

Doktorská disertační práce Martina Tancera

Topological and Geometrical Combinatorics

Autor se zabývá několika velmi zajímavými aspekty simplicialních komplexů. Kromě nejklassičtějšího z nich, vložitelnosti d -dimensionálního komplexu do euklidovského prostoru \mathbb{R}^n , jde především o d -representabilitu a její zajímavou variantu, dále o d -kolapsibilitu, o d -Lerayovu vlastnost, o jejich vztahy, a o problémy složitosti s nimi spojené.

K systému \mathcal{C} konvexních podmnožin prostoru \mathbb{R}^d (dimenze d pevně dána) vytvoříme (abstraktní) komplex $K(\mathcal{C})$ tak, že vezmeme jeho prvky za vrcholy a prohlásíme $\{C_1, \dots, C_n\}$ za simplex pokud $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$. Komplex je d -representabilní je-li jeho abstraktní struktura isomorfní s nějakým takovým $K(\mathcal{C})$.

Komplex je d -kolapsibilní je-li ho možno anihilovat postupným odebíráním simplexů dimensí $\leq d - 1$ z nichž každý je stěnou jednoznačně určeného maximálního simplexu.

Komplex K má d -Lerayovu vlastnost jestliže pro každý indukovaný podkomplex $L \subseteq K$ jsou všechny redukované homologické grupy $\tilde{H}_n(L)$ pro $n \geq d$ triviální.

Jsou zde ještě varianty: *topologická d -representabilita*, kde se o systému \mathcal{C} místo konvexnosti prvků požaduje slabší vlastnost, totiž že průnik každého podsystemu který není prázdný je kontraktibilní. Vedle d -kolapsibility se ještě uvažuje naopak zase silnější *greedy d -kolapsibilita* u níž nezáleží na strategii odebírání.

Každý d -representabilní komplex je d -kolapsibilní a každý d -kolapsibilní komplex má d -Lerayovu vlastnost. Tyto implikace nelze obrátit, a část (z mnoha) výsledků se týká této záležitosti. Například je dokázáno, že rozdíl mezi d -representabilitou a d -kolapsibilitou může být libovolně velký: přesněji, že pro libovolné d existuje 2-kolapsibilní komplex, který není d -representabilní. Jiný výsledek z této oblasti je popření Wegenerovy hypotézy důkazem, že pro každé $d \geq 2$ existuje simplicialní komplex který není d -kolapsibilní ačkoliv je topologicky d -representabilní.

Dále jsou zkoumány otázky složitosti související se zmíněnými pojmy. Zejména je dokázáno, že 2-kolapsibilita je rozhodnutelná v polynomiálním čase zatímco pro $d \geq 4$ je d -kolapsibilita NP-úplná; d -representabilita je NP-úplná pro všechna $d \geq 2$.

Konečně v poslední čtvrtině práce se autor zabývá algoritmickými aspekty vnořitelnosti komplexu do d -rozměrného euklidovského prostoru a to jak v lineárním smyslu (t.j. vnoření jako komplexu skutečně složeného z geometrických simplexů), nebo vnořitelnosti po částech lineární, nebo konečně obecné vnořitelnosti topologické. Zejména je dokázáno, že rozhodnutí o po částech lineárním vložení k -dimensionálního komplexu do d -rozměrného euklidovského prostoru je pro $d \geq 4$ a $d \geq k \geq \frac{2d-2}{3}$ NP-obtížné.

Práce obsahuje řadu velmi zajímavých, netriviálních a užitečných výsledků. Její kvalita přesahuje úroveň běžných doktorských disertačních prací. Je třeba zmínit, že některé z předkládaných výsledků podstatně vylepsily výsledky velmi renomovaných autorů, a připomenout (negativní) vyřešení významné hypotézy.

Také po formální stránce je práci možno pochválit. Je napsána přehledně a pečlivě (několika drobným přepisům se člověk prostě při takovém rozsahu nemůže vyhnout). Rozvržení na kapitoly při kterém jsou od sebe úvodní vysvětlující partie odtrženy od podrobných důkazových částí (výsledky naznačené v kapitole třetí jsou dokazovány v kapitolách šesté až osmé, kapitoly čtvrtá a pátá jsou úvodem ke kapitole deváté) mi při prvním náhledu připadlo trochu zvláštní, ale přišel jsem mu na chuť a souhlasím s ním: čtenář si může udělat dobrou představu o obsahu po snazším přečtení první poloviny práce.

Práce splňuje (a podle mého názoru podstatně překonává) všechny požadavky na doktorské disertační práce kladené. Uchazeč v ní prokázal vynikající talent, schopnost samostatné vědecké práce a širokou erudici. Doporučuji, aby mu byl po úspěšné obhajobě udělen titul PhD.

Červenec 2011

Aleš Pultr