=0}^q \tilde{p}_m(\vartheta) v_m \right] \left[\sum_{n=0}^q \tilde{p}_n(\vartheta) v_n \right] \, dS \right) \, d\vartheta \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \sum_{m,n=0}^q \int_0^\tau \tilde{p}_m(\vartheta) \tilde{p}_n(\vartheta) \, d\vartheta \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [v_m][v_n] \, dS \\
&\leq \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \sum_{m,n=0}^q \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \|\tilde{p}_m\|_{L^2(0,\tau)} \|\tilde{p}_n\|_{L^2(0,\tau)} |[v_m]|_{L^2(\Gamma_{ij})} |[v_n]|_{L^2(\Gamma_{ij})} \\
&\leq (1 + \tilde{C}_q)^2 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \sum_{m,n=0}^q \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \|p_m\|_{L^2(0,\tau)} \|p_n\|_{L^2(0,\tau)} |[v_m]|_{L^2(\Gamma_{ij})} |[v_n]|_{L^2(\Gamma_{ij})} \\
&\leq (1 + \tilde{C}_q)^2 (q+1) \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \sum_{m=0}^q \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \|p_m\|_{L^2(0,\tau)}^2 |[v_m]|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2 \\
&= C_{CH} \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \sum_{m=0}^q \int_0^\tau p_m^2(\vartheta) \, d\vartheta \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [v_m]^2 \, dS \\
&= C_{CH} \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \sum_{m,n=0}^q \int_0^\tau p_m(\vartheta) p_n(\vartheta) \, d\vartheta \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [v_m][v_n] \, dS \\
&= C_{CH} \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_0^\tau \left(\int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \left[\sum_{m=0}^q p_m(\vartheta) v_m \right] \left[\sum_{n=0}^q p_n(\vartheta) v_n \right] \, dS \right) \, d\vartheta \\
&= C_{CH} \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_0^\tau \left(\int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [v]^2 \, dS \right) \, d\vartheta. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Obdobně ukážeme, že

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in I} \sum_{i \in \gamma_D(i)} \int_0^\tau \left(\int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \tilde{v}^2 \, dS \right) \, d\vartheta \\
&\leq C_{CH} \sum_{i \in I} \sum_{i \in \gamma_D(i)} \int_0^\tau \left(\int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} v^2 \, dS \right) \, d\vartheta. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Nyní již z (4.30), (4.31) a (4.32) dostáváme (4.28). ■

Vzhledem k tomu, že diskrétní charakteristická funkce je translačně invariantní, potom z lemmatu 8 plyne existence a jednoznačnost funkce ζ_y splňující (4.16), (4.17) a

$$\int_{I_m} \|\zeta_y\|_{DG}^2 dt \leq C_{CH} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt, \quad (4.33)$$

kde konstanta C_{CH} je závislá pouze na q .

4.2 Odvození některých odhadů

Chybu metody $e = U - u$ si vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned} e &= \xi + \eta, \quad \text{kde} \\ \xi &= U - \pi u, \quad \eta = \pi u - u. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Dále klademe $\xi_m^\pm = U_m^\pm - (\pi u)_m^\pm$, $\eta_m^\pm = (\pi u)_m^\pm - u_m^\pm$, $\eta_0^- = (\pi u)_0^- - u_0 = \Pi u_0 - u_0$. Díky tomuto pak po odečtení rovnic (3.21) - (3.22) platí, že

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} ((\xi', \varphi) + A_h(U, U, \varphi) - A_h(u, u, \varphi)) dt + (\{\xi\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \\ &= \int_{I_m} (b_h(u, \varphi) - b_h(U, \varphi) - (\eta', \varphi)) dt - (\{\eta\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \quad \forall \varphi \in S_{h,\tau}^{p,q}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

pro $m = 1, \dots, M$. Rozepíšme si $A_h(U, U, \varphi) - A_h(u, u, \varphi)$ následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} & A_h(U, U, \varphi) - A_h(u, u, \varphi) = \\ &= a_h(U, U, \varphi) + \beta_0 J_h(U, \varphi) - a_h(u, u, \varphi) - \beta_0 J_h(u, \varphi) \\ &= a_h(U, U, \varphi) - a_h(U, \pi u, \varphi) + a_h(U, \pi u, \varphi) - a_h(u, \pi u, \varphi) \\ & \quad + a_h(u, \pi u, \varphi) - a_h(u, u, \varphi) + \beta_0 J_h(\xi, \varphi) + \beta_0 J_h(\eta, \varphi). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Pro následující odhady budeme potřebovat tzv. *Youngovu nerovnost*, kde pro libovolné $a, b, \varepsilon > 0$ platí

$$ab \leq 2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}. \quad (4.37)$$

Tato nerovnost plyne z nerovnosti $0 \leq (\sqrt{\varepsilon}a - \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}})^2$. Dále budeme používat tzv. *diskrétní Cauchyho nerovnost*: Pro libovolné $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ platí nerovnost

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2},$$

která plyne z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti pro skalární součin vektorů $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ a $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$.

Lemma 9 *Nechť máme libovolné funkce $u, v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$. Potom platí*

$$J_h(u, v) \leq (J_h(u, u))^{1/2} (J_h(v, v))^{1/2}. \quad (4.38)$$

Důkaz. Pro důkaz této nerovnosti nejprve využijeme integrální a potom diskrétní Cauchyho nerovnost. Tedy

$$\begin{aligned} J_h(u, v) &= \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [u][v] \, dS + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} uv \, dS \\ &\leq \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \left(\int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [u]^2 \, dS \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [v]^2 \, dS \right)^{1/2} \\ &\quad + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \left(\int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} u^2 \, dS \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} v^2 \, dS \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [u]^2 \, dS + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} u^2 \, dS \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [v]^2 \, dS + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} v^2 \, dS \right)^{1/2} \\ &= (J_h(u, u))^{1/2} (J_h(v, v))^{1/2}. \end{aligned}$$

■

Lemma 10 *Nechť*

$$C_W > 0, \quad \text{pro } \theta = -1 \text{ (NIPG)}, \quad (4.39)$$

$$C_W \geq \left(\frac{4\beta_1}{\beta_0} \right)^2 C_{MI} \quad \text{pro } \theta = 1 \text{ (SIPG)}, \quad (4.40)$$

$$C_W \geq \left(\frac{2\beta_1}{\beta_0} \right)^2 C_{MI} \quad \text{pro } \theta = 0 \text{ (IIPG)}, \quad (4.41)$$

kde C_{MI} je konstanta z tvrzení 4. Potom

$$a_h(U, U, \xi) - a_h(U, \pi u, \xi) + \beta_0 J_h(\xi, \xi) \geq \frac{\beta_0}{2} \|\xi\|_{DG}^2. \quad (4.42)$$

Důkaz. Označme

$$(\star) := a_h(U, U, \xi) - a_h(U, \pi u, \xi) + \beta_0 J_h(\xi, \xi). \quad (4.43)$$

Potom

$$\begin{aligned}
(\star) &= \sum_{i \in I} \int_{K_i} \beta(U) \nabla \xi \cdot \nabla \xi \, dx \\
&\quad - \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} (\langle \beta(U) \nabla \xi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\xi] + \theta \langle \beta(U) \nabla \xi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\xi]) \, dS \\
&\quad - \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} (\beta(U) \nabla \xi \cdot \mathbf{n}_{ij} \xi + \theta \beta(U) \nabla \xi \cdot \mathbf{n}_{ij} \xi) \, dS \\
&\quad + \beta_0 J_h(\xi, \xi).
\end{aligned}$$

Pro $\theta = -1$ a díky (2.2) pak dostaneme

$$(\star) \geq \beta_0 \sum_{i \in I} \int_{K_i} \nabla \xi \cdot \nabla \xi \, dx + \beta_0 J_h(\xi, \xi) \geq \frac{\beta_0}{2} \|\xi\|_{DG}^2.$$

Pro $\theta = 1$ máme

$$\begin{aligned}
(\star) &= \sum_{i \in I} \int_{K_i} \beta(U) \nabla \xi \cdot \nabla \xi \, dx + \beta_0 J_h(\xi, \xi) \\
&\quad - 2 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \langle \beta(U) \nabla \xi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\xi] \, dS \\
&\quad - 2 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \beta(U) \nabla \xi \cdot \mathbf{n}_{ij} \xi \, dS \\
&\geq \beta_0 \sum_{i \in I} \int_{K_i} |\nabla \xi|^2 \, dx + \beta_0 J_h(\xi, \xi) \\
&\quad - 2\beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{|\nabla \xi|_{\Gamma_{ij}} + |\nabla \xi|_{\Gamma_{ji}}}{2} \|\xi\| \, dS \\
&\quad - 2\beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} |\nabla \xi| |\xi| \, dS.
\end{aligned}$$

Nechť máme libovolné $\delta > 0$. Za použití Youngovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
(\star) &\geq \beta_0 \|\xi\|_{DG}^2 \\
&\quad - 2\beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{\delta C_W} (|\nabla \xi|_{\Gamma_{ij}}|^2 + |\nabla \xi|_{\Gamma_{ji}}|^2) + \frac{\delta C_W}{h(\Gamma_{ij})} \|\xi\|^2 \right) dS \\
&\quad - 2\beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{\delta C_W} |\nabla \xi|^2 + \frac{\delta C_W}{h(\Gamma_{ij})} |\xi|^2 \right) dS \\
&\geq \beta_0 \|\xi\|_{DG}^2 - \frac{2\beta_1}{\delta C_W} \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i} h_{K_i} |\nabla \xi|^2 dS - 2\beta_1 \delta J_h(\xi, \xi) \\
&\geq \beta_0 \|\xi\|_{DG}^2 - \frac{8\beta_1^2 C_{MI}}{\beta_0 C_W} \sum_{i \in I} \int_{K_i} |\nabla \xi|^2 dS - \frac{\beta_0}{2} J_h(\xi, \xi) \geq \frac{\beta_0}{2} \|\xi\|_{DG}^2,
\end{aligned}$$

kde jsme položili $\delta = \frac{\beta_0}{4\beta_1}$ a použili nejprve (4.13) a následně předpoklad (4.40). Nakonec pro $\theta = 0$ dostáváme, že

$$\begin{aligned}
(\star) &= \sum_{i \in I} \int_{K_i} \beta(U) \nabla \xi \cdot \nabla \xi dx + \beta_0 J_h(\xi, \xi) \\
&\quad - \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \langle \beta(U) \nabla \xi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\xi] dS \\
&\quad - \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \beta(U) \nabla \xi \cdot \mathbf{n}_{ij} \xi dS \\
&\geq \beta_0 \sum_{i \in I} \int_{K_i} |\nabla \xi|^2 dx + \beta_0 J_h(\xi, \xi) \\
&\quad - \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{|\nabla \xi|_{\Gamma_{ij}} + |\nabla \xi|_{\Gamma_{ji}}}{2} \|\xi\| dS \\
&\quad - \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} |\nabla \xi| |\xi| dS.
\end{aligned}$$

Nechť máme libovolné $\delta > 0$. Za použití Youngovy nerovnosti, odhadu (4.13) a předpokladu (4.41) dostáváme

$$\begin{aligned}
(\star) &\geq \beta_0 \|\xi\|_{DG}^2 \\
&\quad - \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{\delta C_W} (|\nabla \xi|_{\Gamma_{ij}}|^2 + |\nabla \xi|_{\Gamma_{ji}}|^2) + \frac{\delta C_W}{h(\Gamma_{ij})} |[\xi]|^2 \right) dS \\
&\quad - \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{\delta C_W} |\nabla \xi|^2 + \frac{\delta C_W}{h(\Gamma_{ij})} |\xi|^2 \right) dS \\
&\geq \beta_0 \|\xi\|_{DG}^2 - \frac{\beta_1}{\delta C_W} \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i} h_{K_i} |\nabla \xi|^2 dS - \beta_1 \delta J_h(\xi, \xi) \\
&\geq \beta_0 \|\xi\|_{DG}^2 - \frac{2\beta_1^2 C_{MI}}{\beta_0 C_W} \sum_{i \in I} \int_{K_i} |\nabla \xi|^2 dS - \frac{\beta_0}{2} J_h(\xi, \xi) \geq \frac{\beta_0}{2} \|\xi\|_{DG}^2,
\end{aligned}$$

kde jsme položili $\delta = \frac{\beta_0}{2\beta_1}$. ■

Lemma 11 *Existuje konstanta $C_{11} > 0$ nezávislá na U, ξ, φ, h taková, že pro libovolné $\varphi \in S_h^p$ platí odhad*

$$a_h(U, U, \varphi) - a_h(U, \pi u, \varphi) + \beta_0 J_h(\xi, \varphi) \leq C_{11} (\|\xi\|_{DG}^2 + \|\varphi\|_{DG}^2). \quad (4.44)$$

Důkaz. Označme

$$(\star) := a_h(U, U, \varphi) - a_h(U, \pi u, \varphi) + \beta_0 J_h(\xi, \varphi).$$

Potom

$$\begin{aligned}
(\star) &= \sum_{i \in I} \int_{K_i} \beta(U) \nabla \xi \cdot \nabla \varphi dx \\
&\quad - \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} (\langle \beta(U) \nabla \xi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\varphi] + \theta \langle \beta(U) \nabla \varphi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\xi]) dS \\
&\quad - \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} (\beta(U) \nabla \xi \cdot \mathbf{n}_{ij} \varphi + \theta \beta(U) \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij} \xi) dS \\
&\quad + \beta_0 J_h(\xi, \varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \beta_1 \sum_{i \in I} \int_{K_i} |\nabla \xi| |\nabla \varphi| \, dx \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{|\nabla \xi|_{\Gamma_{ij}} + |\nabla \xi|_{\Gamma_{ji}}}{2} \|\varphi\| \, dS \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{|\nabla \varphi|_{\Gamma_{ij}} + |\nabla \varphi|_{\Gamma_{ji}}}{2} \|\xi\| \, dS \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} |\nabla \xi| |\varphi| \, dS \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} |\nabla \varphi| |\xi| \, dS \\
&\quad + \beta_0 J_h(\xi, \varphi)
\end{aligned}$$

a za použití Youngovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
(\star) &\leq \beta_1 \sum_{i \in I} \int_{K_i} (|\nabla \xi|^2 + |\nabla \varphi|^2) \, dx \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{C_W} (|\nabla \xi|_{\Gamma_{ij}}^2 + |\nabla \xi|_{\Gamma_{ji}}^2) + \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \|\varphi\|^2 \right) \, dS \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{C_W} (|\nabla \varphi|_{\Gamma_{ij}}^2 + |\nabla \varphi|_{\Gamma_{ji}}^2) + \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \|\xi\|^2 \right) \, dS \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{C_W} |\nabla \xi|^2 + \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} |\varphi|^2 \right) \, dS \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{C_W} |\nabla \varphi|^2 + \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} |\xi|^2 \right) \, dS \\
&\quad + \beta_0 J_h(\xi, \varphi) \\
&\leq \beta_1 \sum_{i \in I} \int_{K_i} (|\nabla \xi|^2 + |\nabla \varphi|^2) \, dx + \frac{\beta_1}{C_W} \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i} h_{K_i} (|\nabla \xi|^2 + |\nabla \varphi|^2) \, dS \\
&\quad + \beta_1 J_h(\xi, \xi) + \beta_1 J_h(\varphi, \varphi) + \beta_0 J_h(\xi, \varphi).
\end{aligned}$$

Nyní za použití tvrzení 4 a lemmatu 9 dostaneme odhad

$$\begin{aligned}
(\star) &\leq \beta_1 \sum_{i \in I} \int_{K_i} (|\nabla \xi|^2 + |\nabla \varphi|^2) \, dx + \frac{\beta_1 C_{MI}}{C_W} \sum_{i \in I} \int_{K_i} (|\nabla \xi|^2 + |\nabla \varphi|^2) \, dx \\
&\quad + \beta_1 J_h(\xi, \xi) + \beta_1 J_h(\varphi, \varphi) + \beta_0 J_h(\xi, \xi) + \beta_0 J_h(\varphi, \varphi) \\
&\leq C_{11} (\|\xi\|_{DG}^2 + \|\varphi\|_{DG}^2),
\end{aligned}$$

kde

$$C_{11} = \beta_1 + \max \left\{ \beta_0, \frac{\beta_1 C_{MI}}{C_W} \right\}.$$

■

Lemma 12 *Pro libovolné $k_a > 0$ existují konstanty $C_{21}, C_{22} > 0$ nezávislé na U, ξ, φ, h takové, že pro libovolné $\varphi \in S_h^p$ platí odhad*

$$a_h(U, \pi u, \varphi) - a_h(u, \pi u, \varphi) \leq \frac{\beta_0}{k_a} \|\varphi\|_{DG}^2 + C_{21} \|\xi\|^2 + C_{22} \sigma_a^2(\eta), \quad (4.45)$$

kde

$$\sigma_a^2(\eta) = \|\eta\|_{DG}^2 + \|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i \in I} \left(h_{K_i}^2 |\eta|_{H^1(K_i)}^2 + h_{K_i}^2 |\eta|_{H^2(K_i)}^2 \right). \quad (4.46)$$

Důkaz. Označme

$$(\star) := a_h(U, \pi u, \varphi) - a_h(u, \pi u, \varphi). \quad (4.47)$$

Potom

$$\begin{aligned} (\star) &= \sum_{i \in I} \int_{K_i} (\beta(U) - \beta(u)) \nabla \pi u \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &\quad - \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \langle (\beta(U) - \beta(u)) \nabla \pi u \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij} [\varphi] \, dS \\ &\quad - \theta \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \langle (\beta(U) - \beta(u)) \nabla \varphi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij} [\pi u] \, dS \\ &\quad - \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} (\beta(U) - \beta(u)) \nabla \pi u \cdot \mathbf{n}_{ij} \varphi \, dS \\ &\quad - \theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} (\beta(U) - \beta(u)) \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij} \pi u \, dS \\ &\quad + \theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} (\beta(U) - \beta(u)) \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij} u_D \, dS, \end{aligned}$$

jelikož $\nabla \pi u = \nabla \pi u - \nabla u + \nabla u = \nabla \eta + \nabla u$ a také $[\pi u] = [\pi u] - [u] = [\eta]$, protože $[u] = 0$ v důsledku regularity u . Potom

$$\begin{aligned}
(\star) &= \sum_{i \in I} \int_{K_i} ((\beta(U) - \beta(u)) \nabla \eta \cdot \nabla \varphi + (\beta(U) - \beta(u)) \nabla u \cdot \nabla \varphi) \, dx \\
&\quad - \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} (\langle (\beta(U) - \beta(u)) \nabla \eta \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\varphi] + \langle (\beta(U) - \beta(u)) \nabla u \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\varphi]) \, dS \\
&\quad - \theta \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \langle (\beta(U) - \beta(u)) \nabla \varphi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\eta] \, dS \\
&\quad - \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} ((\beta(U) - \beta(u)) \nabla \eta \cdot \mathbf{n}_{ij} \varphi + (\beta(U) - \beta(u)) \nabla u \cdot \mathbf{n}_{ij} \varphi) \, dS \\
&\quad - \theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} (\beta(U) - \beta(u)) \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij} (\pi u - u_D) \, dS.
\end{aligned}$$

Za použití (2.1b), (2.2) a (2.3) dostaneme

$$\begin{aligned}
(\star) &\leq (\beta_1 - \beta_0) \sum_{i \in I} \int_{K_i} (|\nabla \eta| |\nabla \varphi|) \, dx \\
&\quad + L_\beta \sum_{i \in I} \int_{K_i} |U - u| |\nabla u| |\nabla \varphi| \, dx \\
&\quad + (\beta_1 - \beta_0) \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{|\nabla \eta|_{\Gamma_{ij}} + |\nabla \eta|_{\Gamma_{ji}}}{2} |[\varphi]| \, dS \\
&\quad + L_\beta \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{|(U - u)|_{\Gamma_{ij}} |\nabla u|_{\Gamma_{ij}} + |(U - u)|_{\Gamma_{ji}} |\nabla u|_{\Gamma_{ji}}}{2} |[\varphi]| \, dS \\
&\quad + (\beta_1 - \beta_0) \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{|\nabla \varphi|_{\Gamma_{ij}} + |\nabla \varphi|_{\Gamma_{ji}}}{2} |[\eta]| \, dS \\
&\quad + (\beta_1 - \beta_0) \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} |\nabla \eta| |\varphi| \, dS \\
&\quad + L_\beta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} |U - u| |\nabla u| |\varphi| \, dS \\
&\quad + (\beta_1 - \beta_0) \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} |\nabla \varphi| |\eta| \, dS.
\end{aligned}$$

Zvolme si libovolně $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$. Za použití (2.5) a Youngovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
& a_h(U, \pi u, \varphi) - a_h(u, \pi u, \varphi) \leq \\
& (\beta_1 - \beta_0) \sum_{i \in I} \int_{K_i} \left(\frac{|\nabla \eta|^2}{\delta_1} + \delta_1 |\nabla \varphi|^2 \right) dx \\
& + L_\beta C_R \sum_{i \in I} \int_{K_i} \left(\frac{|U - u|^2}{\delta_2} + \delta_2 |\nabla \varphi|^2 \right) dx \\
& + (\beta_1 - \beta_0) \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{C_W \delta_1} (|\nabla \eta|_{\Gamma_{ij}}|^2 + |\nabla \eta|_{\Gamma_{ji}}|^2) + \frac{C_W \delta_1}{h(\Gamma_{ij})} |[\varphi]|^2 \right) dS \\
& + L_\beta C_R \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{C_W \delta_2} (|(U - u)|_{\Gamma_{ij}}|^2 + |(U - u)|_{\Gamma_{ji}}|^2) + \frac{C_W \delta_2}{h(\Gamma_{ij})} |[\varphi]|^2 \right) dS \\
& + (\beta_1 - \beta_0) \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij}) \delta_3}{C_W} (|\nabla \varphi|_{\Gamma_{ij}}|^2 + |\nabla \varphi|_{\Gamma_{ji}}|^2) + \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij}) \delta_3} |[\eta]|^2 \right) dS \\
& + (\beta_1 - \beta_0) \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{C_W \delta_1} |\nabla \eta|^2 + \frac{C_W \delta_1}{h(\Gamma_{ij})} |\varphi|^2 \right) dS \\
& + L_\beta C_R \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{C_W \delta_2} |U - u|^2 + \frac{C_W \delta_2}{h(\Gamma_{ij})} |\varphi|^2 \right) dS \\
& + (\beta_1 - \beta_0) \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij}) \delta_3}{C_W} |\nabla \varphi|^2 + \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij}) \delta_3} |\eta|^2 \right) dS.
\end{aligned}$$

Protože

$$|U - u|^2 = |\xi + \eta|^2 \leq 2 (|\xi|^2 + |\eta|^2), \quad (4.48)$$

potom s využitím tvrzení 4, 5, 6 a nerovnosti (4.10) dostaneme

$$\begin{aligned}
& a_h(U, \pi u, \varphi) - a_h(u, \pi u, \varphi) \\
& \leq ((\beta_1 - \beta_0) \delta_1 + L_\beta C_R \delta_2) \|\varphi\|_{DG}^2 + \frac{(\beta_1 - \beta_0) C_{MI} \delta_3}{C_W} \sum_{i \in I} \int_{K_i} |\nabla \varphi|^2 dx \\
& + \left(\frac{2L_\beta C_R C_{MI}}{C_W \delta_2} + \frac{2L_\beta C_R}{\delta_2} \right) \sum_{i \in I} \int_{K_i} |\xi|^2 dx + \frac{2L_\beta C_R}{\delta_2} \sum_{i \in I} \int_{K_i} |\eta|^2 dx \\
& + \frac{2L_\beta C_R C_O}{C_W \delta_2} \sum_{i \in I} \left(\|\eta\|_{L^2(K_i)}^2 + h_{K_i}^2 |\eta|_{H^1(K_i)}^2 \right) + \frac{\beta_1 - \beta_0}{\delta_3} J_h(\eta, \eta) \\
& + \frac{(\beta_1 - \beta_0) C_N}{C_W \delta_1} \sum_{i \in I} \left(|\eta|_{H^1(K_i)}^2 + h_{K_i}^2 |\eta|_{H^2(K_i)}^2 \right) + \frac{\beta_1 - \beta_0}{\delta_1} \sum_{i \in I} |\eta|_{H^1(K_i)}^2 \\
& \leq \frac{\beta_0}{k_a} \|\varphi\|_{DG}^2 + C_{21} \|\xi\|^2 + C_{22} \sigma_a^2(\eta),
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{\beta_0}{3k_a(\beta_1 - \beta_0)}, \delta_2 = \frac{\beta_0}{3k_a L_\beta C_R}, \delta_3 = \frac{\beta_0 C_W}{3k_a(\beta_1 - \beta_0) C_{MI}}, \\ C_{21} &= \frac{2L_\beta C_R C_{MI}}{C_W \delta_2} + \frac{2L_\beta C_R}{\delta_2}, \\ C_{22} &= \max \left\{ \frac{2L_\beta C_R}{\delta_2} + \frac{2L_\beta C_R C_O}{C_W \delta_2}, \frac{\beta_1 - \beta_0}{\delta_3}, \frac{(\beta_1 - \beta_0) C_N}{C_W \delta_1} + \frac{\beta_1 - \beta_0}{\delta_1} \right\}.\end{aligned}$$

■

Lemma 13 *Pro libovolné $k_c > 0$ existuje konstanta $C_{31} > 0$ nezávislá na U, ξ, φ, h taková, že pro libovolné $\varphi \in S_h^p$ platí odhad*

$$a_h(u, \pi u, \varphi) - a_h(u, u, \varphi) \leq \frac{\beta_0}{k_c} \|\varphi\|_{DG}^2 + C_{31} \sigma_c^2(\eta),$$

kde

$$\sigma_c^2(\eta) = \|\eta\|_{DG}^2 + \sum_{i \in I} \left(h_{K_i}^2 |\eta|_{H^2(K_i)}^2 \right).$$

Důkaz. Z definice formy a_h a vlastností funkce β plyne, že

$$\begin{aligned}& a_h(u, \pi u, \varphi) - a_h(u, u, \varphi) \\ &= \sum_{i \in I} \int_{K_i} \beta(u) \nabla \eta \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &\quad - \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \langle \beta(u) \nabla \eta \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\varphi] \, dS \\ &\quad - \theta \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \langle \beta(u) \nabla \varphi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\eta] \, dS \\ &\quad - \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \beta(u) \nabla \eta \cdot \mathbf{n}_{ij} \varphi \, dS \\ &\quad - \theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \beta(u) \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij} \eta \, dS\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \beta_1 \sum_{i \in I} \int_{K_i} |\nabla \eta| |\nabla \varphi| \, dx \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{|\nabla \eta|_{\Gamma_{ij}} + |\nabla \eta|_{\Gamma_{ji}}}{2} |[\varphi]| \, dS \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{|\nabla \varphi|_{\Gamma_{ij}} + |\nabla \varphi|_{\Gamma_{ji}}}{2} |[\eta]| \, dS \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} |\nabla \eta| |\varphi| \, dS \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} |\nabla \varphi| |\eta| \, dS.
\end{aligned}$$

Zvolme libovolně $\delta_1, \delta_2 > 0$. Potom aplikací Youngovy nerovnosti, tvrzení 4 a 6 a nerovnosti (4.10) obdržíme

$$\begin{aligned}
&a_h(u, \pi u, \varphi) - a_h(u, u, \varphi) \\
&\leq \beta_1 \sum_{i \in I} \int_{K_i} \left(\frac{|\nabla \eta|^2}{\delta_1} + \delta_1 |\nabla \varphi|^2 \right) dx \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{C_W \delta_1} (|\nabla \eta|_{\Gamma_{ij}}^2 + |\nabla \eta|_{\Gamma_{ji}}^2) + \frac{C_W \delta_1}{h(\Gamma_{ij})} |[\varphi]|^2 \right) dS \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij}) \delta_2}{C_W} (|\nabla \varphi|_{\Gamma_{ij}}^2 + |\nabla \varphi|_{\Gamma_{ji}}^2) + \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij}) \delta_2} |[\eta]|^2 \right) dS \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij})}{C_W \delta_1} |\nabla \eta|^2 + \frac{C_W \delta_1}{h(\Gamma_{ij})} |\varphi|^2 \right) dS \\
&\quad + \beta_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{h(\Gamma_{ij}) \delta_2}{C_W} |\nabla \varphi|^2 + \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij}) \delta_2} |\eta|^2 \right) dS \\
&\leq \beta_1 \delta_1 \|\varphi\|_{DG}^2 + \frac{\beta_1 C_{MI} \delta_2}{C_W} \sum_{i \in I} |\varphi|_{H^1(K_i)}^2 + \frac{\beta_1}{\delta_2} J_h(\eta, \eta) \\
&\quad + \frac{\beta_1}{\delta_1} \sum_{i \in I} |\eta|_{H^1(K_i)}^2 + \frac{\beta_1 C_N}{C_W \delta_1} \sum_{i \in I} \left(|\eta|_{H^1(K_i)}^2 + h_{K_i}^2 |\eta|_{H^2(K_i)}^2 \right) \\
&\leq \frac{\beta_0}{k_c} \|\varphi\|_{DG}^2 + C_{31} \sigma_c^2(\eta),
\end{aligned}$$

kde

$$\delta_1 = \frac{\beta_0}{2k_c\beta_1}, \delta_2 = \frac{C_W\beta_0}{2k_c\beta_1C_{MI}},$$

$$C_{31} = \max \left\{ \frac{\beta_1}{\delta_2}, \frac{\beta_1}{\delta_1} + \frac{\beta_1 C_N}{C_W\delta_1} \right\}.$$

■

Lemma 14 *Pro libovolné $k_b > 0$ existují konstanty $C_{41}, C_{42} > 0$ nezávislé na U, ξ, φ, h takové, že pro libovolné $\varphi \in S_h^p$ platí odhad*

$$b_h(U, \varphi) - b_h(u, \varphi) \leq \frac{\beta_0}{k_b} \|\varphi\|_{DG}^2 + C_{41} \|\xi\|^2 + C_{42} \sigma_b^2(\eta), \quad (4.49)$$

kde

$$\sigma_b^2(\eta) = \|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i \in I} h_{K_i}^2 |\eta|_{H^1(K_i)}^2.$$

Důkaz. Vyjdeme z definice b_h a s využitím vlastností (3.15) numerického toku a lipschitzovskosti funkce f_s s konstantou L_f postupně dostáváme

$$\begin{aligned} & b_h(U, \varphi) - b_h(u, \varphi) \\ &= - \sum_{i \in I} \int_{K_i} \sum_{s=1}^d (f_s(U) - f_s(u)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} dx \\ & \quad + \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} (H(U|_{\Gamma_{ij}}, U|_{\Gamma_{ji}}, \mathbf{n}_{ij}) - H(u|_{\Gamma_{ij}}, u|_{\Gamma_{ji}}, \mathbf{n}_{ij})) [\varphi] dS \\ & \quad + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} (H(U|_{\Gamma_{ij}}, U|_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{n}_{ij}) - H(u|_{\Gamma_{ij}}, u|_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{n}_{ij})) \varphi dS \\ & \leq L_f \sum_{i \in I} \int_{K_i} \sum_{s=1}^d |U - u| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \right| dx \\ & \quad + L_H \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} (|(U - u)|_{\Gamma_{ij}} + |(U - u)|_{\Gamma_{ji}}) |[\varphi]| dS \\ & \quad + L_H \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} (|(U - u)|_{\Gamma_{ij}} + |(U - u)|_{\Gamma_{ij}}) |\varphi| dS. \end{aligned}$$

Zvolme nyní libovolné $\delta_1, \delta_2 > 0$. Za použití Youngovy nerovnosti, tvrzení 4 a 5 a nerovnosti (4.48) máme

$$\begin{aligned}
& b_h(U, \varphi) - b_h(u, \varphi) \\
\leq & L_f \sum_{i \in I} \int_{K_i} \left(\sum_{s=1}^d \frac{2(|\xi|^2 + |\eta|^2)}{\delta_1} + \delta_1 |\nabla \varphi|^2 \right) dx \\
& + L_H \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{4h(\Gamma_{ij})}{C_W \delta_2} (|\xi|_{\Gamma_{ij}}|^2 + |\eta|_{\Gamma_{ij}}|^2 + |\xi|_{\Gamma_{ji}}|^2 + |\eta|_{\Gamma_{ji}}|^2) + \frac{C_W \delta_2}{h(\Gamma_{ij})} \|\varphi\|^2 \right) dS \\
& + L_H \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{2h(\Gamma_{ij})}{C_W \delta_2} (|\xi|_{\Gamma_{ij}}|^2 + |\eta|_{\Gamma_{ij}}|^2) + \frac{C_W \delta_2}{h(\Gamma_{ij})} |\varphi|^2 \right) dS \\
\leq & (L_f \delta_1 + L_H \delta_2) \|\varphi\|_{DG}^2 + \left(\frac{2dL_f}{\delta_1} + \frac{4L_H C_{MI}}{C_W \delta_2} \right) \sum_{i \in I} \int_{K_i} |\xi|^2 dx \\
& + \sum_{i \in I} \left(\frac{2dL_f}{\delta_1} \|\eta\|_{L^2(K_i)}^2 + \frac{4L_H C_O}{C_W \delta_2} \left(\|\eta\|_{L^2(K_i)}^2 + h_{K_i}^2 |\eta|_{H^1(K_i)}^2 \right) \right) \\
\leq & \frac{\beta_0}{k_b} \|\varphi\|_{DG}^2 + C_{41} \|\xi\|^2 + C_{42} \sigma_b^2(\eta),
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{\beta_0}{2k_b L_f}, \quad \delta_2 = \frac{\beta_0}{2k_b L_H}, \\
C_{41} &= \frac{2dL_f}{\delta_1} + \frac{4L_H C_{MI}}{C_W \delta_2}, \quad C_{42} = \frac{2dL_f}{\delta_1} + \frac{4L_H C_O}{C_W \delta_2}.
\end{aligned}$$

■

Lemma 15 *Pro libovolný časový interval I_m , kde $m = 1, \dots, M$, a pro libovolné $\varphi \in S_{h,\tau}^{p,q}$ platí*

$$\int_{I_m} (\eta', \varphi) dt + (\{\eta\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) = -(\eta_{m-1}^-, \varphi_{m-1}^+). \quad (4.50)$$

Navíc

$$\int_{I_m} (\eta', \varphi) dt + (\{\eta\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) = -(\eta_{m-1}^-, \{\varphi\}_{m-1}). \quad (4.51)$$

Důkaz. Díky integraci per partes máme

$$\int_{I_m} (\eta', \varphi) dt = (\eta_m^-, \varphi_m^-) - (\eta_{m-1}^+, \varphi_{m-1}^+) - \int_{I_m} (\eta, \varphi') dt. \quad (4.52)$$

Protože $\varphi' \in S_{h,\tau}^{p,q-1}$, potom z definice projekce π (viz(4.1)) a (4.34) máme

$$\int_{I_m} (\eta, \varphi') = 0. \quad (4.53)$$

Z (4.52), (4.53) a (3.3) plyne, že

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} (\eta', \varphi) dt + (\{\eta\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \\ &= (\eta_m^-, \varphi_m^-) - (\eta_{m-1}^+, \varphi_{m-1}^+) + (\eta_{m-1}^+, \varphi_{m-1}^+) - (\eta_{m-1}^-, \varphi_{m-1}^+). \end{aligned}$$

Jelikož $\varphi_m^- \in S_h^p$ a

$$\eta_m^- = (\pi u)(t_m^-) - u(t_m) = \Pi u(t_m) - u(t_m),$$

potom z definice projekce Π (viz(3.19)) plyne, že

$$(\eta_m^-, \varphi_m^-) = 0.$$

Podobně se nechá odvodit $(\eta_{m-1}^-, \varphi_{m-1}^-) = 0$. Celkově tedy dostáváme, že

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} (\eta', \varphi) dt + (\{\eta\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) = -(\eta_{m-1}^-, \varphi_{m-1}^+) \\ &= -(\eta_{m-1}^-, \varphi_{m-1}^+) + (\eta_{m-1}^-, \varphi_{m-1}^-) \\ &= -(\eta_{m-1}^-, \{\varphi\}_{m-1}). \end{aligned}$$

■

4.3 Odhad pro ξ

Nejprve provedme následující výpočty. Máme

$$\begin{aligned} & 2 \int_{I_m} (\xi', \xi) dt + 2 (\{\xi\}_{m-1}, \xi_{m-1}^+) \\ &= \int_{I_m} \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 dt + 2 (\{\xi\}_{m-1}, \xi_{m-1}^+) \\ &= \|\xi_m^-\|^2 - \|\xi_{m-1}^+\|^2 + 2 (\xi_{m-1}^+ - \xi_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+). \end{aligned}$$

Protože

$$\begin{aligned} & 2 (\xi_{m-1}^+ - \xi_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+) = (\xi_{m-1}^+ - \xi_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+) + (\xi_{m-1}^+ - \xi_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+) \\ &= \|\xi_{m-1}^+\|^2 - (\xi_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+) + (\xi_{m-1}^+ - \xi_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+ - \xi_{m-1}^-) \\ & \quad + (\xi_{m-1}^+ - \xi_{m-1}^-, \xi_{m-1}^-) \\ &= \|\xi_{m-1}^+\|^2 + \|\{\xi\}_{m-1}\|^2 - \|\xi_{m-1}^-\|^2 - (\xi_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+) + (\xi_{m-1}^+, \xi_{m-1}^-) \\ &= \|\xi_{m-1}^+\|^2 + \|\{\xi\}_{m-1}\|^2 - \|\xi_{m-1}^-\|^2, \end{aligned}$$

potom celkově dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} (\xi', \xi) dt + (\{\xi\}_{m-1}, \xi_{m-1}^+) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\xi_m^-\|^2 - \|\xi_{m-1}^-\|^2 + \|\{\xi\}_{m-1}\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Pro odvození hledaného odhadu vyjdeme z rovnice (4.35), tedy:

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} ((\xi', \varphi) + A_h(U, U, \varphi) - A_h(u, u, \varphi)) dt + (\{\xi\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \\ &= \int_{I_m} (b_h(u, \varphi) - b_h(U, \varphi) - (\eta', \varphi)) dt - (\{\eta\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \quad \forall \varphi \in S_{h,\tau}^{p,q}. \end{aligned}$$

S využitím (4.36), kde položíme $\varphi := \xi$, dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} ((\xi', \xi) + a_h(U, U, \xi) - a_h(U, \pi u, \xi) + \beta_0 J_h(\xi, \xi)) dt + (\{\xi\}_{m-1}, \xi_{m-1}^+) \\ &= \int_{I_m} (-a_h(U, \pi u, \xi) + a_h(u, \pi u, \xi) - a_h(u, \pi u, \xi) + a_h(u, u, \xi) - \beta_0 J_h(\eta, \xi)) dt \\ & \quad + \int_{I_m} (b_h(u, \xi) - b_h(U, \xi) - (\eta', \xi)) dt - (\{\eta\}_{m-1}, \xi_{m-1}^+). \end{aligned}$$

Dále s využitím (4.54) a (4.51) z lemmatu 15, kde položíme $\varphi := \xi$, máme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\|\xi_m^-\|^2 - \|\xi_{m-1}^-\|^2 + \|\{\xi\}_{m-1}\|^2 \right) + \int_{I_m} (a_h(U, U, \xi) - a_h(U, \pi u, \xi) + \beta_0 J_h(\xi, \xi)) dt \\ & \leq \int_{I_m} (|a_h(U, \pi u, \xi) - a_h(u, \pi u, \xi)| + |a_h(u, \pi u, \xi) - a_h(u, u, \xi)| + \beta_0 |J_h(\eta, \xi)|) dt \\ & \quad + \int_{I_m} |b_h(U, \xi) - b_h(u, \xi)| dt + |(\eta_{m-1}^-, \{\xi\}_{m-1})|. \end{aligned}$$

S využitím lemmatu 10 pro konstantu C_W zvolenou dle (4.39) - (4.41) v závislosti na volbě θ , lemmat 9, 12, 13, 14, kde pokládáme $\varphi := \xi$, a Youngovy nerovnosti dostáváme pro libovolné $\delta, k_a, k_b, k_c > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\|\xi_m^-\|^2 - \|\xi_{m-1}^-\|^2 + \|\{\xi\}_{m-1}\|^2 \right) + \frac{\beta_0}{2} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\ & \leq \int_{I_m} \left(\frac{\beta_0}{k_a} \|\xi\|_{DG}^2 + C_{21} \|\xi\|^2 + C_{22} \sigma_a^2(\eta) + \frac{\beta_0}{k_c} \|\xi\|_{DG}^2 + C_{31} \sigma_c^2(\eta) \right) dt \\ & \quad + \int_{I_m} \left(\frac{\beta_0}{\delta} J_h(\eta, \eta) + \delta \beta_0 J_h(\xi, \xi) + \frac{\beta_0}{k_b} \|\xi\|_{DG}^2 + C_{41} \|\xi\|^2 + C_{42} \sigma_b^2(\eta) \right) dt \\ & \quad + 2 \|\eta_{m-1}^-\|^2 + \frac{1}{2} \|\{\xi\}_{m-1}\|^2. \end{aligned}$$

Po úpravě plyne

$$\begin{aligned} & \|\xi_m^-\|^2 - \|\xi_{m-1}^-\|^2 + \beta_0 \left(1 - \frac{2}{k_a} - \frac{2}{k_b} - \frac{2}{k_c} - 2\delta\right) \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\ & \leq C_{51} \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt + 4 \|\eta_{m-1}^-\|^2 + C_{52} \int_{I_m} R(\eta) dt, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} C_{51} &= 2(C_{21} + C_{41}), \quad C_{52} = 2 \left(C_{22} + C_{31} + C_{42} + \frac{\beta_0}{\delta} \right), \\ R(\eta) &= \sigma_a^2(\eta), \end{aligned}$$

a

$$\sigma_b^2(\eta) \leq R(\eta), \quad \sigma_c^2(\eta) \leq R(\eta), \quad J_h(\eta, \eta) \leq R(\eta). \quad (4.55)$$

Nakonec pro volbu $k_a = k_b = k_c = 16$ a $\delta = \frac{1}{16}$ dostáváme

$$\begin{aligned} & \|\xi_m^-\|^2 - \|\xi_{m-1}^-\|^2 + \frac{\beta_0}{2} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\ & \leq C_{51} \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt + 4 \|\eta_{m-1}^-\|^2 + C_{52} \int_{I_m} R(\eta) dt. \end{aligned} \quad (4.56)$$

4.4 Odhad výrazu $\int_{I_m} \|\xi\|^2$

Pro následující odhady musíme zvolit libovolně, ale pevně stupeň polynomiální aproximace $q \geq 1$ celé. Dále definujeme body časového intervalu I_m následujícím způsobem

$$t_{m-l/q} = t_{m-1} + \frac{l}{q}(t_m - t_{m-1}) \quad \text{pro } l = 0, \dots, q.$$

Z definice je zřejmé, že $t_{m-0/q} = t_{m-1}$ a $t_{m-q/q} = t_m$.

