Posudek disertacni prace

M. Doubek, Operadicke resolventy diagramu.

Disertacni prace se sklada ze tri casti. Prvni polovina je tvorena zapisky prednasek M. Markla o deformacni teorii algeber a lze ji chapat jako uvod do studovane problematiky, spise s durazem na vlastnosti algeber nez jejich operad. Druha kapitola obsahuje rozpracovani idei (viz. veta na konci str. 49) prisouzenych M. Marklovi o realizaci operadickych (ko)homologii nesymetrickych operad v tridach rozsireni *Ext* pro kategorii modulu nad prislusnou operadou, demonstrovanych v pripade Gerstenhaber-Schack kohomologii diagramu. Treti kapitola je venovana diskusi a dukazu specialni tridy hypotez formulovanych M. Marklem o resolventach Koszulovych operad (s generujicimi operacemi v jedne arite a jednom stupni) popisujicich diagramy algeber.

V predlozene praci lze nalezt preklepy ci gramaticke chyby jen ojedinele, viz. napr. str. 62 pred vzorcem 3.11 ma byt "denotes", na str. 66 (a na mnoha dalsich mistech) ma byt "Proof of Sublemma 3.3.7.", spis nez "factorwise" (str. 98) se pouziva "componentwise", atp. Z hlediska jazykove redakce se autorovi neda vytknout vubec nic.

Pri cteni odborneho textu vsak vyvstava rada otazek, jejichz odpovezeni ci prinejmensim okomentovani by potencionalnimu ctenari usnadnilo pochopeni obecneho ramce resp. technik pouzitych v praci - duvodem je hlavne to, ze prehledna prvni polovina textu (ktere se zde venovat nebudeme) je spise venovana A_∞, L_∞-strukturam kontrolujici deformace algeber samotnych. Odpovedi na nasledujici otazky nelze v kratkych uvodech k druhe a treti casti nalezt (diskuse probiha chronologicky):

Na str. 62 se zavadeji operady popisujici algebry s derivaci. Neni zrejme, jak tato struktura zavisi na volbe derivace ϕ. Vypocty gradovanych komponent spektralni posloupnosti E^0 na teto volbe zavisi nebot ∂^0 zavisi na volbe ϕ. Jak tato volba ovlivni $\mathcal{MDA} \equiv \mathcal{MDA}(\phi)$ resp. $Ext^{\star}_{\mathcal{A}-mod}$ v Theoremu 3.3.18.?

Na str. 72 se zavadi prechodna (intermediate) resolventa prislusne operady $\mathcal{DA}$. Lze vzdy takovou "vhodnou" (tj. obsahujici dostatek vlastnosti ke konstrukci operadickych kohomologii) resolventu kanonicky zkonstruovat jako v pripade dg-C-operady s derivaci? Je vyber kanonicky vzhledem k nejake specificke vlastnosti, napr. v pripade, ze operadicka resolventa neni k dispozici (viz. prvni odstavec na str. 76)?

Trochu zmatene na me pusobi poznamka (o znamych kohomologiich pro Lieovy algebry) obsazena v prvnim odstavci 3.4.2., str. 77, prvni paragraf. Kohomologicka teorie pro dany typ algeber je, v podstate podle definice, modulem nad (ko)homologii operady popisujici strukturalni operace prislusne algebry a proto by mela byt operadicka strana mince ta fundamentalnejsi. Tato poznamka pusobi dojmem a navozuje, ze se spise obecne operadicke teorie konstruuji ze zname (ko)homologicke teorie dane kategorie algeber. Myslim, ze by stalo za komentar toto osvetlit.

Jsou akce $\Sigma_{l_1} \times \cdots \times \Sigma_{l_m}$ a Σ_m v formuli 4.2, str. 93, komutujici? Mimochodem, tyto akce zrejme komutuji s (pravou) akci Σ_n a tak prirozene vyvstava otazka, jaka je struktura Σ_n-modulu na $< \Sigma(W, v) > /((\Sigma_{l_1} \times \cdots \times \Sigma_{l_m}) \times \Sigma_m)$ (definice akce Σ_n je zhruba v polovine strany 93)?

Souvisi, a pokud ano tak jak, definice operadicke resolventy Def 4.2.7. (str. 94) s realizaci derivovanych funktoru k funktoru ko-invariantu s koeficienty v operadickem modulu ($Ext^{\star}_{(\Sigma_{l_1} \times \cdots \times \Sigma_{l_m}) \times \Sigma_m}(-,-)$), viz. 4.2., str. 93?

Predpoklada se, viz. Assumptions 4.3.1., str. 96 predpoklad 1/, ze F_0 je volne generovany podmnozinou M morfismu dane kategorie. V navaznosti na tento predpoklad neni zjevne, ze morfismus g v Example 4.3.3. patri do F_0 a zaroven neni uveden v presentaci kategorie (tam se objevuje pouze morfismus f mezi objekty V_1, V_2.)

Pravdepodobne nejdulezitejsi ingredient v dukazu hlavniho tvrzeni treti casti je konstrukce "derivace" $\omega(x, f)$, viz. Lemma 4.4.4. Lze tedy toto technicke Lemma chapat jako popis realizace rekurzivniho zdvihu elementu v danem listu spektralni posloupnosti spoctenem vzhledem k jiste komponente (vyrizle prostrednictvim pocatecni filtrovane struktury) operadickeho diferencialu do (ko)homologicke tridy totalniho operadickeho diferencialu?

Neni zrejme, zda-li a jak souvisi algebraicko-topologicke funktory na nervu kategorie C a operadicke (ko)homologie C-shaped diagramu danych operadickych algeber. Myslim, ze by bylo vhodne vysvetlit topologickou motivaci ryze algebraickeho problemu; ze sekce 4.5., str. 114, tato odpoved explicitne neplyne.

Na konci pridam jeste nekolik recnickych dotazu, ktere se vztahuji k limitam pouzite technologie v obecnejsich pripadech (taktne prejdeme tezko zodpoveditelne otazky kolem pripadu ne-Koszulovych operad, kdy neni k dispozici minimalni resolventa):

Lze uzit technologii operadickych resolvent na pripad jednoho objektu s mnoha morfismy (napr. konecnou nebo Lieovu grupu)? Jaky je pak explicitni tvar teto operadicke resolventy?

Nejzajimavejsi diagramy jsou ty, ktere pochazeji z algebro-geometrickych problemu s podtextem representacni teorie. Je resen problem ev. je si autor vedom jak vypadaji resolventy specialnich quiveru s nazvem Dynkinovy diagramy (uzly jsou objekty a hrany jsou morfismy), popisujicich samy o sobe algebraickou strukturu (mj. representacni okruh jiste konecne grupy)?

Je zrejme, ze se autor musel priucit a pochopit spoustu netrivialnich technik jak z abstraktni algebry, tak z topologie a navic vytyceny smer nabizi velmi sirokou perspektivu s pravdepodobnymi aplikacemi i v matematicke fyzice. Predlozenou praci hodnotim jako vyhovujici vsem narokum na ni kladenou a doporucuji uznat jako doktorskou disertacni praci.

Praha, 9.9.2011. Petr Somberg, MU MFF UK