Posudek oponenta k disertační práci
Modules over Gorenstein rings
Davida Pospíšila

Předložená práce sestává ze dvou článků Davida Pospíšila a Jana Trlifaje a jednoho preprintu Lidie Angeleri, Davida Pospíšila, Jana Trlifaje a Jana Šťovíčka. Hlavním přínosem práce je klasifikace vychylujících i kovychylujících tříd nad komutativními noetherovskými okruhy. Vychylující třídu nad okruhem R je možné charakterizovat pomocí množiny $\mathcal{S}$ silně konečně presentovaných modulů projektivní dimenze nejvýše n. Do příslušné vychylující třídy $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ pak patří každý modul M, který splňuje podmínku $\mathrm{Ext}^i_R(S, M) = 0$ pro každé $i \in \mathbb{Z}_+$ a každé $S \in \mathcal{S}$. Množinu $\mathcal{S}$ lze v definici nahradit jediným modulem, tzv. vychylujícím modulem, který třídu určuje. Tato charakterizace vychylujících tříd však nedává příliš jasnou představu o tom, kolik různých vychylujících tříd nad daným okruhem existuje (např. lokalizace Dedekindova oboru v maximálním ideálu má pouze 2 vychylující třídy). Hlavním přínosem práce je popis vychylujících tříd nad komutativním noetherovským okruhem pomocí podmnožin spektra okruhu. V dalším podrobněji shrnu obsah jednotlivých článků, celkové zhodnocení je uvedeno v závěru posudku.

První článek *Tilting and cotilting classes over Gorenstein rings* se zabývá vychylujícími třídami nad Gorensteinovými okruhy. Gorensteinovy okruhy jsou noetherovské okruhy, nad kterými má regulární modul konečnou injektivní dimenzi. Pro Gorensteinovy okruhy s Krullovou dimenzí jedna se podařilo popsat všechny vychylující třídy a ke každé třídě nalézt vychylující modul, který ji určuje. Gorensteinovy okruhy s Krullovou dimenzí jedna patří mezi důležité okruhy v komutativní algebře - mezi všeobecně známé příklady patří $\mathbb{Z}[C_n]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ pro $n \in \mathbb{N}$ bezčtvercové nebo souřadnicové okruhy křivky s jednou singularitou (např. $k[x, y]/(y^2 - x^3)$).

Hlavním výsledkem prvního článku je Věta 0.1 na str. 14, která říká, že každý vychylující modul nad 1-Gorensteinovým okruhem R určuje stejnou vychylující třídu jako nějaký Bassův vychylující modul $T_P = R_P \oplus \bigoplus_{p\in P} E(R/p)$, kde P je množina prvoideálů výšky 1 a $R_P = \cap_{p\in P} R_{(p)}$. Důkaz používá local/global princip, nejprve je dokázáno, že lokální 1-Gorensteinovy okruhy mají (nejvýše) 2 vychylující třídy. Lokalizace vychylující třídy v (některých) maximálních ideálech pak určují množinu P.

Určité zobecnění pak představuje Věta 0.2 na str. 15, která říká, že pro n-Gorensteinův okruh R a množinu P prvoideálů R výšky n je $\cap_{p\in P} E(R/p)^{\perp_\infty}$ vychylující třída. Narozdíl od 1-dimenzionálního případu však existují další vychylující třídy, některé z nich popisuje Věta 3.7 na str. 27. Pro třídy nalezené ve Větě 0.2 také nejsou nelezeny příslušné vychylující moduly. Zatímco popis vychylujících tříd je nad očekávání uspokojivě vyřešen ve třetím článku, popis vychylujících modulů je zatím vyřešen jenom zčásti ve druhém článku.

Závěr prvního článku se věnuje kovychylujícím třídám nad 1-Gorensteinovými okruhy, díky existující korespondenci mezi vychylujícími a kovychylujícími třídami nad 1-Gorensteinovými okruhy lze popsat i kovychylující třídy a nalézt i kovychylující moduly, které je určují (Věta 4.2 na str. 30). Nakonec je ukázáno, že každá kovychylující třída nad 1-Gorensteinovým okruhem je dědičná (Corollary 4.3 na str. 31).

Druhý článek *Tilting for regular rings of Krull dimension two* rozšiřuje poznatky z prvního článku do Krullovy dimenze 2. Ve druhé sekci jsou studovány vychylující třídy sestávající z modulů injektivní dimenze nejvýše jedna. Věta 2.3 na str. 42 ukazuje, že nad regulárním okruhem konečné Krullovy dimenze lze takové vychylující třídy popsat pomocí podmnožin spektra, které obsahují minimální prvoideály. Pro lokální regulární okruh Krullovy dimenze 2 jsou pak takto popsány všechny netriviální vychylující třídy (Věta 3.5 na straně 44). Podobně jako v prvním článku je možné nasadit local/global přístup a popsat vychylující třídy pro obecný regulární okruh Krullovy dimenze 2. Věta 4.2 na str. 46 ukazuje, že nad takovým R jsou vychylující třídy klasifikovány pomocí dvojic (X, Y), kde $X, Y \subseteq \mathrm{Spec}(R)$, X obsahuje $\mathrm{Ass}(R)$, tj množinu prvoideálů asociovaných s R a Y je množina prvoideálů výšky 2, která obsahuje všechny prvoideály výšky 2 ležící v množině $V(X \setminus \mathrm{Ass}(R))$. Vychylující třída je pak tvaru $\bigcap_{p\in X}(R/p)^{\perp_\infty} \cap \bigcap_{m\in Y} m^\perp$. Pátá sekce pak obsahuje popis vychylujících modulů pro případ lokálního regulárního okruhu Krullovy dimenze 2. Ukazuje se, že kromě modulů tvaru $R' \oplus I$, kde R' je lokalizace R a I injektivní modul a dobře známého Fuchsova vychylujícího modulu existují další typy, které jsou sestrojeny ve Větě 5.4 na str. 50 a Větě 5.6 na str. 51.