Lemma 16 *Nechť máme libovolné, ale pevné celé $q \geq 1$. Potom existují konstanty $L_q, M_q > 0$ takové, že libovolný polynom $\hat{p} \in P^q(0, 1)$ splňuje následující nerovnosti*

$$\sum_{l=0}^q \hat{p}^2\left(\frac{l}{q}\right) \geq L_q \int_0^1 \hat{p}^2 dx, \quad (4.57)$$

$$\hat{p}^2(0) \leq M_q \int_0^1 \hat{p}^2 dx. \quad (4.58)$$

Důkaz. Protože prostor $P^q(0, 1)$ je konečně-dimenzionální a výrazy

$$\left(\sum_{l=0}^q \hat{p}^2\left(\frac{l}{q}\right) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\int_0^1 \hat{p}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

jsou normy na prostoru $P^q(0, 1)$, potom z věty o ekvivalenci norem na konečně-dimenzionálním prostoru plyne, že existují konstanty $L_q, M_q > 0$ takové, že

$$L_q \int_0^1 \hat{p}^2 dx \leq \sum_{l=0}^q \hat{p}^2\left(\frac{l}{q}\right) \leq M_q \int_0^1 \hat{p}^2 dx.$$

Nyní pro libovolné $t \in I_m$ zavedeme substituci $\psi(t) = \frac{t-t_{m-1}}{\tau_m}$, kde $\tau_m = (t_m - t_{m-1})$, položíme $p(t) = \hat{p}(\psi(t))$, použijeme odhady (4.57), (4.58) a větu o substituci. Potom můžeme tvrdit, že libovolný polynom $p \in P^q(I_m)$ splňuje následující nerovnosti

$$\sum_{l=0}^q p^2(t_{m-l/q}) \geq \frac{L_q}{\tau_m} \int_{I_m} p^2 dt, \quad (4.59)$$

$$p^2(t_{m-1}) \leq \frac{M_q}{\tau_m} \int_{I_m} p^2 dt. \quad (4.60)$$

S využitím (4.59) dostáváme nerovnost

$$\sum_{l=0}^q \xi^2(x, t_{m-l/q}) \geq \frac{L_q}{\tau_m} \int_{I_m} \xi^2(x, t) dt \quad \forall x \in \Omega.$$

Integrací přes celou oblast Ω máme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\sum_{l=0}^q \xi^2(x, t_{m-l/q}) \right) dx &\geq \frac{L_q}{\tau_m} \int_{\Omega} \left(\int_{I_m} \xi^2(x, t) dt \right) dx, \\ \sum_{l=0}^q \int_{\Omega} \xi^2(x, t_{m-l/q}) dx &\geq \frac{L_q}{\tau_m} \int_{I_m} \left(\int_{\Omega} \xi^2(x, t) dx \right) dt, \\ \sum_{l=0}^q \|\xi_{m-l/q}\|^2 &\geq \frac{L_q}{\tau_m} \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt, \end{aligned} \quad (4.61)$$

kde $\xi_{m-l/q}(x) = \xi(x, t_{m-l/q})$. Obdobně lze s využitím (4.60) ukázat, že platí

$$\|\xi_{m-1}^+\|^2 \leq \frac{M_q}{\tau_m} \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt. \quad (4.62)$$

Dále upravujeme následující výraz

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} (\xi, \xi') dt + (\xi_{m-1}^+, \xi_{m-1}^+) = \frac{1}{2} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 dt + \|\xi_{m-1}^+\|^2 \\ & = \frac{1}{2} \left(\|\xi_m^-\|^2 - \|\xi_{m-1}^+\|^2 \right) + \|\xi_{m-1}^+\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|\xi_m^-\|^2 + \|\xi_{m-1}^+\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Opět vyjdeme z rovnice (4.35). Tedy pro libovolné $m = 1, \dots, M$ máme

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} ((\xi', \varphi) + A_h(U, U, \varphi) - A_h(u, u, \varphi)) dt + (\{\xi\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \\ & = \int_{I_m} (b_h(u, \varphi) - b_h(U, \varphi) - (\eta', \varphi)) dt - (\{\eta\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \quad \forall \varphi \in S_{h,\tau}^{p,q}. \end{aligned}$$

Položme $\varphi := \xi$. S využitím (4.36) po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} ((\xi', \xi) + a_h(U, U, \xi) - a_h(U, \pi u, \xi) + \beta_0 J_h(\xi, \xi)) dt + (\xi_{m-1}^+, \xi_{m-1}^+) \\ & = \int_{I_m} (-a_h(U, \pi u, \xi) + a_h(u, \pi u, \xi) - a_h(u, \pi u, \xi) + a_h(u, u, \xi) - \beta_0 J_h(\eta, \xi)) dt \\ & \quad + \int_{I_m} (b_h(u, \xi) - b_h(U, \xi) - (\eta', \xi)) dt - (\{\eta\}_{m-1}, \xi_{m-1}^+) \\ & \quad + (\xi_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+) \quad \forall \varphi \in S_{h,\tau}^{p,q}. \end{aligned}$$

Dále s využitím (4.63) a (4.50) z lemmatu 15, kde jsme položili $\varphi := \xi$, máme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\|\xi_m^-\|^2 + \|\xi_{m-1}^+\|^2 \right) + \int_{I_m} (a_h(U, U, \xi) - a_h(U, \pi u, \xi) + \beta_0 J_h(\xi, \xi)) dt \\ & \leq \int_{I_m} (|a_h(U, \pi u, \xi) - a_h(u, \pi u, \xi)| + |a_h(u, \pi u, \xi) - a_h(u, u, \xi)| + \beta_0 |J_h(\eta, \xi)|) dt \\ & \quad + \int_{I_m} |b_h(U, \xi) - b_h(u, \xi)| dt + |(\eta_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+)| + |(\xi_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+)|. \end{aligned}$$

Nyní s využitím lemmatu 10, pro konstantu C_W zvolenou dle (4.39) - (4.41) v závislosti na volbě θ , lemmat 9, 12, 13, 14, kde pokládáme $\varphi := \xi$, a Youngovy nerovnosti, pro libovolné $\delta, \delta_1, k_a, k_b, k_c > 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\|\xi_m^-\|^2 + \|\xi_{m-1}^+\|^2 \right) + \frac{\beta_0}{2} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\ & \leq \int_{I_m} \left(\frac{\beta_0}{k_a} \|\xi\|_{DG}^2 + C_{21} \|\xi\|^2 + C_{22} \sigma_a^2(\eta) + \frac{\beta_0}{k_c} \|\xi\|_{DG}^2 + C_{31} \sigma_c^2(\eta) \right) dt \\ & \quad + \int_{I_m} \left(\frac{\beta_0}{\delta} J_h(\eta, \eta) + \delta \beta_0 J_h(\xi, \xi) + \frac{\beta_0}{k_b} \|\xi\|_{DG}^2 + C_{41} \|\xi\|^2 + C_{42} \sigma_b^2(\eta) \right) dt \\ & \quad + \frac{\|\eta_{m-1}^-\|^2}{\delta_1} + \delta_1 \|\xi_{m-1}^+\|^2 + \frac{\|\xi_{m-1}^-\|^2}{\delta_1} + \delta_1 \|\xi_{m-1}^+\|^2. \end{aligned}$$

Po úpravě s využitím (4.55) máme

$$\begin{aligned} & \|\xi_m^-\|^2 + \|\xi_{m-1}^+\|^2 + \beta_0 \left(1 - \frac{2}{k_a} - \frac{2}{k_b} - \frac{2}{k_c} - 2\delta\right) \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\ & \leq C_{51} \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt + C_{52} \int_{I_m} R(\eta) dt + 2 \frac{\|\eta_{m-1}^-\|^2}{\delta_1} + 2 \frac{\|\xi_{m-1}^-\|^2}{\delta_1} + 4\delta_1 \|\xi_{m-1}^+\|^2. \end{aligned}$$

Nakonec pro volbu $k_a = k_b = k_c = 16$ a $\delta = \frac{1}{16}$ dostaneme

$$\begin{aligned} & \|\xi_m^-\|^2 + \|\xi_{m-1}^+\|^2 + \frac{\beta_0}{2} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\ & \leq C_{51} \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt + C_{52} \int_{I_m} R(\eta) dt + 2 \frac{\|\eta_{m-1}^-\|^2}{\delta_1} + 2 \frac{\|\xi_{m-1}^-\|^2}{\delta_1} + 4\delta_1 \|\xi_{m-1}^+\|^2. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Nejprve uvažujme $q = 1$. Potom z (4.64) s využitím (4.61) a (4.62) plyne

$$\begin{aligned} & \frac{L_q}{\tau_m} \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt + \frac{\beta_0}{2} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\ & \leq \left(C_{51} + \frac{4M_q\delta_1}{\tau_m}\right) \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt + C_{52} \int_{I_m} R(\eta) dt + 2 \frac{\|\eta_{m-1}^-\|^2}{\delta_1} + 2 \frac{\|\xi_{m-1}^-\|^2}{\delta_1}. \end{aligned}$$

Pokud zvolíme

$$\delta_1 = \frac{L_q}{8M_q}, \quad C_{53} = \frac{2}{\delta_1},$$

potom

$$\begin{aligned} & \left(\frac{L_q}{2\tau_m} - C_{51}\right) \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt + \frac{\beta_0}{2} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\ & \leq C_{52} \int_{I_m} R(\eta) dt + C_{53} \|\eta_{m-1}^-\|^2 + C_{53} \|\xi_{m-1}^-\|^2. \end{aligned}$$

Pro volbu

$$\frac{L_q}{4C_{51}} \geq \tau_m > 0 \tag{4.65}$$

máme

$$\begin{aligned}
& \frac{L_q}{4\tau_m} \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt + \frac{\beta_0}{2} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\
& \leq C_{52} \int_{I_m} R(\eta) dt + C_{53} \|\eta_{m-1}^-\|^2 + C_{53} \|\xi_{m-1}^-\|^2.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Nechť dále $q \geq 2$. Potom zvolme libovolné $l \in \{1, \dots, q-1\}$ a položme $\tilde{\xi}_l = \zeta_{t_{m-l/q}}$, kde $\zeta_{t_{m-l/q}}$ je diskrétní charakteristická funkce k funkci ξ v bodě $t_{m-l/q}$ definovaná v (4.16) - (4.17). Potom z vlastností (4.16) a (4.33) plyne, že

$$\begin{aligned}
& \int_{I_m} (\tilde{\xi}_l, \xi') dt = \int_{t_{m-1}}^{t_{m-l/q}} (\xi, \xi') dt, \quad \xi(t_{m-1}^+) = \tilde{\xi}_l(t_{m-1}^+) \quad \text{a} \\
& \int_{I_m} \|\tilde{\xi}_l\|_{DG}^2 dt \leq C_{CH} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Postupně dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned}
& \int_{I_m} (\xi', \tilde{\xi}_l) dt + (\xi_{m-1}^+, (\tilde{\xi}_l)_{m-1}^+) = \int_{t_{m-1}}^{t_{m-l/q}} (\xi, \xi') + (\xi_{m-1}^+, \xi_{m-1}^+) \\
& = \frac{1}{2} \int_{t_{m-1}}^{t_{m-l/q}} \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 dt + \|\xi_{m-1}^+\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|\xi_{m-l/q}\|^2 - \|\xi_{m-1}^+\|^2 \right) + \|\xi_{m-1}^+\|^2 \\
& = \frac{1}{2} \left(\|\xi_{m-l/q}\|^2 + \|\xi_{m-1}^+\|^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Pro odvození hledaného odhadu opět vyjdeme z rovnice (4.35). Pro libovolné $m = 1, \dots, M$ tedy máme

$$\begin{aligned}
& \int_{I_m} ((\xi', \varphi) + A_h(U, U, \varphi) - A_h(u, u, \varphi)) dt + (\{\xi\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \\
& = \int_{I_m} (b_h(u, \varphi) - b_h(U, \varphi) - (\eta', \varphi)) dt - (\{\eta\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \quad \forall \varphi \in S_{h,\tau}^{p,q}.
\end{aligned}$$

Položme $\varphi := \tilde{\xi}_l$. S využitím (4.36) dostaneme

$$\begin{aligned}
& \int_{I_m} (\xi', \tilde{\xi}_l) dt + (\xi_{m-1}^+, (\tilde{\xi}_l)_{m-1}^+) \\
& = \int_{I_m} \left(-a_h(U, U, \tilde{\xi}_l) + a_h(U, \pi u, \tilde{\xi}_l) - \beta_0 J_h(\xi, \tilde{\xi}_l) - a_h(U, \pi u, \tilde{\xi}_l) + a_h(u, \pi u, \tilde{\xi}_l) \right) dt \\
& \quad + \int_{I_m} \left(-a_h(u, \pi u, \tilde{\xi}_l) + a_h(u, u, \tilde{\xi}_l) - \beta_0 J_h(\eta, \tilde{\xi}_l) + b_h(u, \tilde{\xi}_l) - b_h(U, \tilde{\xi}_l) \right) dt \\
& \quad + (\xi_{m-1}^-, (\tilde{\xi}_l)_{m-1}^+) - \int_{I_m} (\eta', \tilde{\xi}_l) dt - (\{\eta\}_{m-1}, (\tilde{\xi}_l)_{m-1}^+).
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Z (4.50), (4.68) a 4.69 plyne, že

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\|\xi_{m-l/q}\|^2 + \|\xi_{m-1}^+\|^2 \right) \\
& \leq \int_{I_m} \left(\left| a_h(U, U, \tilde{\xi}_l) - a_h(U, \pi u, \tilde{\xi}_l) + \beta_0 J_h(\xi, \tilde{\xi}_l) \right| + \left| a_h(U, \pi u, \tilde{\xi}_l) - a_h(u, \pi u, \tilde{\xi}_l) \right| \right) dt \\
& \quad + \int_{I_m} \left(\left| a_h(u, \pi u, \tilde{\xi}_l) - a_h(u, u, \tilde{\xi}_l) \right| + \left| \beta_0 J_h(\eta, \tilde{\xi}_l) \right| + \left| b_h(U, \tilde{\xi}_l) - b_h(u, \tilde{\xi}_l) \right| \right) dt \\
& \quad + |(\xi_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+)| + |(\eta_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+)|.
\end{aligned}$$

Nyní za použití lemat 9, 11, 12, 13, 14, kde pokládáme $\varphi := \tilde{\xi}_l$, a Youngovy nerovnosti pro libovolné $\delta_2, k_a, k_b, k_c > 0$ dostáváme

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\|\xi_{m-l/q}\|^2 + \|\xi_{m-1}^+\|^2 \right) \\
& \leq \int_{I_m} \left(C_{11} \left(\|\xi\|_{DG}^2 + \|\tilde{\xi}_l\|_{DG}^2 \right) + \frac{\beta_0}{k_a} \|\tilde{\xi}_l\|_{DG}^2 + C_{21} \|\xi\|^2 + C_{22} \sigma_a^2(\eta) \right) dt \\
& \quad + \int_{I_m} \left(\frac{\beta_0}{k_c} \|\tilde{\xi}_l\|_{DG}^2 + C_{31} \sigma_c^2(\eta) + \beta_0 J_h(\eta, \eta) + \beta_0 J_h(\tilde{\xi}_l, \tilde{\xi}_l) \right) dt \\
& \quad + \int_{I_m} \left(\frac{\beta_0}{k_b} \|\tilde{\xi}_l\|_{DG}^2 + C_{41} \|\xi\|^2 + C_{42} \sigma_b^2(\eta) \right) dt \\
& \quad + \frac{\|\xi_{m-1}^-\|^2}{\delta_2} + \delta_2 \|\xi_{m-1}^+\|^2 + \frac{\|\eta_{m-1}^-\|^2}{\delta_2} + \delta_2 \|\xi_{m-1}^+\|^2.
\end{aligned}$$

Pro jednoduchost zvolme $k_a = k_b = k_c = 1$ a s využitím (4.67), Youngovy nerovnosti a nerovností (4.55) nakonec po úpravách dostáváme, že pro $q \geq 2$ a libovolné $l \in \{1, \dots, q-1\}$ máme

$$\begin{aligned}
& \|\xi_{m-l/q}\|^2 + \|\xi_{m-1}^+\|^2 \\
& \leq \int_{I_m} \left(C_{61} \|\xi\|_{DG}^2 + C_{62} \|\xi\|^2 + C_{63} R(\eta) \right) dt \\
& \quad + 2 \frac{\|\xi_{m-1}^-\|^2}{\delta_2} + 2 \frac{\|\eta_{m-1}^-\|^2}{\delta_2} + 4\delta_2 \|\xi_{m-1}^+\|^2, \tag{4.70}
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
C_{61} &= 2(C_{11} + C_{11}C_{CH} + 4\beta_0C_{CH}), \\
C_{62} &= 2(C_{21} + C_{41}), \\
C_{63} &= 2(C_{22} + C_{31} + C_{42} + \beta_0).
\end{aligned}$$

Nerovnost (4.70) násobíme $\frac{\beta_0}{4C_{61}(q-1)}$ a dostáváme

$$\begin{aligned}
& \frac{\beta_0}{4C_{61}(q-1)} \left(\|\xi_{m-l/q}\|^2 + \|\xi_{m-1}^+\|^2 \right) \\
\leq & \int_{I_m} \left(\frac{\beta_0}{4(q-1)} \|\xi\|_{DG}^2 + \frac{\beta_0 C_{62}}{4C_{61}(q-1)} \|\xi\|^2 + \frac{\beta_0 C_{63}}{4C_{61}(q-1)} R(\eta) \right) dt \\
& + \frac{\beta_0 \|\xi_{m-1}^-\|^2}{2C_{61}(q-1)\delta_2} + \frac{\beta_0 \|\eta_{m-1}^-\|^2}{2C_{61}(q-1)\delta_2} + \frac{\beta_0 \delta_2 \|\xi_{m-1}^+\|^2}{C_{61}(q-1)}. \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Sečtením přes všechna $l \in \{1, \dots, q-1\}$ a sečtením i s nerovností (4.64) plyne, že

$$\begin{aligned}
& C_{71} \left(\|\xi_m^-\|^2 + \sum_{l=1}^{q-1} \|\xi_{m-l/q}\|^2 + \|\xi_{m-1}^+\|^2 \right) + \frac{\beta_0}{2} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\
\leq & \int_{I_m} \left(\frac{\beta_0}{4} \|\xi\|_{DG}^2 + C_{72} \|\xi\|^2 + C_{73} R(\eta) \right) dt \\
& + \left(\frac{2}{\delta_1} + \frac{\beta_0}{2C_{61}\delta_2} \right) \left(\|\xi_{m-1}^-\|^2 + \|\eta_{m-1}^-\|^2 \right) + \left(\frac{\beta_0 \delta_2}{C_{61}} + 4\delta_1 \right) \|\xi_{m-1}^+\|^2,
\end{aligned}$$

kde

$$C_{71} = \min \left\{ \frac{\beta_0}{4C_{61}(q-1)}, 1 \right\}, \quad C_{72} = \frac{\beta_0 C_{62}}{4C_{61}} + C_{51}, \quad C_{73} = \frac{\beta_0 C_{63}}{4C_{61}} + C_{52}.$$

Tudíž s využitím (4.61) a (4.62) obdržíme odhad

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{71} L_q}{\tau_m} \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt + \frac{\beta_0}{4} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\
\leq & \left(\frac{\beta_0 M_q \delta_2}{C_{61} \tau_m} + \frac{4M_q \delta_1}{\tau_m} + C_{72} \right) \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt + C_{73} \int_{I_m} R(\eta) dt \\
& + \left(\frac{2}{\delta_1} + \frac{\beta_0}{2C_{61}\delta_2} \right) \left(\|\xi_{m-1}^-\|^2 + \|\eta_{m-1}^-\|^2 \right).
\end{aligned}$$

Pokud zvolíme

$$\delta_1 = \frac{C_{71} L_q}{16M_q}, \quad \delta_2 = \frac{C_{61} C_{71} L_q}{4\beta_0 M_q}, \quad C_{74} = \frac{2}{\delta_1} + \frac{\beta_0}{2C_{61}\delta_2},$$

potom

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{C_{71} L_q}{2\tau_m} - C_{72} \right) \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt + \frac{\beta_0}{4} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\
\leq & C_{73} \int_{I_m} R(\eta) dt + C_{74} \left(\|\xi_{m-1}^-\|^2 + \|\eta_{m-1}^-\|^2 \right).
\end{aligned}$$

Pro volbu

$$\frac{C_{71}L_q}{4C_{72}} \geq \tau_m > 0 \quad (4.72)$$

máme

$$\begin{aligned} & \frac{C_{71}L_q}{4\tau_m} \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt + \frac{\beta_0}{4} \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\ & \leq C_{73} \int_{I_m} R(\eta) dt + C_{74} \left(\|\xi_{m-1}^- \|^2 + \|\eta_{m-1}^- \|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.73)$$

A tedy z (4.66) s podmínkou (4.65) pro $q = 1$ nebo z (4.73) s podmínkou (4.72) pro $q \geq 2$ můžeme celkově psát

$$\begin{aligned} \int_{I_m} \|\xi\|^2 dt & \leq C_{75}\tau_m \left(\int_{I_m} R(\eta) dt + \|\xi_{m-1}^- \|^2 + \|\eta_{m-1}^- \|^2 \right) \\ & \leq C_{75}\tau_m \|\xi_{m-1}^- \|^2 + C_{76} \left(\int_{I_m} R(\eta) dt + \|\eta_{m-1}^- \|^2 \right), \end{aligned} \quad (4.74)$$

kde

$$C_{75} = \begin{cases} \frac{4}{L_q} \max \{C_{52}, C_{53}\} & \text{pro } q = 1 \\ \frac{4}{C_{71}L_q} \max \{C_{73}, C_{74}\} & \text{pro } q \geq 2 \end{cases}, \quad C_{76} = \begin{cases} \frac{C_{75}L_q}{4C_{51}} & \text{pro } q = 1 \\ \frac{C_{75}C_{71}L_q}{4C_{72}} & \text{pro } q \geq 2 \end{cases}.$$

S využitím (4.74) a (4.56) pro $j = 1, \dots, M$ dostáváme

$$\begin{aligned} & \|\xi_j^- \|^2 - \|\xi_{j-1}^- \|^2 + \frac{\beta_0}{2} \int_{I_j} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\ & \leq C_{81}\tau_j \|\xi_{j-1}^- \|^2 + C_{82} \|\eta_{j-1}^- \|^2 + C_{83} \int_{I_j} R(\eta) dt, \end{aligned} \quad (4.75)$$

kde

$$C_{81} = C_{75}C_{51}, \quad C_{82} = C_{51}C_{76} + 4, \quad C_{83} = C_{76}C_{51} + C_{52}.$$

Sečteme nyní poslední nerovnost přes všechna $j = 1, \dots, m$. Jako výsledek dostaneme odhad

$$\begin{aligned} & \|\xi_m^- \|^2 - \|\xi_0^- \|^2 + \frac{\beta_0}{2} \sum_{j=1}^m \int_{I_j} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\ & \leq C_{81} \sum_{j=1}^m \tau_j \|\xi_{j-1}^- \|^2 + C_{82} \sum_{j=1}^m \|\eta_{j-1}^- \|^2 + C_{83} \sum_{j=1}^m \int_{I_j} R(\eta) dt. \end{aligned} \quad (4.76)$$

4.5 Dokončení odhadu funkce ξ a abstraktního odhadu chyby

Lemma 17 (*Diskrétní Gronwallova nerovnost*) *Nechť x_n, a_n, b_n a c_n , kde $n \in N$, jsou nezáporné posloupnosti a a_n nechť je kladná neklesající posloupnost. Jestliže*

$$\begin{aligned} x_0 + c_0 &\leq a_0, \\ x_n + c_n &\leq a_n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j x_j \quad \text{pro } n \geq 1, \end{aligned} \quad (4.77)$$

potom

$$x_n + c_n \leq a_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + b_j) \quad \text{pro } n \geq 0. \quad (4.78)$$

Důkaz. Vyjdeme z předpokladu (4.77), který vydělíme a_n , a využijeme předpokladu, že posloupnost a_n je neklesající, takže

$$\frac{x_n}{a_n} + \frac{c_n}{a_n} \leq 1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{x_j}{a_n} \leq 1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{x_j}{a_j}. \quad (4.79)$$

Pokud pro $n > 0$ položíme $v_n := 1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{x_j}{a_j}$, potom

$$v_n - v_{n-1} = b_{n-1} \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} \leq b_{n-1} \left(\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} + \frac{c_{n-1}}{a_{n-1}} \right) \leq b_{n-1} v_{n-1},$$

z čehož plyne, že

$$\begin{aligned} v_n &\leq (1 + b_{n-1})v_{n-1} \leq v_1 \prod_{j=1}^{n-1} (1 + b_j) = \left(1 + b_0 \frac{x_0}{a_0} \right) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + b_j) \\ &\leq \prod_{j=0}^{n-1} (1 + b_j). \end{aligned}$$

Potom z (4.79) a definice v_n dostáváme (4.78). ■

Věta 18 *Nechť platí (4.65) pro $q = 1$ nebo (4.72) pro $q \geq 2$. Potom existuje konstanta $C_{91} > 0$ nezávislá na U, h, τ taková, že chyba $e = U - u$ splňuje odhad*

$$\begin{aligned} &\|e_m^-\|^2 + \frac{\beta_0}{2} \sum_{j=1}^m \int_{I_j} \|e\|_{DG}^2 \, dt \\ &\leq C_{91} e^{C_{81} t_m} \left(\sum_{j=1}^m \|\eta_{j-1}^-\|^2 + \sum_{j=1}^m \int_{I_j} R(\eta) \, dt \right) \\ &\quad + 2 \|\eta_m^-\|^2 + \beta_0 \sum_{j=1}^m \int_{I_j} \|\eta\|_{DG}^2. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Důkaz. Z (4.76) za použití lemmatu 17, kde položíme

$$\begin{aligned}
x_m &= \|\xi_m^-\|^2, \\
c_m &= \frac{\beta_0}{2} \sum_{j=1}^m \int_{I_j} \|\xi\|_{DG}^2 dt, \\
b_m &= C_{81} \tau_{m+1}, \\
a_m &= \|\xi_0^-\|^2 + C_{82} \sum_{j=1}^m \|\eta_{j-1}^-\|^2 + C_{83} \sum_{j=1}^m \int_{I_j} R(\eta) dt,
\end{aligned}$$

nerovnosti $1 + x \leq e^x$ pro $x \in \mathbb{R}$ plyne odhad

$$\begin{aligned}
& \|\xi_m^-\|^2 + \frac{\beta_0}{2} \sum_{j=1}^m \int_{I_j} \|\xi\|_{DG}^2 dt \\
& \leq e^{C_{81} t_m} \left(\|\xi_0^-\|^2 + C_{82} \sum_{j=1}^m \|\eta_{j-1}^-\|^2 + C_{83} \sum_{j=1}^m \int_{I_j} R(\eta) dt \right), \quad (4.81)
\end{aligned}$$

kde $t_m = \sum_{j=1}^m \tau_j$. Z definice U_0^- (viz(3.21)) máme $\xi_0^- = 0$. Nyní, jestliže využijeme rovnosti $e = \xi + \eta$, nerovností

$$\begin{aligned}
\|e\|^2 &\leq 2(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2), \\
\|e\|_{DG}^2 &\leq 2(\|\xi\|_{DG}^2 + \|\eta\|_{DG}^2)
\end{aligned}$$

a položíme $C_{91} = 2 \max \{C_{82}, C_{83}\}$, potom z (4.81) přímo plyne (4.80). ■

5 Odhad chyby vyjádřený pomocí h a τ

V této kapitole se budeme věnovat odhadu chyby v závislosti na parametru triangulace h a časového kroku τ . Tyto odhady získáme na základě odhadu (4.80), vztahů (4.7)

$$\begin{aligned} \eta|_{I_m} &= (\pi u - u)|_{I_m} = \eta^{(1)} + \eta^{(2)}, \\ \text{kde } \eta^{(1)} &= (\Pi u - u)|_{I_m}, \quad \eta^{(2)} = (\pi(\Pi u) - \Pi u)|_{I_m}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

a odhadu jednotlivých členů z pravé strany (4.80) obsahujících η . Pro odhad chyby budeme předpokládat, že řešení je dostatečně regulární, tedy že

$$u \in H^{q+1}(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; H^{p+1}(\Omega)). \quad (5.2)$$

Je zřejmé, že $C([0, T]; H^{p+1}(\Omega)) \subset L^2(0, T; H^{p+1}(\Omega))$.

Nechť systém triangulací $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0, h_0)}$ splňuje předpoklady (4.8), (4.9), (4.10) a navíc předpokládáme, že existuje konstanta $C_{HT} > 0$ taková, že

$$\tau_m \geq C_{HT} h^2. \quad (5.3)$$

Nechť $r \geq 1$ je celé číslo a $\mu = \min(r, p)$. Potom pro libovolné $v \in H^{r+1}(\Omega)$ máme následující známé odhady (viz např. [2], [18], [20])

$$\begin{aligned} \|\Pi v - v\|_{L^2(K)} &\leq C_{\Pi 1} h_K^{\mu+1} |v|_{H^{\mu+1}(K)}, \\ |\Pi v - v|_{H^1(K)} &\leq C_{\Pi 2} h_K^\mu |v|_{H^{\mu+1}(K)}, \\ |\Pi v - v|_{H^2(K)} &\leq C_{\Pi 3} h_K^{\mu-1} |v|_{H^{\mu+1}(K)}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

pro $K \in \mathcal{T}_h$, $h \in (0, h_0)$,

$$\begin{aligned} \|\Pi v - v\|_{L^2(K)} &\leq C_{\Pi 1}^* h_K |v|_{H^1(K)}, \\ |\Pi v - v|_{H^1(K)} &\leq C_{\Pi 2}^* |v|_{H^1(K)}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

pro $v \in H^1(K)$, $K \in \mathcal{T}_h$, $h \in (0, h_0)$, a

$$\|\Pi v\|_{L^2(K)} \leq \|v\|_{L^2(K)} \quad \text{pro } v \in L^2(K), \quad K \in \mathcal{T}_h, \quad h \in (0, h_0), \quad (5.6)$$

$$|\Pi v|_{H^1(K)} \leq C_{\Pi 4} |v|_{H^1(K)} \quad \text{pro } v \in H^1(K), \quad K \in \mathcal{T}_h, \quad h \in (0, h_0). \quad (5.7)$$

Pro zjednodušení zápisu budeme používat značení $D^{q+1} = \frac{\partial^{q+1}}{\partial t^{q+1}}$. Je možné ukázat, že

$$D^{q+1}(\Pi u) = \Pi(D^{q+1}u). \quad (5.8)$$

Platnost tohoto tvrzení ukážeme následujícím způsobem. S využitím (3.19) a $\Pi u(\cdot, t) \in S_h^p$ pro libovolné $t \in I_m$ platí

$$\int_{\Omega} (\Pi u(x, t) - u(x, t)) \varphi(x) \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in S_h^p. \quad (5.9)$$

Derivováním vzhledem k proměnné t máme

$$\int_{\Omega} (D^{q+1}(\Pi u(x, t)) - D^{q+1}u(x, t)) \varphi(x) \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in S_h^p. \quad (5.10)$$

Navíc je zřejmé, že $D^{q+1}(\Pi u(t)) \in S_h^p$, a tedy platí (5.8).

Podobně lze ukázat, že

$$D^{q+1}(\nabla \Pi u) = \nabla \Pi(D^{q+1}u). \quad (5.11)$$

5.1 Časová interpolace

Lemma 19 *Nechť $\varphi \in C((t_{m-1}, t_m], S_h^p)$, $m = 1, \dots, M$. Potom pro libovolné $x \in K$, $K \in \mathcal{T}_h$, $t \in I_m$, $m = 1, \dots, M$ máme*

$$\pi \varphi(x, t) = \tilde{P}_m \varphi(x, t), \quad (5.12)$$

kde \tilde{P}_m je definováno následujícím způsobem: Pro $\omega \in C((t_{m-1}, t_m])$,

$$\tilde{P}_m \omega \in \mathcal{P}^q(I_m), \quad (5.13)$$

$$\int_{I_m} (\tilde{P}_m \omega(t) - \omega(t)) t^j \, dt = 0, \quad \forall j = 0, \dots, q-1, \quad (5.14)$$

$$\tilde{P}_m \omega(t_m-) = \omega(t_m-). \quad (5.15)$$

Důkaz. Nechť $m \in \{1, \dots, M\}$. Z definice operátorů π a \tilde{P}_m plyne, že pro libovolný element $K \in \mathcal{T}_h$ jsou funkce $\pi \varphi$ a $\tilde{P}_m \varphi$ na $K \times I_m$ polynomy stupně $\leq q$ v $t \in I_m$ a stupně $\leq p$ v $x \in K$. Navíc $\pi \varphi(x, t_m-) = \varphi(x, t_m-) = \tilde{P}_m \varphi(x, t_m-)$ pro všechna $x \in K$. Je zřejmé, že podmínka (4.1c) je ekvivalentní s

$$\int_{I_m} \left(\int_K (\pi \varphi(x, t) - \varphi(x, t)) \sigma(x) \, dx \right) t^j \, dt = 0 \quad (5.16)$$

$$\forall j = 0, \dots, q-1, \quad \forall \sigma \in P^p(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Dále díky (5.14) pro libovolně $K \in \mathcal{T}_h$ máme

$$\int_{I_m} \left(\tilde{P}_m \varphi(x, t) - \varphi(x, t) \right) t^j \, dt = 0, \quad \forall j = 0, \dots, q-1, \quad \forall x \in K. \quad (5.17)$$

Nechť $\sigma \in P^p(K)$. Pokud přenásobíme funkcí σ poslední rovnost, integrujeme přes K a využijeme Fubiniho větu, postupně zjistíme, že

$$\begin{aligned} 0 &= \int_K \left(\int_{I_m} (\tilde{P}_m \varphi(x, t) - \varphi(x, t)) t^j \, dt \right) \sigma(x) \, dx \\ &= \int_{I_m} \left(\int_K (\tilde{P}_m \varphi(x, t) - \varphi(x, t)) \sigma(x) \, dx \right) t^j \, dt, \\ &\quad \forall j = 0, \dots, q-1, \quad \forall \sigma \in P^p(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \end{aligned}$$

S využitím faktu, že operátor π je jednoznačně definován, dostáváme (5.12). ■

Lemma 20 Jestliže $\omega \in H^{q+1}(I_m)$, potom

$$\left\| \tilde{P}_m \omega - \omega \right\|_{L^2(I_m)}^2 \leq C_P \tau_m^{2q+2} \left\| D^{q+1} \omega \right\|_{L^2(I_m)}^2, \quad (5.18)$$

kde $C_P > 0$ je konstanta nezávislá na ω , m a τ_m .

Důkaz. Budeme postupovat v několika krocích.

1. Nejprve transformujme časový interval $[t_{m-1}, t_m]$ na referenční interval $[0, 1]$ transformací

$$t = t_m - \vartheta \tau_m, \quad \vartheta \in [0, 1].$$

Jestliže $\omega \in H^{q+1}(I_m)$ a $s(\vartheta) = \omega(t_m - \vartheta \tau_m)$, potom $s \in H^{q+1}(0, 1)$. Necht' operátor P splňuje následující podmínky

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & Ps \in P^q(0, 1), \\ \text{b)} \quad & \int_0^1 (Ps(\vartheta) - s(\vartheta)) \vartheta^j d\vartheta = 0 \quad \forall j = 0, \dots, q-1, \\ \text{c)} \quad & Ps(0+) = s(0+). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Lze ukázat, že takový operátor existuje a je určen jednoznačně. Je zřejmé, že v (5.14) místo funkcí t^j můžeme použít funkce $\frac{1}{\tau_m} \left(\frac{t_m - t}{\tau_m} \right)^j$ pro $j = 0, \dots, q-1$. Postupnými úpravami s využitím věty o substituci, kde pokládáme $t = t_m - \vartheta \tau_m$, dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{I_m} \left((\tilde{P}_m \omega)(t) - \omega(t) \right) \frac{1}{\tau_m} \left(\frac{t_m - t}{\tau_m} \right)^j dt \\ &= \int_0^1 \left((\tilde{P}_m \omega)(t_m - \vartheta \tau_m) - \omega(t_m - \vartheta \tau_m) \right) \vartheta^j d\vartheta \\ &= \int_0^1 \left((\tilde{P}_m \omega)(t_m - \vartheta \tau_m) - s(\vartheta) \right) \vartheta^j d\vartheta. \end{aligned}$$

Protože navíc

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0+} (\tilde{P}_m \omega)(t_m - \vartheta \tau_m) = (\tilde{P}_m \omega)(t_m^-) = \omega(t_m^-) = s(0+),$$

potom z jednoznačnosti operátoru P plyne

$$(\tilde{P}_m \omega)(t_m - \vartheta \tau_m) = (Ps)(\vartheta). \quad (5.20)$$

Položíme-li $Z_m(t) = (\tilde{P}_m \omega)(t) - \omega(t)$, $t \in (t_{m-1}, t_m)$, $z(\vartheta) = Ps(\vartheta) - s(\vartheta)$, $\vartheta \in (0, 1)$, potom $z(\vartheta) = Z_m(t_m - \vartheta \tau_m)$ a

$$D^{q+1} z(\vartheta) = (-1)^{q+1} \tau_m^{q+1} (D^{q+1} Z_m)(t_m - \vartheta \tau_m), \quad \vartheta \in (0, 1). \quad (5.21)$$

S využitím věty o substituci obdržíme

$$\begin{aligned}\|z\|_{L^2(0,1)}^2 &= \frac{1}{\tau_m} \|Z_m\|_{L^2(I_m)}^2, \\ \|D^{q+1}z\|_{L^2(0,1)}^2 &= \tau_m^{2q+1} \|D^{q+1}Z_m\|_{L^2(I_m)}^2.\end{aligned}$$

2. Z jednoznačnosti operátoru P je zřejmé, že

$$Pr = r \quad \text{pro } r \in P^q(0, 1). \quad (5.22)$$

Nyní ukážeme, že operátor P je spojitě lineární zobrazení prostoru $H^{q+1}(0, 1)$ do $L^2(0, 1)$. Nechť $u_n \in H^{q+1}(0, 1)$, $n = 1, 2, \dots$, $u_n \rightarrow 0$ v $H^{q+1}(0, 1)$ pro $n \rightarrow \infty$. Díky spojitému vnoření prostoru $H^{q+1}(0, 1) \hookrightarrow C([0, 1])$ máme

$$u_n \rightrightarrows 0 \quad \text{in } [0, 1]. \quad (5.23)$$

Tudíž

$$Pu_n(0) \rightarrow 0. \quad (5.24)$$

Pro $j = 0, \dots, q-1$ máme

$$\int_0^1 (Pu_n - u_n)(\vartheta) \vartheta^j d\vartheta = 0. \quad (5.25)$$

Ze stejnoměrné konvergence u_n plyne

$$\int_0^1 Pu_n(\vartheta) \vartheta^j d\vartheta = \int_0^1 u_n(\vartheta) \vartheta^j d\vartheta \rightarrow 0, \quad j = 0, \dots, q-1. \quad (5.26)$$

Jelikož $Pu_n \in P^q(0, 1)$, potom můžeme psát

$$Pu_n(\vartheta) = \sum_{i=1}^q c_i^{(n)} \vartheta^i + (Pu_n)(0), \quad \vartheta \in [0, 1]. \quad (5.27)$$

Integrací dostáváme

$$\begin{aligned}\int_0^1 Pu_n(\vartheta) \vartheta^j d\vartheta &= \int_0^1 \sum_{i=1}^q c_i^{(n)} \vartheta^{i+j} d\vartheta + (Pu_n)(0) \int_0^1 \vartheta^j d\vartheta \\ &= \sum_{i=1}^q c_i^{(n)} \frac{1}{i+j+1} + (Pu_n)(0) \frac{1}{j+1}, \quad j = 0, \dots, q-1.\end{aligned}$$

Položíme $a_{ij} = \frac{1}{i+j+1}$, $b_i^{(n)} = \int_0^1 u_n(\vartheta) \vartheta^i d\vartheta - \frac{(Pu_n)(0)}{i+1}$. Je zřejmé, že matice $A = (a_{ij})$ je regulární a z (5.26) máme $Ac^{(n)} = b^{(n)}$, kde $c^{(n)} = (c_1^{(n)}, \dots, c_q^{(n)})^T$. Protože $b^{(n)} \rightarrow 0$, máme

$$c^{(n)} = A^{-1}b^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Tedy $Pu_n \rightrightarrows 0$ v $[0, 1]$, a tudíž $Pu_n \rightarrow 0$ v $L^2(0, 1)$.

3. Nyní již můžeme využít tvrzení 3.1.4 z [2], z kterého plyne, že

$$\|Z_m\|_{L^2(I_m)}^2 \leq C_P \tau_m^{2q+2} \|D^{q+1}\omega\|_{L^2(I_m)}^2.$$

■

Lemma 21 *Pro $\varphi \in H^{q+1}(I_m, S_h^p)$ platí:*

$$\begin{aligned} \|\pi\varphi(x, \cdot) - \varphi(x, \cdot)\|_{L^2(I_m)}^2 &= \left\| \tilde{P}_m \varphi(x, \cdot) - \varphi(x, \cdot) \right\|_{L^2(I_m)}^2 \\ &\leq C_P \tau_m^{2q+2} \|D^{q+1}\varphi(x, \cdot)\|_{L^2(I_m)}^2, \quad x \in K, K \in \mathcal{T}_h. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Důkaz plyne z lemmat 19 a 20.

5.2 Odhady členů obsahujících η

V této sekci se budeme zabývat odhady následujících členů

$$\|\eta_m^-\|^2, \int_{I_m} \|\eta\|_{L^2(K)}^2 dt, \int_{I_m} |\eta|_{H^1(K)}^2 dt, \int_{I_m} |\eta|_{H^2(K)}^2 dt, \int_{I_m} J_h(\eta, \eta) dt.$$

Z (5.1) máme

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{L^2(K)}^2 &\leq 2 \|\eta^{(1)}\|_{L^2(K)}^2 + 2 \|\eta^{(2)}\|_{L^2(K)}^2, \\ |\eta|_{H^s(K)}^2 &\leq 2 |\eta^{(1)}|_{H^s(K)}^2 + 2 |\eta^{(2)}|_{H^s(K)}^2, \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Lemma 22 *Pro libovolné $K \in \mathcal{T}_h$, $m = 1, \dots, M$ platí následující odhady*

$$\|\eta_m^-\|^2 \leq C_{\Pi 1}^2 h^{2(p+1)} |u(t_m)|_{H^{p+1}(\Omega)}^2, \quad (5.30)$$

$$\int_{I_m} \|\eta^{(1)}\|_{L^2(K)}^2 dt \leq C_{\Pi 1}^2 h_K^{2(p+1)} |u|_{L^2(I_m, H^{p+1}(K))}^2, \quad (5.31)$$

$$\int_{I_m} |\eta^{(1)}|_{H^1(K)}^2 dt \leq C_{\Pi 2}^2 h_K^{2p} |u|_{L^2(I_m, H^{p+1}(K))}^2, \quad (5.32)$$

$$h_K^2 \int_{I_m} |\eta^{(1)}|_{H^2(K)}^2 dt \leq C_{\Pi 3}^2 h_K^{2p} |u|_{L^2(I_m, H^{p+1}(K))}^2. \quad (5.33)$$

Důkaz. Stačí použít (5.4) s $r = p$.

■

Mnohem komplikovanější je odvození odhadů pro výrazy s $\eta^{(2)}$.

Lemma 23 *Pro libovolné $K \in \mathcal{T}_h$, $m = 1, \dots, M$ platí následující odhady*

$$\int_{I_m} \|\eta^{(2)}\|_{L^2(K)}^2 dt \leq C_P \tau_m^{2(q+1)} |u|_{H^{q+1}(I_m, L^2(K))}^2, \quad (5.34)$$

$$\int_{I_m} |\eta^{(2)}|_{H^1(K)}^2 dt \leq C_P C_{\Pi 4}^2 \tau_m^{2(q+1)} |u|_{H^{q+1}(I_m, H^1(K))}^2, \quad (5.35)$$

$$h_K^2 \int_{I_m} |\eta^{(2)}|_{H^2(K)}^2 dt \leq C_P C_{\Pi 4}^2 C_I^2 \tau_m^{2(q+1)} |u|_{H^{q+1}(I_m, H^1(K))}^2. \quad (5.36)$$

Důkaz. a) Použitím Fubiniho věty a vztahů (5.12), (5.28), (5.8) a (5.6) postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_{I_m} \|\eta^{(2)}\|_{L^2(K)}^2 dt &= \int_{I_m} \left(\int_K |\eta^{(2)}|^2 dx \right) dt \\
&= \int_K \left(\int_{I_m} |\eta^{(2)}|^2 dt \right) dx = \int_K \left\| \tilde{P}_m(\Pi u) - \Pi u \right\|_{L^2(I_m)}^2 dx \\
&\leq C_P \tau_m^{2q+2} \int_K \|D^{q+1}(\Pi u)\|_{L^2(I_m)}^2 dx \\
&= C_P \tau_m^{2q+2} \int_{I_m} \left(\int_K |D^{q+1}(\Pi u)|^2 dx \right) dt \\
&= C_P \tau_m^{2q+2} \int_{I_m} \left(\int_K |\Pi(D^{q+1}u)|^2 dx \right) dt \\
&\leq C_P \tau_m^{2q+2} \int_{I_m} \left(\int_K |D^{q+1}u|^2 dx \right) dt \\
&= C_P \tau_m^{2q+2} |u|_{H^{q+1}(I_m, L^2(K))}^2.
\end{aligned}$$

b) Použitím Fubiniho věty a vztahů (5.12), (5.28), (5.11) a (5.7) postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_{I_m} |\eta^{(2)}|_{H^1(K)}^2 dt &= \int_{I_m} \left(\int_K \left| \nabla \left(\Pi u - \tilde{P}_m(\Pi u) \right) \right|^2 dx \right) dt \\
&= \int_K \left(\int_{I_m} \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\Pi u) - \tilde{P}_m \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\Pi u) \right) \right)^2 dt \right) dx \\
&\leq C_P \tau_m^{2q+2} \int_K \left(\int_{I_m} |D^{q+1} \nabla(\Pi u)|^2 dt \right) dx \\
&= C_P \tau_m^{2q+2} \int_{I_m} \left(\int_K |\nabla(\Pi D^{q+1}u)|^2 dx \right) dt \\
&= C_P \tau_m^{2q+2} \int_{I_m} |\Pi(D^{q+1}u)|_{H^1(K)}^2 dt \\
&\leq C_P C_{\Pi 4}^2 \tau_m^{2q+2} \int_{I_m} |D^{q+1}u|_{H^1(K)}^2 dt \\
&= C_P C_{\Pi 4}^2 \tau_m^{2q+2} |u|_{H^{q+1}(I_m, H^1(K))}^2.
\end{aligned}$$

c) Za použití obdobného postupu jako v b) a (4.12) postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_{I_m} |\eta^{(2)}|_{H^2(K)}^2 dt &\leq C_P \tau_m^{2q+2} \int_{I_m} |\Pi(D^{q+1}u)|_{H^2(K)}^2 dt \\
&\leq C_P C_{\Pi 4}^2 C_I^2 \tau_m^{2q+2} h_K^{-2} \int_{I_m} |D^{q+1}u|_{H^1(K)}^2 dt \\
&= C_P C_{\Pi 4}^2 C_I^2 \tau_m^{2q+2} h_K^{-2} |u|_{H^{q+1}(I_m, H^1(K))}^2.
\end{aligned}$$

Nakonec se budeme zabývat odhadem $\int_{I_m} J_h(\eta, \eta) dt$. ■

$$\begin{aligned}
J_h(\eta, \eta) &= \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [\eta]^2 dS + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \eta^2 dS \\
&\leq 2 \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \left(\int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [\Pi u - u]^2 dS + \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [\pi(\Pi u) - \Pi u]^2 dS \right) \\
&\quad + 2 \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \left(\int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} (\Pi u - u)^2 dS + \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} (\pi(\Pi u) - \Pi u)^2 dS \right) \\
&\leq 2J_h(\Pi u - u, \Pi u - u) + 2J_h(\pi(\Pi u) - \Pi u, \pi(\Pi u) - \Pi u). \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Lemma 24 *Existuje konstanta $C_{101} > 0$ taková, že platí*

$$\int_{I_m} J_h(\Pi u - u, \Pi u - u) dt \leq C_{101} h^{2p} |u|_{L^2(I_m, H^{p+1}(\Omega))}^2, \tag{5.38}$$

kde

$$C_{101} = \frac{2C_W C_O}{C_T} (C_{\Pi 1}^2 + C_{\Pi 2}^2).$$

Důkaz. Z definice formy J_h a za použití Youngovy nerovnosti máme

$$\begin{aligned}
&J_h(\Pi u - u, \Pi u - u) \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} [\Pi u - u]^2 dS + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} (\Pi u - u)^2 dS \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} ((\Pi u - u)|_{\Gamma_{ij}} - (\Pi u - u)|_{\Gamma_{ji}})^2 dS \\
&\quad + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} (\Pi u - u)^2 dS \\
&\leq \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{2C_W}{h(\Gamma_{ij})} \left\{ ((\Pi u - u)|_{\Gamma_{ij}})^2 + ((\Pi u - u)|_{\Gamma_{ji}})^2 \right\} dS \\
&\quad + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} (\Pi u - u)^2 dS.
\end{aligned}$$

S využitím předpokladu (4.10) a tvrzení 5 máme

$$\begin{aligned}
J_h(\Pi u - u, \Pi u - u) &\leq \frac{2C_W}{C_T} \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i} \frac{1}{h_{K_i}} (\Pi u - u)^2 \, dS \\
&\leq \frac{2C_W C_O}{C_T} \sum_{i \in I} \left(\frac{\|\Pi u - u\|_{L^2(K_i)}^2}{h_{K_i}^2} + |\Pi u - u|_{H^1(K_i)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Nakonec spolu s odhady (5.4) s $(\mu = p)$ celkově dostáváme

$$\begin{aligned}
&\int_{I_m} J_h(\Pi u - u, \Pi u - u) \, dt \leq \int_{I_m} \frac{2C_W C_O}{C_T} (C_{\Pi 1}^2 + C_{\Pi 2}^2) h^{2p} \sum_{i \in I} |u|_{H^{p+1}(K_i)}^2 \, dt \\
&= C_{101} h^{2p} |u|_{L^2(I_m, H^{p+1}(\Omega))}^2.
\end{aligned}$$

■

Na závěr musíme odhadnout výraz

$$\int_{I_m} J_h(\pi(\Pi u) - \Pi u, \pi(\Pi u) - \Pi u) \, dt. \quad (5.39)$$

Zvolme libovolné $\Gamma_{ij} \in \mathcal{T}_h$, kde $i \in I$, $j \in s(i)$. Jestliže položíme $\varphi := \Pi u$, potom můžeme psát

$$\begin{aligned}
(\star) &:= \int_{I_m} \left(\int_{\Gamma_{ij}} [\pi(\Pi u) - \Pi u]^2 \, dS \right) dt \quad (5.40) \\
&= \int_{I_m} \left(\int_{\Gamma_{ij}} [\pi\varphi - \varphi]^2 \, dS \right) dt = \int_{\Gamma_{ij}} \left(\int_{I_m} [\pi\varphi(x, \cdot) - \varphi(x, \cdot)]^2 \, dt \right) dS \\
&= \int_{\Gamma_{ij}} \left\| [\pi\varphi(x, \cdot) - \varphi(x, \cdot)] \right\|_{L^2(I_m)}^2 dS = \int_{\Gamma_{ij}} \left\| [\tilde{P}_m \varphi(x, \cdot) - \varphi(x, \cdot)] \right\|_{L^2(I_m)}^2 dS.
\end{aligned}$$

Za použití vztahu

$$[\tilde{P}_m \varphi - \varphi] = \tilde{P}_m[\varphi] - [\varphi] \quad (5.41)$$

platného na hranách Γ_{ij} a (5.28) dostáváme, že

$$(\star) = \int_{\Gamma_{ij}} \left\| \tilde{P}_m[\varphi(x, \cdot)] - [\varphi(x, \cdot)] \right\|_{L^2(I_m)}^2 dS \leq C_P \tau_m^{2q+2} \int_{\Gamma_{ij}} \|D^{q+1}[\varphi(x, \cdot)]\|_{L^2(I_m)}^2 dS. \quad (5.42)$$

Pokud vezmeme v úvahu, že v důsledku (5.2) platí

$$\begin{aligned}
D^{q+1}[\varphi(x, \cdot)] &= [D^{q+1}\varphi(x, \cdot)], \\
[D^{q+1}u] &= 0,
\end{aligned}$$

použijeme $\varphi = \Pi u$, (5.40) – (5.42) a Fubiniho větu, potom dostaneme

$$\begin{aligned}
& \int_{I_m} \left(\int_{\Gamma_{ij}} [\pi(\Pi u) - \Pi u]^2 \, dS \right) dt \\
& \leq C_P \tau_m^{2q+2} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\int_{I_m} |D^{q+1}[\varphi(x, t)]|^2 \, dt \right) dS \\
& = C_P \tau_m^{2q+2} \int_{I_m} \left(\int_{\Gamma_{ij}} [D^{q+1}(\Pi u - u)]^2 \, dS \right) dt.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

S využitím tvrzení 5 dostaneme

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} [D^{q+1}(\Pi u - u)]^2 \, dS \\
& \leq \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \left(2 (D^{q+1}(\Pi u - u)|_{\Gamma_{ij}})^2 + 2 (D^{q+1}(\Pi u - u)|_{\Gamma_{ji}})^2 \right) dS \\
& \leq 2 \sum_{i \in I} \|D^{q+1}(\Pi u - u)\|_{L^2(\partial K_i)}^2 \\
& \leq 2C_O \sum_{i \in I} \left(\frac{1}{h_{K_i}} \|D^{q+1}(\Pi u - u)\|_{L^2(K_i)}^2 + h_{K_i} |D^{q+1}(\Pi u - u)|_{H^1(K_i)}^2 \right).
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Díky (5.8) máme

$$D^{q+1}(\Pi u - u) = \Pi(D^{q+1}u) - D^{q+1}u. \tag{5.45}$$

Vzhledem k předpokladu (5.2), že $D^{q+1}u \in L^2(I_m, H^1(\Omega))$, a aproximačních vlastností (5.5) projekce Π máme pro $\forall K \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned}
\|\Pi(D^{q+1}u) - D^{q+1}u\|_{L^2(K)} & \leq C_{\Pi 1}^* h_K |D^{q+1}u|_{H^1(K)}, \\
\|\Pi(D^{q+1}u) - D^{q+1}u\|_{H^1(K)} & \leq C_{\Pi 2}^* |D^{q+1}u|_{H^1(K)}.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Postupně z (4.10), (5.43), (5.44), (5.45) a (5.46) dostáváme

$$\begin{aligned}
& \int_{I_m} \left(\sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \int_{\Gamma_{ij}} [\pi(\Pi u) - \Pi u]^2 \, dS \right) dt \\
& \leq \frac{2C_O C_W C_P}{C_T} \tau_m^{2q+2} \int_{I_m} \sum_{i \in I} \left(\frac{1}{h_{K_i}^2} \|D^{q+1}(\Pi u - u)\|_{L^2(K_i)}^2 + |D^{q+1}(\Pi u - u)|_{H^1(K_i)}^2 \right) dt \\
& \leq C_{110} \tau_m^{2q+2} \int_{I_m} \sum_{i \in I} |D^{q+1}u|_{H^1(K_i)}^2 \, dt = C_{110} \tau_m^{2q+2} \sum_{i \in I} |u|_{H^{q+1}(I_m, H^1(K_i))}^2,
\end{aligned} \tag{5.47}$$

kde

$$C_{110} = \frac{2C_O C_W C_P (C_{\Pi 1}^{*2} + C_{\Pi 2}^{*2})}{C_T}.$$

Nakonec nám zbývá odhadnout výraz

$$(+):= \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{I_m} \left(\frac{C_W}{h(\Gamma_{ij})} \int_{\Gamma_{ij}} |\pi(\Pi u) - \Pi u|^2 \, dS \right) dt. \quad (5.48)$$

Jestliže budeme postupovat podobně jako výše, potom dostaneme

$$\begin{aligned} (+) &\leq \frac{C_P C_W}{C_T} \tau_m^{2q+2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \frac{1}{h_{K_i}} \int_{\Gamma_{ij}} \|D^{q+1}(\Pi u)\|_{L^2(I_m)}^2 \, dS \\ &= \frac{C_P C_W}{C_T} \tau_m^{2q+2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \frac{1}{h_{K_i}} \int_{I_m} \left(\int_{\Gamma_{ij}} |D^{q+1}(\Pi u)|^2 \, dS \right) dt \\ &= \frac{C_P C_W}{C_T} \tau_m^{2q+2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \frac{1}{h_{K_i}} \int_{I_m} \left(\int_{\Gamma_{ij}} |\Pi(D^{q+1}u)|^2 \, dS \right) dt. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Jestliže nyní aplikujeme tvrzení 5, potom dostaneme část $J_h(\pi(\Pi u) - \Pi u, \pi(\Pi u) - \Pi u)$ odpovídající $\Gamma_{ij} \subset \partial\Omega \cap \partial K_i$ řádu $O(\tau_m^{2q+2} h_{K_i}^{-2})$. Jestliže $h_{K_i} \sim \tau_m$, potom celková chyba odhadu výrazu (+) bude řádu $O(\tau_m^{2q})$, což bude suboptimální.

