Posudek na disertační práci
Václava Vlasáka

Collections of compact sets in descriptive set theory.

Práce má čtyři kapitoly, z nichž vlastní obsah představují tři z nich a první kapitola je úvodní. Kapitoly 2, 3 a 4 jsou ve formě článků, dva publikované, z toho jeden (Kapitola 2) se spoluautorem M. Zeleným.

Kapitola 2, Compact sets of continuity for Borel functions, zlepšuje výsledky F. Jordana o vztahu komplexity zobrazení f a systemu $C(f)$ kompaktů, na kterých je restrikce f spojitá. Jedno vylepšení (Theorem 2.2.3) se týká odstranění nadbytečného předpokladu o borelovskosti uvažovaného zobrazení. U druhého výsledku je charakterizace borelovskosti zobrazení f zobecněna i pro projektivní měřitelnost zobrazení f (Theorem 2.2.5), kde se ovšem užívá axiom determinovanosti projektivních množin.

V Kapitole 3, Countable compacta of continuity for projective functions, se studuje kromě systému $C(f)$ i jeho podmnožina $\widetilde{C}(f)$ tvořená kompakty z $C(f)$ s jediným hromadným bodem. Pomocí projektivní komplexity $\widetilde{C}(f)$ je charakterizována projektivní měřitelnost zobrazení f, ovšem ve srovnání s výše uvedenou větou z Kapitoly 2 bez dodatečného axiomu. Další výsledek užívající systém $\widetilde{C}(f)$ je při popisu funkce Baireovy třídy α, (Theorem 3.2.8). Postačující podmínka k tomu, aby funkce f byla Baireovy třídy α je, že $\widetilde{C}(f)$ je multiplikativní třídy $\alpha+2$, a nutná podmínka je, že $\widetilde{C}(f)$ je multiplikativní třídy $\alpha+5$. Možná by byl na místě komentář k diskrepanci $\alpha+2$ a $\alpha+5$.

Poslední Kapitola 4 je motivovaná otázkou z článku R. Lyonse z roku 1987. Jedná se o tzv. H^N-množiny, $N = 1, 2, \ldots$, což jsou systémy uzavřených množin jednoznačnosti trigonometrických řad. Systémy H^N-množin tvoří striktně rostoucí posloupnost a otázka zněla, zda je mezi soubory H^N-množin a H^{N+1}-množin velký rozdíl ve smyslu polár či nikoli, tj. zda $(H^N)^\perp = (H^{N+1})^\perp$ nebo $(H^N)^\perp \supsetneq (H^{N+1})^\perp$. V práci je dokázáno, že platí druhá možnost.

Po obsahové stránce jsou předložené výsledky na vysoké úrovni. I když Kapitoly 2 a 3 obsahují kvalitní výsledky a prokazují, že autor dokonale zvládnul základy deskriptivní teorie množin a metody práce v této oblasti,

přesto jsou poněkud zastíněny Kapitolou 4. Její obsah totiž znatelně převyšuje předchozí části. Konstrukce míry, která ukazuje rozdílnost polár $(H^N)^\perp$ a $(H^{N+1})^\perp$, a důkaz požadovaných vlastností je vysoce netriviální, jemný a složitý. Zde musel autor prokázat, že je schopen pronikout a porozumět komplikovaným pojmům a vztahům mezi nimi, aby mohl objevit základní myšlenku celé konstrukce.

Konkrétní poznámky k textu.

- Lemma 2.3.5
  Lemma pojednává o projektivních množinách. V důkaze se (dvakrát) odvolává na kapitolu 21.F z Kechrisovy knihy, ale v této kapitole se nikde nemluví o projektivních množinách ani o existenci Σ^1_n-hard kompaktu.

- Corollary 3.2.2
  Místo Δ^1_2 ma být Δ^1_{n+1}.

- Sekce 3.3.5
  Zcela nejasné, co má poslední věta v prvním odstavci znamenat. Je Remark 3.3.16 tvrzení? Pradivé? Jaká je Jordanova definice? V jakém smyslu máme porovnat Remark s Jordanavou definicí? Je tvar „compare“ správný nebo jste chtěl napsat „compares“?

- Odstavec před Lemmatem 3.3.17 nemůže nehrazovat důkaz! Nelze po čtenáři chtít, aby si našel původní důkaz v Jordanově článku (neboť zde je zcela zamlčen) a verifikoval, že nahradí-li v něm odkazy na původní Lemmata vašimi modifikovanými verzemi, pak důkaz projde.

- Pro otevřený interval v $[0,1]^N$ užíváte indexování faktorů jednou dole (Definice 4.2.2 (iii)) jindy nahoře (např. vztah (4.7)). Což nepřispívá k přehlednosti.

- Lemma 4.3.3
  Měl by být předpoklad, že $n > 1$. Totéž v předchozí poznámce (Remark 4.3.2 (iii)), kde by se to možná ještě dalo chápat jako implicitní definice.

- 36^3: Prostřední rovnost má být nerovnost.

- Co je symbol P ve formuli (4.10)?

- 41_5: U symbolů v, s by mělo být specifikováno, že jsou to celá čísla.

- 43^1: Odvolávka na vztah (4.30) není korektní, neboť tento vztah byl v části (b1), kde $j = \sigma + 1$, zatímco zde se vyšetřuje případ $j > \sigma + 1$.

- Lemma 4.3.18
  Nelíbí se mi symboly $n(n, k)$ a $k(n, k)$, protože není obvyklé značit funkci stejným písmenem jako její proměnnou.

- Za vztahem (4.35): Zde by se mělo místo „some“ užít „any“.

- Remark 4.4.2
  (iv) Uváděná vlastnost je třeba pro každou vybranou posloupnost, nikoli jen, že taková vybraná posloupnost existuje.
  (vi) s by mělo být kladné, užíváte to pak v jisté nerovnosti.

- 50^{11}: trojúhelníková matice se řekne triangular matrix.

Poznámky obecnějšího charakteru.

- Nelíbí se mi, že nevysvětlíte základní značení a pojmy, s nimiž pracujete. Odkázat čtenáře na knihu, ať si tam příslušné značení a pojmy najde, mi i v článku připadá ne příliš korektní, natož v disertační práci.

- Přestože jsou výsledky na velmi kvalitní úrovni, stylem prezentace je dojem poněkud snižován. Je možné psát stručně, pak ovšem argumentace by měla být jak promyšlená, tak výstižná. Toto v předložené práci často chybí. S tím souvisí i různá označení, která by mohla být pečlivěji a možná promyšleněji volena. Např. množiny P_n z (4.2) a A_k z (4.8) jsou téhož typu, lišící se pouze výběrem parametrů. Podobně je to s dvojicí množinových systémů $\mathcal{D}^\alpha$ z Lemmatu 4.3.15 a $\mathcal{F}(t, J, G)$ z (4.37). Vzhledem k tomu, že různých množin a systémů se v práci zavádí hodně a že jsou poměrně komplikované, velmi by pomohlo jejich vhodné označení naznačující, kdy se jedné o v podstatě stejné objekty.

Ještě před obhajobou uspokojivě zodpověděl pan Mgr. Vlasák dotazy, které oponenti vnesli ohledně nejasností a eventuálních doplnění detailů některých částí práce. Dotazy oponentů jsou přiložené k posudku.

Předložená disertační práce prokazuje předpoklady autora k samostatné tvůrčí práci a proto ji doporučuji k obhajobě.

Doc. RNDr. Jaroslav Tišer, CSc.