Třetí článek *Tilting, cotilting, and spectra of commutative noetherian rings* popisuje vychylující i kovychylující třídy nad obecným noetherovským komutativním okruhem R. Třídy jsou parametrizovány posloupnostmi $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots \supseteq Y_n$, kde $n \in \mathbb{N}$ a každé Y_i je horní podmnožina spektra, navíc pro každé i neobsahuje Y_i prvoideál asociovaný s $(i-1)$-ní cosyzygy minimální koresolventy R_R. Příslušná kovychylující třída $\mathcal{C}_{(Y_1,\ldots,Y_n)}$ pak obsahuje takové moduly M, pro které je množina asociovaných prvoideálů $(i-1)$-ní cosyzygy minimální injektivní koresolventy M obsažena v $\mathrm{Spec}(R) \setminus Y_i$. Pomocí zajímavého triku s Auslanderovým-Bridgerovým transposem je pak ukázáno, že nad komutativním noetherovským okruhem každá kovychylující třída je duální k nějaké vychylující třídě. Důkaz se provádí nejprve pro 1-(ko)vychylující třídy aplikací popisu 1-kovychylujících tříd nad zprava noetherovskými okruhy jako beztorzních tříd v podkategorii konečně generovaných modulů a Takahashiho popisu těchto beztorzních tříd. Ve třetí sekci se pak přejde k popisu n-kovychylujících tříd, klíčová je indukce při které se zvětšením n-kovychylující třídy získá $(n-1)$-kovychylující třída (Definice 3.4 na str. 66, vlastní indukce pak Proposition 3.10 na str. 68). Závěr článku pak rozebírá již zmíněný vztah mezi n-kovychylujícími a n-vychylujícími třídami nad komutativním noetherovským okruhem. Výsledek práce je shrnut ve Větě 3.19 na str. 73. Další zajímavá a netriviální tvrzení (např. uzavřenost kovychylujících tříd na injektivní obaly, pokud je okruh komutativní noetherovský) jsou obdrženy jako mezivýsledky při důkazu hlavní věty článku.

Téma práce je dobře motivané a zcela aktuální, navazuje na řadu významných výsledků posledního desetiletí. Dosažené výsledky jsou podle mě správné (na detailnější kontrolu bych ale potřebval mnohem více času), hluboké a pokud mohu jako laik soudit, tak i velice přínosné pro další vývoj v této oblasti. Práce používá poměrně rozsáhlý aparát z homologické a komutativní algebry. Předložená posloupnost článků dává tušit, jak obtížné bylo získat klasifikaci ve finální podobě.

Některé použité metody patří dnes již ke standardním, naopak například použití Auslander-Bridgerova transposu (se kterým se setkáme častěji v teorii reprezentací než v komutativní algebře) pro přechod od kovychylujících tříd je podle mě velice neotřelé.

Pokud bych měl práci něco vytknout, tak asi příliš stručný úvod. Například souvislost vychylujících modulů a Moritovské ekvivalence mohla být vysvětlena podrobněji. Bylo by pak jasnější, proč se autoři spokojí s klasifikací až na ekvivalenci popsanou na str. 7 a nepokouší se o klasifikaci vychylujících modulů až na izomorfismus. Shrnutí používaných tvrzení z teorie injektivních modulů nad komutativními noetherovskými okruhy by učinilo text prostupnějším, první dva články jsou ve srovnání s posledním článkem hůře čitelné. V prvním článku pravděpodobně bylo možné dostat klasifikaci vychylucících modulů až na izomorfismus. Pro Bassův vychylující modul T_P by mělo být snadné spočítat $\mathrm{Add}(T_P)$, pak by si zbývalo rozmyslet, které moduly z $\mathrm{Add}(T_P)$ budou vychylující.

Z formálního hlediska práce obsahuje několik překlepů, většinu z nich v prvním článku. Např. na str. 13 classses má být classes, na str. 16 dole than má být then, na str. 23 $\mathrm{Ext}^1_R(R_p, R_P^{(I)}) = 0$ má být $\mathrm{Ext}^1_R(R_P, R_P^{(I)}) = 0$, na str. 26, 6 řádek zdola má být 1 místo 11, part (i) o řádek níže má být asi part(i) of Lemma 3.5, Gorestein na str. 28 má být Gorenstein, na str. 38 není srozumitelná definice $\mathcal{C}^{\perp_i}$ a ${}^{\perp_i}\mathcal{C}$, na str. 41 v důkazu Lemma 2.1 formálně pracujeme s pravými moduly, tomu ale neodpovídá výraz $\mathbf{q} \cdot x \cdot y$, na str. 63 v Poposition 2.5 je asi třída $\mathcal{C}$ myšlena 1-kovychylující a v důkazu Proposition 3.14 na str. 71 by asi měla být ověřována implikace $\mathbf{p} \in Y_i \Rightarrow \mu_{i-1}(\mathbf{p}, K) = 0$.

Všechny předložené články nepochybně prokazují schopnost autorů k samostatné tvůrčí práci. V práci však není uvedeno, na kterých z uvedených výsledků se David aktivně podílel. S přihlédnutím k vyjádření školitele si myslím, že práce podmínky k obhajobě splňuje, proto ji doporučuji k přijetí a uchazeči udělit titul Ph.D.

V Praze 28. 7. 2011

Pavel Příhoda