Tento nedostatek vyřešíme níže uvedeným způsobem. Pro následující úvahy budeme předpokládat, že Dirichletova okrajová podmínka $u_D = u_D(x, t)$ má v t polynomiální závislost stupně $\leq q$. V řadě praktických případů je tento předpoklad dostačující. Předpokládáme tedy, že

$$u_D(x, t) = \sum_{j=0}^q \psi_j(x) t^j, \quad (5.50)$$

kde $\psi_j \in H^{p+1/2}(\partial\Omega)$ pro $j = 0, \dots, q$, a tudíž $D^{q+1}u|_{\partial\Omega} = D^{q+1}u_D = 0$. S využitím (5.49), (4.14) a (5.47) postupně dostáváme

$$\begin{aligned} (+) &= \frac{C_P C_W}{C_T} \tau_m^{2q+2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \frac{1}{h_{K_i}} \int_{I_m} \left(\int_{\Gamma_{ij}} |\Pi(D^{q+1}u) - D^{q+1}u|^2 \, dS \right) dt \\ &\leq \frac{C_P C_W C_O}{C_T} \tau_m^{2q+2} \sum_{i \in I} \int_{I_m} \frac{\|\Pi(D^{q+1}u) - D^{q+1}u\|_{L^2(K_i)}^2}{h_{K_i}^2} dt \\ &\quad + \frac{C_P C_W C_O}{C_T} \tau_m^{2q+2} \sum_{i \in I} \int_{I_m} |\Pi(D^{q+1}u) - D^{q+1}u|_{H^1(K_i)}^2 dt \\ &\leq \frac{C_{110}}{2} \tau_m^{2q+2} \int_{I_m} \sum_{i \in I} |D^{q+1}u|_{H^1(K_i)}^2 dt = \frac{C_{110}}{2} \tau_m^{2q+2} \sum_{i \in I} |u|_{H^{q+1}(I_m, H^1(K_i))}^2. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Dále budeme uvažovat pouze Dirichletovu okrajovou podmínku definovanou v (5.50). Shrnutím (5.38), (5.37), (5.47) a (5.51) dostaneme následující výsledek.

Lemma 25 *Za předpokladu (5.50) existuje konstanta $C_{111} > 0$ taková, že platí*

$$\int_{I_m} J_h(\eta, \eta) \, dt \leq C_{111} \left(h^{2p} |u|_{L^2(I_m, H^{p+1}(\Omega))}^2 + \tau_m^{2q+2} |u|_{H^{q+1}(I_m, H^1(\Omega))}^2 \right), \quad (5.52)$$

kde

$$C_{111} = \max \{2C_{101}, 3C_{110}\}.$$

6 Hlavní výsledek

Použitím výše odvozených výsledků můžeme dokázat odhad chyby metody.

Věta 26 *Nechť u je přesné řešení problému (2.1) splňující podmínky regularity (5.2). Nechť U splňuje diskrétní problém (3.21) s Dirichletovou okrajovou podmínkou definovanou v (5.50). Nechť jsou splněny podmínky (4.10), (4.65) pro $q = 1$ nebo (4.72) pro $q \geq 2$ a (5.3). Potom existuje konstanta $C > 0$ nezávislá na h, τ, U taková, že platí*

$$\begin{aligned} & \|e_m^-\|^2 + \frac{\beta_0}{2} \sum_{j=1}^m \int_{I_j} \|e\|_{DG}^2 \, dt \\ & \leq C_{130} e^{C_{81} t_m} \left(\sum_{n=1}^m \left(h^{2p} |u|_{L^2(I_n, H^{p+1}(\Omega))}^2 + \tau_n^{2q+2} |u|_{H^{q+1}(I_n, H^1(\Omega))}^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + h^{2p+2} |u|_{L^2(I_n, H^{p+1}(\Omega))}^2 + \tau_n^{2q+2} |u|_{H^{q+1}(I_n, L^2(\Omega))}^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + h^2 \tau_n^{2q+2} |u|_{H^{q+1}(I_n, H^1(\Omega))}^2 \right) + h^{2p} |u|_{C([0, T]; H^{p+1}(\Omega))}^2 \right) \\ & \quad + C_{131} \sum_{n=1}^m \left(h^{2p} |u|_{L^2(I_n, H^{p+1}(\Omega))}^2 + \tau_n^{2q+2} |u|_{H^{q+1}(I_n, H^1(\Omega))}^2 \right. \\ & \quad \left. + h^{2p+2} |u|_{C([0, T]; H^{p+1}(\Omega))}^2 \right), \quad m = 1, \dots, M, \quad h \in (0, h_0). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Důkaz. S využitím lemmat 22, 23, 25 a definice (4.46) zjistíme, že

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^m \int_{I_n} R(\eta) \, dt = \sum_{n=1}^m \int_{I_n} \sigma_a^2(\eta) \, dt \\
& = \sum_{n=1}^m \int_{I_n} \left(\|\eta\|_{DG}^2 + \|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i \in I} \left(h_{K_i}^2 |\eta|_{H^1(K_i)}^2 + h_{K_i}^2 |\eta|_{H^2(K_i)}^2 \right) \right) dt \\
& \leq \sum_{n=1}^m C_{120} h^{2p} |u|_{L^2(I_n, H^{p+1}(\Omega))}^2 + C_{121} \tau_n^{2q+2} |u|_{H^{q+1}(I_n, H^1(\Omega))}^2 \\
& \quad + C_{122} h^{2p+2} |u|_{L^2(I_n, H^{p+1}(\Omega))}^2 + C_{123} h^2 \tau_n^{2q+2} |u|_{H^{q+1}(I_n, H^1(\Omega))}^2 \\
& \quad + C_{124} \tau_n^{2q+2} |u|_{H^{q+1}(I_n, L^2(\Omega))}^2, \tag{6.2}
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
C_{120} &= 2C_{\Pi 2}^2 + C_{111} + 2C_{\Pi 3}^2, & C_{121} &= 2C_P C_{\Pi 4}^2 + C_{111} + 2C_P C_{\Pi 4}^2 C_I^2, \\
C_{122} &= 2C_{\Pi 1}^2 + 2C_{\Pi 2}^2, & C_{123} &= 2C_P C_{\Pi 4}^2, & C_{124} &= 2C_P.
\end{aligned}$$

Dále z lemmatu 22 a (5.3) máme

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^m \|\eta_{n-1}^-\|^2 \leq C_{\Pi 1}^2 h^{2p+2} \sum_{n=1}^M |u(t_{n-1})|_{H^{p+1}(\Omega)}^2 \leq C_{\Pi 1}^2 C_{HT}^{-1} h^{2p} |u|_{C([0, T]; H^{p+1}(\Omega))}^2 \sum_{n=1}^M \tau_n \\
& \leq C_{\Pi 1}^2 C_{HT}^{-1} T h^{2p} |u|_{C([0, T]; H^{p+1}(\Omega))}^2. \tag{6.3}
\end{aligned}$$

Dále

$$\sum_{n=1}^m \int_{I_n} \|\eta\|_{DG}^2 \leq \sum_{n=1}^m C_{125} h^{2p} |u|_{L^2(I_n, H^{p+1}(\Omega))}^2 + C_{126} \tau_n^{2q+2} |u|_{H^{q+1}(I_n, H^1(\Omega))}^2, \tag{6.4}$$

kde

$$C_{125} = 2C_{\Pi 2}^2 + C_{111}, \quad C_{126} = 2C_P C_{\Pi 4}^2 + C_{111}.$$

Nakonec za použití věty 18 a (6.2)-(6.4) dostaneme (6.1), kde

$$\begin{aligned}
C_{130} &= C_{91} \max \{ C_{120}, C_{121}, C_{122}, C_{123}, C_{124}, C_{\Pi 1}^2 C_{HT}^{-1} T \}, \\
C_{131} &= \max \{ \beta_0 C_{125}, \beta_0 C_{126}, 2C_{\Pi 1}^2 \}.
\end{aligned}$$

■

7 Stlačitelné vazké proudění

V této kapitole se budeme zabývat popisem stlačitelného vazkého proudění v omezené oblasti $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ závisující na čase $t \in [0, T]$.

7.1 Navierovy-Stokesovy rovnice

Stlačitelné vazké proudění je popsáno systémem Navierových-Stokesových rovnic, jejichž odvození lze nalézt např. [18]. Z důvodu zjednodušení budeme předpokládat, že proudění je tzv. Newtonovské. Jinými slovy to znamená, že vazká část tenzoru napětí závisí lineárně na tenzoru rychlosti deformace, což je případ plynů. Po těchto zjednodušeních, která nemají prakticky žádný vliv na skutečnou interakci pevného tělesa s plynem (tekutinou), dostáváme následující tvar Navierových-Stokesových rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad \text{pro } i = 1, 2, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^2 \tau_{ij} v_j + k \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (7.1)$$

kde

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}^V, \quad (7.2)$$

$$\tau_{ij}^V = \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}(\mathbf{v}), \quad d_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (7.3)$$

$\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{ij}\}$ je tenzor napětí a $\boldsymbol{\tau}^V = \{\tau_{ij}^V\}$ je vazká část tenzoru napětí. Dále používáme následující značení: ρ - hustota, p - tlak, E - celková energie, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ - rychlost, θ - absolutní teplota, δ_{ij} - Kroneckerovo delta, μ, λ - koeficienty vazkosti, $\gamma > 1$ - Poissonova adiabatická konstanta, $k > 0$ - koeficient vedení tepla, $c_v > 0$ - specifické teplo při konstantním objemu, $c_p > 0$ - specifické teplo při konstantním tlaku a platí, že $\gamma c_v = c_p$. Na základě kinetické teorie plynů pro naše účely předpokládáme, že $\mu \geq 0$ a $\lambda = -2\mu/3$.

Z důvodu počtu neznámých vystupujících v systému rovnic (7.1) přidáváme následující rovnice pro perfektní plyn vyjadřující tlak a absolutní teplotu:

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} \right), \quad \theta = \frac{1}{c_v} \left(\frac{E}{\rho} - \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right). \quad (7.4)$$

Na závěr k systému rovnic (7.1) musíme přidat počáteční podmínky definující stav v počátečním čase $t = 0$ a okrajové podmínky charakterizující chování proudění na hranici oblasti $\partial\Omega(t)$.

Počáteční podmínky můžeme formulovat následujícím způsobem:

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}^0(x), \quad \rho(x, 0) = \rho^0(x), \quad p(x, 0) = p^0(x) \quad (7.5)$$

s danými počátečními daty $\mathbf{v}^0, \rho^0, p^0$.

Volba okrajových podmínek je mnohem komplikovanější. Hranici oblasti rozdělíme na tři disjunktní části: $\partial\Omega(t) = \Gamma_I \cup \Gamma_O \cup \Gamma_W(t)$. Pro jednoduchost předpokládáme, že Γ_I - vstup a Γ_O - výstup jsou nezávislé na čase a $\Gamma_W(t)$ - neprostupná stěna je na čase závislá. Potom definujeme následující okrajové podmínky:

$$\text{a) } \rho|_{\Gamma_I} = \rho_D, \quad \text{b) } \mathbf{v}|_{\Gamma_I} = \mathbf{v}_D = (v_{D1}, v_{D2})^T, \quad (7.6)$$

$$\text{c) } \sum_{i,j=1}^2 \tau_{ij}^V n_i v_j + k \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_I,$$

$$\text{a) } \mathbf{v}|_{\Gamma_W(t)} = \mathbf{z}_D = (z_{D1}, z_{D2}), \quad \text{b) } \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_W(t)} = 0, \quad (7.7)$$

$$\text{a) } \sum_{i=1}^2 \tau_{ij}^V n_i = 0, \quad j = 1, 2, \quad \text{na } \Gamma_O \quad \text{b) } \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_O} = 0, \quad (7.8)$$

kde ρ_D, \mathbf{v}_D jsou dané funkce a \mathbf{z}_D je rychlost pohybující se neprostupné stěny.

7.2 Bezrozměrný tvar Navierových-Stokesových rovnic

Pro numerické experimenty odpovídající skutečnému proudění je výhodné transformovat systém rovnic (7.1) na tzv. bezrozměrný tvar. Z tohoto důvodu zavádíme tzv. *charakteristické* veličiny: charakteristická délka L^* , charakteristická rychlost U^* (skalární veličina), charakteristická hustota ρ^* , charakteristická vazkost μ^* a charakteristická konstanta vedení tepla k^* . Zbylé veličiny lze z těchto veličin odvodit. Potom definujeme bezrozměrné veličiny, které značíme apostrofem, následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{x_i}{L^*}, & v'_i &= \frac{v_i}{U^*}, & \mathbf{v}' &= \frac{\mathbf{v}}{U^*}, & \rho' &= \frac{\rho}{\rho^*}, \\ p' &= \frac{p}{\rho^* U^{*2}}, & E' &= \frac{E}{\rho^* U^{*2}}, & \theta' &= \frac{c_v \theta}{U^{*2}}, & t' &= \frac{t U^*}{L^*}, \\ \mu' &= \frac{\mu}{\mu^*}, & \lambda' &= \frac{\lambda}{\mu^*}, & k' &= \frac{k}{k^*}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Pro názornost přetransformujeme 2. rovnici systému (7.1) na bezrozměrný tvar, zbylé rovnice se přetransformují obdobně. S využitím (7.9) postupně dostáváme

$$\frac{\partial \rho v_1}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \rho^* U^* \frac{\partial}{\partial t} \rho' v_1'(\mathbf{x}', t') = \rho^* U^* \frac{\partial \rho' v_1'}{\partial t'}(\mathbf{x}', t') \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (7.10)$$

$$= \frac{\rho^* U^{*2}}{L^*} \frac{\partial \rho' v_1'}{\partial t'}(\mathbf{x}', t'),$$

$$\frac{\partial \rho v_1^2}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) = \rho^* U^{*2} \frac{\partial}{\partial x_1} \rho' v_1'^2(\mathbf{x}', t') = \rho^* U^{*2} \frac{\partial \rho' v_1'^2}{\partial x_1'}(\mathbf{x}', t') \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} \quad (7.11)$$

$$= \frac{\rho^* U^{*2}}{L^*} \frac{\partial \rho' v_1'^2}{\partial x_1'}(\mathbf{x}', t'),$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) = \rho^* U^{*2} \frac{\partial}{\partial x_1} p'(\mathbf{x}', t') = \rho^* U^{*2} \frac{\partial p'}{\partial x_1'}(\mathbf{x}', t') \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} \quad (7.12)$$

$$= \frac{\rho^* U^{*2}}{L^*} \frac{\partial p'}{\partial x_1'}(\mathbf{x}', t'),$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) \right) = U^* \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} v_1'(\mathbf{x}', t') \right) \quad (7.13)$$

$$= U^* \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1'}{\partial x_1'}(\mathbf{x}', t') \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} \right) = \frac{U^*}{L^*} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1'}{\partial x_1'} \right) (\mathbf{x}', t')$$

$$= \frac{U^*}{L^*} \frac{\partial^2 v_1'}{\partial x_1'^2}(\mathbf{x}', t') \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = \frac{U^*}{L^{*2}} \frac{\partial^2 v_1'}{\partial x_1'^2}(\mathbf{x}', t').$$

Podobně lze ukázat, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_1 v_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\rho^* U^{*2}}{L^*} \frac{\partial \rho' v_1' v_2'}{\partial x_2'}(\mathbf{x}', t'), & \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}, t) &= \frac{U^*}{L^{*2}} \frac{\partial^2 v_1'}{\partial x_2'^2}(\mathbf{x}', t'), \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}, t) &= \frac{U^*}{L^{*2}} \frac{\partial^2 v_2'}{\partial x_1' \partial x_2'}(\mathbf{x}', t'). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Tudíž 2. rovnici systému lze přepsat ve tvaru

$$\frac{\partial \rho' v_1'}{\partial t'} + \operatorname{div}(\rho' v_1' \mathbf{v}') = -\frac{\partial p'}{\partial x_1'} + \frac{\mu^*}{\rho^* U^* L^*} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tau_{1j}'^V}{\partial x_j'}. \quad (7.15)$$

System (7.1) můžeme tedy přepsat do následujícího bezrozměrného tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \operatorname{div}(\rho' \mathbf{v}') &= 0, & (7.16) \\ \frac{\partial \rho' v_i'}{\partial t'} + \operatorname{div}(\rho' v_i' \mathbf{v}') &= -\frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tau_{ij}'^V}{\partial x_j'}, \quad \text{pro } i = 1, 2, \\ \frac{\partial E'}{\partial t'} + \operatorname{div}(E' \mathbf{v}') &= -\operatorname{div}(p' \mathbf{v}') + \frac{1}{Re} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i'} \left(\sum_{j=1}^2 \tau_{ij}'^V v_j' \right) \right) + \frac{\gamma k'}{Re Pr} \Delta \theta', \end{aligned}$$

kde

$$\tau_{ij}'^V = \lambda' \operatorname{div} \mathbf{v}' \delta_{ij} + 2\mu' d'_{ij}(\mathbf{v}'), \quad d'_{ij}(\mathbf{v}') = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x'_i} \right) \quad (7.17)$$

je vazká část tenzoru napětí vyjádřená v bezrozměrném tvaru a

$$Re = \frac{\rho^* U^* L^*}{\mu^*} \quad \text{a} \quad Pr = \frac{c_p \mu^*}{k^*} \quad (7.18)$$

je tzv. Reynoldsovo a Prandtlovo číslo. Nakonec musíme ještě k systému (7.16) přidat rovnice (7.4) vyjádřené v následujícím bezrozměrném tvaru, který lze snadno odvodit

$$p' = (\gamma - 1) \left(E' - \frac{1}{2} \rho' |\mathbf{v}'|^2 \right), \quad \theta' = \left(\frac{E'}{\rho'} - \frac{1}{2} |\mathbf{v}'|^2 \right). \quad (7.19)$$

Protože dále budeme pracovat již pouze s bezrozměrným tvarem, budeme apostrof u veličin vynechávat, pokud nebude řečeno jinak. Systém rovnic nakonec zapíšeme v následující podobě

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} &= \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s}, \\ \mathbf{w}(x, 0) &= \mathbf{w}^0(x), \quad x \in \Omega(0), \end{aligned} \quad (7.20)$$

kde \mathbf{w} je tzv. stavový vektor definovaný jako $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, E)^T \in \mathbb{R}^4$ a $\mathbf{w}^0(x)$ je počáteční podmínka. Dále funkce \mathbf{f}_s jsou tzv. nevazké členy, které lze vyjádřit jako $\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = (\rho v_s, \rho v_1 v_s + \delta_{1s} p, \rho v_2 v_s + \delta_{2s} p, (E+p)v_s)^T$, a funkce \mathbf{R}_s jsou tzv. vazké členy, které vyjádříme ve tvaru $\mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \left(0, \tau_{s1}^V, \tau_{s2}^V, \tau_{s1}^V v_1 + \tau_{s2}^V v_2 + \frac{\gamma k}{Re Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x_s} \right)^T$. Potom můžeme zjistit, že :

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + (\gamma - 1) \left(w_4 - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right) \\ \frac{w_2 w_3}{w_1} \\ \frac{w_2}{w_1} \left(\gamma w_4 - (\gamma - 1) \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right) \end{pmatrix}, \quad (7.21)$$

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_3 \\ \frac{w_2 w_3}{w_1} \\ \frac{w_3^2}{w_1} + (\gamma - 1) \left(w_4 - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right) \\ \frac{w_3}{w_1} \left(\gamma w_4 - (\gamma - 1) \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right) \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

Lze snadno ukázat [18], že nevazké členy jsou homogenní, což jinými slovy znamená, že

$$\mathbf{f}_s(\alpha \mathbf{w}) = \alpha \mathbf{f}_s(\mathbf{w}), \quad \alpha > 0. \quad (7.23)$$

Díky této vlastnosti potom lze tyto funkce vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbf{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w}, \quad s = 1, 2, \quad (7.24)$$

kde

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{w}) = \frac{D\mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}}, \quad s = 1, 2, \quad (7.25)$$

jsou Jacobiovy matice zobrazení \mathbf{f}_s . Obdobně vazké členy $\mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})$ můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k}, \quad s = 1, 2, \quad (7.26)$$

kde matice $\mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ jsou nelineárně závislé na \mathbf{w} a jejich vyjádření je následující

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{1,1}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ -(2\mu + \lambda) \frac{w_2}{w_1^2}, & (2\mu + \lambda) \frac{1}{w_1}, & 0, & 0 \\ -\mu \frac{w_3}{w_1^2}, & 0, & \frac{\mu}{w_1}, & 0 \\ \{\mathbf{K}_{1,1}\}_{4,1}, & (2\mu + \lambda - \frac{\gamma k}{Pr}) \frac{w_2}{w_1^2}, & (\mu - \frac{\gamma k}{Pr}) \frac{w_3}{w_1^2}, & \frac{\gamma k}{Pr w_1} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_{1,2}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ -\lambda \frac{w_3}{w_1^2}, & 0, & \frac{\lambda}{w_1}, & 0 \\ -\mu \frac{w_2}{w_1^2}, & \frac{\mu}{w_1}, & 0, & 0 \\ -(\lambda + \mu) \frac{w_2 w_3}{w_1^3}, & \mu \frac{w_3}{w_1^2}, & \lambda \frac{w_2}{w_1^2}, & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_{2,1}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ -\mu \frac{w_3}{w_1^2}, & 0, & \frac{\mu}{w_1}, & 0 \\ -\lambda \frac{w_2}{w_1^2}, & \frac{\lambda}{w_1}, & 0, & 0 \\ -(\lambda + \mu) \frac{w_2 w_3}{w_1^3}, & \lambda \frac{w_3}{w_1^2}, & \mu \frac{w_2}{w_1^2}, & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_{2,2}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ -\mu \frac{w_2}{w_1^2}, & \frac{\mu}{w_1}, & 0, & 0 \\ -(2\mu + \lambda) \frac{w_3}{w_1^2}, & 0, & (2\mu + \lambda) \frac{1}{w_1}, & 0 \\ \{\mathbf{K}_{2,2}\}_{4,1}, & (\mu - \frac{\gamma k}{Pr}) \frac{w_2}{w_1^2}, & (2\mu + \lambda - \frac{\gamma k}{Pr}) \frac{w_3}{w_1^2}, & \frac{\gamma k}{Pr w_1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \{\mathbf{K}_{1,1}\}_{4,1} &= -(2\mu + \lambda) \frac{w_2^2}{w_1^3} - \mu \frac{w_3^2}{w_1^3} + \frac{\gamma k}{Pr} \left(-\frac{w_4}{w_1^2} + \frac{w_2^2 + w_3^2}{w_1^3} \right), \\ \{\mathbf{K}_{2,2}\}_{4,1} &= -\mu \frac{w_2^2}{w_1^3} - (2\mu + \lambda) \frac{w_3^2}{w_1^3} + \frac{\gamma k}{Pr} \left(-\frac{w_4}{w_1^2} + \frac{w_2^2 + w_3^2}{w_1^3} \right). \end{aligned}$$

7.3 ALE-formulace Navierových-Stokesových rovnic

Z důvodu závislosti výpočetní oblasti na čase zavádíme tzv. *arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE) zobrazení $\mathcal{A}_t : \Omega(0) \rightarrow \Omega(t)$, $t \in [0, T]$, které zobrazuje referenční oblast $\Omega(0)$ na oblast $\Omega(t)$. Předpokládáme, že zobrazení \mathcal{A}_t je prosté a dostatečně regulární. Symbolem \mathbf{X} budeme značit body referenční oblasti $\Omega(0)$ a symbolem \mathbf{x} body oblasti $\Omega(t)$. Dále definujeme tzv. ALE-rychlost vztahy

$$\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_t(\mathbf{X}), \quad t \in [0, T], \mathbf{X} \in \Omega(0), \quad (7.27)$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{z}}(\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x}), t), \quad t \in [0, T], \mathbf{x} \in \Omega(t) \quad (7.28)$$

a ALE-derivaci funkce $f = f(\mathbf{x}, t)$ definované pro $\mathbf{x} \in \Omega(t)$, kterou značíme $\frac{D^A}{Dt}$, následujícím způsobem:

$$\frac{D^A}{Dt} f(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(\mathbf{X}, t), \quad (7.29)$$

kde

$$\tilde{f}(\mathbf{X}, t) = f(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t), \quad \mathbf{X} \in \Omega(0), \mathbf{x} = \mathcal{A}_t(\mathbf{X}). \quad (7.30)$$

Nyní za použití věty o derivování složené funkce dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{D^A f(\mathbf{x}, t)}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} f(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t) + \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla f(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\mathbf{z}(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t)) - f(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{z}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Toto vyjádření nás vede k následujícím dvěma různým formulacím Navierových-Stokesových rovnic v ALE tvaru.

Formulace 1:

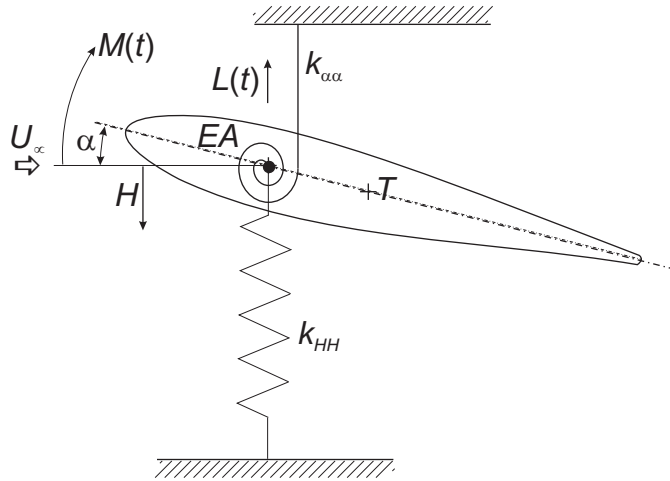
$$\frac{D^A \mathbf{w}}{Dt} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} - \mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{w} = \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s}. \quad (7.32)$$

Formulace 2:

$$\frac{D^A \mathbf{w}}{Dt} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{g}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} + \mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{z} = \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s}, \quad (7.33)$$

kde \mathbf{g}_s jsou modifikované nevazké toky tvaru

$$\mathbf{g}_s(\mathbf{w}) := \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) - z_s \mathbf{w}.$$



Obrázek 1: Schéma vibrujícího profilu.

7.4 Popis interakce

V této části popíšeme interakci mezi profilem a obtékajícím plynem. Budeme předpokládat, že profil je tuhé těleso se dvěma stupni volnosti, ve kterých může oscilovat ve vertikálním směru a otáčet se kolem tzv. elastické osy (elastic axis (EA)). Posun ve vertikálním směru je značen H a je orientován kladně proti směru osy x_2 . Úhel otočení značíme α a je orientován kladně po směru hodinových ručiček. Budeme simulovat následující situaci zobrazenou na obrázku 1. Tuto situaci si můžeme představit tak, že máme profil, který nám v rovnovážné poloze ($H = 0$ a $\alpha = 0$) drží dvě fiktivní pružiny. Pokud začnou na profil působit síly vlivem proudění, začne se profil vychylovat z rovnovážné polohy, ale tyto pružiny se budou snažit opět vrátit profil do rovnovážné polohy. Tyto fiktivní pružiny ve skutečnosti představují tuhosti celého křídla. Rovnice popisující pohyb profilu jsou odvozeny v [38] z Lagrangeových rovnic a lze je zapsat jako systém obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} m\ddot{H} + S_\alpha\ddot{\alpha} \cos \alpha - S_\alpha\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + d_{HH}\dot{H} + k_{HH}H &= -L(t), \\ S_\alpha\ddot{H} \cos \alpha + I_\alpha\ddot{\alpha} + d_{\alpha\alpha}\dot{\alpha} + k_{\alpha\alpha}\alpha &= M(t). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Za předpokladu malých výchylek α a jejich derivací $\dot{\alpha}$, kdy $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, $\dot{\alpha}\alpha \approx 0$, $\dot{\alpha}^2\alpha \approx 0$, dostaneme linearizovaný systém tvaru

$$\begin{aligned} m\ddot{H} + S_\alpha\ddot{\alpha} + d_{HH}\dot{H} + k_{HH}H &= -L(t), \\ S_\alpha\ddot{H} + I_\alpha\ddot{\alpha} + d_{\alpha\alpha}\dot{\alpha} + k_{\alpha\alpha}\alpha &= M(t), \end{aligned} \quad (7.35)$$

kde je m – hmotnost profilu, S_α – statický moment profilu vzhledem k elastické ose, I_α – moment setrvačnosti profilu vzhledem k elastické ose, k_{HH} – tuhost v posunutí, $k_{\alpha\alpha}$ – tuhost v torzi, d_{HH} – strukturální tlumení v ohybu, $d_{\alpha\alpha}$ – strukturální tlumení v torzi. K systémům (7.34) a (7.35) přidáváme počáteční podmínky $H(0)$, $\alpha(0)$, $\dot{H}(0)$, $\dot{\alpha}(0)$.

Aerodynamická síla L , působící na profil ve vertikálním směru, a torzní moment M jsou definovány vztahy

$$L(t) = -l \int_{\Gamma_W(t)} \sum_{j=1}^2 \tau_{2j} n_j \, dS, \quad (7.36)$$

$$M(t) = l \int_{\Gamma_W(t)} \sum_{i,j=1}^2 \tau_{ij} n_j (-1)^i (x_{1+\delta_{1i}} - x_{1+\delta_{1i}}^{EA}) \, dS, \quad (7.37)$$

kde l je hloubka profilu a x_i^{EA} jsou souřadnice elastické osy.

Nyní se krátce opět vrátíme k rozlišování rozměrových a bezrozměrných jednotek proto, že sice řešíme bezrozměrné Navierovy-Stokesovy rovnice (7.16), ale soustavy (7.34) a (7.35), popisující pohyb profilu, jsou v rozměrových jednotkách. Musíme tedy najít vyjádření síly a momentu pomocí bezrozměrných veličin. Budeme postupovat jako v sekci 7.2. Lze obdobně jako v případech (7.10) - (7.14) ukázat, že

$$\tau_{ij}^V(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu^* U^*}{L^*} \tau_{ij}'^V(\boldsymbol{\psi}', t'). \quad (7.38)$$

Dále budeme předpokládat, že existují dostatečně regulární funkce $\psi_1, \psi_2, \boldsymbol{\psi}$, kde $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, a čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, taková, že

$$\Gamma_W(t) = \{(\psi_1(r), \psi_2(r)); r \in (a, b)\}.$$

Symbolem $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$ označíme derivaci funkcí ψ_1, ψ_2 podle proměnné r . Potom postupně z definice křivkového integrálu s využitím (7.2), (7.9) a (7.38) dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_W(t)} \sum_{j=1}^2 \tau_{2j} n_j \, dS = \int_{\Gamma_W(t)} \sum_{j=1}^2 (-p \delta_{2j} + \tau_{2j}^V) n_j \, dS \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^2 (-p(\boldsymbol{\psi}(r), t) \delta_{2j} + \tau_{2j}^V(\boldsymbol{\psi}(r), t)) n_j \sqrt{\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2} \, dr \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^2 \left(-\rho^* U^{*2} p'(\boldsymbol{\psi}'(r), t') \delta_{2j} + \frac{\mu^* U^*}{L^*} \tau_{2j}'^V(\boldsymbol{\psi}'(r), t') \right) n_j' L^* \sqrt{\dot{\psi}_1'^2 + \dot{\psi}_2'^2} \, dr \\ &= \rho^* U^{*2} L^* \int_a^b \sum_{j=1}^2 \left(-p'(\boldsymbol{\psi}'(r), t') \delta_{2j} + \frac{1}{Re} \tau_{2j}'^V(\boldsymbol{\psi}'(r), t') \right) n_j' \sqrt{\dot{\psi}_1'^2 + \dot{\psi}_2'^2} \, dr \\ &= \rho^* U^{*2} L^* \int_{\Gamma_W'(t)} \sum_{j=1}^2 \left(-p' \delta_{2j} + \frac{1}{Re} \tau_{2j}'^V \right) n_j' \, dS', \end{aligned}$$

kde $L^* \dot{\psi}_1' = \dot{\psi}_1$, $L^* \dot{\psi}_2' = \dot{\psi}_2$, $\boldsymbol{\psi}' = (\psi_1', \psi_2')$ a

$$\Gamma'_W(t) = \{(\psi'_1(r), \psi'_2(r)); r \in (a, b)\}.$$

Potom je zřejmé, že platí $n'_j = n_j$ pro $j = 1, 2$. Obdobně lze ukázat, že

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_W(t)} \sum_{i,j=1}^2 \tau_{ij} n_j (-1)^i (x_{1+\delta_{1i}} - x_{1+\delta_{1i}}^{EA}) \, dS \\ &= \rho^* U^{*2} L^{*2} \int_{\Gamma'_W(t)} \sum_{i,j=1}^2 \left(-p' \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \tau'_{ij}{}^V \right) n'_j (-1)^i (x'_{1+\delta_{1i}} - x'_{1+\delta_{1i}}{}^{EA}) \, dS'. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že

$$\begin{aligned} L(t) &= -l \rho^* U^{*2} L^* \int_{\Gamma'_W(t)} \sum_{j=1}^2 \left(-p' \delta_{2j} + \frac{1}{Re} \tau'_{2j}{}^V \right) n'_j \, dS' \quad (7.39) \\ M(t) &= l \rho^* U^{*2} L^{*2} \int_{\Gamma'_W(t)} \sum_{i,j=1}^2 \left(-p' \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \tau'_{ij}{}^V \right) n'_j (-1)^i (x'_{1+\delta_{1i}} - x'_{1+\delta_{1i}}{}^{EA}) \, dS'. \end{aligned}$$

Dále opět budeme apostrof pro jednoduchost vynechávat.

8 Diskretizace

V této kapitole se budeme zabývat diskretizací systému rovnic tvaru (7.32) nebo (7.33). Tuto diskretizaci budeme provádět za použití nespojité Galerkinovy metody, a to nejprve jako semi-diskretizaci v prostoru kombinovanou s BDF metodou v čase a potom i úplnou časoprostorovou nespojitou Galerkinovou metodou.

8.1 Semidiskretizace

Obdobně jako v kapitole 3 budeme předpokládáme, že $\Omega_h(t)$ je polygonální aproximace oblasti $\Omega(t)$. Dále z důvodu zjednodušení značení i pro následnou programovou realizaci předpokládáme, že vztahy mezi elementy triangulace budou po celou dobu výpočtu stejné a pouze se budou měnit pozice vrcholů. (Rozšíření pro případ, kdy na každé časové vrstvě (viz sekce 8.2 a 8.3) uvažujeme jinou triangulaci, je snadné). Tedy $\mathcal{T}_h(t) = \{K_i(t)\}_{i \in I}$, kde $I \subset Z^+$ je vhodná indexová množina, je triangulace oblasti $\Omega_h(t)$ skládající se z trojúhelníků $K_i(t)$, kde $K_i^o(t) \cap K_j^o(t) = \emptyset$ pro $i \neq j$. $\Gamma_{ij}(t) = \Gamma_{ji}(t)$ buď značí společnou hranu sousedících elementů $K_i(t)$ a $K_j(t)$, nebo $\Gamma_{ij}(t) \subset \partial\Omega_h(t)$ je hrana $K_i(t)$ a $j \in \gamma(i)$, kde $\gamma(i)$ je indexová množina hran ležících na hranici elementu $K_i(t)$. Navíc jestliže $\Gamma_{ij}(t) \subset \Gamma_W(t)$, potom definujeme množinou $\gamma_W(i)$ takovou, že $j \in \gamma_W(i)$. Obdobně pro $\Gamma_{ij} \subset \Gamma_I$ resp. $\Gamma_{ij} \subset \Gamma_O$, kde nepředpokládáme závislost Γ_{ij} na čase, definujeme množiny $\gamma_I(i)$ resp. $\gamma_O(i)$. Pro jednodušší zápis definujeme množinu $\gamma_{IO}(i) := \gamma_I(i) \cup \gamma_O(i)$. Obdobně definujeme množiny $\gamma_{IW}(i)$ a $\gamma_{OW}(i)$. Dále definujeme indexovou množinu $s(i) = \{j \in I; K_j(t) \text{ je souseď } K_i(t)\}$ a indexovou množinu $S(i) = s(i) \cup \gamma(i)$. Dále používáme stejné značení jako v kapitole 3, kde $\mathbf{n}_{ij}(t) = ((n_{ij}(t))_1, (n_{ij}(t))_2)$ značí vnější jednotkovou normálu k $\partial K_i(t)$ na hraně $\Gamma_{ij}(t)$ ($\mathbf{n}_{ij}(t)$ je konstantní vektor na $\Gamma_{ij}(t)$), $h(\Gamma_{ij}(t)) = |\Gamma_{ij}(t)|$ je 1-dimenzionální Lebesgueova míra $\Gamma_{ij}(t)$, $h_{K_i(t)} = \text{diam}(K_i(t))$ je průměr množiny $K_i(t)$, $h(t) = \max_{i \in I} h_{K_i(t)}$, $|K_i(t)|$ je Lebesgueova míra elementu $K_i(t)$ a $\rho_{K_i(t)}$ poloměr největšího kruhu vepsaného do $K_i(t)$.

Na triangulaci $\mathcal{T}_h(t)$ definujeme prostor

$$\mathbf{H}^k(\Omega_h(t), \mathcal{T}_h(t)) = (H^k(\Omega_h(t), \mathcal{T}_h(t)))^4, \quad (8.1)$$

kde

$$H^k(\Omega_h(t), \mathcal{T}_h(t)) = \{v; v|_{K_i(t)} \in H^k(K_i(t)), \forall K_i(t) \in \mathcal{T}_h(t)\}. \quad (8.2)$$

Pro $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega_h(t), \mathcal{T}_h(t))$ zavádíme označení :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)} &= \text{stopa } \mathbf{w}|_{K_i(t)} \text{ na } \Gamma_{ij}(t), \\ \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)} &= \text{stopa } \mathbf{w}|_{K_j(t)} \text{ na } \Gamma_{ji}(t), \\ \langle \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_{ij}(t)} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)} + \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)} \right), \\ [\mathbf{w}]_{\Gamma_{ij}(t)} &= \mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)} - \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

definující *stopu*, *průměr* a *skok* funkce \mathbf{w} na $\Gamma_{ij}(t) = \Gamma_{ji}(t)$. Je zřejmé z těchto definic, že

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_{ij}(t)} &= \langle \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_{ji}(t)}, \\ [\mathbf{w}]_{\Gamma_{ij}(t)} &= -[\mathbf{w}]_{\Gamma_{ji}(t)}, \\ [\mathbf{w}]_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{n}_{ij}(t) &= [\mathbf{w}]_{\Gamma_{ji}(t)} \mathbf{n}_{ji}(t).\end{aligned}\tag{8.4}$$

Nakonec pro $p \geq 1$ celé definujeme prostor $\mathbf{S}_h^p(t)$ jako po složkách prostor nespojitých po částech polynomiálních funkcí:

$$\mathbf{S}_h^p(t) = (S_h^p(t))^4, \quad \text{kde } S_h^p(t) = \{v; v|_{K_i(t)} \in P^r(K_i(t)), \forall K_i(t) \in \mathcal{T}_h(t)\}.$$

Symbolem $P^p(K)$ značíme opět prostor polynomů na elementu K stupně $\leq p$.

Prostorovou semidiskretizaci provedeme zvlášť pro Formulaci 1 a Formulaci 2.

8.1.1 Formulace 1

Budeme předpokládat, že \mathbf{w} je dostatečně regulární řešení problému (7.32). Pro diskretizaci problému zvolíme libovolně, ale pevně $t \in [0, T]$, potom násobíme systém (7.32) testovací funkcí $\Phi \in \mathbf{S}_h^p(t)$, integrujeme přes elementy $K_i(t)$, sčítáme přes všechna $i \in I$ a dostaneme

$$\begin{aligned}& \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \frac{D^A \mathbf{w}}{Dt} \cdot \Phi \, d\mathbf{x} + \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} \cdot \Phi \, d\mathbf{x} \\ & - \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 z_s \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_s} \cdot \Phi \, d\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s} \cdot \Phi \, d\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{8.5}$$

Upravme nejprve za použití Greenovy věty nevazký člen. Dostaneme

$$\begin{aligned}& \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} \cdot \Phi \, d\mathbf{x} \\ & = \sum_{i \in I} \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij}(t))_s \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS - \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} \, d\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{8.6}$$

Nevazký tok přes hrany $\Gamma_{ij}(t)$, $i \in I$, $j \in S(i)$ vyjádříme pomocí numerického toku \mathbf{H}_f :

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \approx \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij}(t))_s.\tag{8.7}$$

Uvažujme následující podmínky (H) pro obecný numerický tok \mathbf{H} :

1. $\mathbf{H}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{n})$ je definován v $\mathbb{R}^8 \times B_1$, kde $B_1 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2; |\mathbf{n}| = 1\}$ a je lokálně lipschitzovsky spojitý v proměnných $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$: ke každému $r > 0$ existuje konstanta $L_H(r)$ taková, že

$$|\mathbf{H}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{n}) - \mathbf{H}(\mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_2^*, \mathbf{n})| \leq L_H(r)(|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1^*| + |\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_2^*|), \quad (8.8)$$

$$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_2^* \in \mathbb{R}^4, \quad |\mathbf{w}_1|, |\mathbf{w}_2|, |\mathbf{w}_1^*|, |\mathbf{w}_2^*| \leq r, \quad \mathbf{n} \in B_1.$$

2. $\mathbf{H}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{n})$ je konzistentní:

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^d \mathbf{f}_s(\mathbf{w}_1) n_s, \quad \mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2) \in B_1. \quad (8.9)$$

3. $\mathbf{H}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{n})$ je konzervativní:

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{n}) = -\mathbf{H}(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1, -\mathbf{n}), \quad \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{n} \in B_1. \quad (8.10)$$

Z předpokladů (8.8) a (8.9) plyne, že funkce $\mathbf{f}_s(\mathbf{w})$, $s = 1, 2$, jsou lokálně lipschitzovsky spojité. Potom postupně s využitím (8.7), (8.10) a $\mathbf{n}_{ij} = -\mathbf{n}_{ji}$ máme

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij}(t))_s \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ & \approx \sum_{i \in I} \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{H}_f(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ & = \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in S(i) \\ j < i}} \left(\int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{H}_f(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{H}_f(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{n}_{ji}(t)) \cdot \Phi|_{\Gamma_{ji}(t)} \, dS \right) \\ & \quad + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{H}_f(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ & = \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in S(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{H}_f(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \cdot [\Phi]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ & \quad + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{H}_f(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Pro vytvoření semiimplicitního schématu potřebujeme, aby numerický tok \mathbf{H}_f měl vhodnou formu pro linearizaci i pro práci na časově závislých oblastech. Ukazuje se, že vhodná volba je tzv. Vijayasundaramův numerický tok [40], protože jeho tvar nám dále umožní vhodnou linearizaci schématu. K odvození tohoto toku využijeme vlastnosti (7.24), z které plyne

$$\sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) n_s = \sum_{s=1}^2 \mathbf{A}_s(\mathbf{w}) n_s \mathbf{w} = \mathbf{P}_f(\mathbf{w}, \mathbf{n}) \mathbf{w}, \quad (8.12)$$

kde $\mathbf{P}_f(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^2 \mathbf{A}_s(\mathbf{w})n_s$. Lze ukázat [18], že tato matice je diagonalizovatelná. Tedy existují diagonální matice $\Lambda_f(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ a regulární matice $\mathbf{T}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ takové, že

$$\mathbf{P}_f(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}\Lambda_f\mathbf{T}^{-1}, \quad \Lambda_f = \text{diag}(\lambda_{f1}, \dots, \lambda_{f4}), \quad (8.13)$$

kde $\lambda_{f1}, \dots, \lambda_{f4}$ jsou vlastní čísla matice \mathbf{P}_f . Definujme $\lambda^+ = \max(\lambda, 0)$ resp. $\lambda^- = \min(\lambda, 0)$ jako kladnou resp. zápornou část λ . Potom definujme "kladnou" a "zápornou" část matice \mathbf{P}_f jako

$$\mathbf{P}_f^\pm(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}\Lambda_f^\pm\mathbf{T}^{-1}, \quad \Lambda_f^\pm = \text{diag}(\lambda_{f1}^\pm, \dots, \lambda_{f4}^\pm). \quad (8.14)$$

Potom Vijayasundaramův numerický tok pro Formulaci 1 je definován jako

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{n}) \equiv \mathbf{P}_f^+ \left(\frac{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2}{2}, \mathbf{n} \right) \mathbf{w}_1 + \mathbf{P}_f^- \left(\frac{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2}{2}, \mathbf{n} \right) \mathbf{w}_2. \quad (8.15)$$

Nyní v numerickém toku $\mathbf{H}_f(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}}, \mathbf{n}_{ij})$ pro $i \in I, j \in \gamma_{IO}(i)$ musíme specifikovat hodnoty $\mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}}$ (Zde píšeme Γ_{ij} místo $\Gamma_{ij}(t)$ protože $\Gamma_{ij} \subset \Gamma_I \cup \Gamma_O$). Pro tento případ definujeme

$$\mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}} := \text{LRP}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{w}_D, \mathbf{n}_{ij}), \quad (8.16)$$

kde $\text{LRP}(\dots)$ reprezentuje řešení tzv. *lokálního Riemannova problému* uvažovaném na hraně Γ_{ij} a \mathbf{w}_D je stavový vektor daný okrajovými podmínkami. My zde ukážeme řešení tzv. linearizovaného Riemannova problému (viz také [18]). Za použití rotační invariance transformujeme Eulerovy rovnice do soustavy souřadné \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 , kde souřadnice \tilde{x}_1 je rovnoběžná s normálou \mathbf{n}_{ij} a souřadnice \tilde{x}_2 je tečna k hranici, zanedbáme derivaci vzhledem k \tilde{x}_2 a definujeme stavový vektor $\mathbf{q}_{ij} = \mathbf{Q}(\mathbf{n}_{ij}) \mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}}$, kde

$$\mathbf{Q}(\mathbf{n}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & (n_{ij})_1, & (n_{ij})_2, & 0 \\ 0, & -(n_{ij})_2, & (n_{ij})_1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

je matice rotace. Potom dostaneme lineární systém

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A}_1(\mathbf{q}_{ij}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_1} = 0 \quad (8.18)$$

pro transformovaný stavový vektor $\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{n}_{ij})\mathbf{w}$, uvažovaný na množině $(-\infty, 0) \times (0, \infty)$ s následujícími počátečními a okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\tilde{x}_1, 0) &= \mathbf{q}_{ij}, & \tilde{x}_1 < 0, \\ \mathbf{q}(0, t) &= \mathbf{q}_{ji}, & t > 0. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Cílem je zvolit \mathbf{q}_{ji} takovým způsobem, že výše uvedený problém bude mít jednoznačné řešení. Metoda charakteristik vede k následujícímu postupu. Položme $\mathbf{q}_{ji}^* = \mathbf{Q}(\mathbf{n}_{ij})\mathbf{w}_D$. Vypočítáme vlastní vektory \mathbf{r}_s odpovídající vlastním číslům λ_s , $s = 1, \dots, 4$, matice $\mathbf{A}_1(\mathbf{q}_{ij})$, uspořádáme je do sloupců a tím z nich vytvoříme matici \mathbf{T} a vypočítáme \mathbf{T}^{-1} (přesné vyjádření lze nalézt v [18], odstavec 3.1). Nyní položíme

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{q}_{ij}, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{q}_{ji}^*. \quad (8.20)$$

a definujeme stav \mathbf{q}_{ji} vztahy

$$\mathbf{q}_{ji} := \sum_{s=1}^4 \gamma_s \mathbf{r}_s, \quad \gamma_s = \begin{cases} \alpha_s, & \lambda_s \geq 0, \\ \beta_s, & \lambda_s < 0. \end{cases} \quad (8.21)$$

Nakonec hledaný tvar stavu $\mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}}$ je definován jako

$$\mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}} = \mathbf{w}_{ji} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{n}_{ij})\mathbf{q}_{ji}. \quad (8.22)$$

Na hranici $\Gamma_W(t)$ máme předepsanou podmínku pro neprostupnou stěnu

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}. \quad (8.23)$$

S využitím této podmínky budeme numerický tok \mathbf{H}_f upravovat takto :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_W^f(\mathbf{w}, \mathbf{n}) &:= \mathbf{H}_f(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{w})n_1 + \mathbf{f}_2(\mathbf{w})n_2 = \\ &= \begin{pmatrix} \rho v_1 n_1 + \rho v_2 n_2 \\ (\rho v_1^2 + p)n_1 + \rho v_1 v_2 n_2 \\ \rho v_1 v_2 n_1 + (\rho v_2^2 + p)n_2 \\ (E + p)v_1 n_1 + (E + p)v_2 n_2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 0 \\ n_1 \\ n_2 \\ \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ E \end{pmatrix} \\ &= (\gamma - 1) \left(w_4 - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ n_1 \\ n_2 \\ \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jelikož platí

$$\mathbf{F}_W^f(\alpha \mathbf{w}, \mathbf{n}) = \alpha \mathbf{F}_W^f(\mathbf{w}, \mathbf{n}) \quad \alpha > 0, \quad (8.24)$$

potom lze ukázat, že

$$\mathbf{F}_W^f(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = D_{\mathbf{w}}\mathbf{F}_W^f(\mathbf{w}, \mathbf{n})\mathbf{w}, \quad (8.25)$$

kde $D_{\mathbf{w}}\mathbf{F}_W^f(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ je Jacobiova matice zobrazení $\mathbf{F}_W^f(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ v proměnné \mathbf{w} , kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$D_{\mathbf{w}}\mathbf{F}_W^{\mathbf{f}}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = (\gamma - 1) \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}}{\gamma-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1^2} n_1 & \frac{\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}}{\gamma-1} - \frac{w_2}{w_1} n_1 & -\frac{w_3}{w_1} n_1 & n_1 \\ \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1^2} n_2 & -\frac{w_2}{w_1} n_2 & \frac{\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}}{\gamma-1} - \frac{w_3}{w_1} n_2 & n_2 \\ \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1^2} \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} & -\frac{w_2}{w_1} \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} & -\frac{w_3}{w_1} \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} & \frac{\gamma}{\gamma-1} \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}.$$

Definujme formu $\tilde{b}_h^{\mathbf{f}}$ pro ne vazký člen a formu $d_h^{\mathbf{f}}$:

$$\tilde{b}_h^{\mathbf{f}}(\mathbf{w}, \Phi, t) := - \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} \, d\mathbf{x} \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in S(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{H}_{\mathbf{f}}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \cdot [\Phi]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ &+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IO}(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{H}_{\mathbf{f}}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}}, \mathbf{n}_{ij}) \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}} \, dS \\ &+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_W(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} D_{\mathbf{w}}\mathbf{F}_W^{\mathbf{f}}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)} \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS, \end{aligned}$$

$$d_h^{\mathbf{f}}(\mathbf{w}, \Phi, t) := - \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 z_s(t) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_s} \cdot \Phi \, d\mathbf{x}. \quad (8.27)$$

Vyjádření funkce $\mathbf{z}(t)$ je provedeno v části 8.5.

Obdobně jako v ne vazkém případě upravme nejprve za použití Greenovy věty vazký člen

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s} \cdot \Phi \, d\mathbf{x} \quad (8.28) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{R}_s(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \nabla \mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)})(n_{ij}(t))_s \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ &\quad - \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Integrály přes hrany $\Gamma_{ij}(t)$, $i \in I, j \in S(i)$ upravíme s využitím (7.26) takto:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in I} \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{R}_s(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \nabla \mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)})(n_{ij}(t))_s \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in S(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\
&\quad + \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ji}(t)} (n_{ji}(t))_s \cdot \Phi|_{\Gamma_{ji}(t)} \, dS \\
&+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS.
\end{aligned}$$

Jelikož předpokládáme, že řešení \mathbf{w} je dostatečně regulární, potom platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)} &= \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)} = \langle \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_{ij}(t)}, \\
\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} &= \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ji}(t)} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right\rangle_{\Gamma_{ij}(t)} \quad \text{pro } k = 1, 2,
\end{aligned}$$

a tedy

$$\mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} = \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ji}(t)} = \left\langle \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right\rangle_{\Gamma_{ij}(t)}. \quad (8.29)$$

Z těchto úvah nakonec plyne, že

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in I} \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{R}_s(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \nabla \mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)})(n_{ij}(t))_s \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \quad (8.30) \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in S(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \left\langle \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right\rangle_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot [\Phi]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\
&+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS.
\end{aligned}$$

Dále k těmto výrazům přidáváme navíc následující tzv. *stabilizační člen*, který je nulový pro přesné dostatečně regulární řešení, pro které $[\mathbf{w}]_{\Gamma_{ij}(t)} = 0$:

$$\Theta \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in S(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \left\langle \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{k,s}^T(\mathbf{w}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot [\mathbf{w}]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS. \quad (8.31)$$

Tento výraz obdržíme tak, že formálně zaměníme proměnné v lineárních argumentech druhého výrazu (8.30). Navíc se ukazuje [28], že je vhodné místo matice $\mathbf{K}_{s,k}$ uvažovat ve stabilizačním členu matici $\mathbf{K}_{k,s}^T$. Podobný výraz přidáme i na části hranice oblasti:

$$\Theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{k,s}^T(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot \mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS, \quad (8.32)$$

který budeme kompenzovat výrazem

$$\Theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{k,s}^T(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot \mathbf{w}_B(t) \, dS \quad (8.33)$$

s hraničním stavem \mathbf{w}_B , který budeme definovat později. Potom definujeme vazkou formu \tilde{a}_h jako

$$\begin{aligned} \tilde{a}_h(\mathbf{w}, \Phi, t) &:= \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} \, d\mathbf{x} \quad (8.34) \\ &- \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \left\langle \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right\rangle_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot [\Phi]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ &- \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ &- \Theta \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \left\langle \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{k,s}^T(\mathbf{w}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot [\mathbf{w}]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ &- \Theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{k,s}^T(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot \mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS. \end{aligned}$$

Pokud volíme $\Theta = 1$, potom mluvíme o symetrické formulaci, pokud $\Theta = -1$, mluvíme o nesymetrické formulaci a pro $\Theta = 0$ máme neúplnou formulaci.

Nakonec přidáváme do diskretizace tzv. *penalizační formu* J_h^σ tvaru

$$\begin{aligned} J_h^\sigma(\mathbf{w}, \Phi, t) &= \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sigma [\mathbf{w}]_{\Gamma_{ij}(t)} \cdot [\Phi]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \quad (8.35) \\ &+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sigma \mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)} \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS, \end{aligned}$$

kde $\sigma|_{\Gamma_{ij}(t)} = \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij}(t))Re}$ a $C_W > 0$ je vhodná konstanta. Obdobně jako předchozí stabilizační člen se i tento člen pro přesné řešení anuluje na hranách $\Gamma_{ij}(t)$, $i \in I, j \in s(i)$ a integrál přes hranici budeme kompenzovat výrazem tvaru

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sigma \mathbf{w}_B(t) \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS.$$

Hraniční stavový vektor \mathbf{w}_B předepsaný na $\Gamma_{ij}(t)$ pro $i \in I, j \in \gamma_{IW}(i)$ je dán okrajovými podmínkami a extrapolací

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_B(t) &= (\rho|_{\Gamma_W(t)}, (\rho z_1)|_{\Gamma_W(t)}, (\rho z_2)|_{\Gamma_W(t)}, (\rho \theta)|_{\Gamma_W(t)}) \quad \text{na } \Gamma_W(t), \\ \mathbf{w}_B(t) &= (\rho_D, \rho_D v_{D1}, \rho_D v_{D2}, \rho_D \theta|_{\Gamma_I} + \frac{1}{2} \rho_D |\mathbf{v}_D|^2) \quad \text{na } \Gamma_I. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Nakonec forma pro pravou stranu, kde vystupují členy (8.34) a (8.35), které vznikly kompenzací přidanych členů ve formách \tilde{a}_h a J_h^σ , je ve tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{l}_h(\mathbf{w}, \Phi, t) &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sigma \mathbf{w}_B(t) \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ &- \Theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{k,s}^T(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot \mathbf{w}_B(t) \, dS. \end{aligned}$$

8.1.2 Formulace 2

Budeme postupovat obdobně jako pro předchozí formulaci. Opět předpokládáme, že \mathbf{w} je dostatečně regulární řešení problému (7.33). Pro diskretizaci problému zvolíme libovolně, ale pevně $t \in [0, T]$, potom násobíme systém (7.33) testovací funkcí $\Phi \in \mathbf{S}_h^p(t)$, integrujeme přes elementy K_i , sčítáme přes všechna $i \in I$ a dostaneme

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \frac{D^A \mathbf{w}}{Dt} \cdot \Phi \, d\mathbf{x} + \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{g}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} \cdot \Phi \, d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{z} \cdot \Phi \, d\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s} \cdot \Phi \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Je zřejmé, že formy \tilde{a}_h, \tilde{l}_h a J_h^σ zůstávají stejné. Formy pro nevazkové členy se budou trochu lišit, ale postup odvození je stejný. Pro integrály přes hrany $\Gamma_{ij}(t), i \in I, j \in S(i)$ zavádíme numerický tok \mathbf{H}_g :

$$\mathbf{H}_g(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \approx \sum_{s=1}^2 \mathbf{g}_s(\mathbf{w})(n_{ij}(t))_s \quad (8.38)$$

splňující podmínky (H) pro obecný numerický tok \mathbf{H} . Potom opět postupně s využitím (8.38), (8.10) a $\mathbf{n}_{ij}(t) = -\mathbf{n}_{ji}(t)$ máme

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in I} \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{g}_s(\mathbf{w})(n_{ij}(t))_s \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\
& \approx \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in S(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{H}_g(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \cdot [\Phi]|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\
& \quad + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{H}_g(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS.
\end{aligned} \tag{8.39}$$

Pro numerický tok \mathbf{H}_g opět volíme Vijayasundaramův numerický tok. K odvození tohoto toku využijeme vlastnosti (7.24) a (8.12) a pokud definujeme $\mathbf{P}_g(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{P}_f(\mathbf{w}, \mathbf{n}) - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n})\mathbf{I}$, máme

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^2 \mathbf{g}_s(\mathbf{w})n_s &= \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w})n_s - z_s n_s \mathbf{w} = \mathbf{P}_f(\mathbf{w}, \mathbf{n})\mathbf{w} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{I} \mathbf{w} \\
&= \mathbf{P}_g(\mathbf{w}, \mathbf{n})\mathbf{w}.
\end{aligned} \tag{8.40}$$

Z (8.13) a následujících rovností plyne, že matice \mathbf{P}_g je diagonalizovatelná :

$$\mathbf{P}_g(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}\Lambda_f\mathbf{T}^{-1} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n})\mathbf{I} = \mathbf{T}\Lambda_g\mathbf{T}^{-1}, \tag{8.41}$$

kde

$$\begin{aligned}
\Lambda_g &= \text{diag}(\lambda_{g1}, \dots, \lambda_{g4}) = \Lambda_f - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n})\mathbf{I}, \\
\lambda_{gi} &= \lambda_{fi} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{pro } i = 1, \dots, 4.
\end{aligned} \tag{8.42}$$

Potom definujeme "kladnou" a "zápornou" část matice \mathbf{P}_g jako

$$\mathbf{P}_g^\pm(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}\Lambda_g^\pm\mathbf{T}^{-1}, \quad \Lambda_g^\pm = \text{diag}(\lambda_{g1}^\pm, \dots, \lambda_{g4}^\pm). \tag{8.43}$$

Vijayasundaramův numerický tok pro Formulaci 2 je nyní definován jako

$$\mathbf{H}_g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{n}) \equiv \mathbf{P}_g^+ \left(\frac{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2}{2}, \mathbf{n} \right) \mathbf{w}_1 + \mathbf{P}_g^- \left(\frac{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2}{2}, \mathbf{n} \right) \mathbf{w}_2. \tag{8.44}$$

Opět hodnoty $\mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}}$ pro $i \in I, j \in \gamma_{IO}(i)$ definujeme jako

$$\mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}} := \text{LRP}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{w}_D, \mathbf{n}_{ij}), \tag{8.45}$$

kde $\text{LRP}(\cdot, \cdot, \cdot)$ reprezentuje řešení tzv. *lokálního Riemannova problému* uvažovaného na hraně Γ_{ij} a \mathbf{w}_D je stavový vektor daný okrajovými podmínkami.

Na hranici $\Gamma_W(t)$ máme opět předepsanou podmínku pro neprostupnou stěnu

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}. \quad (8.46)$$

S využitím této podmínky upravme numerický tok \mathbf{H}_g následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_W^g(\mathbf{w}, \mathbf{n}) &:= \mathbf{H}_g(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) n_s - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{w} \\ &= \mathbf{F}_W^f(\mathbf{w}, \mathbf{n}) - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{w} = (\gamma - 1) \left(w_4 - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ n_1 \\ n_2 \\ \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\mathbf{F}_W^g(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = D_{\mathbf{w}} \mathbf{F}_W^g(\mathbf{w}, \mathbf{n}) \mathbf{w}, \quad (8.47)$$

kde $D_{\mathbf{w}} \mathbf{F}_W^g(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ je Jacobiova matice zobrazení $\mathbf{F}_W^g(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ v proměnné \mathbf{w} , kterou lze vyjádřit jako

$$D_{\mathbf{w}} \mathbf{F}_W^g(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = D_{\mathbf{w}} \mathbf{F}_W^f(\mathbf{w}, \mathbf{n}) - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{I}.$$

Potom definujeme pro Formulaci 2 formu \tilde{b}_h^g pro nevazký člen a formu d_h^g jako

$$\tilde{b}_h^g(\mathbf{w}, \Phi, t) := - \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{g}_s(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} \, d\mathbf{x} \quad (8.48)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{H}_g(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \cdot [\Phi]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IO}(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{H}_g(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}}, \mathbf{n}_{ij}) \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}} \, dS$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_W(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} D_{\mathbf{w}} \mathbf{F}_W^g(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}(t)} \cdot \Phi|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS,$$

$$d_h^g(\mathbf{w}, \Phi, t) := \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \operatorname{div} \mathbf{z}(t) (\mathbf{w} \cdot \Phi) \, d\mathbf{x}. \quad (8.49)$$

Vyjádření funkce $\mathbf{z}(t)$ je provedeno v části 8.5.

Nakonec můžeme definovat semidiskrétní řešení problémů (7.32) resp. (7.33) jako funkci $\mathbf{w}_h \in C^1((0, T), \mathbf{S}_h^p(t))$ splňující podmínky

$$\left(\frac{D^A \mathbf{w}_h}{Dt}(t), \Phi \right) + d_h(\mathbf{w}_h(t), \Phi, t) + \tilde{b}_h(\mathbf{w}_h(t), \Phi, t) \quad (8.50)$$

$$+ \tilde{a}_h(\mathbf{w}_h(t), \Phi, t) + J_h^\sigma(\mathbf{w}_h(t), \Phi, t) = \tilde{l}_h(\mathbf{w}_h(t), \Phi, t) \quad \forall \Phi \in \mathbf{S}_h^p(t), \quad \forall t \in (0, T),$$

$$\mathbf{w}_h(0) = \Pi \mathbf{w}^0,$$

kde $\mathbf{w}_h(0)$ je $\mathbf{S}_h^p(0)$ -aproximace \mathbf{w}^0 , tedy

$$(\mathbf{w}_h(0), \Phi) = (\mathbf{w}^0, \Phi) \quad \forall \Phi \in \mathbf{S}_h^p(0).$$

Pro formulaci 1 resp. formulaci 2 pokládáme $d_h := d_h^f$, $\tilde{b}_h := \tilde{b}_h^f$ resp. $d_h := d_h^g$, $\tilde{b}_h := \tilde{b}_h^g$.

8.2 Nespojité Galerkinova metoda pro semidiskrétní problém

Systém obyčejných diferenciálních rovnic (8.50) je třeba řešit vhodnou numerickou metodou. Např. bychom mohli použít Runge-Kuttovou metodou, kterou bychom vhodně upravili do ALE tvaru. Nicméně tato metoda je podmíněně stabilní a časový krok je omezen tzv. CFL-podmínkou. Je známé, že pro nespojitou Galerkinovu metodu se tato podmínka stává velmi omezující s rostoucím polynomiálním stupněm p . Jiná možnost je použít implicitní schéma, které vede na každé časové vrstvě na velký systém nelineárních rovnic, jejichž řešení je opět obtížné. Z tohoto důvodu zavedeme linearizaci nelineárních členů $\tilde{a}_h, \tilde{b}_h, \tilde{l}_h$ vhodnou extrapolací v jejich nelineárních argumentech a aproximaci časové derivace pomocí zpětných diferencí tak, že dostaneme tzv. semiimplicitní schéma, které vede na systém lineárních rovnic.

Zaveďme dělení $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ časového intervalu $[0, T]$ a časový krok $\tau_l = t_l - t_{l-1}$ pro $l = 1, \dots, M$. Čas t_j někdy nazýváme j -tou časovou vrstvou. Přesné řešení $\mathbf{w}(\cdot, t_j)$ v čase t_j budeme aproximovat funkcí \mathbf{w}_h^j z prostoru $\mathbf{S}_h^p(t_j)$. Předpokládejme, že jsme již vypočetli \mathbf{w}_h^j pro $j = 0, \dots, m-1$ a zajímá nás přibližné řešení \mathbf{w}_h^m v čase t_m .

Nejprve budeme aproximovat časovou ALE derivaci za použití Taylorova rozvoje. Pro názornost odvodíme schéma druhého řádu. Zvolme si libovolně, ale pevně $\mathbf{x} \in \Omega_h(t)$. Potom z definice ALE zobrazení existuje právě jedno $\mathbf{X} \in \Omega_h(0)$ takové, že $\mathbf{x} = \mathcal{A}_t(\mathbf{X})$. Potom definujme $\mathbf{u}(t) := \mathbf{w}(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t)$ a z Taylorova rozvoje druhého řádu funkce \mathbf{u} v bodě t_m pro body t_{m-1} a t_{m-2} dostaneme vyjádření

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t_{m-1}) &= \mathbf{u}(t_m - \tau_m) = \mathbf{u}(t_m) - \tau_m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_m) + \frac{\tau_m^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(t_m) + O(\tau_m^3) \\ \mathbf{u}(t_{m-2}) &= \mathbf{u}(t_m - (\tau_m + \tau_{m-1})) = \mathbf{u}(t_m) - (\tau_m + \tau_{m-1}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_m) \\ &\quad + \frac{(\tau_m + \tau_{m-1})^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(t_m) + O((\tau_m + \tau_{m-1})^3). \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu o dvou neznámých $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_m)$ a $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(t_m)$. Tuto soustavu můžeme přepsat na tvar

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -\tau_m & \frac{\tau_m^2}{2} \\ -(\tau_m + \tau_{m-1}) & \frac{(\tau_m + \tau_{m-1})^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_m) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(t_m) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t_{m-1}) - \mathbf{u}(t_m) + O(\tau_m^3) \\ \mathbf{u}(t_{m-2}) - \mathbf{u}(t_m) + O((\tau_m + \tau_{m-1})^3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tuto soustavu vyřešíme a po zanedbání členů $O(\tau_m^3)$ a $O((\tau_m + \tau_{m-1})^3)$ a úpravách dostáváme přibližné vyjádření derivace

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_m) \approx \frac{2\tau_m + \tau_{m-1}}{\tau_m(\tau_m + \tau_{m-1})} \mathbf{u}(t_m) - \frac{\tau_m + \tau_{m-1}}{\tau_m \tau_{m-1}} \mathbf{u}(t_{m-1}) + \frac{\tau_m}{\tau_{m-1}(\tau_m + \tau_{m-1})} \mathbf{u}(t_{m-2}).$$

Položme

$$\hat{\mathbf{w}}_h^j(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_h^j(\mathcal{A}_{t_j}(\mathcal{A}_{t_m}^{-1}(\mathbf{x}))), \quad \mathbf{x} \in \Omega_h(t_m). \quad (8.51)$$

Potom s využitím definice $\mathbf{u}(t)$ a spočítaných přibližných řešení na předchozích časových vrstvách \mathbf{w}_h^{m-1} a \mathbf{w}_h^{m-2} dostáváme následující aproximaci druhého řádu ALE derivace v čase t_m :

$$\frac{D^A \mathbf{w}_h}{Dt}(t_m) \approx \frac{2\tau_m + \tau_{m-1}}{\tau_m(\tau_m + \tau_{m-1})} \mathbf{w}_h^m - \frac{\tau_m + \tau_{m-1}}{\tau_m \tau_{m-1}} \hat{\mathbf{w}}_h^{m-1} + \frac{\tau_m}{\tau_{m-1}(\tau_m + \tau_{m-1})} \hat{\mathbf{w}}_h^{m-2}.$$

Stejně lze odvodit aproximaci ALE derivace v čase obecného řádu q , kterou zapíšeme v obecném tvaru

$$\frac{D^A \mathbf{w}_h}{Dt}(t_m) \approx \alpha_0 \mathbf{w}_h^m + \sum_{l=1}^q \alpha_l \hat{\mathbf{w}}_h^{m-l},$$

kde α_l , $l = 0, \dots, q$ závisí na τ_{m-l} , $l = 0, \dots, q-1$. Pokud jsme na začátku výpočtu v situaci, kdy $m < q$, potom aproximujeme ALE derivaci v čase formulami nižšího řádu a pokládáme $q := m$.

Obdobně postupujeme při extrapolaci, kdy opět ukážeme příklad odvození extrapolace druhého řádu. Vyjdeme z Taylorova rozvoje prvního řádu funkce $\mathbf{u}(t)$ v bodě t_m a pro body t_{m-1} a t_{m-2} dostaneme vyjádření

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t_{m-1}) &= \mathbf{u}(t_m - \tau_m) = \mathbf{u}(t_m) - \tau_m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_m) + O(\tau_m^2), \\ \mathbf{u}(t_{m-2}) &= \mathbf{u}(t_m - (\tau_m + \tau_{m-1})) \\ &= \mathbf{u}(t_m) - (\tau_m + \tau_{m-1}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_m) + O((\tau_m + \tau_{m-1})^2). \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu o dvou neznámých $\mathbf{u}(t_m)$ a $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_m)$. Tuto soustavu přepíšeme na tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & -\tau_m \\ 1 & -(\tau_{m-1} + \tau_m) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t_m) \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t_{m-1}) + O(\tau_m^2) \\ \mathbf{u}(t_{m-2}) + O((\tau_m + \tau_{m-1})^2) \end{pmatrix}.$$

Opět vyřešíme tuto soustavu a po zanedbání členů $O(\tau_m^2)$ a $O((\tau_m + \tau_{m-1})^2)$ a úpravách dostavame přibližné vyjádření funkce $\mathbf{u}(t)$ v čase t_m :

$$\mathbf{u}(t_m) \approx \frac{\tau_m + \tau_{m-1}}{\tau_{m-1}} \mathbf{u}(t_{m-1}) - \frac{\tau_m}{\tau_{m-1}} \mathbf{u}(t_{m-2}).$$

Potom s využitím definice $\mathbf{u}(t)$, spočítaných přibližných řešení na předchozích časových vrstvách \mathbf{w}_h^{m-1} , \mathbf{w}_h^{m-2} a (8.51) dostáváme extrapolaci v čase t_m druhého řádu, kterou značíme $\bar{\mathbf{w}}_h^m$, ve tvaru

$$\bar{\mathbf{w}}_h^m = \frac{\tau_m + \tau_{m-1}}{\tau_{m-1}} \hat{\mathbf{w}}_h^{m-1} - \frac{\tau_m}{\tau_{m-1}} \hat{\mathbf{w}}_h^{m-2}.$$

Stejně lze odvodit extrapolaci obecného řádu q , kterou zapíšeme v obecném tvaru

$$\bar{\mathbf{w}}_h^m = \sum_{l=1}^q \beta_l \hat{\mathbf{w}}_h^{m-l}, \quad (8.52)$$

kde β_l , $l = 1, \dots, q$ závisí na τ_{m-l} , $l = 0, \dots, q-1$. Pokud je $m < q$, potom volíme extrapolaci nižšího řádu, nejvýše však m -tého.

Nyní s využitím právě odvozené extrapolace budeme linearizovat nelineární členy. Nejprve provedeme linearizaci nevazkého členu. Z (7.24) máme

$$\int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} \, d\mathbf{x} = \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{A}_s(\mathbf{w}) \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} \, d\mathbf{x} \quad (8.53)$$

a na základě odvození formy $\tilde{b}_h^{\mathbf{f}}$ budeme tuto formu linearizovat tak, že ve všech argumentech, kde je forma nelineární, dosadíme extrapolaci $\bar{\mathbf{w}}_h^m$. Tyto úvahy nás vedou k definici forem $b_h^{\mathbf{f}}$, $p_h^{\mathbf{f}}$ ve tvaru

$$\begin{aligned} b_h^{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_h, \mathbf{w}_h, \Phi_h, t) &:= - \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \mathbf{A}_s(\bar{\mathbf{w}}_h) \mathbf{w}_h \cdot \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_s} \, d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \left(\int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{P}_{\mathbf{f}}^+ \left(\langle \bar{\mathbf{w}}_h \rangle_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t) \right) \mathbf{w}_h|_{\Gamma_{ij}(t)} \cdot [\Phi_h]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{P}_{\mathbf{f}}^- \left(\langle \bar{\mathbf{w}}_h \rangle_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t) \right) \mathbf{w}_h|_{\Gamma_{ji}(t)} \cdot [\Phi_h]_{\Gamma_{ij}(t)} \right) \, dS \\ &+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IO}(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{P}_{\mathbf{f}}^+ \left(\langle \bar{\mathbf{w}}_h \rangle_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{n}_{ij} \right) \mathbf{w}_h|_{\Gamma_{ij}} \cdot \Phi_h|_{\Gamma_{ij}} \, dS \\ &+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_W(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} D_{\mathbf{w}} \mathbf{F}_W^{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{w}}_h|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \mathbf{w}_h|_{\Gamma_{ij}(t)} \cdot \Phi_h|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS, \end{aligned}$$

$$p_h^f(\bar{\mathbf{w}}_h, \Phi_h) := \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IO}(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{P}_f^- \left(\langle \bar{\mathbf{w}}_h \rangle_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{n}_{ij} \right) \bar{\mathbf{w}}_h|_{\Gamma_{ji}} \cdot \Phi_h|_{\Gamma_{ij}} \, dS,$$

kde pro $i \in I, j \in \gamma_{IO}(i)$ definujeme

$$\bar{\mathbf{w}}_h|_{\Gamma_{ji}} := \text{LRP}(\bar{\mathbf{w}}_h|_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{w}_D, \mathbf{n}_{ij}). \quad (8.54)$$

Obdobně definujeme

$$\begin{aligned} b_h^g(\bar{\mathbf{w}}_h, \mathbf{w}_h, \Phi_h, t) &:= - \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 (\mathbf{A}_s(\bar{\mathbf{w}}_h) - z_s(t)\mathbf{I}) \mathbf{w}_h \cdot \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_s} \, d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{P}_g^+ \left(\langle \bar{\mathbf{w}}_h \rangle_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t) \right) \mathbf{w}_h|_{\Gamma_{ij}(t)} \cdot [\Phi_h]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ &\quad + \int_{\Gamma_{ij}(t)} \mathbf{P}_g^- \left(\langle \bar{\mathbf{w}}_h \rangle_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t) \right) \mathbf{w}_h|_{\Gamma_{ji}(t)} \cdot [\Phi_h]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ &+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IO}(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{P}_g^+ \left(\langle \bar{\mathbf{w}}_h \rangle_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{n}_{ij} \right) \mathbf{w}_h|_{\Gamma_{ij}} \cdot \Phi_h|_{\Gamma_{ij}} \, dS \\ &+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_W(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} D_{\mathbf{w}} \mathbf{F}_W^g(\bar{\mathbf{w}}_h|_{\Gamma_{ij}(t)}, \mathbf{n}_{ij}(t)) \mathbf{w}_h|_{\Gamma_{ij}(t)} \cdot \Phi_h|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS, \\ p_h^g(\bar{\mathbf{w}}_h, \Phi_h) &:= \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IO}(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{P}_g^- \left(\langle \bar{\mathbf{w}}_h \rangle_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{n}_{ij} \right) \bar{\mathbf{w}}_h|_{\Gamma_{ji}} \cdot \Phi_h|_{\Gamma_{ij}} \, dS. \end{aligned}$$

Stejnou úvahou provedeme linearizaci vazké formy a pravé strany. Tedy

$$\begin{aligned} a_h(\bar{\mathbf{w}}_h, \mathbf{w}_h, \Phi_h, t) &:= \sum_{i \in I} \int_{K_i(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\bar{\mathbf{w}}_h) \frac{\partial \mathbf{w}_h}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_s} \, d\mathbf{x} \\ &- \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \left\langle \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\bar{\mathbf{w}}_h) \frac{\partial \mathbf{w}_h}{\partial x_k} \right\rangle_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot [\Phi_h]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ &- \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{s,k}(\bar{\mathbf{w}}_h|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \mathbf{w}_h}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot \Phi_h|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ &- \Theta \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \left\langle \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{k,s}^T(\bar{\mathbf{w}}_h) \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_k} \right\rangle_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot [\mathbf{w}_h]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\ &- \Theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{k,s}^T(\bar{\mathbf{w}}_h|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot \mathbf{w}_h|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
l_h(\bar{\mathbf{w}}_h, \Phi_h, t) &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sigma \mathbf{w}_B(t) \cdot \Phi_h|_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS \\
&- \Theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_{IW}(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t)} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_{k,s}^T(\bar{\mathbf{w}}_h|_{\Gamma_{ij}(t)}) \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma_{ij}(t)} (n_{ij}(t))_s \cdot \mathbf{w}_B(t) \, dS.
\end{aligned}$$

Při výpočtu proudění s vyšší náběžnou rychlostí mohou vznikat v přesném řešení velké skoky, nebo dokonce nespojitosti. V přibližném řešení tyto velké skoky způsobují nefyzikální oscilace. Tento jev se nazývá Gibbsův jev. Jedna z možností, jak se vyhnout Gibbsovu jevu, je přidání tzv. umělé vazkosti, viz [19]. Je dobré, abychom tuto vazkost přidávali pouze v oblastech, kde vznikají velké skoky. Z tohoto důvodu pro m -tou časovou vrstvu zavádíme tzv. *indikátor nespojitosti* $g^m(i)$, který je pro každé $i \in I$ definován jako

$$g^m(i) = \frac{1}{h_{K_i(t_m)} |K_i(t_m)|^{3/4}} \sum_{j \in s(i)} \int_{\Gamma_{ij}(t_m)} [\hat{\rho}_h^{m-1}]_{\Gamma_{ij}(t_m)}^2 \, dS, \quad (8.55)$$

kde $\hat{\rho}_h^{m-1}(\mathbf{x}) = \rho_h^{m-1}(\mathcal{A}_{t_{m-1}}(\mathcal{A}_{t_m}^{-1}(\mathbf{x})))$ a ρ_h^{m-1} značí vypočítané rozložení hustoty na $(m-1)$ -té časové vrstvě. Na základě $g^m(i)$ zavádíme tzv. *diskrétní indikátor nespojitosti* $G^m(i)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
G^m(i) &= 0, \quad \text{jestliže } g^m(i) < 1, \\
G^m(i) &= 1, \quad \text{jestliže } g^m(i) \geq 1, \quad i \in I.
\end{aligned} \quad (8.56)$$

Nyní můžeme definovat člen umělé vazkosti ve tvaru

$$\tilde{\beta}_h^m(\mathbf{w}_h, \Phi_h, t) = \nu_1 \sum_{i \in I} h_{K_i(t)} G^m(i) \int_{K_i(t)} \nabla \mathbf{w}_h \cdot \nabla \Phi_h \, d\mathbf{x}, \quad (8.57)$$

kde ν_1 je konstanta. Navíc k tomuto členu ještě přidáváme člen

$$\tilde{J}_h^m(\mathbf{w}_h, \Phi_h, t) = \nu_2 \sum_{i \in I} \sum_{j \in s(i)} \frac{1}{2} (G^m(i) + G^m(j)) \int_{\Gamma_{ij}(t)} [\mathbf{w}_h]_{\Gamma_{ij}(t)} \cdot [\Phi_h]_{\Gamma_{ij}(t)} \, dS,$$

kde ν_2 je konstanta, který zlepšuje metodu v případě, kdy jsou používány nestrukturované nebo anizotropní sítě. Celkově tedy definujeme formu

$$\beta_h^m(\mathbf{w}_h, \Phi_h, t) = \tilde{\beta}_h^m(\mathbf{w}_h, \Phi_h, t) + \tilde{J}_h^m(\mathbf{w}_h, \Phi_h, t). \quad (8.58)$$

Pro snazší zápis dále zavedeme formu A_h :

$$A_h(\bar{\mathbf{w}}_h, \mathbf{w}_h, \Phi_h, t) = a_h(\bar{\mathbf{w}}_h, \mathbf{w}_h, \Phi_h, t) + b_h(\bar{\mathbf{w}}_h, \mathbf{w}_h, \Phi_h, t) \\ + d_h(\mathbf{w}_h, \Phi_h, t) + J_h^\sigma(\mathbf{w}_h, \Phi_h, t).$$

Pro Formulaci 1 resp. Formulaci 2 pokládáme $p_h := p_h^f$ resp. $p_h := p_h^g$ a ve formě A_h : $d_h := d_h^f$, $b_h := b_h^f$ resp. $d_h := d_h^g$, $b_h := b_h^g$.

Postup uvedený výše nás vede k definici semiimplicitního problému: Hledáme funkci \mathbf{w}_h^m splňující

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_h^m &\in \mathbf{S}_h^p(t_m), \\ &\left(\alpha_0 \mathbf{w}_h^m + \sum_{l=1}^q \alpha_l \hat{\mathbf{w}}_h^{m-l}, \Phi_h \right) + A_h(\bar{\mathbf{w}}_h^m, \mathbf{w}_h^m, \Phi_h, t_m) + \beta_h^m(\mathbf{w}_h^m, \Phi_h, t_m) \\ &= l_h(\bar{\mathbf{w}}_h^m, \Phi_h, t_m) - p_h(\bar{\mathbf{w}}_h^m, \Phi_h) \quad \forall \Phi_h \in \mathbf{S}_h^p(t_m), \\ \mathbf{w}_h^0 &= \Pi \mathbf{w}^0. \end{aligned} \tag{8.59}$$

Pokud je $m < q$, potom pokládáme $q := m$. Hodnoty koeficientů $\alpha_l, l = 0, \dots, q$ resp. $\beta_l, l = 1, \dots, q$ pro $q = 1, 2, 3$ uvádí tabulka 1 resp. tabulka 2.

	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$
α_0	$\frac{1}{\tau_m}$,	$\frac{2\tau_m + \tau_{m-1}}{\tau_m(\tau_m + \tau_{m-1})}$,	$\frac{(2\tau_m + \tau_{m-1})(2\tau_m + \tau_{m-1} + \tau_{m-2}) - \tau_m^2}{\tau_m(\tau_m + \tau_{m-1})(\tau_m + \tau_{m-1} + \tau_{m-2})}$
α_1	$-\frac{1}{\tau_m}$,	$-\frac{\tau_m + \tau_{m-1}}{\tau_m \tau_{m-1}}$,	$-\frac{(\tau_m + \tau_{m-1})(\tau_m + \tau_{m-1} + \tau_{m-2})}{\tau_m \tau_{m-1}(\tau_{m-1} + \tau_{m-2})}$
α_2		$\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}(\tau_m + \tau_{m-1})}$,	$\frac{\tau_m(\tau_m + \tau_{m-1} + \tau_{m-2})}{\tau_{m-1}\tau_{m-2}(\tau_m + \tau_{m-1})}$
α_3			$-\frac{\tau_m(\tau_m + \tau_{m-1})}{\tau_{m-2}(\tau_m + \tau_{m-1} + \tau_{m-2})(\tau_{m-1} + \tau_{m-2})}$

Tabulka 1: Hodnoty koeficientů α_l .

	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$
β_1	1,	$\frac{\tau_m + \tau_{m-1}}{\tau_{m-1}}$,	$\frac{(\tau_m + \tau_{m-1} + \tau_{m-2})(\tau_m + \tau_{m-1})}{\tau_{m-1}(\tau_{m-1} + \tau_{m-2})}$
β_2		$-\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}$,	$-\frac{\tau_m(\tau_m + \tau_{m-1} + \tau_{m-2})}{\tau_{m-1}\tau_{m-2}}$
β_3			$\frac{\tau_m(\tau_m + \tau_{m-1})}{\tau_{m-2}(\tau_{m-1} + \tau_{m-2})}$

Tabulka 2: Hodnoty koeficientů β_l .

8.3 Úplná časoprostorová nespojitá Galerkinova metoda

Jinou možností, jak sestavit metodu vysokého řádu přesnosti jak v prostoru, tak i v čase, je užít časoprostorovou nespojitou Galerkinovu metodu. Abychom mohli provést časoprostorovou nespojitou Galerkinovu diskretizaci v čase, uvažujme dělení $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ časového intervalu $[0, T]$. Označme $I_m = (t_{m-1}, t_m)$, $\bar{I}_m = [t_{m-1}, t_m]$, $\tau_m = t_m - t_{m-1}$, pro $m = 1, \dots, M$. Časový interval I_m nazýváme jako tzv. *m-tou časovou vrstvu*. Z toho již plyne, že

$$[0, T] = \bigcup_{m=1}^M \bar{I}_m, \quad I_m \cap I_n = \emptyset \quad \text{pro } m \neq n. \quad (8.60)$$

Dále definujeme následující prostor $\mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q} = (S_{h,\tau}^{p,q})^4$, kde

$$S_{h,\tau}^{p,q} = \left\{ \phi ; \phi|_{I_m} = \sum_{i=0}^q \zeta_i \phi_i, \text{ kde } \phi_i \in S_h^p(t), \zeta_i \in P^q(t_{m-1}, t_m) \right\}.$$

Pro $\Phi \in \mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}$ dále zavádíme následující značení:

$$\begin{aligned} \Phi_m^\pm &= \Phi(t_m^\pm) = \lim_{t \rightarrow t_m^\pm} \Phi(t), \\ \{\Phi\}_m &= \Phi_m^+ - \Phi_m^-. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Nyní odvodíme diskrétní problém. Předpokládejme, že jsme diskrétní problém odvodili pro všechny j -té časové vrstvy, kde $j = 1, \dots, m-1$. Pro každé $t \in I_m$ násobme systém (7.32) nebo (7.33) funkcí $\Phi_{h\tau} \in \mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}$ a stejným způsobem jako v části 8.1 se dostaneme až na problém (8.50), který integrujeme přes interval I_m . Potom můžeme definovat diskrétní řešení problémů (7.32) resp. (7.33) jako funkci $\mathbf{w}_h \in C^1((0, T), \mathbf{S}_h^p(t))$ splňující

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} \left(\left(\frac{D^A \mathbf{w}_h}{Dt}(t), \Phi_{h\tau} \right) + d_h(\mathbf{w}_h(t), \Phi_{h\tau}, t) + \tilde{b}_h(\mathbf{w}_h(t), \Phi_{h\tau}, t) + \tilde{a}_h(\mathbf{w}_h(t), \Phi_{h\tau}, t) \right) dt \\ & + \int_{I_m} J_h^\sigma(\mathbf{w}_h(t), \Phi_{h\tau}, t) dt = \int_{I_m} \tilde{l}_h(\mathbf{w}_h(t), \Phi_{h\tau}, t) dt \quad \forall \Phi_{h\tau} \in \mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}, \quad \forall m = 1, \dots, M, \\ & \mathbf{w}_h(0) = \Pi \mathbf{w}^0. \end{aligned} \quad (8.62)$$

Přibližné řešení $\mathbf{w}_{h\tau}$ problému (8.62) budeme hledat v prostoru $\mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}$, kde funkce jsou obecně nespojitě i v čase. Z tohoto důvodu musíme zajistit návaznost řešení mezi jednotlivými časovými vrstvami. Tedy v našem případě volíme jako počáteční podmínku pro m -tou časovou vrstvu hodnoty řešení v předchozí časové vrstvě v čase t_{m-1} . Tuto počáteční podmínku zahrneme do řešení pomocí L^2 -projekce, tedy

$$(\mathbf{w}_{h\tau}(t_{m-1}^-), \Phi_{h\tau}(t_{m-1}^+)) = (\mathbf{w}_{h\tau}(t_{m-1}^+), \Phi_{h\tau}(t_{m-1}^+)) \quad \forall \Phi_{h\tau} \in \mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q},$$

což je ekvivalentní s

$$0 = (\mathbf{w}_{h\tau}(t_{m-1}^+) - \mathbf{w}_{h\tau}(t_{m-1}^-), \Phi_{h\tau}(t_m^+)) = (\{\mathbf{w}_{h\tau}\}_{m-1}, \Phi_{h\tau}(t_{m-1}^+)) \quad \forall \Phi_{h\tau} \in \mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}.$$

Pokud jsme na první časové vrstvě, potom jako počáteční podmínku bereme předepsanou funkci \mathbf{w}^0 pro čas 0, tedy

$$(\mathbf{w}_{h\tau}(t_0^+), \Phi_{h\tau}(t_0^+)) = (\mathbf{w}^0, \Phi_{h\tau}(t_0^+)) \quad \forall \Phi_{h\tau} \in \mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}.$$

Protože systém (8.62) vede opět na systém nelineárních rovnic, provedeme obdobně jako v části 8.2 linearizaci nelineárních členů a_h, b_h a l_h . Máme několik možností definice funkcí $\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}$, které lze dosazovat do nelineárních argumentů těchto členů. My budeme volit mezi následujícími dvěma možnostmi.

1) Budeme brát hodnoty funkce dopočítané na předchozí časové vrstvě v čase t_{m-1} , tedy: $\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}(t) := \mathbf{w}_h(t_{m-1}^-)$ pro $t \in I_m$.

2) Budeme brát v úvahu funkci z předchozí časové vrstvy, kterou spojitě prodloužíme do následující časové vrstvy, tedy $\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}|_{I_m}(t) := \mathbf{w}_{h\tau}|_{I_{m-1}}(t)$ pro $t \in I_m$ (tzv. prolongace).

Definujme si formu A_h :

$$A_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \mathbf{w}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}, t) = d_h(\mathbf{w}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}, t) + b_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \mathbf{w}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}, t) + a_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \mathbf{w}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}, t) + J_h^\sigma(\mathbf{w}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}, t). \quad (8.63)$$

Jelikož se chceme vyhnout Gibbsovu jevu, přidáváme opět člen (8.58). Potom můžeme definovat diskrétní problém: Hledáme funkci $\mathbf{w}_{h\tau}$ splňující

$$\begin{aligned} 1) \quad & \mathbf{w}_{h\tau} \in \mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}, \quad (8.64) \\ 2) \quad & \sum_{m=1}^M \int_{I_m} \left(\left(\frac{D^{\mathcal{A}} \mathbf{w}_{h\tau}}{Dt}, \Phi_{h\tau} \right) + A_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \mathbf{w}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}, t) + \beta_h^m(\mathbf{w}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}, t) \right) dt \\ & + \sum_{m=2}^{M-1} (\{\mathbf{w}_{h\tau}\}_{m-1}, \Phi_{h\tau}(t_{m-1}^+)) + (\mathbf{w}_{h\tau}(t_0^+), \Phi_{h\tau}(t_0^+)) \\ & = \sum_{m=1}^M \int_{I_m} (l_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}, t) - p_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau})) dt + (\mathbf{w}^0, \Phi_{h\tau}(t_0^+)) \quad \forall \Phi_{h\tau} \in \mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}. \end{aligned}$$

8.4 Diskretizace interakce

Systém nelineárních rovnic (7.34) popisující pohyb profilu budeme řešit pomocí Runge-Kuttovy metody, kterou lze aplikovat na systém diferenciálních rovnic prvního řádu. Nejprve vyjádříme derivace druhého řádu

$$\begin{aligned}\ddot{H} &= \frac{1}{D(\alpha)} [I_\alpha(-L(t) + S_\alpha(\dot{\alpha})^2 \sin \alpha - d_{HH}\dot{H} - k_{HH}H) \\ &\quad + S_\alpha \cos \alpha (-M(t) + k_{\alpha\alpha}\alpha + d_{\alpha\alpha}\dot{\alpha})] \\ \ddot{\alpha} &= \frac{1}{D(\alpha)} [m(M(t) - k_{\alpha\alpha}\alpha - d_{\alpha\alpha}\dot{\alpha}) \\ &\quad + S_\alpha \cos \alpha (L(t) - S_\alpha(\dot{\alpha})^2 \sin \alpha + d_{HH}\dot{H} + k_{HH}H)],\end{aligned}$$

kde

$$D(\alpha) = mI_\alpha - (S_\alpha \cos \alpha)^2.$$

Je nutné předpokládat, že $D(\alpha) \neq 0$. Transformace $y_1 = H, y_2 = \dot{H}, y_3 = \alpha, y_4 = \dot{\alpha}$ vede na systém rovnic prvního řádu, který lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Y}} &= \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{Y}) \\ &= \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{1}{mI_\alpha - (S_\alpha \cos y_3)^2} [I_\alpha(-L(t) + S_\alpha(y_4)^2 \sin y_3 - d_{HH}y_2 - k_{HH}y_1) \\ \quad + S_\alpha \cos y_3 (-M(t) + k_{\alpha\alpha}y_3 + d_{\alpha\alpha}y_4)] \\ y_4 \\ \frac{1}{mI_\alpha - (S_\alpha \cos y_3)^2} [m(M(t) - k_{\alpha\alpha}y_3 - d_{\alpha\alpha}y_4) \\ \quad + S_\alpha \cos y_3 (L(t) - S_\alpha(y_4)^2 \sin y_3 + d_{HH}y_2 + k_{HH}y_1)] \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{8.65}$$

Potom přibližné řešení \mathbf{Y}_{m+1} v čase t_{m+1} funkce $\mathbf{Y}(t)$ počítáme pomocí Runge-Kuttovy formule. Např. pro metodu 2. řádu píšeme

$$\mathbf{Y}_{m+1} = \mathbf{Y}_m + \tau_{m+1} \mathbf{f} \left(t_{m+\frac{1}{2}}, \mathbf{Y}_m + \frac{\tau_{m+1}}{2} \mathbf{f}(t_m, \mathbf{Y}_m) \right).\tag{8.66}$$

Zde značíme $t_{m+\frac{1}{2}} := \frac{t_m + t_{m+1}}{2}$. Dále potřebujeme vypočítat funkci \mathbf{f} v čase $t_{m+\frac{1}{2}}$, což provedeme následujícím způsobem. Z řešení $\mathbf{w}_h^m, \mathbf{w}_h^{m-1}$ vypočítaných v čase t_m, t_{m-1} do počítáme hodnoty síly $L(t_m), L(t_{m-1})$ a momentu $M(t_m), M(t_{m-1})$ a pomocí extrapolace druhého řádu vypočítáme hodnoty síly $L(t_{m+\frac{1}{2}})$ a momentu $M(t_{m+\frac{1}{2}})$:

$$L(t_{m+\frac{1}{2}}) = \frac{\frac{\tau_{m+1}}{2} + \tau_m}{\tau_m} L(t_m) - \frac{\tau_{m+1}}{2\tau_m} L(t_{m-1}),\tag{8.67}$$

$$M(t_{m+\frac{1}{2}}) = \frac{\frac{\tau_{m+1}}{2} + \tau_m}{\tau_m} M(t_m) - \frac{\tau_{m+1}}{2\tau_m} M(t_{m-1}).\tag{8.68}$$

Odvození řešení systému lineárních rovnic (7.35) pomocí Runge-Kuttovy metody je obdobné. Výpočet hodnoty síly $L(t_m)$ a momentu $M(t_m)$ z přibližného řešení v čase t_m můžeme počítat následujícími dvěma způsoby.

1.) První možností je vypočítat $L(t_m)$ a $M(t_m)$ přímo ze vzorců (7.39).

2.) Druhé možnosti, která se lépe hodí k slabé formulaci, lze docílit následujícím způsobem. Definujme si oblast $\Omega_{\Gamma_W}(t)$ jako

$$\Omega_{\Gamma_W}(t) = \bigcup \{K_i(t); K_i(t) \cap \Gamma_W(t) \neq \emptyset\} \quad (8.69)$$

a spojitou po částech lineární funkci Φ_{Γ_W} na triangulaci $\mathcal{T}_h(t)$ splňující $\Phi_{\Gamma_W}(\mathbf{x}, t) = 1$ pro $\mathbf{x} \in \Gamma_W(t)$ a $\Phi_{\Gamma_W}(\mathbf{x}, t) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \Omega_h(t) \setminus \Omega_{\Gamma_W}(t)$. Nyní třetí rovnici soustavy (7.16) přeformulujeme pomocí ALE zobrazení do ALE-tvaru, vynásobíme funkcí $\Phi_{\Gamma_W}(t)$, integrujeme přes oblast $\Omega_{\Gamma_W}(t)$, použijeme Greenovu větu a dostaneme:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_W(t)} \sum_{j=1}^2 \left(-p\delta_{2j} + \frac{1}{Re} \tau_{2j}^V \right) n_j \, dS \\ &= \int_{\Omega_{\Gamma_W}(t)} \left(\frac{D^A \rho v_2}{Dt} + \operatorname{div}(\rho v_2 \mathbf{v}) - \mathbf{z} \cdot \nabla(\rho v_2) \right) \Phi_{\Gamma_W} + \sum_{j=1}^2 \left(-p\delta_{2j} + \frac{1}{Re} \tau_{2j}^V \right) \frac{\partial \Phi_{\Gamma_W}}{\partial x_j} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Obdobným způsobem vyjádříme

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_W(t)} \sum_{i,j=1}^2 \left(-p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \tau_{ij}^V \right) n_j (-1)^i (x_{1+\delta_{1i}} - x_{1+\delta_{1i}}^{EA}) \, dS \\ &= \int_{\Omega_{\Gamma_W}(t)} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left(\frac{D^A \rho v_i}{Dt} + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) - \mathbf{z} \cdot \nabla(\rho v_i) \right) (x_{1+\delta_{1i}} - x_{1+\delta_{1i}}^{EA}) \Phi_{\Gamma_W} \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega_{\Gamma_W}(t)} \sum_{i,j=1}^2 (-1)^i \left(-p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \tau_{ij}^V \right) \frac{\partial ((x_{1+\delta_{1i}} - x_{1+\delta_{1i}}^{EA}) \Phi_{\Gamma_W})}{\partial x_j} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

8.5 Realizace ALE zobrazení

Existuje více možností, jak konstruovat ALE zobrazení pro pohybující se profil. My zvolíme následující postup. Z části 8.4 je zřejmé, že při numerickém řešení interakce budeme znát polohu profilu pouze v diskrétních časových bodech t_m . Předpokládejme tedy, že v čase t_m je poloha profilu dána výškou $H(t_m)$ a úhlem $\alpha(t_m)$ a chceme vhodným způsobem definovat zobrazení

$$\mathcal{A}_{t_m} : \Omega_h(0) \rightarrow \Omega_h(t_m). \quad (8.70)$$

Sestrojme dvě soustředné kružnice K_1, K_2 s poloměry R_1, R_2 ; $0 < R_1 < R_2$ a středem v elastické ose profilu. Nechť profil leží uvnitř kružnice K_1 . Vnitřek kružnice K_1 se posouvá

a otáčí společně s profilem jako tuhé těleso. Vnější kružnice K_2 se nepohybuje a nedeformuje vůbec. Mezikruží kružnic K_1 a K_2 se deformuje pomocí interpolace. Tento popis zapíšeme matematicky. Definujme zobrazení $\mathbf{H}_{t_m}(X_1, X_2)$, kde $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \Omega_h(0)$, které popisuje vertikální posun a otočení, tedy

$$\mathbf{H}_{t_m}(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t_m) & \sin \alpha(t_m) \\ -\sin \alpha(t_m) & \cos \alpha(t_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 - X_1^{EA} \\ X_2 - X_2^{EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1^{EA} \\ X_2^{EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -H(t_m) \end{pmatrix}.$$

(Zde má opravdu být v posledním členu v druhé složce výraz $-H(t_m)$. Je to právě z důvodu, že rovnice popisující pohyb profilu jsou odvozeny pro výšku $H(t_m)$ kladně orientovanou směrem dolů.) Zavedme ještě identické zobrazení

$$\mathbf{Id}(X_1, X_2) = (X_1, X_2).$$

Nyní můžeme definovat pomocné ALE zobrazení $\bar{\mathcal{A}}_{t_m}$ jako kombinaci identity \mathbf{Id} a zobrazení \mathbf{H}_{t_m}

$$(x_1, x_2) = \bar{\mathcal{A}}_{t_m}(X_1, X_2) = (1 - \xi)\mathbf{H}_{t_m}(X_1, X_2) + \xi\mathbf{Id}(X_1, X_2),$$

kde

$$\xi = \xi(\hat{r}) = \min \left(\max \left(0, \frac{\hat{r} - R_1}{R_2 - R_1} \right), 1 \right)$$

a $\hat{r} = \sqrt{(X_1 - X_1^{EA})^2 + (X_2 - X_2^{EA})^2}$ je vzdálenost bodu $\mathbf{X} \in \Omega_h(0)$ od elastické osy (X_1^{EA}, X_2^{EA}) profilu. V případě úplné časo-prostorové nespojitě Galerkinovy metody potřebujeme znát ALE zobrazení na celém časovém intervalu I_m . Proto definujeme pomocné ALE zobrazení pro libovolné $t \in I_m$ za pomoci lineární interpolace vzorcem

$$\bar{\mathcal{A}}_t(\mathbf{X}) = \frac{t_m - t}{\tau_m} \bar{\mathcal{A}}_{t_{m-1}}(\mathbf{X}) + \frac{t - t_{m-1}}{\tau_m} \bar{\mathcal{A}}_{t_m}(\mathbf{X}) \quad \forall t \in I_m, \mathbf{X} \in \Omega_h(0). \quad (8.71)$$

Jelikož zobrazení $\bar{\mathcal{A}}_t$ je nelineární, budeme ho používat pouze na zobrazení vrcholů elementů triangulace $\mathcal{T}_h(0)$ z důvodu, že některé elementy se mohou za použití tohoto zobrazení zdeformovat. Potom definujeme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t(\mathbf{X}) &:= \mathbf{F}^i(t)((\mathbf{F}^i(0))^{-1}(\mathbf{X})) & \mathbf{X} \in K_i(0) \\ \text{nebo} \quad \mathcal{A}_t(\mathbf{X}) &:= \mathbf{\Psi}^i(t)((\mathbf{\Psi}^i(0))^{-1}(\mathbf{X})) & \mathbf{X} \in K_i^{iso}(0). \end{aligned} \quad (8.72)$$

Pro definice $\mathbf{F}^i(t)$, $\mathbf{\Psi}^i(t)$ a $K_i^{iso}(t)$ viz. kapitola 9.

Nakonec se zmíníme o výpočtu ALE rychlosti $\mathbf{z}(t)$ vyskytující se ve formě d_h . V případě nespojitě Galerkinovy metody pro semidiskrétní problém budeme ALE rychlost

$\mathbf{z}(t)$ v čase t_m aproximovat funkcí \mathbf{z}^m . Odvození formule pro \mathbf{z}^m se provede obdobně jako pro ALE derivaci. Formule řádu q má tvar

$$\mathbf{z}^m(\mathbf{x}) = \alpha_0 \mathbf{x} + \sum_{l=1}^q \alpha_l \mathcal{A}_{t_{m-l}}(\mathcal{A}_{t_m}^{-1}(\mathbf{x})) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega_h(t_m), \quad (8.73)$$

kde $\alpha_l, l = 0, \dots, q$ jsou koeficienty dané tabulkou 1. Pokud je $m < q$, potom pokládáme $q := m$. V případě úplné časo-prostorové nespojité Galerkinovy metody využijeme (8.71) k výpočtu $\mathbf{z}(t)$, které vyjádříme

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathcal{A}_{t_m}(\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x})) - \mathcal{A}_{t_{m-1}}(\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x}))}{\tau_m} \quad \forall t \in I_m, \mathbf{x} \in \Omega_h(t). \quad (8.74)$$

9 Algoritmizace

Pro algoritmizaci problému (8.59) resp. (8.64) a nalezení funkce \mathbf{w}_h^m resp. $\mathbf{w}_{h\tau}^m$ na m -té časové vrstvě musíme tento systém převést na soustavu lineárních rovnic. Přírozně musíme nejprve začít s volbou bázových funkcí prostoru $S_h^p(t)$. Pro snazší práci a hlavně následnou programovou realizaci je dobré definovat prostor polynomů na tzv. referenčním elementu K_{ref} , který je dán vrcholy $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{C}}$, kde $\hat{\mathbf{A}} = (0, 0)$, $\hat{\mathbf{B}} = (1, 0)$, $\hat{\mathbf{C}} = (0, 1)$. Jelikož předpokládáme polynomy stupně $p \geq 1$, budeme bázové funkce prostoru $P^p(K_{ref})$ hledat ve tvaru

$$\hat{\phi}_j(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \sum_{l=0}^p \sum_{k=0}^{p-l} a_{kl}^j(\hat{x}_1)^k(\hat{x}_2)^l, \quad j = 1, \dots, d_p, \quad a_{kl}^j \in \mathbb{R}, \quad (9.1)$$

kde $d_p := \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ je dimenze prostoru $P^p(K_{ref})$. Zavedme množinu B_{ref} bodů náležících elementu K_{ref} následujícím způsobem

$$B_{ref} = \left\{ \left(\frac{k}{p}, \frac{l}{p} \right); \quad \text{kde } k, l = 0, \dots, p, \quad k + l \leq p \right\}.$$

Nechá se ukázat, že $\text{card}(B_{ref}) = d_p$. Označíme-li postupně $\hat{\mathbf{x}}_n$ prvky množiny B_{ref} , pak existuje báze $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_{d_p}$ prostoru $P^p(K_{ref})$ splňující $\hat{\phi}_j(\hat{\mathbf{x}}_n) = \delta_{jn}$ pro $j, n = 1, \dots, d_p$.

Nyní budeme definovat pro $\forall i \in I$ prostor $P^p(K_i(t))$ elementu $K_i(t)$ s vrcholy $\mathbf{A}^i(t)$, $\mathbf{B}^i(t)$, $\mathbf{C}^i(t)$, kde $\bar{\mathcal{A}}_t(\mathbf{A}^i(0)) = \mathbf{A}^i(t) = (a_1^i(t), a_2^i(t))$, $\bar{\mathcal{A}}_t(\mathbf{B}^i(0)) = \mathbf{B}^i(t) = (b_1^i(t), b_2^i(t))$, $\bar{\mathcal{A}}_t(\mathbf{C}^i(0)) = \mathbf{C}^i(t) = (c_1^i(t), c_2^i(t))$. Zavedme lineární zobrazení $\mathbf{F}^i(t) : K_{ref} \rightarrow K_i(t)$ splňující $\mathbf{F}^i(t)(\hat{\mathbf{A}}) = \mathbf{A}^i(t)$, $\mathbf{F}^i(t)(\hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{B}^i(t)$ a $\mathbf{F}^i(t)(\hat{\mathbf{C}}) = \mathbf{C}^i(t)$. Je zřejmé, že takto definované zobrazení, které je určeno jednoznačně, je prosté a na a lze zapsat ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{F}^i(t)(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{M}^i(t)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{N}^i(t)$, kde matice $\mathbf{M}^i(t)$ a vektor $\mathbf{N}^i(t)$ jsou tvaru

$$\mathbf{M}^i(t) = \begin{pmatrix} b_1^i(t) - a_1^i(t) & c_1^i(t) - a_1^i(t) \\ b_2^i(t) - a_2^i(t) & c_2^i(t) - a_2^i(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}^i(t) = \begin{pmatrix} a_1^i(t) \\ a_2^i(t) \end{pmatrix}.$$

Snadno lze vyjádřit inverzní zobrazení: $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{F}^i(t))^{-1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{M}^i(t))^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{N}^i(t))$. Inverzní matice $(\mathbf{M}^i(t))^{-1}$ je tvaru

$$(\mathbf{M}^i(t))^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{M}^i(t))} \begin{pmatrix} c_2^i(t) - a_2^i(t) & a_1^i(t) - c_1^i(t) \\ a_2^i(t) - b_2^i(t) & b_1^i(t) - a_1^i(t) \end{pmatrix},$$

kde $\det(\mathbf{M}^i(t))$ značí determinant matice $\mathbf{M}^i(t)$. Definujme body $\mathbf{x}_n^i(t) := \mathbf{F}^i(t)(\hat{\mathbf{x}}_n)$. Je zřejmé, že tyto body jsou navzájem různé a my hledáme bázové funkce $\phi_1^i, \dots, \phi_{d_p}^i$ na elementu $K^i(t)$ stupně p , splňující $\phi_j^i(\mathbf{x}_n^i(t), t) = \delta_{jn}$. Takto definované bázové funkce jsou jednoznačně určeny. Protože funkce $(\mathbf{F}^i(t))^{-1}$ je lineární, potom i $\hat{\phi}_j((\mathbf{F}^i(t))^{-1}(\mathbf{x}))$ je polynom stupně nejvýše p . Pro $j, n = 1, \dots, d_p$ platí, že $\hat{\phi}_j((\mathbf{F}^i(t))^{-1}(\mathbf{x}_n^i(t))) = \hat{\phi}_j(\hat{\mathbf{x}}_n) = \delta_{jn} = \phi_j^i(\mathbf{x}_n^i(t), t)$. Z jednoznačnosti plyne, že $\phi_j^i(\mathbf{x}, t) = \hat{\phi}_j((\mathbf{F}^i(t))^{-1}(\mathbf{x}))$, $j = 1, \dots, d_p$.

Nyní odvodíme derivace těchto funkcí za pomoci věty o derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_j^i}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{\phi}_j((\mathbf{F}^i(t))^{-1}(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial \hat{x}_k}((\mathbf{F}^i(t))^{-1}(\mathbf{x})) \frac{\partial ((\mathbf{F}^i(t))^{-1})_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ &= (\nabla \hat{\phi}_j)((\mathbf{F}^i(t))^{-1}(\mathbf{x})) \cdot \left((\mathbf{M}^i(t))^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Jelikož existuje $\hat{\mathbf{x}}$ takové, že $\mathbf{x} = \mathbf{F}^i(t)(\hat{\mathbf{x}})$, potom platí

$$\frac{\partial \phi_j^i}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \hat{\phi}_j^i}{\partial x_1}(\mathbf{F}^i(t)(\hat{\mathbf{x}}), t) = (\nabla \hat{\phi}_j)(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \left((\mathbf{M}^i(t))^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \quad (9.2)$$

Obdobně se ukáže

$$\frac{\partial \phi_j^i}{\partial x_2}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \hat{\phi}_j)(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \left((\mathbf{M}^i(t))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathbf{x} = \mathbf{F}^i(t)(\hat{\mathbf{x}}). \quad (9.3)$$

Jak jsme uvedli v části 8.1, pro semidiskretizaci si definujeme oblast $\Omega_h(t)$ jako polygonální aproximaci původní oblasti $\Omega(t)$. Někdy se ukazuje (např. při výpočtu obtékání leteckého profilu), že tato aproximace hranice oblasti $\Omega(t)$ je nevhodná, protože zde vznikají špičky, a to může ovlivnit proudění. Proto je vhodné, aby tato část hranice přibližně zachovávala původní křivost hranice. Z tohoto důvodu se místo klasických elementů, jejichž jedna hrana leží na křivé hranici, zavádí tzv. iso-elementy. (Hran elementů ležících na hranici může být více, ale my zde bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že na hranici leží pouze jedna hrana. Tento předpoklad budeme využívat i v následném programu pro výpočet proudění.) Předpokládejme, že v triangulaci $\mathcal{T}_h(t)$ máme takový element $K_i(t)$, $i \in I$, jehož jedna hrana leží na křivé části hranice $\partial\Omega(t)$, a tento element budeme chtít nahradit iso-elementem $K_i^{iso}(t)$. Předpokládáme, že vrchol $\mathbf{A}^i(t)$ elementu $K_i(t)$ leží uvnitř oblasti $\Omega(t)$ a vrcholy $\mathbf{B}^i(t)$, $\mathbf{C}^i(t)$ leží na $\partial\Omega(t)$, kde $\mathbf{A}^i(t) = (a_1^i(t), a_2^i(t))$, $\mathbf{B}^i(t) = (b_1^i(t), b_2^i(t))$, $\mathbf{C}^i(t) = (c_1^i(t), c_2^i(t))$. Dále zvolíme bod $\mathbf{D}^i(t) = (d_1^i(t), d_2^i(t))$, který taktéž náleží $\partial\Omega(t)$, ale leží mezi body $\mathbf{B}^i(t)$, $\mathbf{C}^i(t)$. Definujme zobrazení $\Psi^i(t)$ referenčního elementu K_{ref} , které nám bude charakterizovat iso-element $K_i^{iso}(t)$, takto:

$$\Psi^i(t)(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)\mathbf{A}^i(t) + \hat{x}_1\mathbf{B}^i(t) + \hat{x}_2\mathbf{C}^i(t) + \hat{x}_1\hat{x}_2\tilde{\mathbf{D}}^i(t), \quad (9.4)$$

kde $\tilde{\mathbf{D}}^i(t) = (\tilde{d}_1^i(t), \tilde{d}_2^i(t)) = 4\mathbf{D}^i(t) - 2(\mathbf{B}^i(t) + \mathbf{C}^i(t))$. Je zřejmé, že platí $\Psi^i(t)(\hat{\mathbf{A}}) = \mathbf{A}^i(t)$, $\Psi^i(t)(\hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{B}^i(t)$, $\Psi^i(t)(\hat{\mathbf{C}}) = \mathbf{C}^i(t)$. Položíme-li $\hat{\mathbf{D}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ jako střed úsečky $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{C}}$, vidíme, že $\Psi^i(t)(\hat{\mathbf{D}}) = \mathbf{D}^i(t)$. Předpokládejme, že zobrazení $\Psi^i(t)$ je na referenčním elementu K_{ref} prosté. Potom definujeme

$$K_i^{iso}(t) = \{ \mathbf{x}; \mathbf{x} = \Psi^i(t)(\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{pro } \forall \hat{\mathbf{x}} \in K_{ref} \}.$$

Obdobně jako na klasickém elementu definujeme na iso-elementu $K_i^{iso}(t)$ bázové funkce tvaru $\phi_j^i(\mathbf{x}, t) = \hat{\phi}_j((\Psi^i(t))^{-1}(\mathbf{x}))$, $j = 1, \dots, d_p$. Budeme značit Jacobiovu matici zobrazení $\Psi^i(t)$ jako $D\Psi^i(t)$ a Jacobiovu matici zobrazení $(\Psi^i(t))^{-1}$ jako $D(\Psi^i(t))^{-1}$. Potom

$$\begin{aligned} D\Psi^i(t)(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &= \begin{pmatrix} b_1^i(t) - a_1^i(t) + \tilde{d}_1^i(t)\hat{x}_2 & c_1^i(t) - a_1^i(t) + \tilde{d}_1^i(t)\hat{x}_1 \\ b_2^i(t) - a_2^i(t) + \tilde{d}_2^i(t)\hat{x}_2 & c_2^i(t) - a_2^i(t) + \tilde{d}_2^i(t)\hat{x}_1 \end{pmatrix}, \\ (D\Psi^i(t))^{-1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &= \\ &= \frac{1}{\det(D\Psi^i(t)(\hat{x}_1, \hat{x}_2))} \begin{pmatrix} c_2^i(t) - a_2^i(t) + \tilde{d}_2^i(t)\hat{x}_1 & a_1^i(t) - c_1^i(t) - \tilde{d}_1^i(t)\hat{x}_1 \\ a_2^i(t) - b_2^i(t) - \tilde{d}_2^i(t)\hat{x}_2 & b_1^i(t) - a_1^i(t) + \tilde{d}_1^i(t)\hat{x}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme odvodit derivace bázových funkcí $\phi_j^i(\mathbf{x}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_j^i}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{\phi}_j((\Psi^i(t))^{-1}(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial \hat{x}_k}((\Psi^i(t))^{-1}(\mathbf{x})) \frac{\partial ((\Psi^i(t))^{-1})_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ &= (\nabla \hat{\phi}_j)((\Psi^i(t))^{-1}(\mathbf{x})) \cdot \left((D(\Psi^i(t))^{-1})(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Jelikož platí $\hat{\mathbf{x}} = Id(\hat{\mathbf{x}}) = ((\Psi^i(t))^{-1})(\Psi^i(t)(\hat{\mathbf{x}}))$, potom za použití věty o derivování složené funkce dostaneme $D(Id(\hat{\mathbf{x}})) = \mathbf{I} = (D(\Psi^i(t))^{-1})(\Psi^i(t)(\hat{\mathbf{x}})) \cdot D\Psi^i(t)(\hat{\mathbf{x}})$. Z toho pak plyne, že $(D\Psi^i(t))^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) = (D(\Psi^i(t))^{-1})(\Psi^i(t)(\hat{\mathbf{x}}))$, a tedy pro $\mathbf{x} = \Psi^i(\hat{\mathbf{x}})$ nakonec dostaneme

$$\frac{\partial \phi_j^i}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi_j^i}{\partial x_1}(\Psi^i(t)(\hat{\mathbf{x}}), t) = (\nabla \hat{\phi}_j)(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \left((D\Psi^i(t))^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \quad (9.5)$$

Obdobně lze ukázat, že

$$\frac{\partial \phi_j^i}{\partial x_2}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \hat{\phi}_j)(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \left((D\Psi^i(t))^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathbf{x} = \Psi^i(t)(\hat{\mathbf{x}}). \quad (9.6)$$

Jelikož máme definovaný prostor $P^p(K_i(t))$ pro všechna $i \in I$, potom můžeme definovat vektorovou bázovou funkci $\Phi_{j,d}^i = (\phi_j^i \delta_{1d}, \dots, \phi_j^i \delta_{4d})$ pro $d = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, d_p$. Tyto funkce tvoří bázi prostoru $\mathbf{S}_h^p(t)$. Z toho plyne, že počet stupňů volnosti dof_h tohoto prostoru lze vyjádřit jako $\text{dof}_h = 4d_p \text{card}(I)$. Pro snazší zápis budeme indexovat bázové funkce prostoru $\mathbf{S}_h^p(t)$ jednoznačně indexem l , který vyjádříme jako $l = (i-1)4d_p + (d-1)d_p + j$ pro $i \in I$, $d \in \{1, \dots, 4\}$, $j \in \{1, \dots, d_p\}$. Potom označíme-li $\Phi_h^{l,m}(\mathbf{x}) := \Phi_{j,d}^i(\mathbf{x}, t_m)$, pak hledané řešení můžeme zapsat jako

$$\mathbf{w}_h^m = \sum_{l=1}^{\text{dof}_h} \xi_l^m \Phi_h^{l,m}. \quad (9.7)$$

Tedy diskrétní problém (8.59) , kde položíme $\Phi_h := \Phi_h^{z,m}$, $z = 1, \dots, \text{dof}_h$, se převede na tvar

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\text{dof}_h} \xi_l^m \alpha_0 \left(\Phi_h^{l,m}, \Phi_h^{z,m} \right) + \sum_{l=1}^{\text{dof}_h} \xi_l^m \left(A_h(\bar{\mathbf{w}}_h^m, \Phi_h^{l,m}, \Phi_h^{z,m}, t_m) + \beta_h^m(\Phi_h^{l,m}, \Phi_h^{z,m}, t_m) \right) \\ = & \quad l_h(\bar{\mathbf{w}}_h^m, \Phi_h^{z,m}, t_m) - p_h(\bar{\mathbf{w}}_h^m, \Phi_h^{z,m}) - \left(\sum_{l=1}^q \alpha_l \hat{\mathbf{w}}_h^{m-l}, \Phi_h^{z,m} \right). \end{aligned}$$

Nakonec tuto soustavu přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{A}_h^m \boldsymbol{\Xi}_h^m = \mathbf{L}_h^m, \quad (9.8)$$

kde

$$\begin{aligned} \{\mathbf{A}_h^m\}_{z,l} &= \alpha_0 \left(\Phi_h^{l,m}, \Phi_h^{z,m} \right) + A_h(\bar{\mathbf{w}}_h^m, \Phi_h^{l,m}, \Phi_h^{z,m}, t_m) + \beta_h^m(\Phi_h^{l,m}, \Phi_h^{z,m}, t_m), \\ \{\mathbf{L}_h^m\}_z &= l_h(\bar{\mathbf{w}}_h^m, \Phi_h^{z,m}, t_m) - p_h(\bar{\mathbf{w}}_h^m, \Phi_h^{z,m}) - \left(\sum_{l=1}^q \alpha_l \hat{\mathbf{w}}_h^{m-l}, \Phi_h^{z,m} \right), \\ \boldsymbol{\Xi}_h^m &= (\xi_1^m, \dots, \xi_{\text{dof}_h}^m)^T. \end{aligned}$$

Konstrukce báze funkcí prostoru $\mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}$ pro úplnou časoprostorovou nespojitou Galerkinovu metodu provedeme zvláště na každé časové vrstvě I_m pro $m = 1, \dots, M$. Předpokládejme, že prostor $S_h^p(t)$ máme zkonstruovaný stejným způsobem jako v předchozím odstavci. Nyní musíme zkonstruovat báze funkce ζ_u , $u = 0, \dots, q$ prostoru $P^q(t_{m-1}, t_m)$. Příklad pro $q = 0$ je jednoduchý. Dále tedy budeme předpokládat, že $q > 0$. Praktické příklady ukázaly, že volba $\zeta_u(t) = t^u$ není vhodná. Pro programovou realizaci je opět dobré definovat prostor polynomů na referenčním intervalu $(0, 1)$. Definujme body $\hat{t}_r = \frac{r}{q}$, $r = 0, \dots, q$. Potom volíme takové báze funkce $\hat{\zeta}_u(\hat{t})$ prostoru $P^q(0, 1)$, které splňují $\hat{\zeta}_u(\hat{t}_r) = \delta_{ur}$ pro $u, r = 0, \dots, q$. Jestliže definujeme funkci $t = G^m(\hat{t}) = t_{m-1} + \hat{t}\tau_m$, potom funkce $\zeta_u^m(t) := \hat{\zeta}_u((G^m)^{-1}(t))$, $u = 0, \dots, q$ tvoří bázi prostoru $P^q(t_{m-1}, t_m)$.

Tedy pro libovolné $i \in I$ tvoří funkce ϕ_j^i bázi prostoru $P^p(K_i(t))$. Potom funkce $\phi_{j,u}^{i,m}(\mathbf{x}, t) := \zeta_u^m(t) \phi_j^i(\mathbf{x}, t)$ pro $u = 0, \dots, q$ tvoří bázi $P^q(I_m, P^p(K_i(t)))$ (prostor polynomů stupně p v prostoru a q v čase). Nakonec definujme $\Phi_{j,u,d}^{i,m} := (\phi_{j,u}^{i,m} \delta_{1d}, \dots, \phi_{j,u}^{i,m} \delta_{4d})$ pro $d = 1, \dots, 4$. Je zřejmé, že funkce $\Phi_{j,u,d}^{i,m}$ pro $i \in I$, $j = 1, \dots, d_p$, $u = 0, \dots, q$, $d = 1, \dots, 4$ tvoří bázi prostoru $\mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}|_{I_m}$, kde

$$\mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}|_{I_m} := \{ \Phi_{h\tau}|_{I_m}; \Phi_{h\tau} \in \mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q} \}. \quad (9.9)$$

Počet stupňů volnosti $\text{dof}_{h\tau}$ prostoru $\mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}|_{I_m}$ lze vyjádřit jako $\text{dof}_{h\tau} = 4(q+1)d_p \text{card}(I)$. Opět pro snazší zápis budeme indexovat báze funkce tohoto prostoru jednoznačně indexem l , který vyjádříme jako $l = (i-1)4(q+1)d_p + (d-1)(q+1)d_p + ud_p + j$,

potom pokládáme $\Phi_{j,u,d}^{i,m} = \Phi_{h\tau}^{l,m}$. Při řešení problému (8.64) postupujeme po řadě přes jednotlivé časové vrstvy. Nechť tedy známe přibližné řešení na předchozí časové vrstvě I_{m-1} a hledáme řešení $\mathbf{w}_{h\tau}^m := \mathbf{w}_{h\tau}|_{I_m}$ na m -té časové vrstvě, které zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{w}_{h\tau}^m = \sum_{l=1}^{\text{dof}_{h\tau}} \xi_l^m \Phi_{h\tau}^{l,m}. \quad (9.10)$$

Potom diskrétní problém (8.64), kde položíme $\Phi_{h\tau} := \Phi_{h\tau}^{z,m}$, $z = 1, \dots, \text{dof}_{h\tau}$, se převede pro $m = 1$ na tvar

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\text{dof}_{h\tau}} \xi_l^1 \int_{I_1} \left(\left(\frac{D^{\mathcal{A}} \Phi_{h\tau}^{l,1}}{Dt}, \Phi_{h\tau}^{z,1} \right) + A_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}^{l,1}, \Phi_{h\tau}^{z,1}, t) + \beta_h^1(\Phi_{h\tau}^{l,1}, \Phi_{h\tau}^{z,1}, t) \right) dt \\ & + \sum_{l=1}^{\text{dof}_{h\tau}} \xi_l^1 \left(\Phi_{h\tau}^{l,1}(t_0^+), \Phi_{h\tau}^{z,1}(t_0^+) \right) \\ = & \int_{I_1} (l_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}^{z,1}, t) - p_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}^{z,1})) dt \\ & + (\mathbf{w}^0, \Phi_{h\tau}^{z,1}(t_0^+)) \quad \forall \Phi_{h\tau}^{z,1} \in \mathbf{S}_{h,\tau}^{p,q}|_{I_1} \end{aligned}$$

a pro $m > 1$ na tvar

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\text{dof}_{h\tau}} \xi_l^m \int_{I_m} \left(\left(\frac{D^{\mathcal{A}} \Phi_{h\tau}^{l,m}}{Dt}, \Phi_{h\tau}^{z,m} \right) + A_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}^{l,m}, \Phi_{h\tau}^{z,m}, t) + \beta_h^m(\Phi_{h\tau}^{l,m}, \Phi_{h\tau}^{z,m}, t) \right) dt \\ & + \sum_{l=1}^{\text{dof}_{h\tau}} \xi_l^m \left(\Phi_{h\tau}^{l,m}(t_{m-1}^+), \Phi_{h\tau}^{z,m}(t_{m-1}^+) \right) \\ = & \int_{I_m} (l_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}^{z,m}, t) - p_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}^{z,m})) dt \\ & + (\mathbf{w}_{h\tau}^{m-1}(t_{m-1}^-), \Phi_{h\tau}^{z,m}(t_{m-1}^+)) \quad \forall \Phi_{h\tau}^{z,m} \in \mathbf{S}_{h\tau}^{p,q}|_{I_m}. \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{A}_{h\tau}^m \Xi_{h\tau}^m = \mathbf{L}_{h\tau}^m, \quad (9.11)$$

kde pro $m = 1$

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{A}_{h\tau}^1\}_{z,l} &= \int_{I_1} \left(\left(\frac{D^{\mathcal{A}}\Phi_{h\tau}^{l,1}}{Dt}, \Phi_{h\tau}^{z,1} \right) + A_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}^{l,1}, \Phi_{h\tau}^{z,1}, t) + \beta_h^1(\Phi_{h\tau}^{l,1}, \Phi_{h\tau}^{z,1}, t) \right) dt \\
&\quad + \left(\Phi_{h\tau}^{l,1}(t_0^+), \Phi_{h\tau}^{z,1}(t_0^+) \right), \\
\{\mathbf{L}_{h\tau}^1\}_z &= \int_{I_1} (l_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}^{z,1}, t) - p_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}^{z,1})) dt \\
&\quad + (\mathbf{w}^0, \Phi_{h\tau}^{z,1}(t_0^+)), \\
\Xi_{h\tau}^1 &= (\xi_1^1, \dots, \xi_{\text{dof}_{h\tau}}^1)^T
\end{aligned}$$

a pro $m > 1$

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{A}_{h\tau}^m\}_{z,l} &= \int_{I_m} \left(\left(\frac{D^{\mathcal{A}}\Phi_{h\tau}^{l,m}}{Dt}, \Phi_{h\tau}^{z,m} \right) + A_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}^{l,m}, \Phi_{h\tau}^{z,m}, t) + \beta_h^m(\Phi_{h\tau}^{l,m}, \Phi_{h\tau}^{z,m}, t) \right) dt \\
&\quad + \left(\Phi_{h\tau}^{l,m}(t_{m-1}^+), \Phi_{h\tau}^{z,m}(t_{m-1}^+) \right), \\
\{\mathbf{L}_{h\tau}^m\}_z &= \int_{I_m} (l_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}^{z,m}, t) - p_h(\bar{\mathbf{w}}_{h\tau}, \Phi_{h\tau}^{z,m})) dt \\
&\quad + (\mathbf{w}_{h\tau}^{m-1}(t_{m-1}^-), \Phi_{h\tau}^{z,m}(t_{m-1}^+)), \\
\Xi_{h\tau}^m &= (\xi_1^m, \dots, \xi_{\text{dof}_{h\tau}}^m)^T.
\end{aligned}$$

9.1 Numerický výpočet integrálů

V této části se budeme zabývat numerickým výpočtem integrálů v maticích soustavy (9.8) resp. (9.11). Jelikož tyto integrály v praxi ve většině případů nelze spočítat přesně, budeme pro jejich určení hodnoty používat přibližné kvadraturní a kubaturní vzorce.

Pro počítání jednorozměrných integrálů budeme používat tzv. Gaussovy kvadraturní vzorce odvozené pro interval $[0, 1]$. Tuto kvadraturu obecně Q -tého řádu, která je přesná pro polynomy stupně nejvýše Q , pro funkci $e(r)$ definovanou na intervalu $[0, 1]$ zapíšeme ve tvaru

$$\int_0^1 e(r) dr \approx \sum_{v=1}^{N_Q} \omega_v^Q e(r_v^Q), \quad (9.12)$$

kde r_v^Q jsou kvadraturní uzly a ω_v^Q jsou příslušné váhy. Tabulka 3 udává tyto hodnoty pro kvadraturu řádu $Q = 5$ a $Q = 9$.

Všechny jednorozměrné integrály vypočítáme tak, že je transformujeme na interval $[0, 1]$ a následně využijeme kvadraturní vzorec (9.12). Než ukážeme na praktickém případě tento postup, musíme nejdříve parametrizovat všechny hrany elementu $i \in I$. Úsečky $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$ resp. $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{C}}$ resp. $\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}$ referenčního elementu parametrizujeme pomocí funkcí $\hat{\boldsymbol{\eta}}_1(r) = (r, 0)$ resp. $\hat{\boldsymbol{\eta}}_2(r) = (1 - r, r)$ resp. $\hat{\boldsymbol{\eta}}_3(r) = (0, 1 - r)$, kde $r \in [0, 1]$. S využitím těchto funkcí a funkce $\mathbf{F}^i(t)$ lze pořadě úsečky $\mathbf{A}^i(t)\mathbf{B}^i(t)$, $\mathbf{B}^i(t)\mathbf{C}^i(t)$ a $\mathbf{C}^i(t)\mathbf{A}^i(t)$ vyjádřit jako

$$\boldsymbol{\eta}_s^i(t)(r) = \mathbf{F}^i(t)(\hat{\boldsymbol{\eta}}_s(r)), \quad r \in [0, 1] \quad \text{pro } s = 1, 2, 3. \quad (9.13)$$

Pokud $i \in I$ je tzv. iso-element, postupujeme zcela analogicky. Definujeme

$$\boldsymbol{\eta}_s^i(t)(r) = \boldsymbol{\Psi}^i(t)(\hat{\boldsymbol{\eta}}_s(r)), \quad r \in [0, 1] \quad \text{pro } s = 1, 2, 3. \quad (9.14)$$

Z definice funkce $\boldsymbol{\Psi}^i(t)$ je zřejmé, že funkce $\boldsymbol{\eta}_1^i(t)$ resp. $\boldsymbol{\eta}_3^i(t)$ zobrazí úsečky $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$ resp. $\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}$ na úsečky $\mathbf{A}^i(t)\mathbf{B}^i(t)$ resp. $\mathbf{C}^i(t)\mathbf{A}^i(t)$. Funkce $\boldsymbol{\eta}_2^i(t)$ vyjadřuje parametricky křivou část hrany elementu $K_i^{iso}(t)$. Pro výpočet integrálů přes křivku $\boldsymbol{\eta}_2^i(t)$ definujeme funkci $s^i(t)(r)$:

$$s^i(t)(r) := \sqrt{\left(\frac{\partial(\boldsymbol{\eta}_2^i(t)(r))_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\boldsymbol{\eta}_2^i(t)(r))_2}{\partial r}\right)^2}. \quad (9.15)$$

Potom lze $s^i(t)(r)$ vyjádřit jako

$$s^i(t)(r) = \sqrt{\left(c_1^i(t) - b_1^i(t) + (1 - 2r)\tilde{d}_1^i(t)\right)^2 + \left(c_2^i(t) - b_2^i(t) + (1 - 2r)\tilde{d}_2^i(t)\right)^2}$$

a $dS = s^i(t)(r) dr$.

	$\omega_v^Q, v = 1, \dots, N_Q$	$r_v^Q, v = 1, \dots, N_Q$
$Q = 5$ $N_Q = 3$	$\frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}$ 0.5 $\frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}$	$\frac{5}{18}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{5}{18}$
$Q = 9$ $N_Q = 5$	0.04691007703066800360119 0.2307653449471584544818 0.5 0.76923465505284154554816 0.95308992296933199639881	0.11846344252809454375713 0.23931433524968323402065 0.284444444444444444444444 0.23931433524968323402065 0.11846344252809454375713

Tabulka 3: Kvadrurní uzly a váhy.

Pro názornost uvedený postup předvedeme na následujícím typu integrálu, který se po detailnějším rozboru vyskytuje v matici soustavy (9.8) a patří k těm komplikovanějším. Zvolme $i \in I$ takové, že $K_i^{iso}(t_m)$ je iso-element, hrana $\Gamma_{ij}(t_m), j \in \gamma(i)$ je křivá část $\partial K_i^{iso}(t_m)$, $\boldsymbol{\eta}_2^i(t_m)(r) = \boldsymbol{\Psi}^i(t_m)(\hat{\boldsymbol{\eta}}_2(r)), r \in [0, 1]$ je její parametrické vyjádření. Nechť funkce $L(\boldsymbol{x})$ je definována na $\Omega_h(t_m)$. Potom z definice křivkového integrálu s využitím (9.15), (9.5) a kvadratury (9.12) dostáváme

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_{ij}(t_m)} L(\mathbf{x}) \phi_k^i(\mathbf{x}, t_m) \frac{\partial \phi_l^i}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t_m) \, dS \tag{9.16} \\
&= \int_0^1 L(\boldsymbol{\eta}_2^i(t_m)(r)) \phi_k^i(\boldsymbol{\eta}_2^i(t_m)(r), t_m) \frac{\partial \phi_l^i}{\partial x_1}(\boldsymbol{\eta}_2^i(t_m)(r), t_m) s^i(t_m)(r) \, dr \\
&= \int_0^1 L(\boldsymbol{\eta}_2^i(t_m)(r)) \hat{\phi}_k(\hat{\boldsymbol{\eta}}_2(r)) (\nabla \hat{\phi}_l)(\hat{\boldsymbol{\eta}}_2(r)) \cdot \left((D\Psi^i(t_m))^{-1}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_2(r)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) s^i(t_m)(r) \, dr \\
&\approx \sum_{v=1}^{N_Q} \omega_v^Q L(\boldsymbol{\eta}_2^i(t_m)(r_v^Q)) \hat{\phi}_k(\hat{\boldsymbol{\eta}}_2(r_v^Q)) (\nabla \hat{\phi}_l)(\hat{\boldsymbol{\eta}}_2(r_v^Q)) \\
&\quad \cdot \left((D\Psi^i(t_m))^{-1}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_2(r_v^Q)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) s^i(t_m)(r_v^Q).
\end{aligned}$$

Pro dvojrozměrné integrály budeme používat Gaussovy kubатурní vzorce odvozené pro referenční element K_{ref} . Tato kubatura obecně P -tého řádu, která je přesná pro polynomy stupně nejvýše P , pro funkci $f(\mathbf{x})$ definovanou na oblasti K_{ref} zapíšeme ve tvaru

$$\int_{K_{ref}} f(\hat{\mathbf{x}}) \, d\hat{\mathbf{x}} \approx \frac{1}{2} \sum_{w=1}^{N_P} \omega_w^P f(\hat{\mathbf{x}}_w^P), \tag{9.17}$$

kde $\hat{\mathbf{x}}_w^P$ jsou kvadraturní uzly a ω_w^P jsou příslušné váhy. Tabulka 4 udává tyto hodnoty pro kvadratury řádu $P = 5$ a $P = 7$.

Všechny dvojrozměrné integrály přes obecný element $K_i(t_m)$ vypočítáme tak, že je transformujeme na referenční element K_{ref} a následně využijeme kubaturní vzorec (9.17). Opět postup ukážeme na následujícím komplikovanějším případě. Zvolme $i \in I$ takové, že $K_i^{iso}(t_m)$ je iso-element. Za použití věty o substituci, (9.5) a kubatury (9.17) postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
& \int_{K_i^{iso}(t_m)} L(\mathbf{x}) \phi_k^i(\mathbf{x}, t_m) \frac{\partial \phi_l^i}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t_m) \, d\mathbf{x} \tag{9.18} \\
&= \int_{K_{ref}} L(\Psi^i(t_m)(\hat{\mathbf{x}})) \phi_k^i(\Psi^i(t_m)(\hat{\mathbf{x}}), t_m) \frac{\partial \phi_l^i}{\partial x_1}(\Psi^i(t_m)(\hat{\mathbf{x}}), t_m) |\det(D\Psi^i(t_m)(\hat{\mathbf{x}}))| \, d\hat{\mathbf{x}} \\
&= \int_{K_{ref}} L(\Psi^i(t_m)(\hat{\mathbf{x}})) \hat{\phi}_k(\hat{\mathbf{x}}) (\nabla \hat{\phi}_l)(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \left((D\Psi^i(t_m))^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) |\det(D\Psi^i(t_m)(\hat{\mathbf{x}}))| \, d\hat{\mathbf{x}} \\
&\approx \frac{1}{2} \sum_{w=1}^{N_P} \omega_w^P L(\Psi^i(t_m)(\hat{\mathbf{x}}_w^P)) \hat{\phi}_k(\hat{\mathbf{x}}_w^P) (\nabla \hat{\phi}_l)(\hat{\mathbf{x}}_w^P) \\
&\quad \cdot \left((D\Psi^i(t_m))^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_w^P) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) |\det(D\Psi^i(t_m)(\hat{\mathbf{x}}_w^P))|.
\end{aligned}$$

	$\omega_w^P, w = 1, \dots, N_P$	$(\hat{x}_w^P)_1, w = 1, \dots, N_P$	$(\hat{x}_w^P)_2, w = 1, \dots, N_P$
$P = 5$	0.225	0.3333333333	0.3333333333
$N_P = 7$	0.132394152788506	0.470142064105115	0.470142064105115
	0.132394152788506	0.470142064105115	0.059715871789769
	0.132394152788506	0.059715871789769	0.470142064105115
	0.125939180544827	0.101286507323456	0.101286507323456
	0.125939180544827	0.101286507323456	0.797426985353087
	0.125939180544827	0.797426985353087	0.101286507323456
$P = 7$	-0.149570044467670	0.3333333333333333	0.3333333333333333
$N_P = 13$	0.175615257433204	0.260345966079038	0.260345966079038
	0.175615257433204	0.479308067841923	0.260345966079038
	0.175615257433204	0.260345966079038	0.479308067841923
	0.053347235608839	0.065130102902216	0.869739794195568
	0.053347235608839	0.869739794195568	0.065130102902216
	0.053347235608839	0.065130102902216	0.065130102902216
	0.077113760890257	0.638444188569809	0.312865496004875
	0.077113760890257	0.312865496004875	0.638444188569809
	0.077113760890257	0.638444188569809	0.048690315425316
	0.077113760890257	0.048690315425316	0.638444188569809
	0.077113760890257	0.312865496004875	0.048690315425316
	0.077113760890257	0.048690315425316	0.312865496004875

Tabulka 4: Kubaturní uzly a váhy.

Na závěr této části ukážeme postup výpočtu integrálů ze soustavy (9.11). Tyto integrály počítáme s využitím vzorců (9.12) a (9.17) tak, že časový integrál převedeme pomocí substituce $t = G^m(\hat{t}) = t_{m-1} + \hat{t}\tau_m$, $\hat{t} \in [0, 1]$ na interval $[0, 1]$ a prostorový integrál přes element resp. hranu na refereční element resp. interval $[0, 1]$ stejně jako bylo ukázáno výše. Nechť máme funkci $K(\mathbf{x}, t) \in C((0, T), \bar{\Omega}_h(t))$, potom s využitím substituce $G^m(\hat{t})$ upravujeme následující integrál:

$$\begin{aligned}
& \int_{I_m} \int_{K_i^{iso}(t)} K(\mathbf{x}, t) \phi_{k,u}^{i,m}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi_{l,z}^{i,m}}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt \\
&= \int_{I_m} \int_{K_i^{iso}(t)} K(\mathbf{x}, t) \zeta_u^m(t) \phi_k^i(\mathbf{x}, t) \zeta_z^m(t) \frac{\partial \phi_l^i}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt \\
&= \int_0^1 \zeta_u^m(G^m(\hat{t})) \zeta_z^m(G^m(\hat{t})) \tau_m \int_{K_i^{iso}(G^m(\hat{t}))} K(\mathbf{x}, G^m(\hat{t})) \phi_k^i(\mathbf{x}, G^m(\hat{t})) \frac{\partial \phi_l^i}{\partial x_1}(\mathbf{x}, G^m(\hat{t})) \, d\mathbf{x} \, d\hat{t}. \\
&= \int_0^1 \hat{\zeta}_u(\hat{t}) \hat{\zeta}_z(\hat{t}) \tau_m \int_{K_i^{iso}(G^m(\hat{t}))} K(\mathbf{x}, G^m(\hat{t})) \phi_k^i(\mathbf{x}, G^m(\hat{t})) \frac{\partial \phi_l^i}{\partial x_1}(\mathbf{x}, G^m(\hat{t})) \, d\mathbf{x} \, d\hat{t}.
\end{aligned}$$

Pokud označíme

$$h(\hat{t}) := \int_{K_i^{iso}(G^m(\hat{t}))} K(\mathbf{x}, G^m(\hat{t})) \phi_k^i(\mathbf{x}, G^m(\hat{t})) \frac{\partial \phi_l^i}{\partial x_1}(\mathbf{x}, G^m(\hat{t})) \, d\mathbf{x},$$

potom s využitím (9.12) máme

$$\int_0^1 \hat{\zeta}_u(\hat{t}) \hat{\zeta}_z(\hat{t}) \tau_m h(\hat{t}) \, d\hat{t} \approx \sum_{v=1}^{N_Q} \omega_v^Q \hat{\zeta}_u(r_v^Q) \hat{\zeta}_z(r_v^Q) \tau_m h(r_v^Q).$$

Pro výpočet funkce $h(\hat{t})$ využijeme stejný postup jako v příkladu (9.18) a nakonec dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} \int_{K_i^{iso}(t)} K(\mathbf{x}, t) \phi_{k,u}^{i,m}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi_{l,z}^{i,m}}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt \\ & \approx \sum_{v=1}^{N_Q} \omega_v^Q \hat{\zeta}_u(r_v^Q) \hat{\zeta}_z(r_v^Q) \tau_m \frac{1}{2} \sum_{w=1}^{N_P} \omega_w^P K(\Psi^i(G^m(r_v^Q))(\hat{\mathbf{x}}_w^P), G^m(r_v^Q)) \hat{\phi}_k(\hat{\mathbf{x}}_w^P) \times \\ & \quad \times (\nabla \hat{\phi}_j)(\hat{\mathbf{x}}_w^P) \cdot \left((D\Psi^i(G^m(r_v^Q)))^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_w^P) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left| \det((D\Psi^i(G^m(r_v^Q)))(\hat{\mathbf{x}}_w^P)) \right|. \end{aligned}$$

Integrál přes $K_i^{iso}(t)$, kde se vyskytuje ALE derivace, vypočítáme následujícím způsobem. Z definice ALE derivace pro $\mathbf{x} = \mathcal{A}_t(\mathbf{X}) \in K_i^{iso}(t)$ a s využitím (8.72) máme

$$\begin{aligned} \frac{D^{\mathcal{A}} \phi_{k,u}^{i,m}}{Dt}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \phi_{k,u}^{i,m}(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\zeta_u^m(t) \hat{\phi}_k((\Psi^i(0))^{-1}(\mathbf{X})) \right) \\ &= \frac{\partial \zeta_u^m}{\partial t}(t) \hat{\phi}_k((\Psi^i(t))^{-1}(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} \int_{K_i^{iso}(t)} \frac{D^{\mathcal{A}} \phi_{k,u}^{i,m}}{Dt}(\mathbf{x}, t) \phi_{l,z}^{i,m}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \zeta_u^m}{\partial t}(G^m(\hat{t})) \zeta_z^m(G^m(\hat{t})) \tau_m \int_{K_{ref}} \hat{\phi}_k(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\phi}_l(\hat{\mathbf{x}}) \left| \det(D\Psi^i(G^m(\hat{t}))(\hat{\mathbf{x}})) \right| \, d\hat{\mathbf{x}} \, d\hat{t} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \hat{\zeta}_u}{\partial t}(\hat{t}) \hat{\zeta}_z(\hat{t}) \int_{K_{ref}} \hat{\phi}_k(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\phi}_l(\hat{\mathbf{x}}) \left| \det(D\Psi^i(G^m(\hat{t}))(\hat{\mathbf{x}})) \right| \, d\hat{\mathbf{x}} \, d\hat{t} \\ &\approx \sum_{v=1}^{N_Q} \omega_v^Q \frac{\partial \hat{\zeta}_u}{\partial t}(r_v^Q) \hat{\zeta}_z(r_v^Q) \frac{1}{2} \sum_{w=1}^{N_P} \omega_w^P \hat{\phi}_k(\hat{\mathbf{x}}_w^P) \hat{\phi}_l(\hat{\mathbf{x}}_w^P) \left| \det(D\Psi^i(G^m(r_v^Q))(\hat{\mathbf{x}}_w^P)) \right|. \end{aligned}$$

10 Numerické výsledky

V této kapitole se budeme nejprve věnovat krátce popisu programu a následně různým numerickým experimentům, které byly tímto programem realizovány. Pro snazší zápis budeme semidiskrétní metodu popsanou v kapitole 8 značit jako BDF (Backward different formula) a úplnou časoprostorovou nespojitou Galerkinovu metodu STDGM (Space time discontinuous Galerkin method). Dále, pokud budeme mluvit speciálně např. o metodě BDF stupně 2 v prostoru a stupně 1 v čase, budeme zkráceně psát BDF-p2q1. Obdobně pro metodu STDGM stupně 2 v prostoru a stupně 1 v čase budeme psát STDGM-p2q1.

10.1 Popis programu

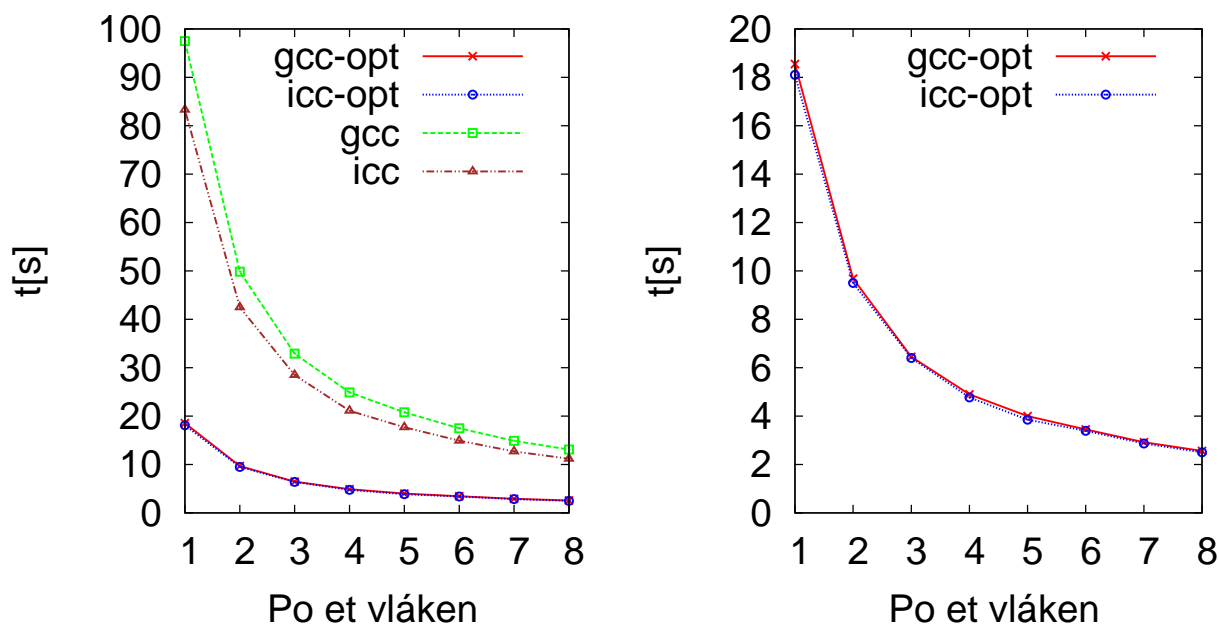
Pro numerické řešení problému byl vytvořen program napsaný v jazyce C a využívající metody BDF resp. STDGM, popsané v kapitole 8. Algoritmizace těchto metod byla provedena tak, jak byla popsána v předchozí kapitole 9. Jdeme tedy v čase postupně přes jednotlivé časové vrstvy. Na každé časové vrstvě vytváříme matici a pravou stranu soustavy. Z popisu metod je zřejmé, že matice jednotlivých soustav jsou nesymetrické a řídké. Z tohoto důvodu byly řešeny pomocí iterační metody GMRES (Generalized Minimal Residual). Vzhledem k faktu, že soustavy jsou špatně podmíněné, je dobré soustavu vhodně předpodmínit. Je zde více možností předpodmínění. V programu bylo zvoleno předpodmínění pomocí blokové diagonální matice, kterou označíme \mathbf{P} , jejíž bloky na diagonále jsou inverzní k odpovídajícím blokům na diagonále matice soustavy. Potom místo soustavy, kterou zde budeme obecně značit $\mathbf{A} \mathbf{\Xi} = \mathbf{\Phi}$, budeme řešit modifikovanou soustavu $\mathbf{PA} \mathbf{\Xi} = \mathbf{P}\mathbf{\Phi}$. V experimentech, které byly provedeny, dosahovaly soustavy řádu 10^5 až 10^6 , a tudíž jejich řešení bylo velmi náročné na výpočetní čas. Z těchto důvodů byl GMRES nastaven na 20 vnitřních iterací a na maximálně 5 vnějších iterací pro dosažení předepsaného rezidua soustavy $\mathbf{PA} \mathbf{\Xi} = \mathbf{P}\mathbf{\Phi}$, které bylo nastaveno na 10^{-5} . Numerické experimenty ukázaly, že použití více vnitřních a vnějších iterací má sice význam na zpřesnění řešení soustavy, ale ve výsledcích se dané zpřesnění prakticky neprojeví, narozdíl od výpočetního času, který velmi naroste. Jiná možnost pro snížení výpočetního času je použití paralelizace. Je více možností paralelizace výpočtu, jako je např. MPI nebo OpenMP. V programu byla zvolena paralelizace za pomoci knihovny OpenMP, která umožňuje snadnou implementaci vícevláknových programů pro počítače se sdílenou pamětí. Tato paralelizace probíhá tak, že se v sekvenčním programu v místech, kde lze program rozdělit na více nezávislých částí, vytvoří v hlavním vláknu (master thread) skupina podvláken (slave thread). Potom každému vláknu se předá daná část programu. Po vykonání paralelních částí programu každým vláknem se všechna podvlákna zruší a zůstane pouze hlavní vlákno, které pokračuje dále ve vykonávání kódu programu sekvenčně. V programu se paralelně provádí vytváření matic \mathbf{A} a \mathbf{P} a násobení těchto matic s vektorem, které se vyskytuje v GMRES. Bylo by možné vykonávat paralelně další části programu, ale urychlení programu by bylo malé. Nevýhoda této paralelizace vzhledem k podstatě OpenMP, kdy paralelizace je provedena pomocí vláken, spočívá v tom, že ji lze použít pouze v rámci jednoho výpočetního uzlu a je účinná pouze na vícejádrových procesorech. Všechny výpočty byly provedeny na clusteru Sněhurka, který v době psaní této práce obsahoval 11 výpočetních uzlů (každý fyzicky obsahoval 2 čtyřjádrové proce-

sory Intel Core i7, 2266.745 MHz, 8192 KB Cache, 24 GB RAM) a 3 uzly (každý fyzicky obsahoval 2 čtyřjádrové procesory Intel Core i7 2400.083 MHz, 12228 KB Cache, 24 GB RAM). Tedy v rámci každého uzlu je možné počítat na 8 jádrech, a tedy může teoreticky běžet až 8 vláken zároveň. Další možné urychlení závisí na volbě kompilátoru a jeho optimalizačních možnostech. Pro překlad programu byly zvoleny pro srovnání kompilátory gcc 4.4.5 s optimalizačními parametry gcc -O3 -mtune=native -ffastmath a kompilátor icc s optimalizačními parametry icc -O3 -no-prec-div -xSSE4.2. Pro demonstraci porovnání zrychlení výpočtu byla zvolena metoda STD-p2q1 na triangulaci z obrázku 27, kdy příslušná soustava má dimenzi 823584. Na grafech z obrázku 2 vlevo je ukázána závislost výpočetního času pro vytvoření soustavy na počtu vláken pro oba zmíněné překladače. Čas pro vytvoření soustavy zde zahrnuje čas pro vypočítání všech nenulových buněk matice \mathbf{A} a vypočítání pravé strany Φ . Z obrázku je zřejmé, že paralelizace pro 8 vláken při neoptimalizovaném i při optimalizovaném překladu zkrátí čas přibližně 7.5 krát. Na grafech z obrázku 3 vlevo je ukázána závislost výpočetního času pro vyřešení soustavy na počtu vláken opět pro oba zmíněné překladače. Čas pro vyřešení soustavy zde zahrnuje vypočítání matice \mathbf{P} a provedení 1 vnější iterace GMRES s 20 vnitřními iteracemi. V tomto případě se již při paralelizaci nedosahuje tak dobrých výsledků jako při vypočítání soustavy. To je způsobeno hlavně násobením matice s vektorem, kdy části matice a vektoru se postupně načítají z paměti RAM do cache, což zabere část výpočetního času, ale potom se prvky z matice použijí při násobení pouze jednou. Z obrázku je zřejmé, že paralelizace pro 8 vláken při optimalizovaném překladu zkrátí čas přibližně 3.5 krát. Dale z grafů je vidět, že pro nižší počet vláken je překladač icc mírně rychlejší. Je to z důvodu, že icc je stavěno hlavně na procesory firmy Intel. Bohužel tento rozdíl s rostoucím počtem vláken zaniká.

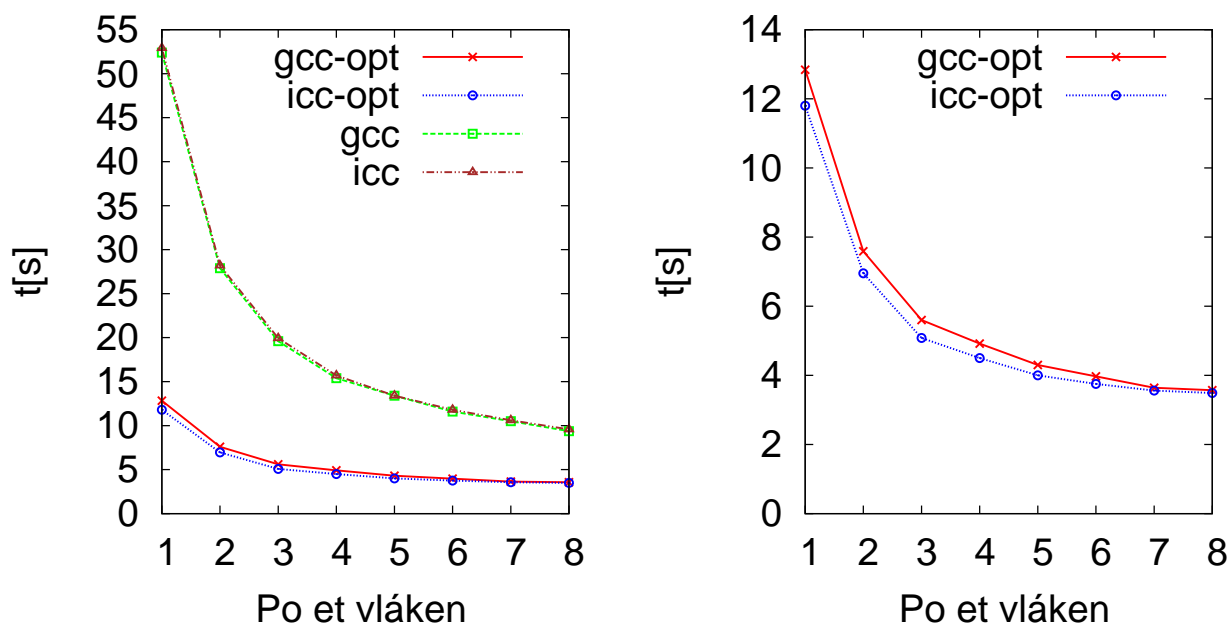
10.2 Interakce

V této části se budeme věnovat simulaci skutečné interakce mezi proudícím plynem a profilem, jak byla popsána v kapitole 7. Experimenty byly provedeny pro následující data: $m = 0.086622$ kg, $S_a = -0.000779673$ kg m, $I_a = 0.000487291$ kg m⁻², $k_{HH} = 105.109$ N/m, $k_{\alpha\alpha} = 3.696682$ Nm/rad, $d_{HH} = 0.0$ Ns/m, $d_{\alpha\alpha} = 0.0$ Nms/rad, $\mu = 1.72 \cdot 10^{-5}$ kg m⁻¹ s⁻¹, tlak nabíhajícího proudu $p^0 = 101250$ Pa, $l = 0.05$ m, $c = 0.3$ m, hustota na vstupu $\rho = 1.225$ kg m⁻³, Poissonova adiabatická konstanta $\gamma = 1.4$, specifické měrné teplo $c_v = 721.428$ m² s⁻² K⁻¹, koeficient vedení tepla $k = 2.428 \cdot 10^{-2}$ kg m s⁻² K⁻¹, $H(0) = -20$ mm, $\alpha(0) = 6^\circ$, $\dot{H}(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$. Výpočet začíná v čase $t < 0$, kdy profil držíme v předepsané počáteční poloze dané posunutím H a úhlem natočení α . Potom v čase $t = 0$ je profil uvolněn a dále řešíme již skutečnou interakci.

V experimentech v případě metody BDF byly použity polynomy stupně 2 v prostoru a aproximace řádu 2 v čase (BDF-p2q2). V případě STDGM byly použity polynomy stupně 2 v prostoru a stupně 1 v čase (STDGM-p2q1). Pro obě metody pro všechny experimenty byl zvolen časový krok v bezrozměrných jednotkách $\tau = 0.003299$, byla použita symetrická formulace, parametr C_W vyskytující se ve stabilizačním členu J_h^σ z kapitoly 8 byl zvolen 500. Pouze na hranici profilu byl tento parametr zvolen 5000 z důvodu stability výpočtu a udržení předepsaných okrajových podmínek na této hranici. Dále byly zvoleny konstanty $\nu_1 = \nu_2 = 0.1$, které vystupují ve formě β_h^m . Výpočty byly provedeny na triangulaci z obr.



Obrázek 2: Grafy závislosti výpočetního času pro vytvoření matice na počtu vláken.



Obrázek 3: Grafy závislosti výpočetního času pro řešení soustavy na počtu vláken.

27.

Obrázky 4 - 9 srovnávají grafy posunutí a úhlu natočení profilu pro obě metody pro náběžné rychlosti 10, 20, 30, 35, 37.5 a 40m/s. Tyto výsledky můžeme porovnat s výsledky [24], kde je řešena úloha se stejnými vstupními daty pomocí klasických spojitých konečných prvků v případě nestlačitelného proudění.

Z obrázků je zřejmé, že tyto výsledky jsou v dobré shodě zejména pro nižší náběžné rychlosti. Z toho lze usoudit, že stlačitelnost nemá pro nízké náběžné rychlosti příliš velký význam, což dokazují provedené experimenty, kdy se hustota v bezrozměrných jednotkách pohybovala v přibližně v rozmezí 0.999 – 1.001 pro náběžnou rychlost 10m/s a přibližně v rozmezí 0.9 – 1.35 pro náběžnou rychlost 40m/s. Obrázek 10 resp. 11 zobrazuje rozložení velikosti rychlosti resp. tlaku pro různé časové okamžiky pro náběžnou rychlost 10m/s. Obrázek 12 resp. 13 zobrazuje rozložení velikosti rychlosti resp. tlaku pro různé časové okamžiky pro náběžnou rychlost 40m/s. Na obrázku 14 jsou uvedeny výsledky frekvenční analýzy, která byla realizována pomocí Fourierovy transformace

$$G(f_n) = \int_0^T g(t)e^{-2\pi i f_n t} dt \quad (10.1)$$

pro $g = H$ nebo $g = \alpha$ a $f_n = n\Delta f \in [0, 40]$, $\Delta f = 0.1$ Hz, aproximovaná pomocí obdélníkového pravidla

$$G(f_n) = \sum_{k=1}^M g(t_k)e^{-2\pi i f_n t_k} \tau_k, \quad (10.2)$$

kde t_k resp. M resp. τ_k jsou jednotlivé časové okamžiky resp. počet časových okamžiků resp. časový krok mezi časovými okamžiky dané časovou diskretizací problému. Výsledky frekvenční analýzy jsou zobrazeny jako hodnoty

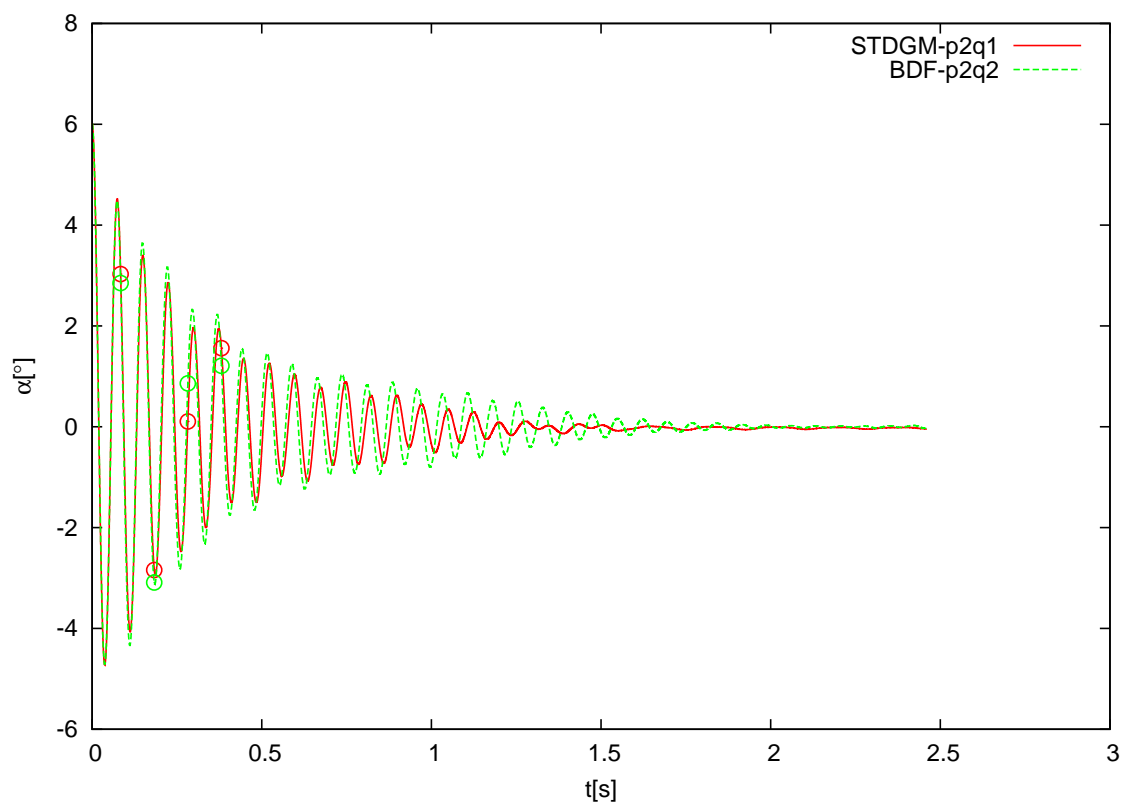
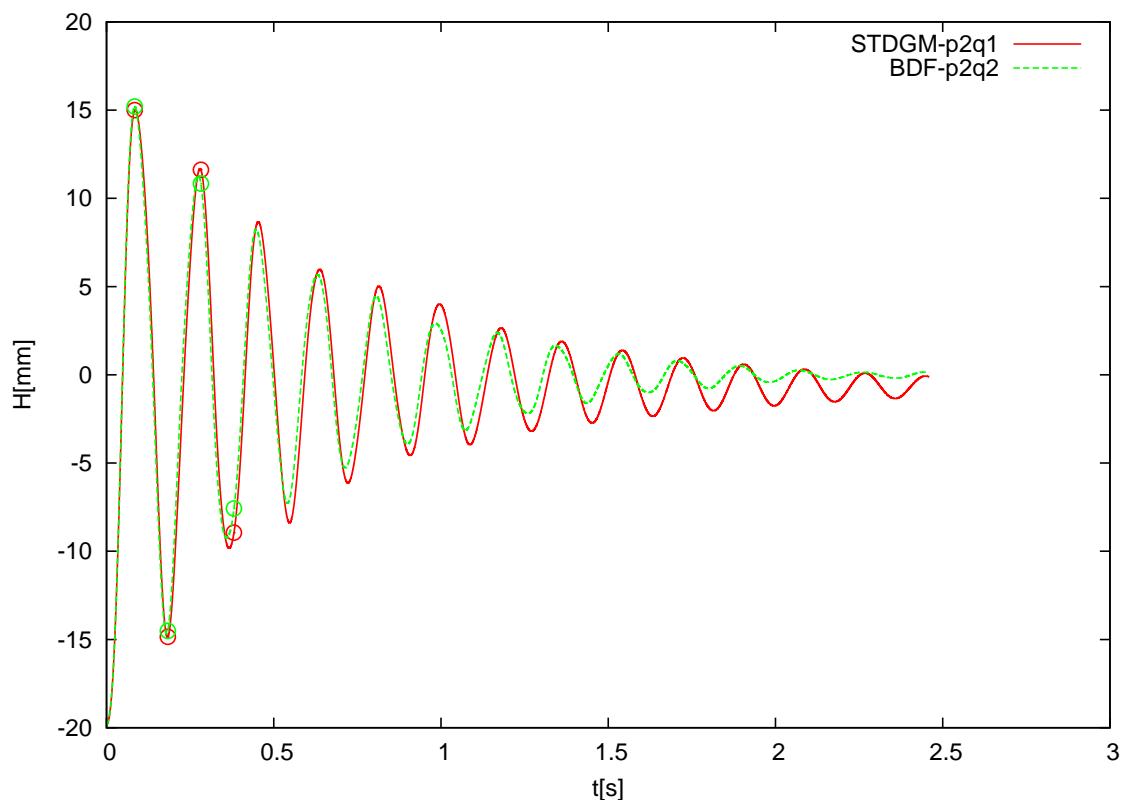
$$|G(f_n)| = \sqrt{Re^2(G(f_n)) + Im^2(G(f_n))}. \quad (10.3)$$

Z těchto výsledků je patrný růst resp. pokles hlavních frekvencí v posunutí resp. úhlu rotace s rostoucí náběžnou rychlostí.

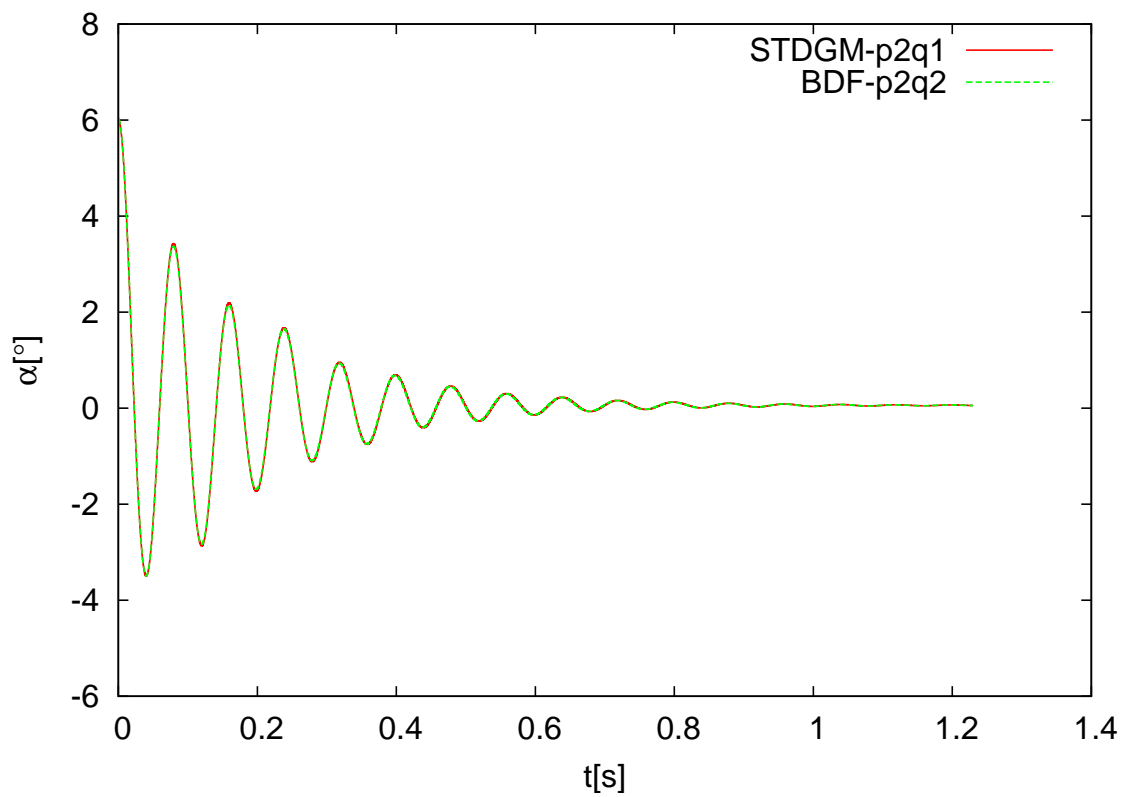
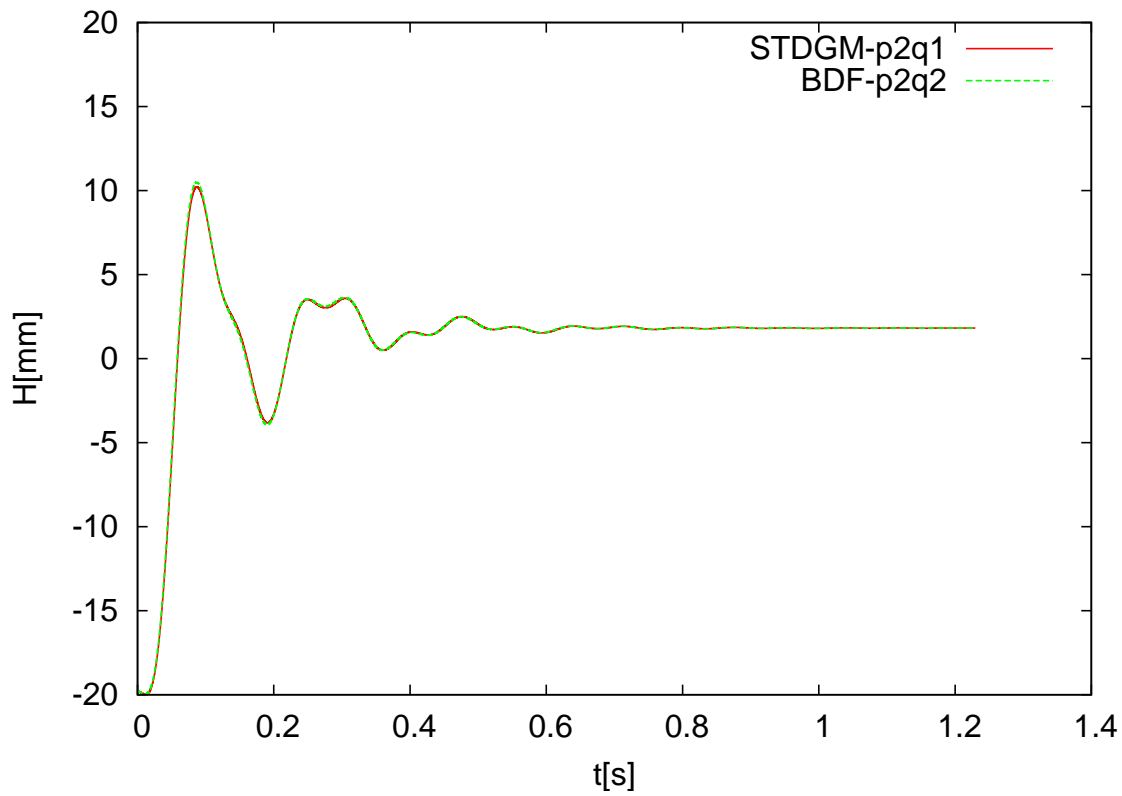
Z prezentovaných výsledků uvedených na obrázcích 4 - 9 vidíme, že obě metody BDF a STDGM vedou ke kvalitativně podobným výsledkům. Na základě obou metod lze dojít k závěru, že kritická náběžná rychlost, pro níž systém ztrácí stabilitu, leží v intervalu mezi 35m/s a 37.5m/s. Pro vyšší rychlost dostáváme flutter, kdy vibrace profilu nejsou tlumené. Srovnatelné výsledky byly získány v [24] metodou konečných prvků v případě nestlačitelného proudění.

10.3 Interakce profilu s proudícím vzduchem pro vysoké náběžné rychlosti

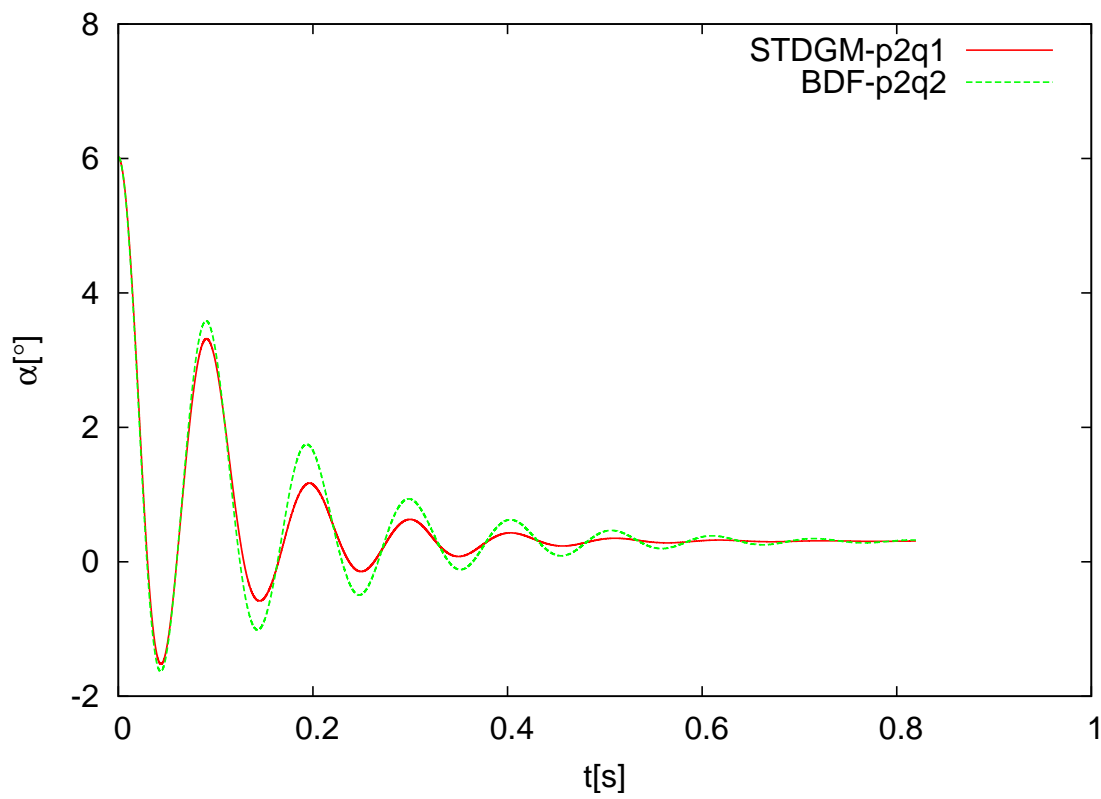
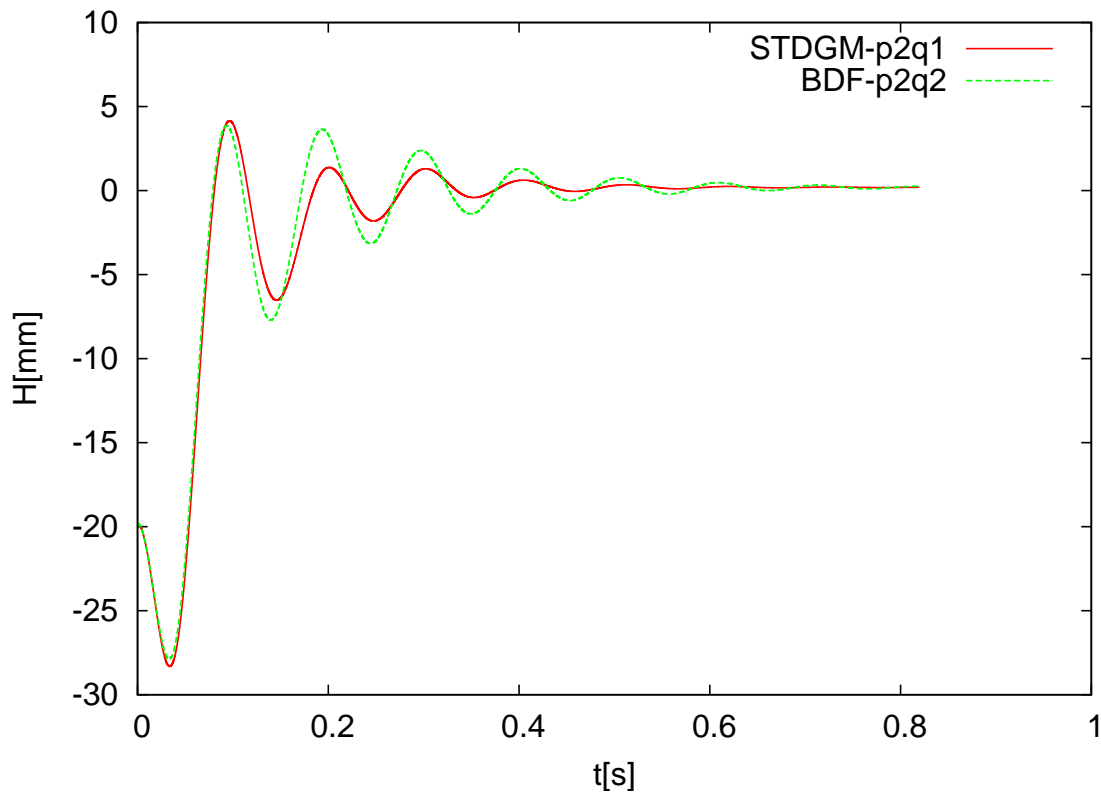
Na závěr této kapitoly uvedeme numerické experimenty pro vysoké náběžné rychlosti. Experiment byl proveden pro stejná data jako v předchozí kapitole kromě tuhosti pružin



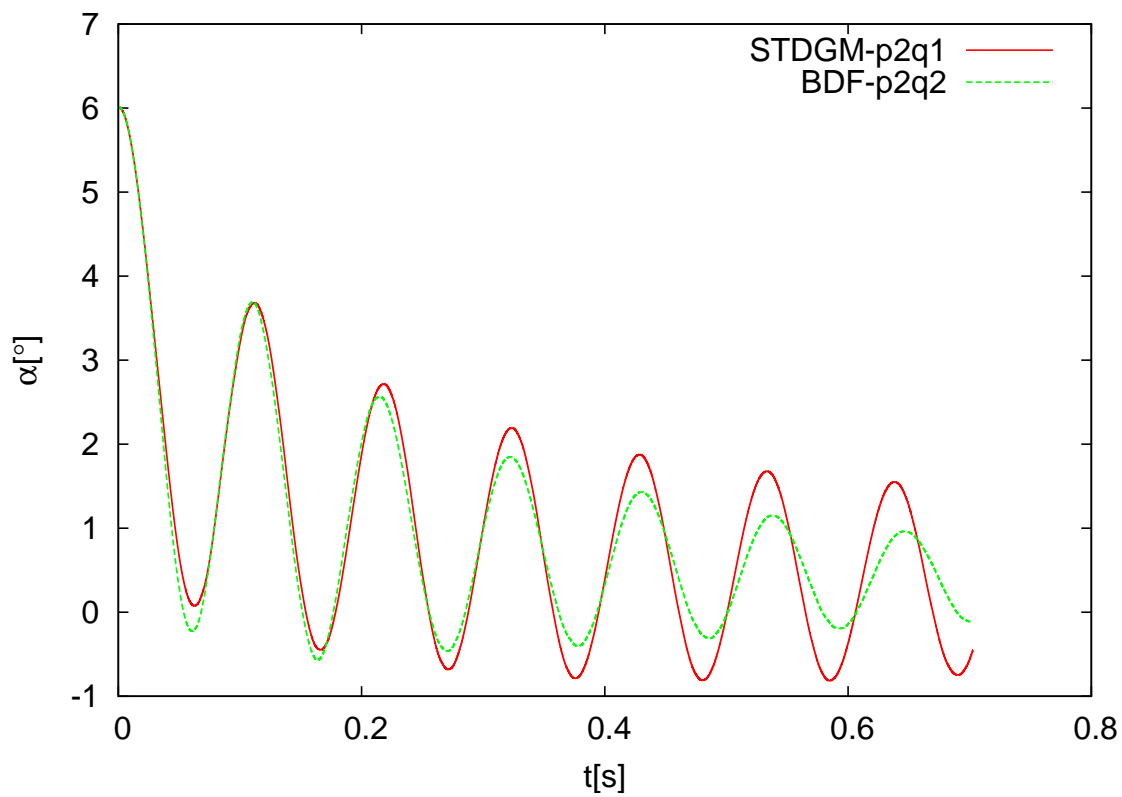
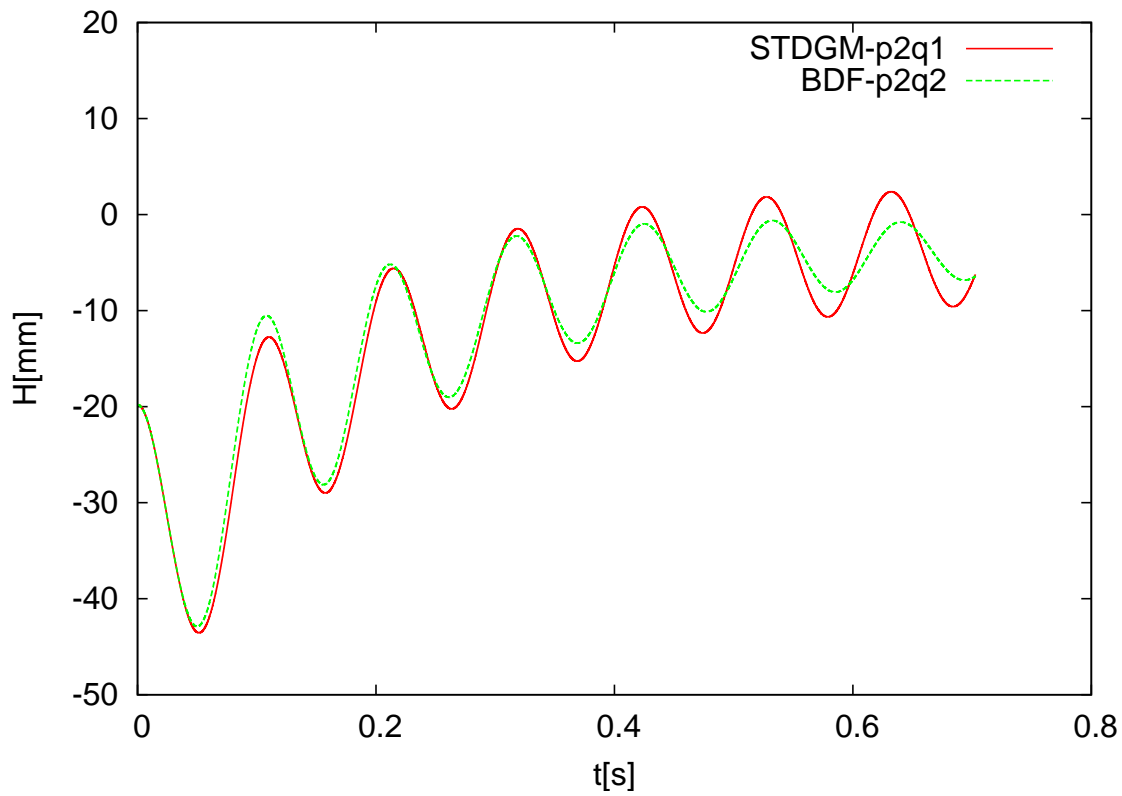
Obrázek 4: Průběh posunutí a úhlu rotace pro náběžnou rychlost 10m/s ($Ma = 0.0294$).



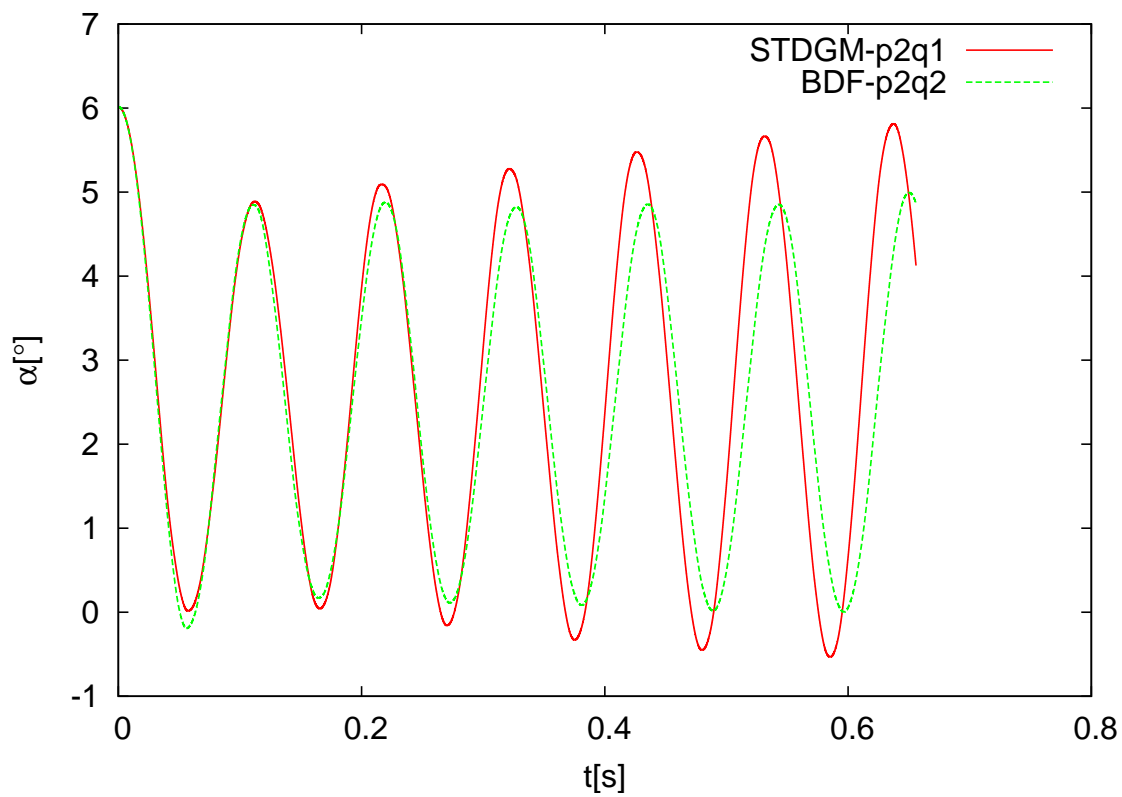
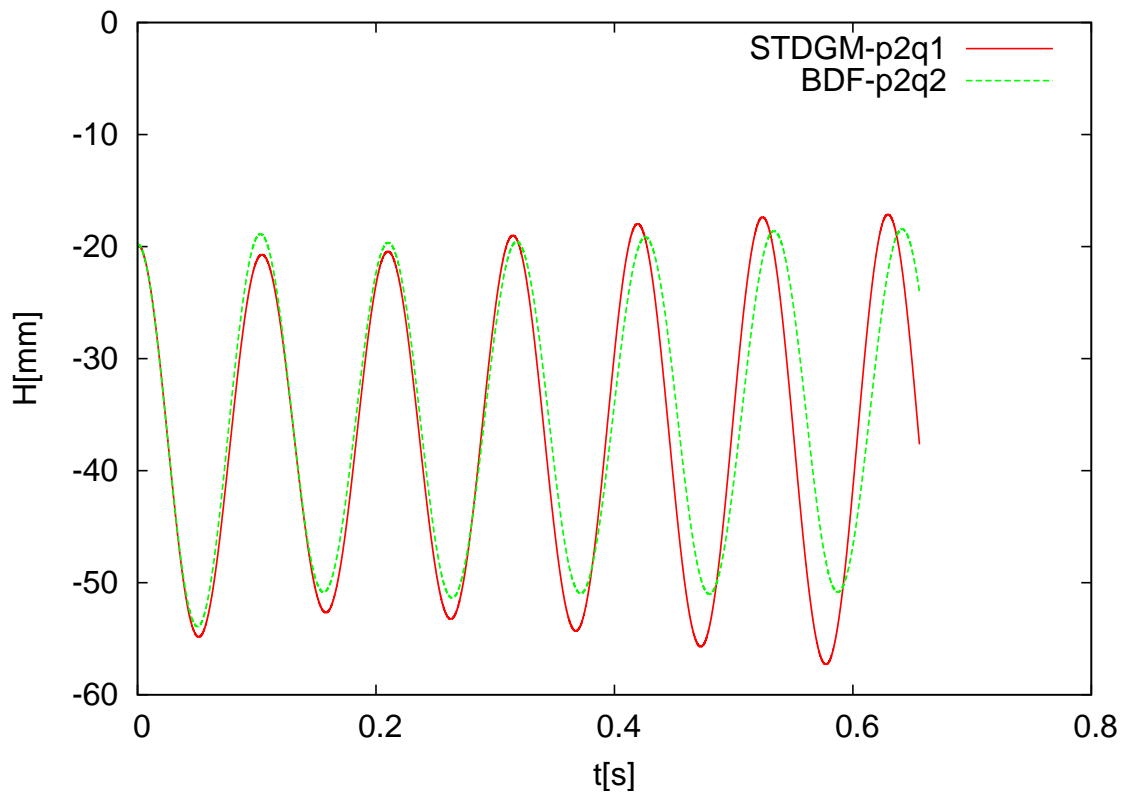
Obrázek 5: Průběh posunutí a úhlu rotace pro náběžnou rychlost 20m/s ($Ma = 0.0588$).



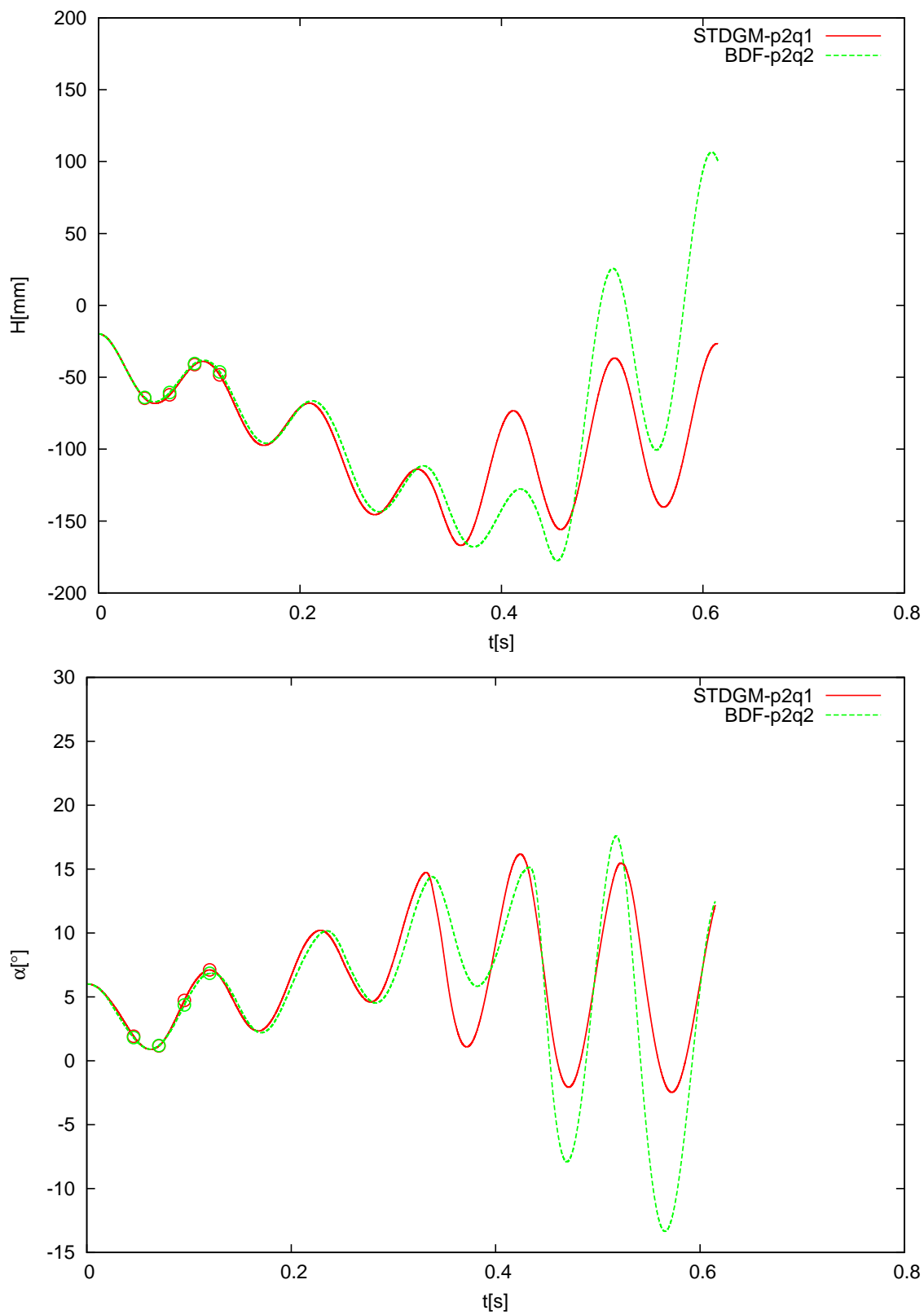
Obrázek 6: Průběh posunutí a úhlu rotace pro náběžnou rychlost 30m/s ($Ma = 0.0882$).



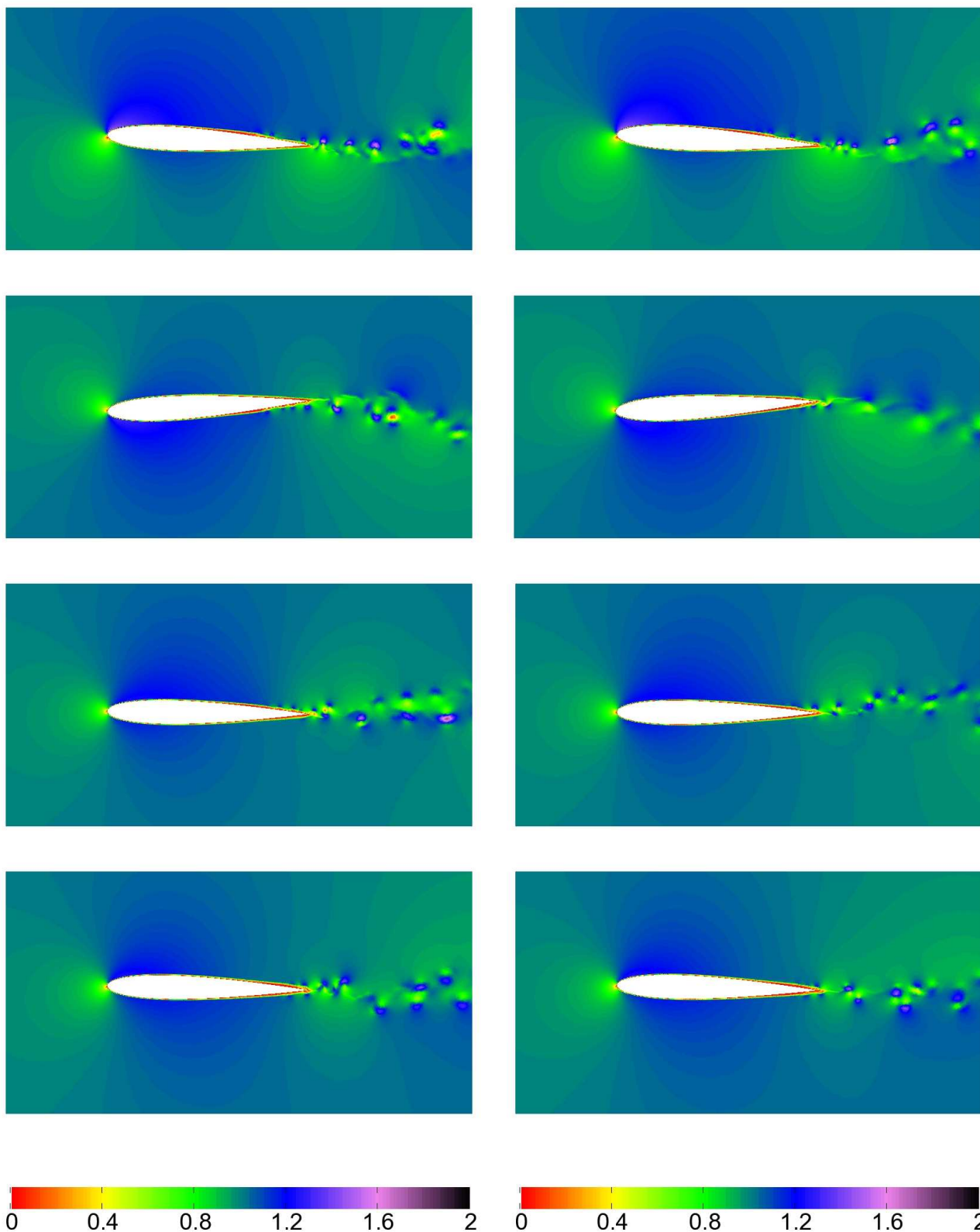
Obrázek 7: Průběh posunutí a úhlu rotace pro náběžnou rychlost 35m/s ($Ma = 0.1029$).



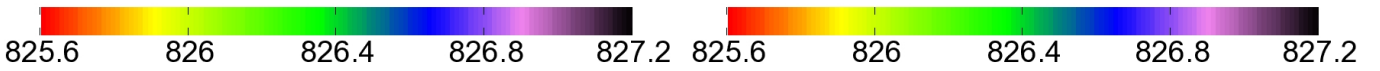
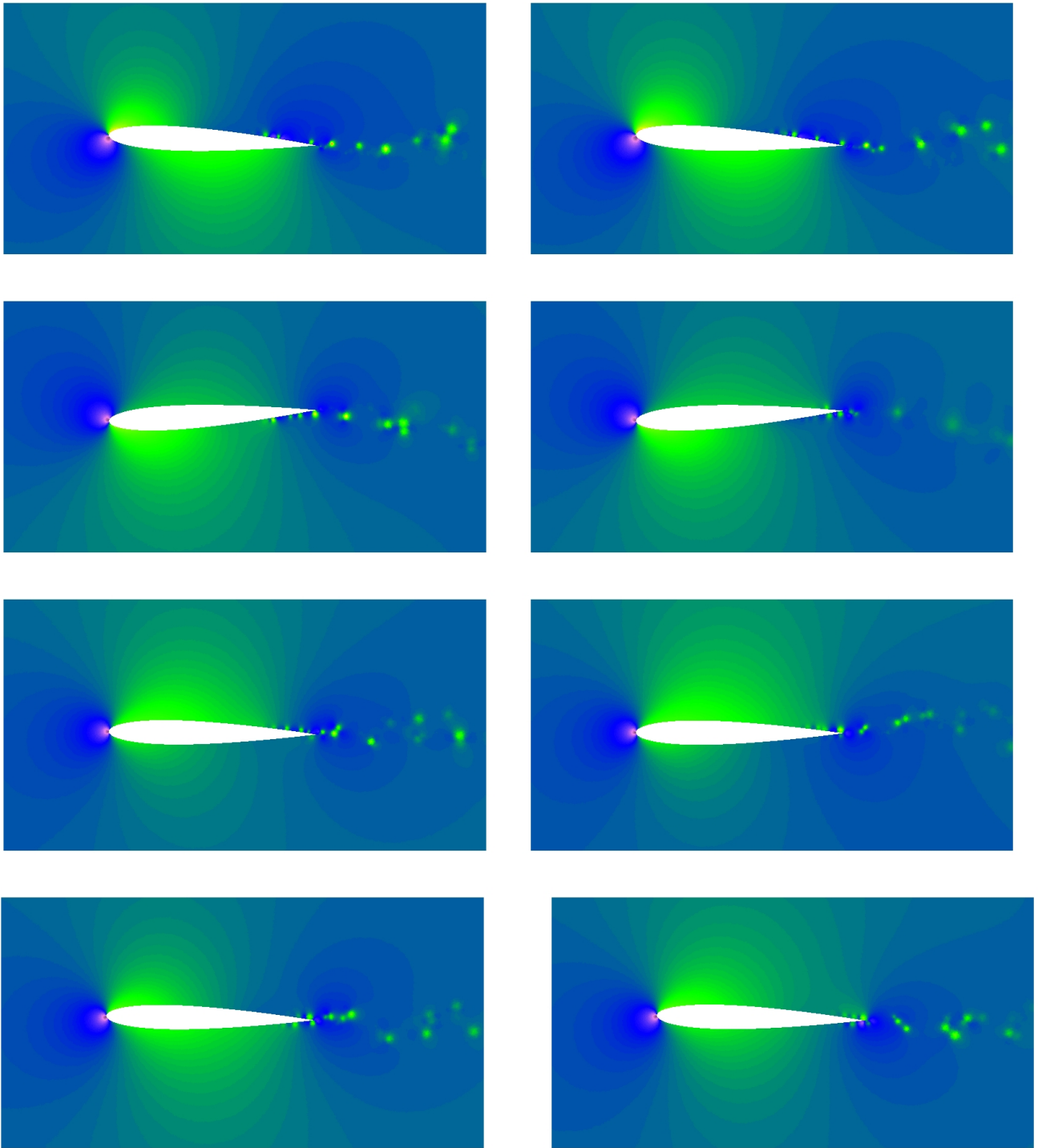
Obrázek 8: Průběh posunutí a úhlu rotace pro náběžnou rychlost 37.5m/s ($Ma = 0.1102$).



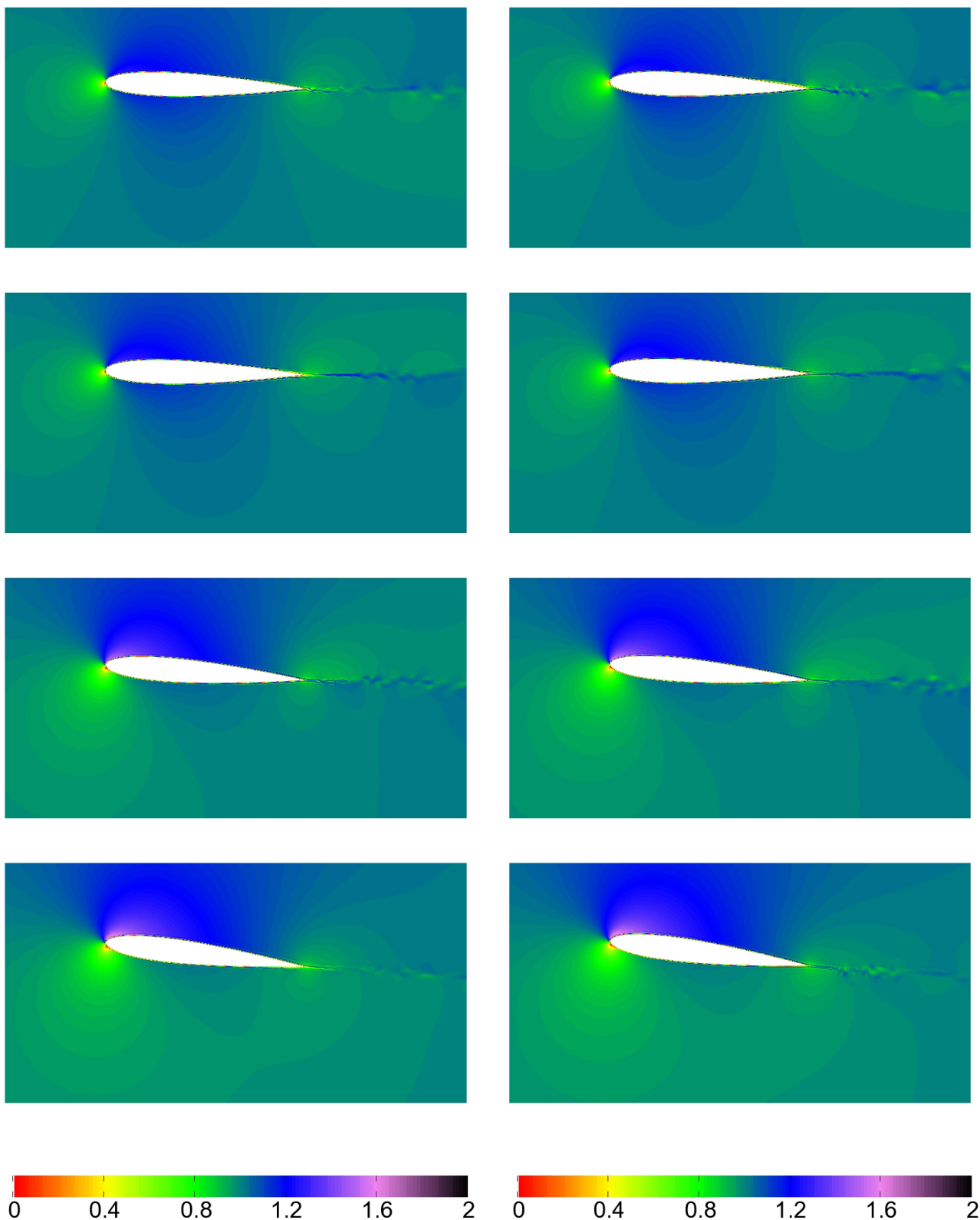
Obrázek 9: Průběh posunutí a úhlu rotace pro náběžnou rychlost 40m/s ($Ma = 0.1176$).



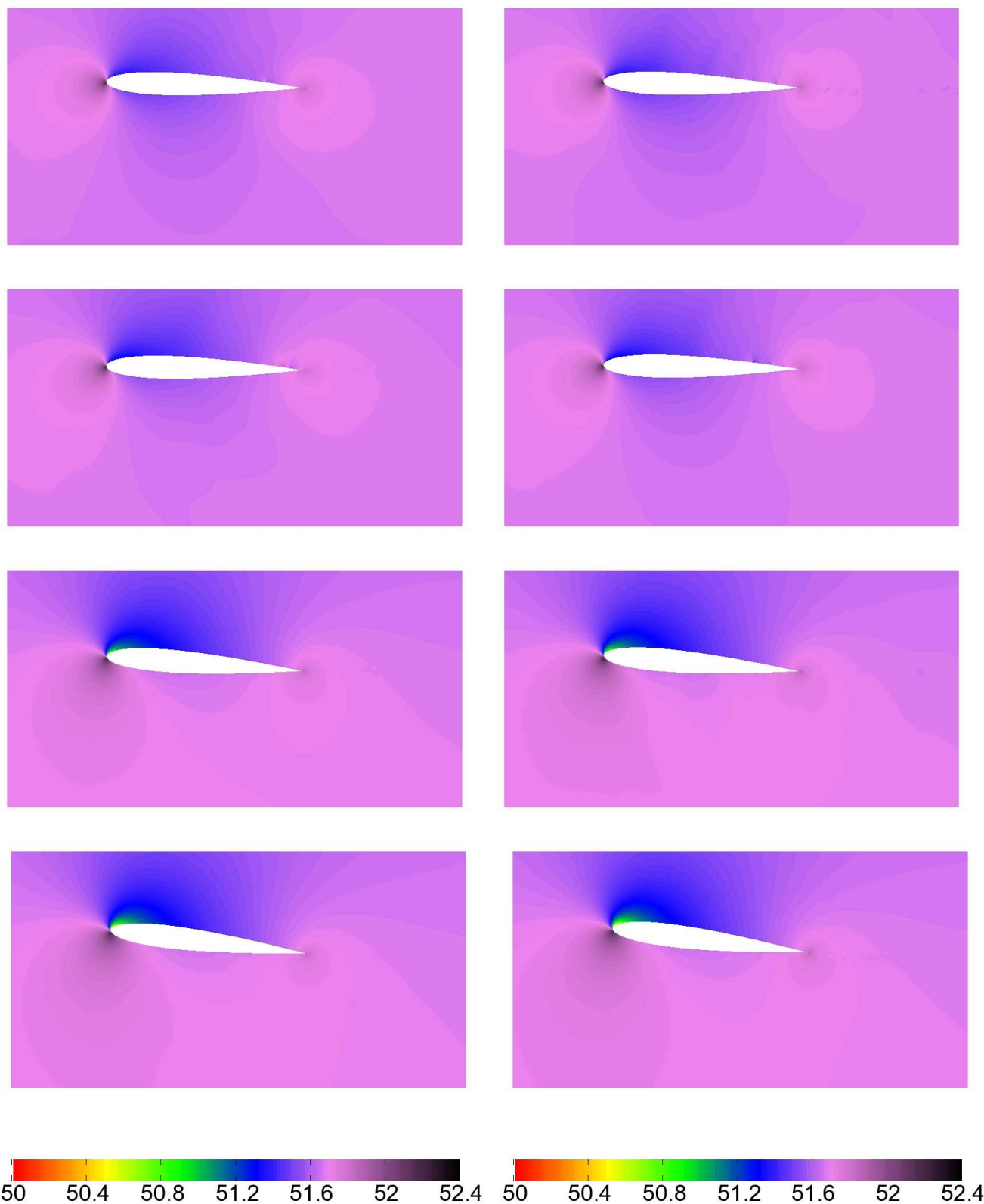
Obrázek 10: Rozložení velikosti rychlosti (v bezrozměrných jednotkách) v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0841s, 0.1831s, 0.2821s, 0.3811s$, které jsou vyznačeny v grafech na obrázku 4, pro náběžnou rychlost $10m/s$. Vlevo pro BDF a vpravo pro STDGM.



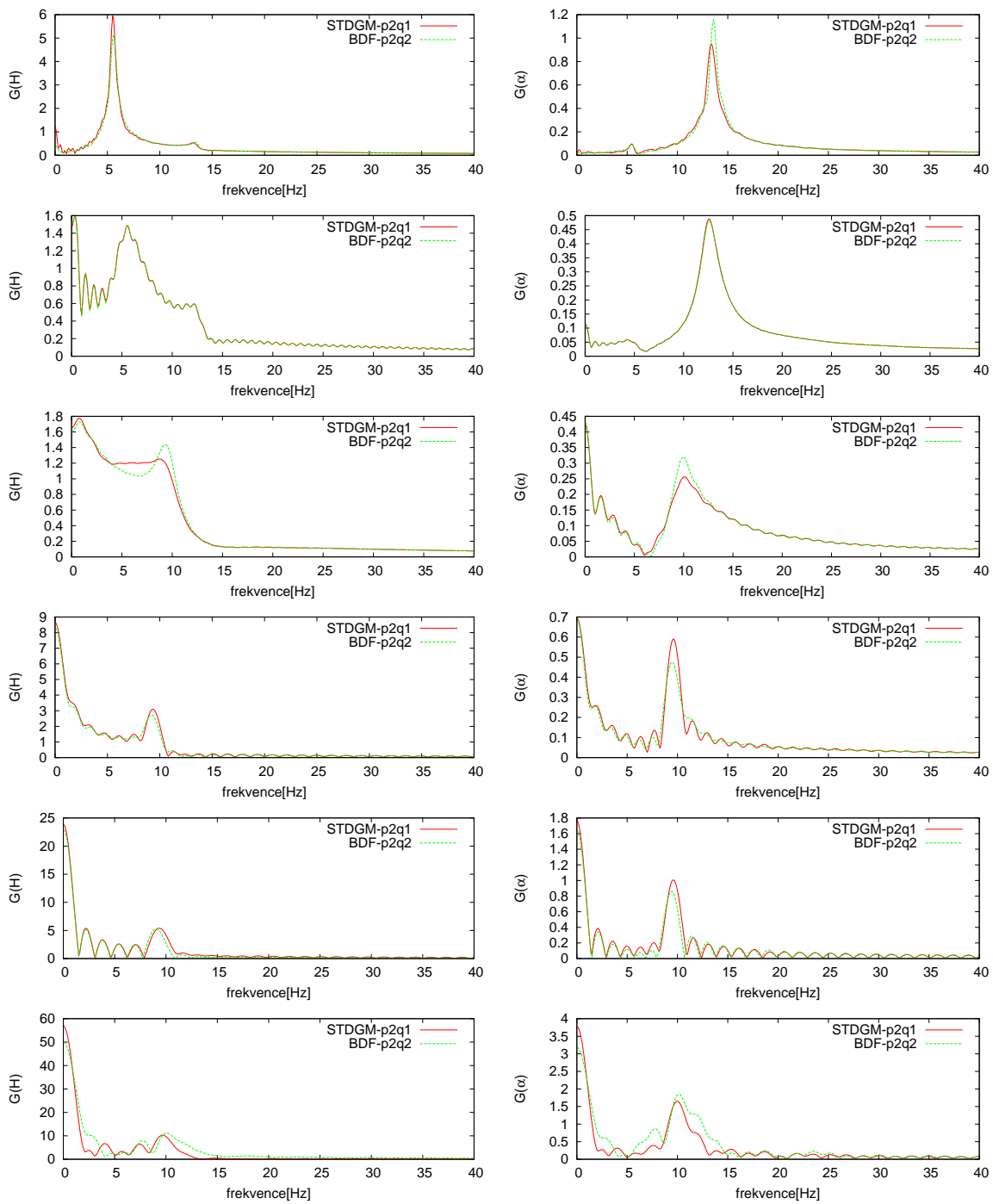
Obrázek 11: Rozložení tlaku (v bezrozměrných jednotkách) v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0841s, 0.1831s, 0.2821s, 0.3811s$, které jsou vyznačeny v grafech na obrázku 4, pro náběžnou rychlost 10m/s. Vlevo pro BDF a vpravo pro STDGM.



Obrázek 12: Rozložení velikosti rychlosti (v bezrozměrných jednotkách) v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0458s, 0.0706s, 0.0954s, 0.1202s$, které jsou vyznačeny v grafech na obrázku 9, pro náběžnou rychlost 40 m/s ($Ma = 0.1176$). Vlevo pro BDF a vpravo pro STDGM.

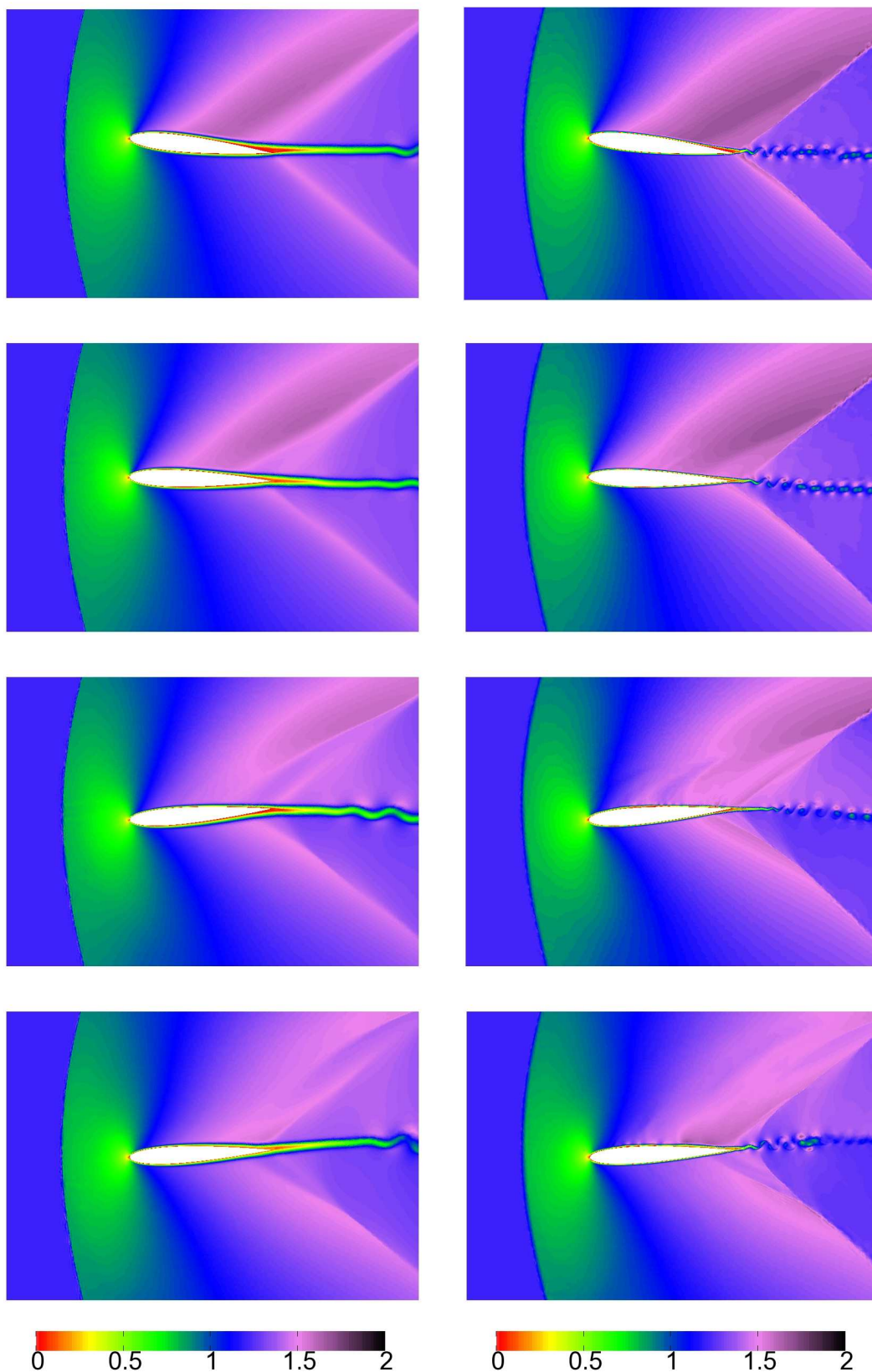


Obrázek 13: Rozložení tlaku (v bezrozměrných jednotkách) v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0458s, 0.0706s, 0.0954s, 0.1202s$, které jsou vyznačeny v grafech na obrázku 9, pro náběžnou rychlost 40 m/s ($Ma = 0.1176$). Vlevo pro BDF a vpravo pro STDGM.

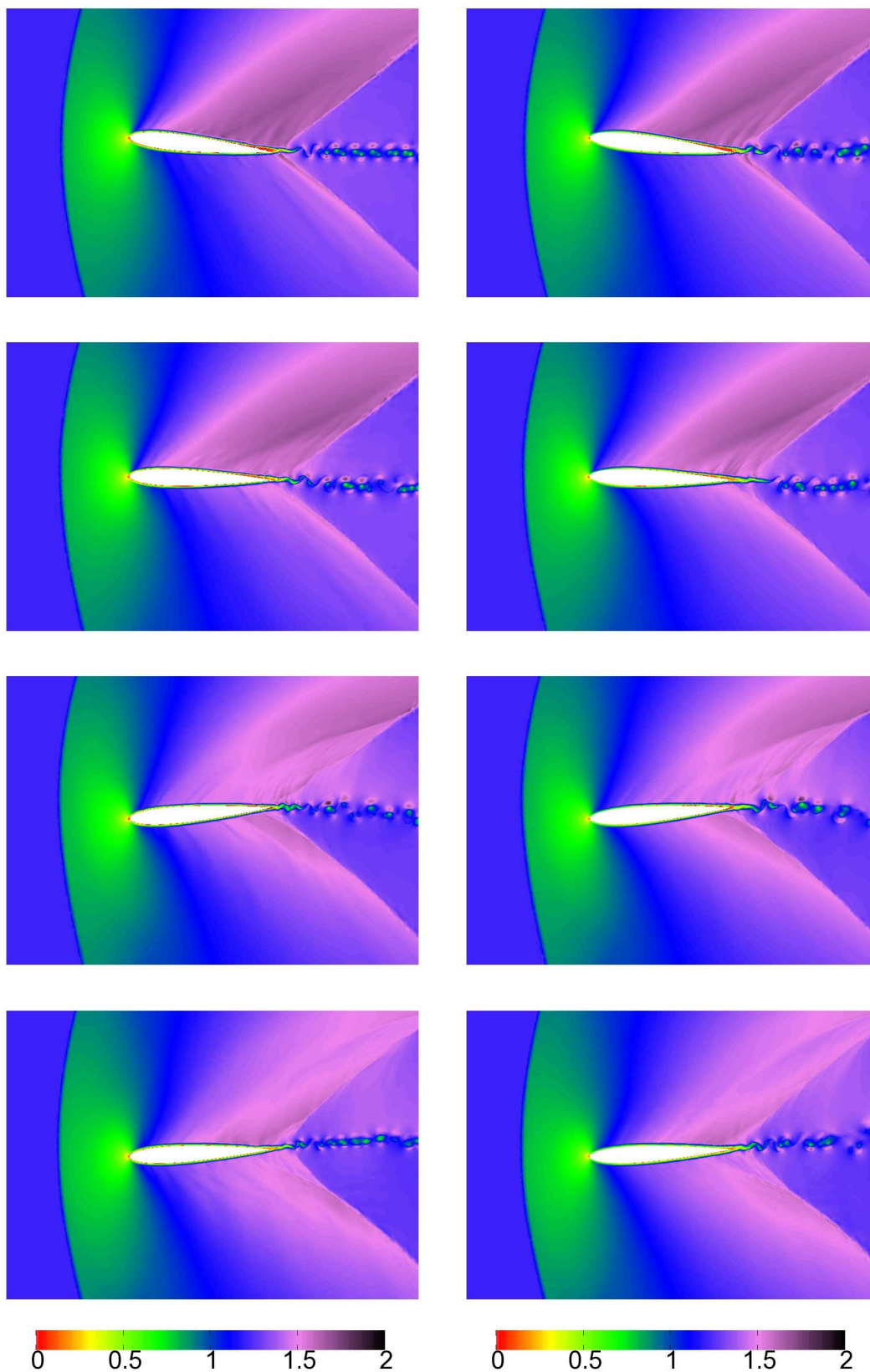


Obrázek 14: Zobrazení frekvenční analýzy pro posunutí a úhel natočení profilu postupně od shora pro náběžné rychlosti 10, 20, 30, 35, 37.5 a 40m/s.

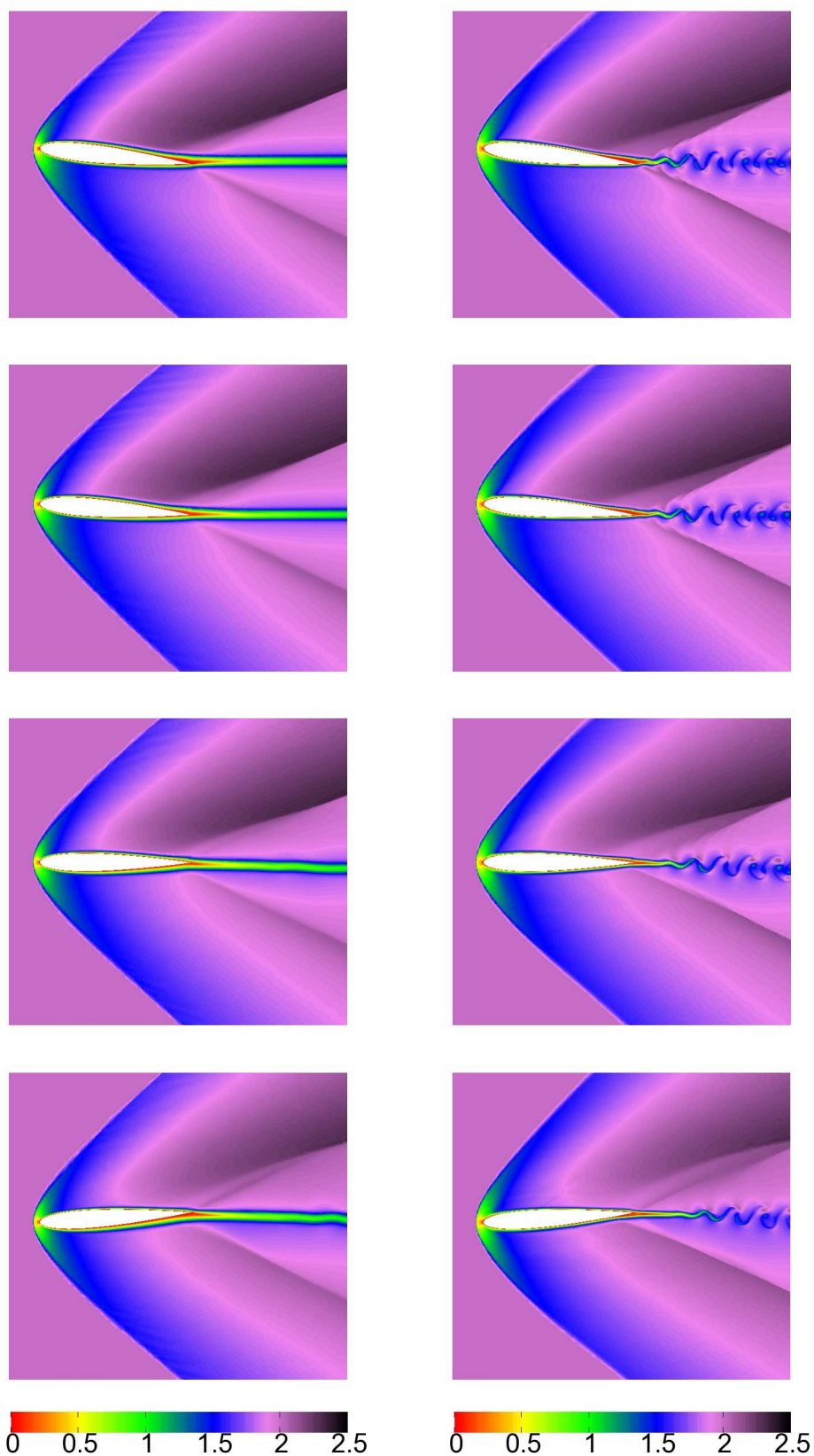
(k_{HH} a $k_{\alpha\alpha}$), které byly zvětšeny tisíc krát. Všechny experimenty byly provedeny pomocí STDGM-p2q1, protože se ukázalo, že tato metoda je stabilnější a lze pomocí ní provést experimenty s Reynoldsovým číslem až 10^7 , zatímco pomocí BDF-p2q2 metody bylo možné provést tyto experimenty s Reynoldsovým číslem okolo 10^4 , což je pro praktické případy málo. Na obrázcích 15 - 19 je vyobrazeno rozložení Machova čísla (Ma), na obrázcích 20 - 23 je pro vybrané experimenty zobrazeno rozložení tlaku, hustoty a teploty. Vidíme zde rázové vlny, mezní vrstvu a úplav s vírovou řadou. Výsledky na obrázcích 15 - 16 resp. 17 - 18 resp. 19 byly vypočteny na triangulaci uvedené na obrázku 28 resp. 29 resp. 30 a výsledné grafy posunutí a úhlu rotace profilu jsou zobrazeny na obrázku 24 resp. 25 resp. 26. Tyto triangulace, adaptivně zjemněné v okolí rázových vln, v mezní vrstvě a úplavu, byly vytvořeny pomocí programu ANGENER (viz [4]).



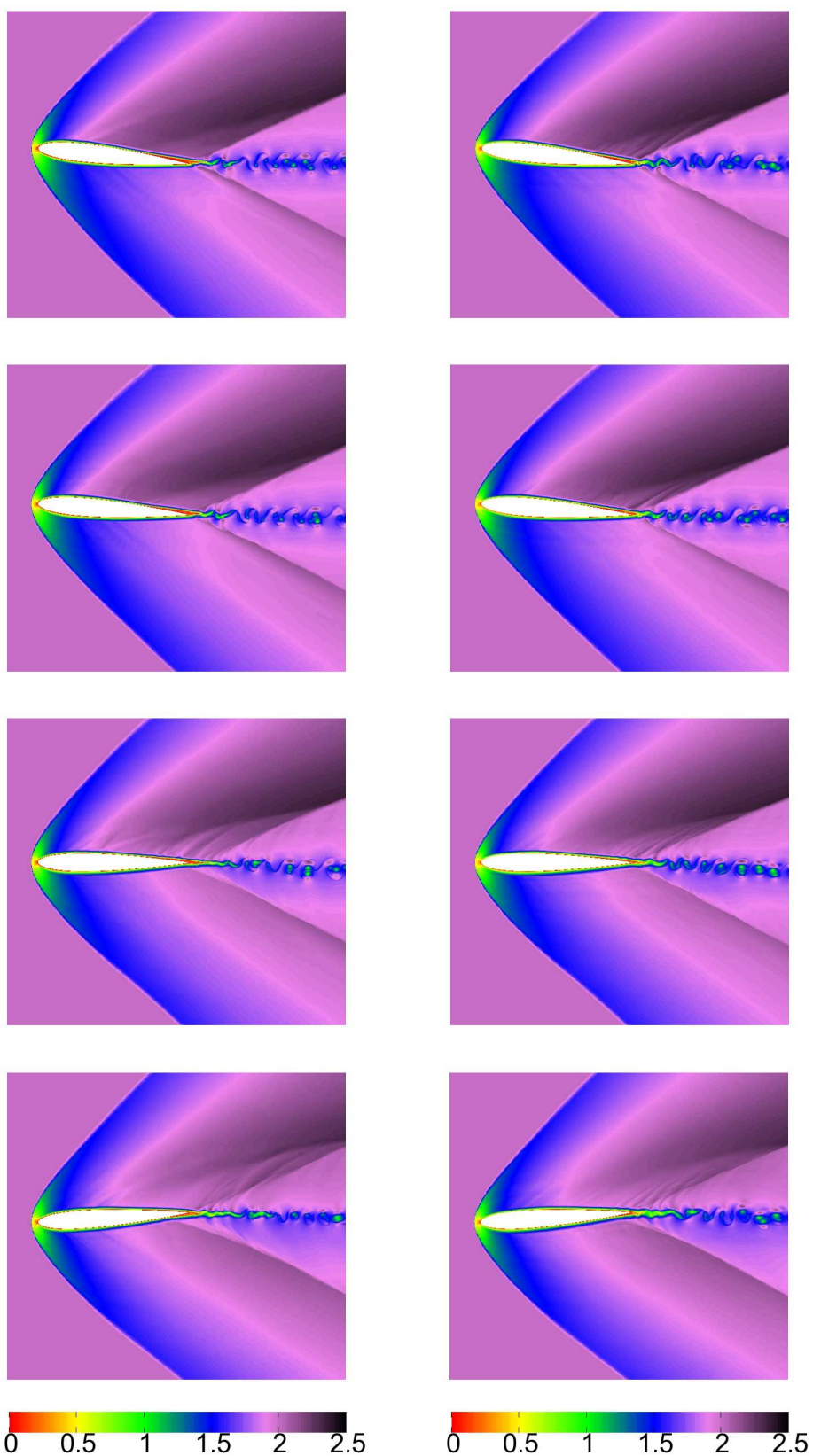
Obrázek 15: Rozložení Machova čísla v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0, 0.00049, 0.00098, 0.00147$, které jsou vyznačeny v grafech na obrázku 24, pro náběžnou rychlost 408 m/s ($Ma = 1.2$). Vlevo pro $Re = 10^4$ a vpravo pro $Re = 10^5$.



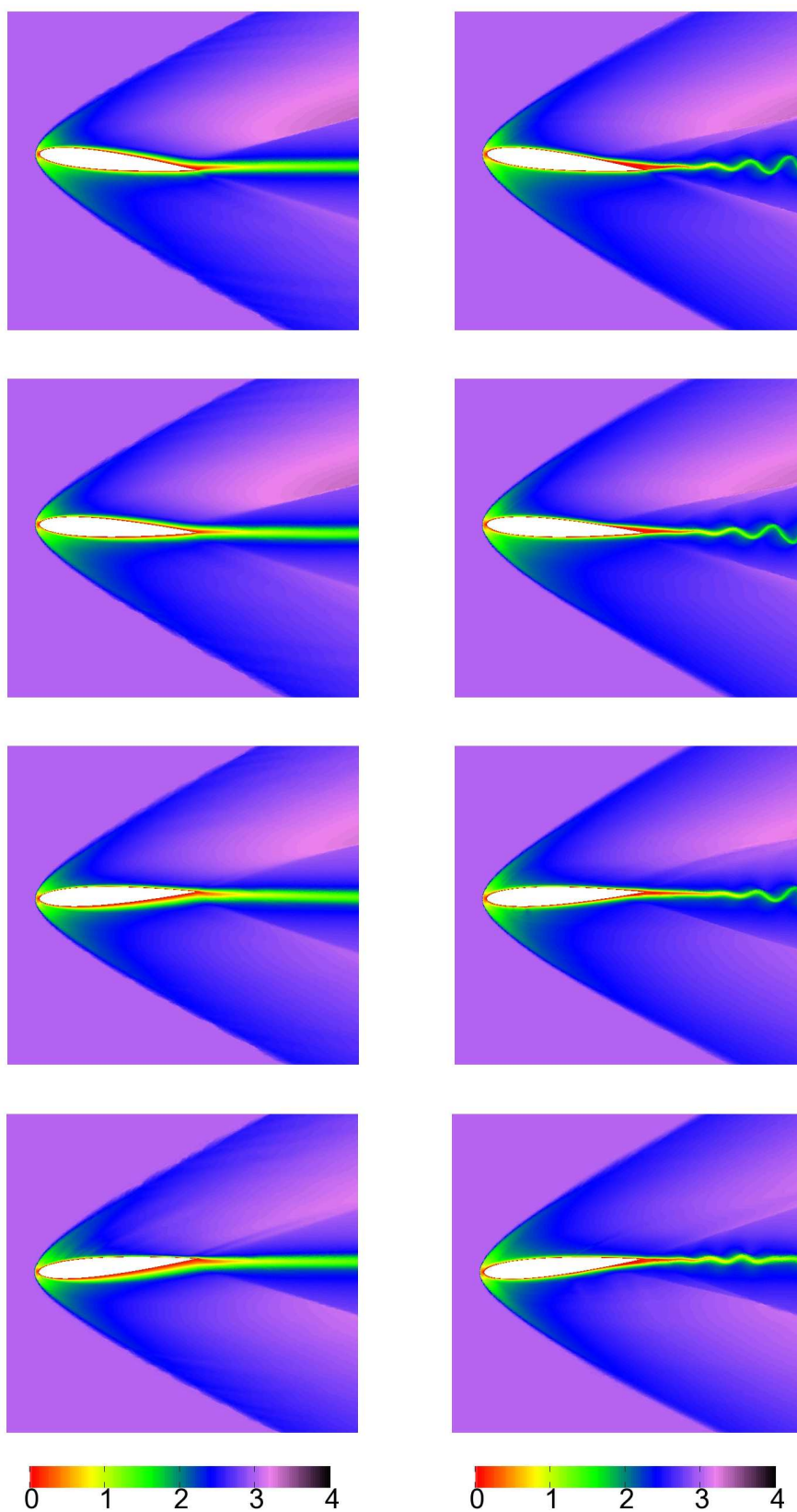
Obrázek 16: Rozložení Machova čísla v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0s, 0.00049s, 0.00098s, 0.00147s$, které jsou vyznačeny v grafech na obrázku 24, pro náběžnou rychlost 408 m/s ($Ma = 1.2$). Vlevo pro $Re = 10^6$ a vpravo pro $Re = 10^7$.



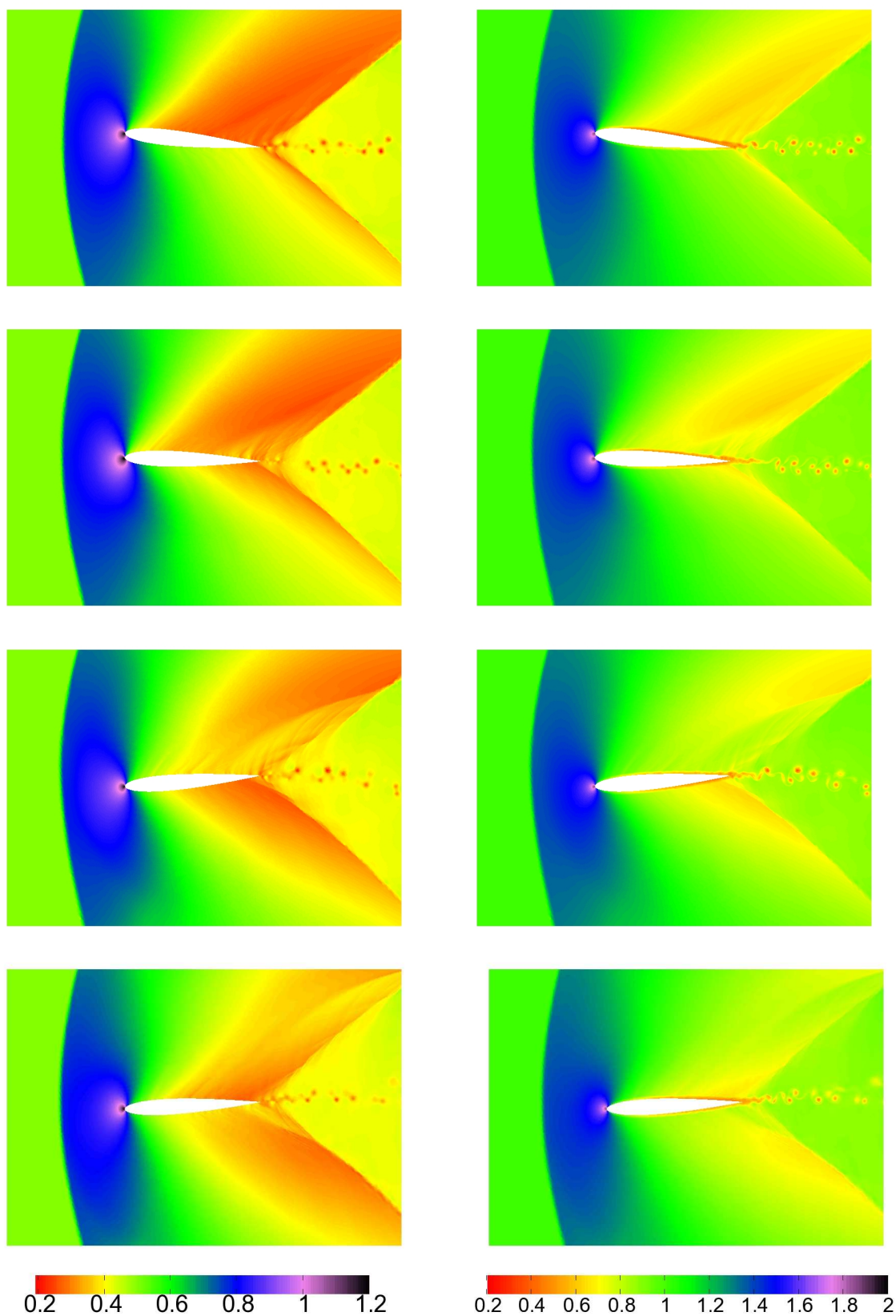
Obrázek 17: Rozložení Machova čísla v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0s, 0.00029s, 0.00058s, 0.00087s$, které jsou vyznačeny v grafech na obrázku 25, pro náběžnou rychlost 680 m/s ($Ma = 2.0$). Vlevo pro $Re = 10^4$ a vpravo pro $Re = 10^5$.



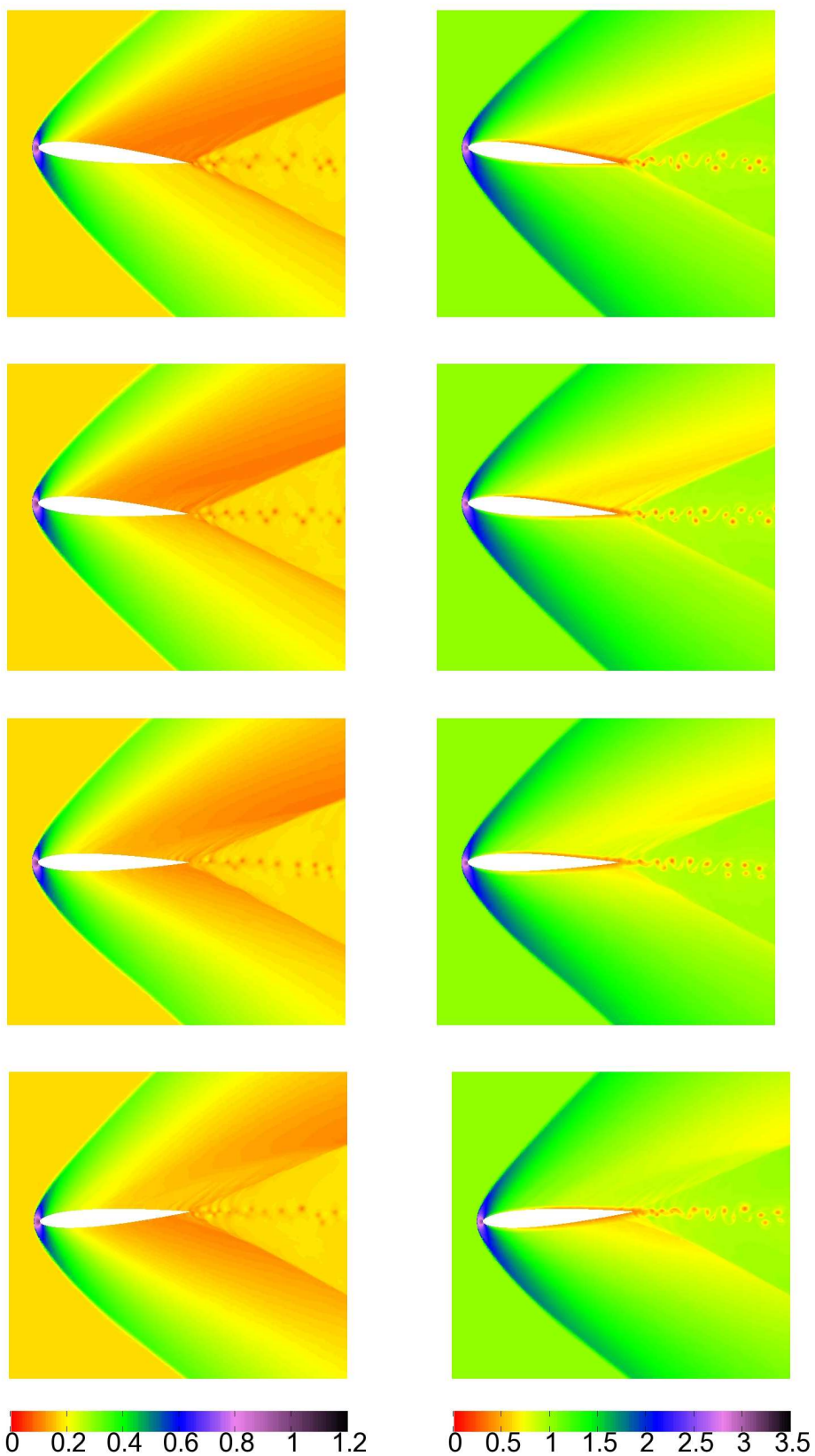
Obrázek 18: Rozložení Machova čísla v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0s, 0.00029s, 0.00058s, 0.00087s$, které jsou vyznačeny v grafech na obrázku 25, pro náběžnou rychlost 680 m/s ($\text{Ma} = 2.0$). Vlevo pro $\text{Re} = 10^6$ a vpravo pro $\text{Re} = 10^7$.



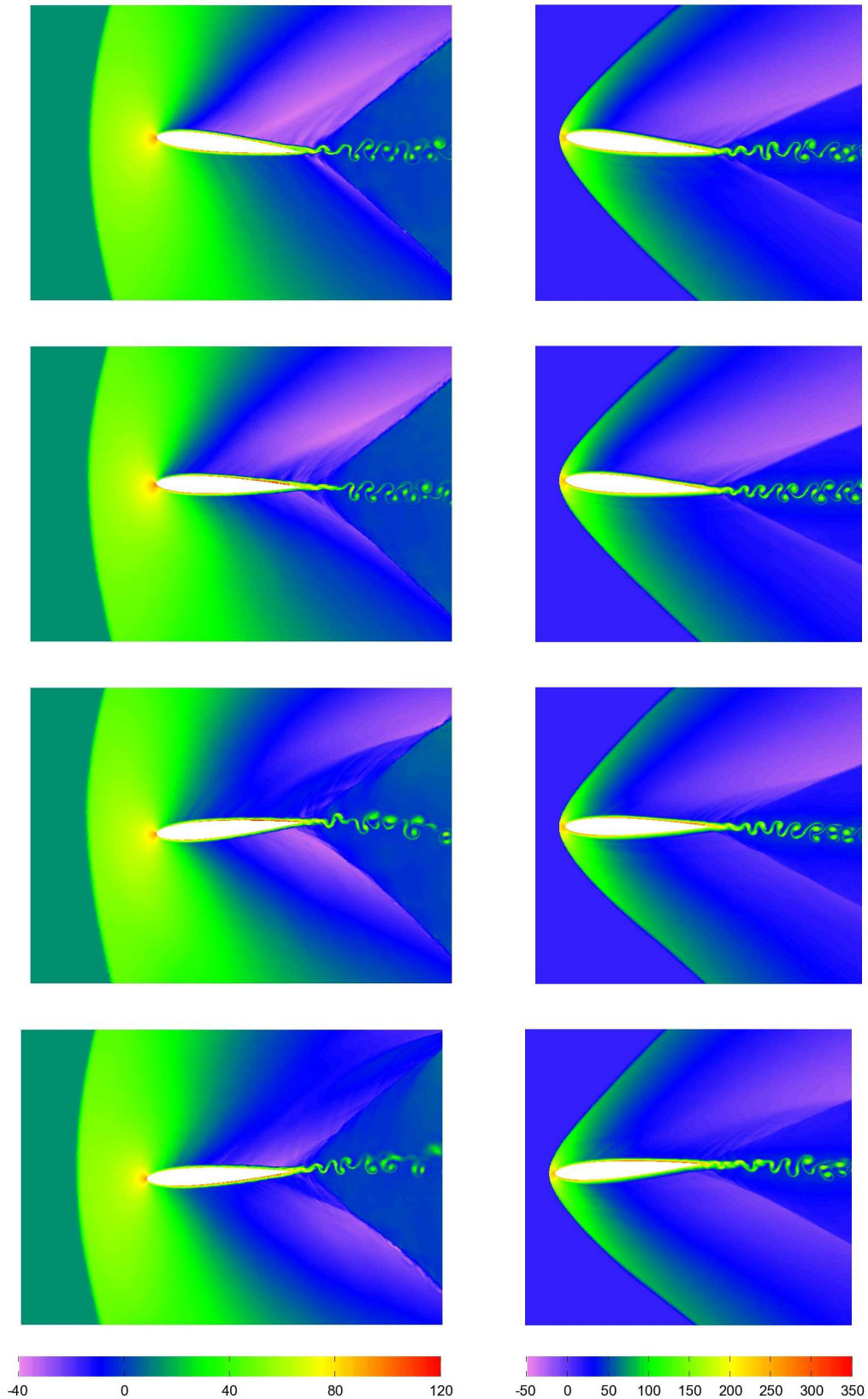
Obrázek 19: Rozložení Machova čísla v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0s, 0.00039s, 0.00078s, 0.00117s$, které jsou vyznačeny v grafech na obrázku 26, pro náběžnou rychlost 1020 m/s ($\text{Ma} = 3.0$). Vlevo pro $\text{Re} = 10^4$ a vpravo pro $\text{Re} = 10^5$.



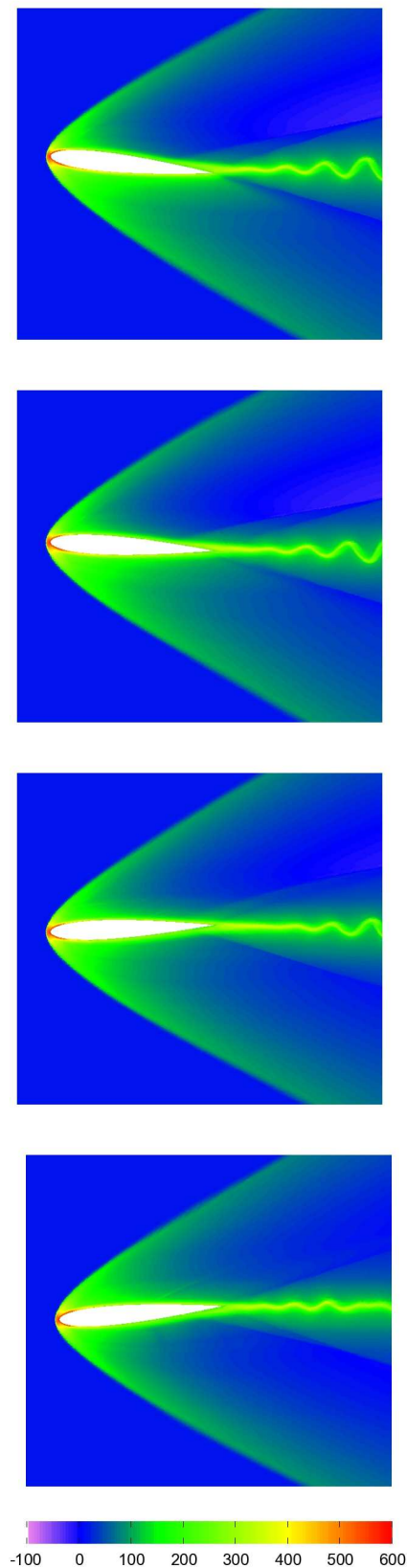
Obrázek 20: Rozložení tlaku (vlevo v bezrozměrných jednotkách) a hustoty (vpravo v bezrozměrných jednotkách) v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0s, 0.00049s, 0.00098s, 0.00147s$, které jsou vyznačeny v grafech na obrázku 24, pro náběžnou rychlost 408 m/s ($Ma = 1.2$) a pro $Re = 10^7$.



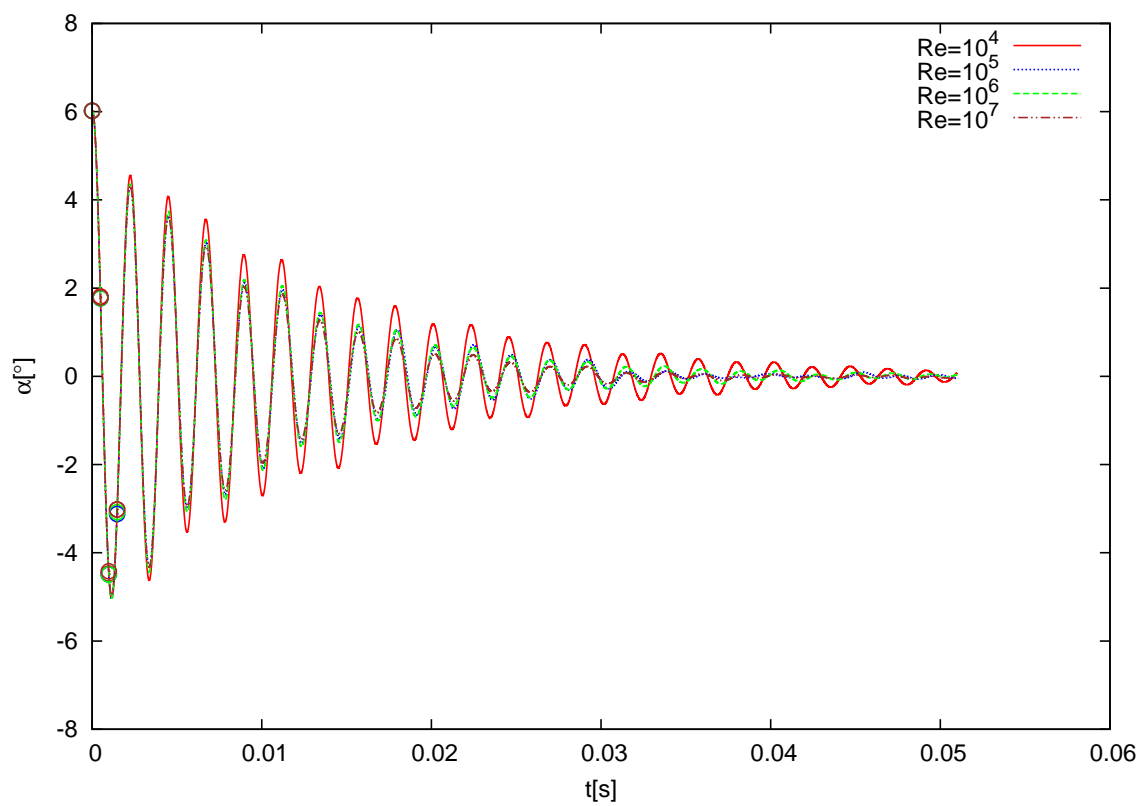
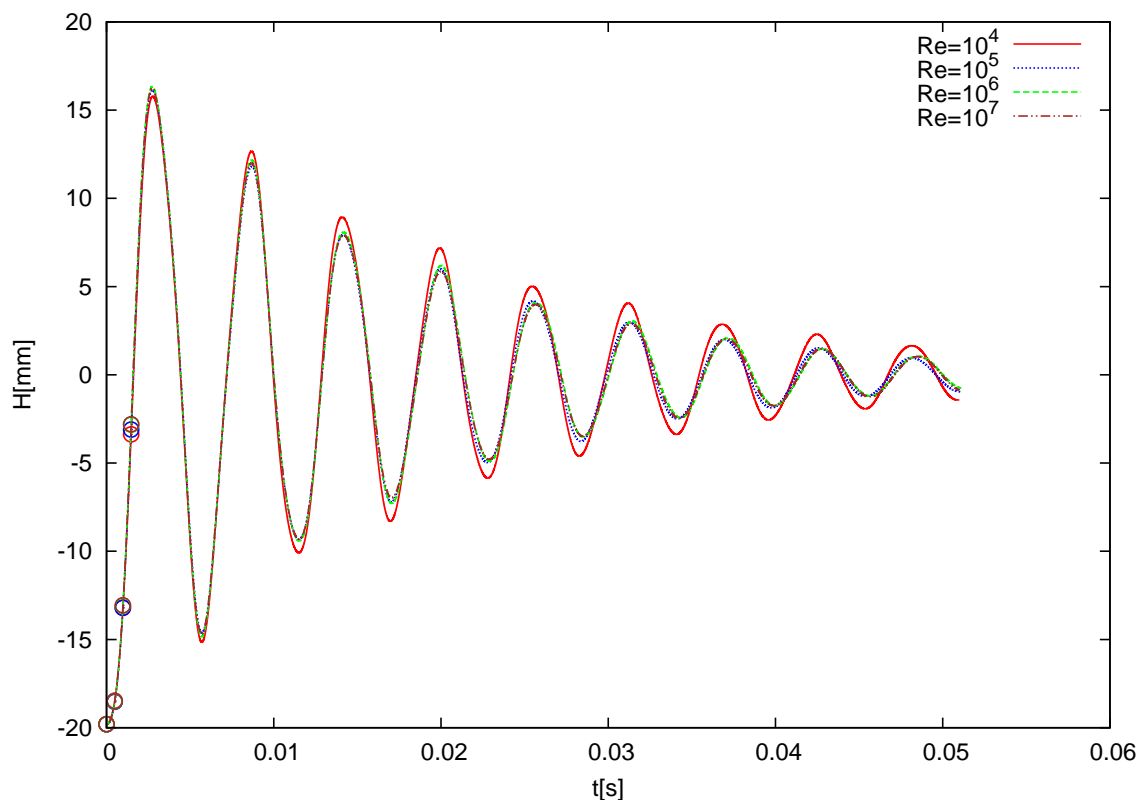
Obrázek 21: Rozložení tlaku (vlevo v bezrozměrných jednotkách) a hustoty (vpravo v bezrozměrných jednotkách) v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0s, 0.00029s, 0.00058s, 0.00087s$, které jsou vyznačeny v grafech na obrázku 25, pro náběžnou rychlost 680 m/s ($Ma = 2.0$) a pro $Re = 10^7$.



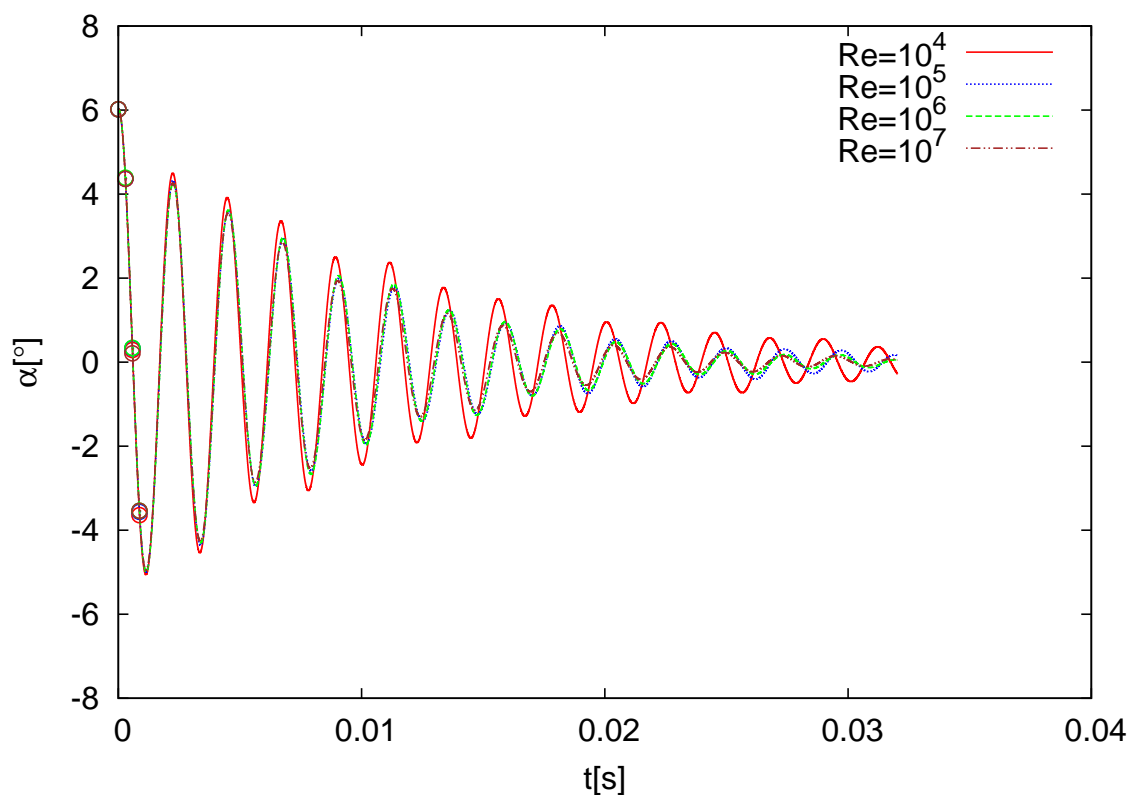
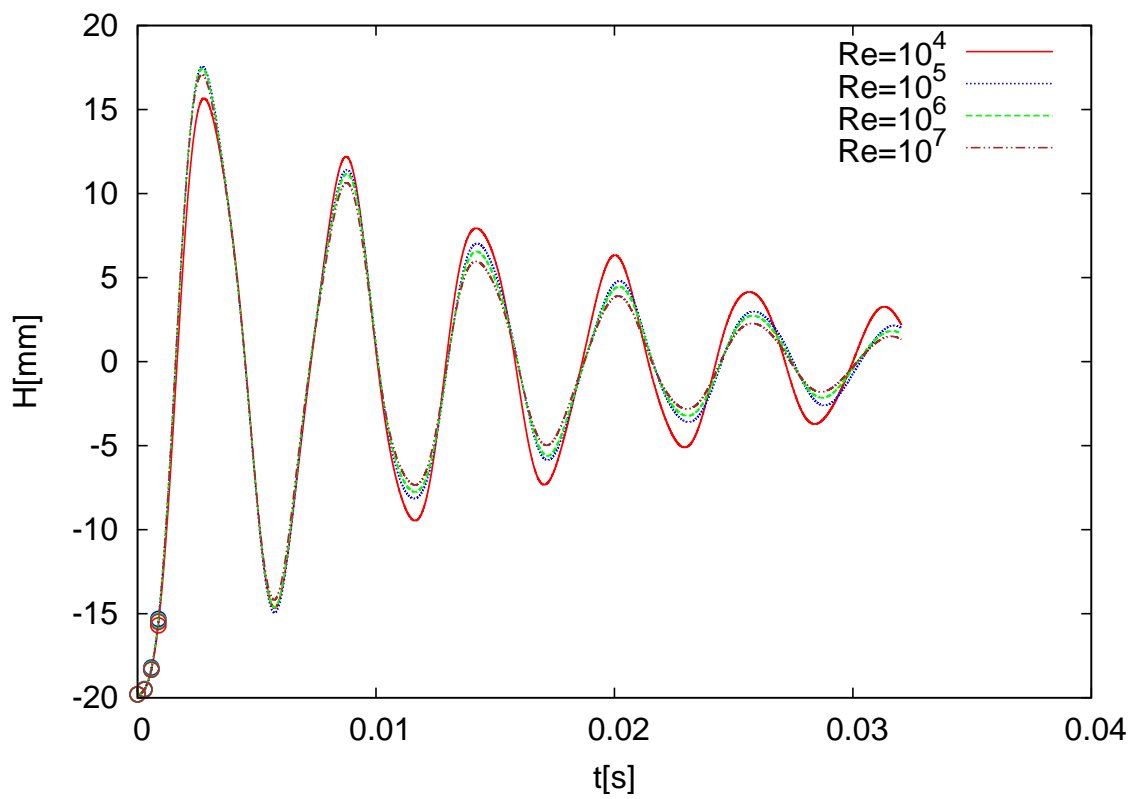
Obrázek 22: Rozložení teploty ve stupních Celsia. Vlevo pro $Re = 10^7$ a náběžnou rychlost 408 m/s ($Ma = 1.2$) v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0s, 0.00049s, 0.00098s, 0.00147s$, které jsou zobrazeny v grafech na obrázku 24. Vpravo pro $Re = 10^7$ a náběžnou rychlost 680 m/s ($Ma = 2.0$) v různých časových okamžicích postupně od shora v $t = 0.0s, 0.00029s, 0.00058s, 0.00087s$, které jsou zobrazeny v grafech na obrázku 25.



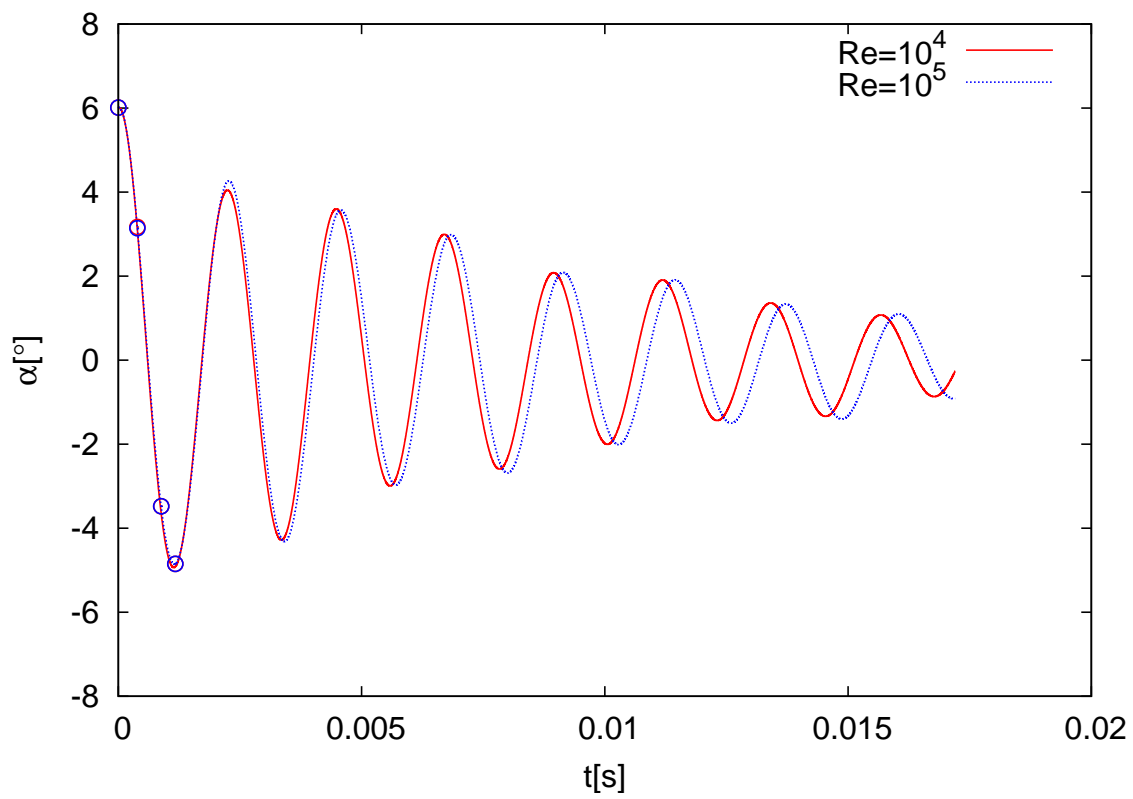
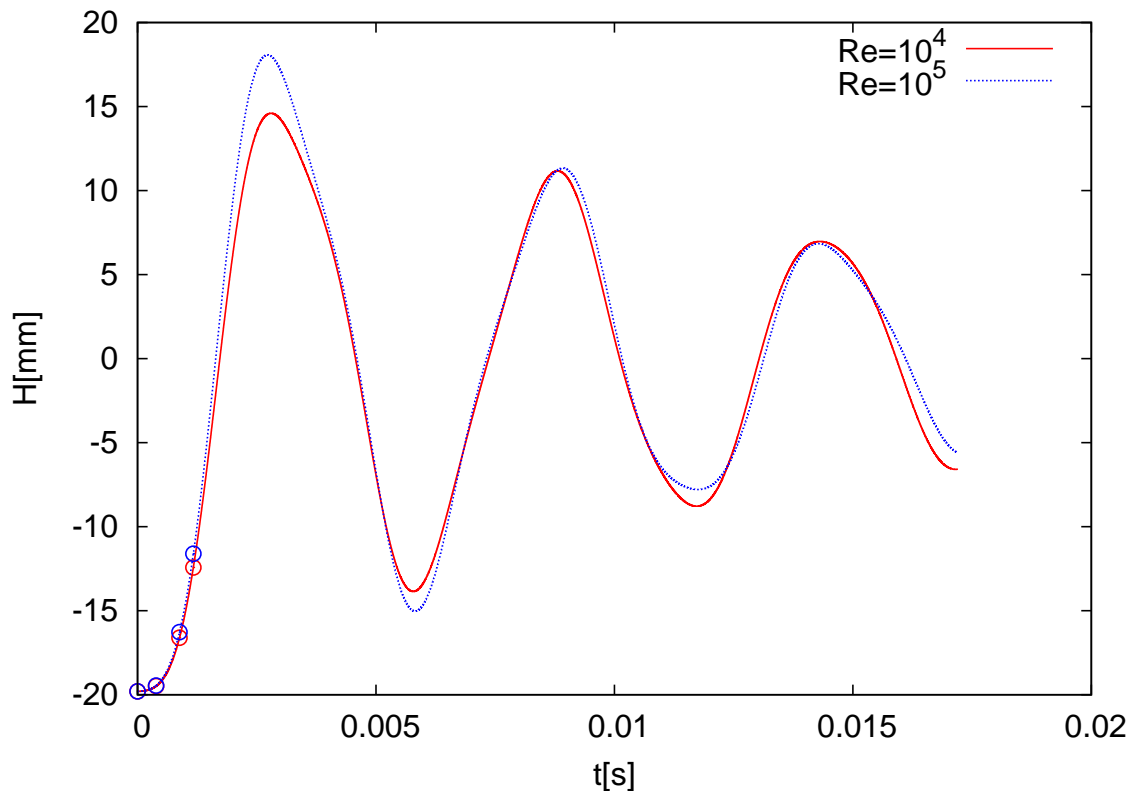
Obrázek 23: Rozložení teploty ve stupních Celsia pro $Re = 10^5$ a náběžnou rychlost 1020 m/s ($Ma = 3.0$) v různých časových okamžicích (v sekundách) postupně od shora v $t = 0.0s, 0.00039s, 0.00078s, 0.00117s$, které jsou zobrazeny v grafech na obrázku 26.



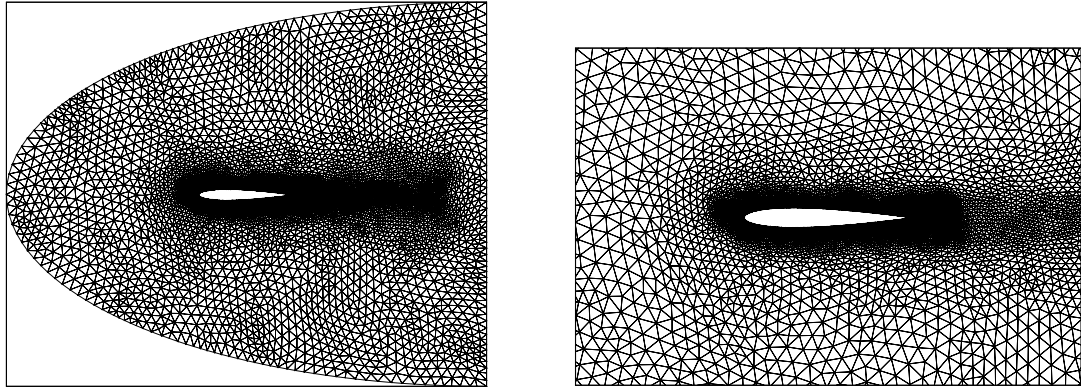
Obrázek 24: Průběh posunutí a úhlu rotace pro náběžnou rychlost 408m/s ($Ma = 1.2$).



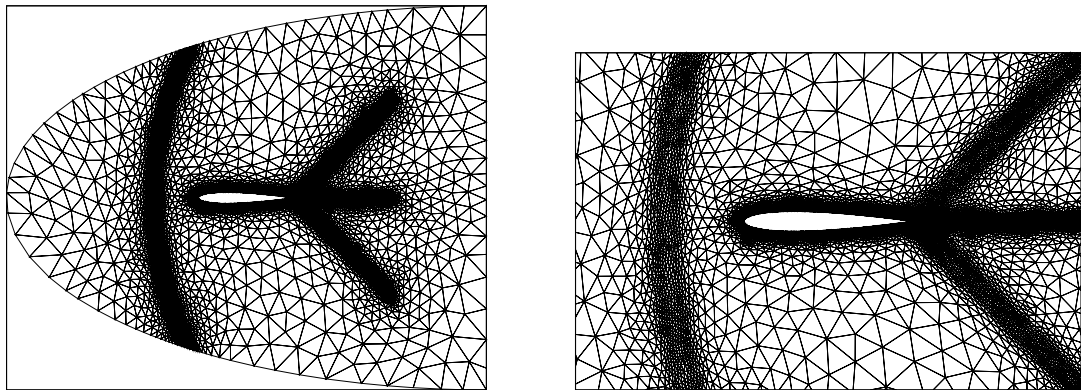
Obrázek 25: Průběh posunutí a úhlu rotace pro náběžnou rychlost 680m/s ($Ma = 2.0$).



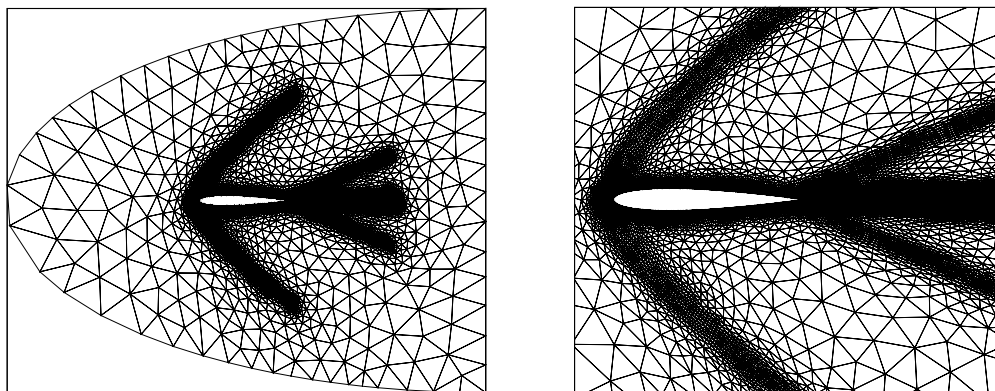
Obrázek 26: Průběh posunutí a úhlu rotace pro náběžnou rychlost 1020m/s ($Ma = 3.0$).



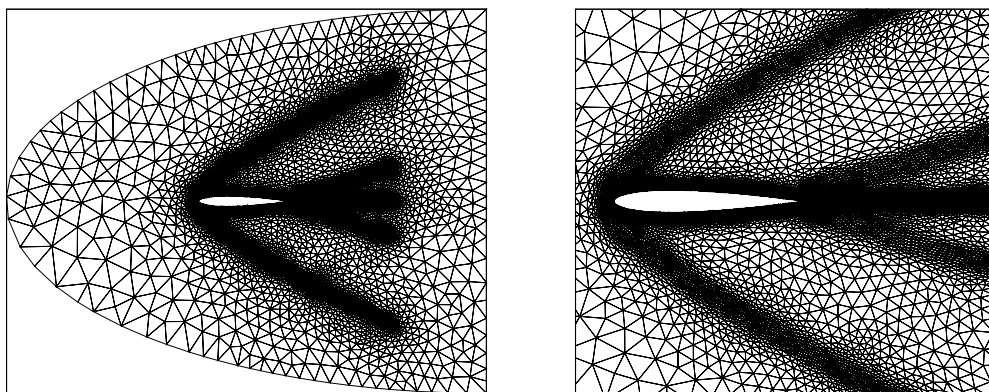
Obrázek 27: Triangulace č.1 s počtem 17158 elementů.



Obrázek 28: Triangulace č.2 s počtem 18162 elementů.



Obrázek 29: Triangulace č.3 s počtem 45856 elementů.



Obrázek 30: Triangulace č.4 s počtem 42821 elementů.

11 Závěr

V této práci jsme se nejprve věnovali formulaci a teoretické analýze úplné časoprostorové nespojitě Galerkinově metodě (STDGM) pro skalární konvektivně difuzní rovnici s nelineární konvekcí a nelineární difuzí. Pro tuto metodu byl odvozen odhad chyby v $L^2(H^1)$ – a $L^2(L^2)$ – normě. Nicméně odhad chyby pro $L^2(L^2)$ – normu je suboptimální. Další cíl práce v této oblasti je odvození optimálního odhadu i pro $L^2(L^2)$ – normu.

V další části práce jsme se věnovali numerické simulaci interakce stlačitelné vazké tekutiny a vibrujícího profilu se dvěma stupni volnosti. Proudění tekutiny bylo popsáno pomocí Navierových-Stokesových rovnic formulovaných za pomoci ALE metody pro časově závislé oblasti. Vibrace profilu byly popsány pomocí systému obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž řešení určovalo posunutí H ve vertikálním směru a úhel natočení α profilu. Pro numerické řešení proudění tekutiny zde byly použity dvě metody, a to semiimplicitní nespojitá Galerkinova metoda (tzv. BDF) a také STDGM. Pro obě metody byl popsán postup algoritmizace. Systém obyčejných diferenciálních rovnic popisující pohyb profilu byl zde řešen pomocí Runge-Kuttovy metody 2.řádu. Pro řešení velkých řídkých soustav rovnic byla použita metoda GMRES s blokově diagonálním předpominěním.

Popsané metody byly naprogramovány v jazyce C a za pomoci OpenMP byl tento program paralelizován pro zrychlení výpočtů.

V závěrečné kapitole byly obě popsané metody použity pro řešení reálných případů. Z výsledků numerických experimentů bylo patrné, že jsme dosáhli dobré shody s programem NASTRAN, pomocí kterého lze určit kritickou náběžnou rychlost, a také s výsledky z článku [24], kde je řešen stejný problém pomocí modelu nestlačitelného vazkého proudění a konformních konečných prvků. Z výsledků je zřejmé, že stlačitelnost má malý vliv na proudění s nízkou náběžnou rychlostí proudu. Dále byly provedeny numerické simulace interakce pro vysoké náběžné rychlosti. Zde se ukázalo, že stlačitelnost má již výraznější vliv na řešení, a tedy použití nestlačitelného modelu je již nevhodné. Na těchto příkladech byla ukázána robustnost obou metod, a to zejména STDGM, kdy byla simulována interakce pro náběžnou rychlost $680m/s$ ($Ma = 2.0$) pro $Re=10^7$ a také pro náběžnou rychlost $1020m/s$ ($Ma = 3.0$) pro $Re=10^5$. Pro vyšší náběžné rychlosti byla již STDGM nestabilní. Cílem další práce bude zlepšení modelu, aby bylo možné simulovat problémy pro vyšší náběžné rychlosti. Týká se to hlavně zahrnutí turbulentního modelu. Z hlediska programování by bylo dobré zabývat se hybridní paralelizací za pomoci OpenMP a MPI.

Reference

- [1] G. Akrivis and C. Makridakis, Galerkin time-stepping methods for nonlinear parabolic equations, *ESAIM: Math. Modelling and Nume. Anal.*, 38 (2004), 261–289.
- [2] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, *North-Holland, Amsterdam*, 1979.
- [3] R.L. Bisplinghoff, H. Ashley, R.L. Halfman, Aeroelasticity, *Dover, New York*, 1996.
- [4] V. Dolejší: ANGENER V3.0,
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dolejsi/angen/angen.htm> , *Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy*.
- [5] V. Dolejší, Semi-implicit interior penalty discontinuous Galerkin methods for viscous compressible flows. *Commun. Comput. Phys.*, Vol. 4 (2008), pp. 231-274.
- [6] V. Dolejší and M. Feistauer, Error estimates of the discontinuous Galerkin method for nonlinear nonstationary convection-diffusion problems, *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, 26, (2005), 349–383.
- [7] V. Dolejší and M. Feistauer, A semi-implicit discontinuous Galerkin finite element method for the numerical solution of inviscid compressible flow, *J. Comput. Phys.*, Vol. 198 (2004), pp. 727–746.
- [8] V. Dolejší, M. Feistauer and C. Schwab, On some aspects of the discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws, *Math. Comput. Simul.*, 61, 333–346 (2003).
- [9] V. Dolejší, M. Feistauer and J. Hozman, Analysis of semi-implicit DGFEM for nonlinear convection-diffusion problems on nonconforming meshes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196 (2007), pp. 2813-2827.
- [10] V. Dolejší and M. Vlasák, Analysis of a BDF-DGFE scheme for nonlinear convection-diffusion problems, *Numer. Math.* 110 (2008), pp. 405-447.
- [11] E.H.Dowell, A Modern Course in Aeroelasticity, *Kluwer, Dordrecht*, 1995.
- [12] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo and C. Johnson, Computational Differential Equations, *Cambridge University Press, Cambridge*, 1996.
- [13] K. Ericsson, C. Johnson, Adaptive finite element methods for parabolic problems I: A linear model problem, *SIAM J. Numer. Anal.* 28 (1991), pp. 43–77.
- [14] D. Estep and S. Larsson, The discontinuous Galerkin method for semilinear parabolic problems, *Math. Modelling and Numer. Anal.*, 27 (1993), pp. 35–54.
- [15] M. Feistauer and K. Švadlenka, Space-time discontinuous Galerkin method for solving nonstationary convection-diffusion-reaction problems, *J. Numer. Math.*, 12, 97–118.

- [16] M. Feistauer and K. Švadlenka, Discontinuous Galerkin method of lines for solving nonstationary singularly perturbed linear problems, *J. Numer. Math.*, 2 (2004), pp. 97-117.
- [17] M. Feistauer, V. Dolejší and V. Kučera, On the discontinuous Galerkin method for the simulation of compressible flow with wide range of Mach numbers, *Computing and Visualization in Science*, Vol. 10 (2007), pp. 17–27.
- [18] M. Feistauer, J. Felcman and I. Straškaraba, Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow, *Clarendon Press, Oxford* (2003).
- [19] M. Feistauer and V. Kučera, On a robust discontinuous Galerkin technique for the solution of compressible flow, *J. Comput. Phys.*, Vol. 224 (2007), pp. 208–221.
- [20] M. Feistauer, V. Kučera, K. Najzar, J. Prokopová, Analysis of space-time discontinuous Galerkin method for nonlinear convection-diffusion problems. *Numer. Math. Vol. 117* (2011), pp.251-288.
- [21] C. Grandmont, Existence of weak solutions for the unsteady interaction of a viscous fluid with an elastic plate, *SIAM J. Math. Anal.*, 2008, 40, 716—737.
- [22] M. Guidorzi, M. Padula, P.I. Plotnikov, Hopf solutions to a fluid-elastic interaction model, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2008, 18, 215—269.
- [23] K.H. Hoffmann, V.N. Starovoitov, On a motion of a solid body in a viscous fluid. Two-dimensional case, *Advanced in Mathematical Sciences and Applications 1999*, 9, 633—648.
- [24] R. Honzátko, J. Horáček, K. Kozel and P. Sváček, Simulation of free airfoil vibrations in incompressible viscous flow - comparison of FEM and FVM, *Appl. Math. Comput.* (2010) (submitted).
- [25] K.Chrysafinos and N.J.Walkington, Error estimates for the discontinuous Galerkin methods for parabolic equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 44 (2006), pp. 349-366.
- [26] J. Jaffre, C. Johnson and A. Szepessy, Convergence of the discontinuous Galerkin finite element method for hyperbolic conservation laws, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 5 (1995), pp. 367–386.
- [27] C. Johnson and J. Pitkäranta, An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation, *Math. Comp.*, 46 (1986), pp. 1-26.
- [28] V. Kučera, Higher Order Methods for the Solution of Compressible Flows , *disertační práce MFF UK v Praze* (2007).
- [29] P. Le Saint and P.-A. Raviart, On a finite element method for solving the neutron transport equation, *Academic Press*, 1974, pp. 89-145.
- [30] E.Naudasher, D.Rockwell, Flow-Induced Vibrations, *A.A. Balkema, Rotterdam*, 1994.

- [31] J. Neustupa, Existence of a weak solution to the Navier-Stokes equation in a general time-varying domain by the Rothe method, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2009, 32, 653–683.
- [32] T. Nomura and T.J.R. Hughes, An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 95 (1992), pp. 115-138.
- [33] W.H. Reed, T.R. Hill, Triangular mesh method for the neutron transport equation. *Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory*, 1973.
- [34] K. Rektorys, The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations, *Reidel, Dodrecht*, 1982.
- [35] B. Rivière and M. F. Wheeler, A discontinuous Galerkin method applied to nonlinear parabolic equations. In: *B.Cockburn, G.E. Karniadakis, C.W. Schu (eds.) Discontinuous Galerkin methods. Theory, Computation and Applications. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer, Berlin*, (11), 2000, pp. 231–244.
- [36] D. Schötzau, hp-DGFEM for Parabolic Evolution Problems. Applications to Diffusion and Viscous Incompressible Fluid Flow, *PhD Dissertation ETH No. 13041, Zürich*, 1999.
- [37] D. SCHÖTZAU AND C. SCHWAB, An *hp* a priori error analysis of the Discontinuous Galerkin time-stepping method for initial value problems, *Calcolo*, 37 (2000), pp. 207–232.
- [38] P. Sváček, M. Feistauer and J. Horáček, Numerical simulation of flow induced airfoil vibrations with large amplitudes. *J. of Fluids and Structures*, Vol. 23 (2007), pp. 391-411.
- [39] J.J.W van der Vegt and H. Van der Ven, Space-time discontinuous Galerkin finite element method with dynamic grid motion for inviscid compressible flow, part I. General formulation, *J. Comput. Phys.*, 182 (2002), pp. 546–585.
- [40] G. Vijayasundaram, Transonic flow simulation using upstream centered scheme of Godunov type in finite elements, *J.Comput. Phys.* 63 (1986) 416-433.
- [41] M. Vlasák, V. Dolejší and J. Hájek: A priori error estimates of an extrapolated space-time discontinuous Galerkin method for nonlinear convection-diffusion problems. *Numer. Methods Partial Differential Eq.* DOI 10.1002/num.20591 (to appear).