

Disertační práce

Mgr. Jonathan Verner: Ultrafilters and independent systems

Posudek školitele.

Problematika existence ultrafiltrů se speciálními vlastnostmi se v matematice objevuje poprvé roku 1956 v práci Waltera Rudina, kde dokázal za předpokladu hypotézy kontinua nehomogenitu prostoru uniformních ultrafiltrů na přirozených číslech sestavením P-bodu. Další typy na sebe nenechaly dlouho čekat: selektivní, semi-selektivní, různé druhy Frolíkovsky minimálních, dobré ultrafiltry jsou spojeny s řadou velkých jmen v obecné topologii a v teorii množin. Východiskem pro práci doktoranda byl článek Jana van Milla *Sixteen types in $\beta\omega - \omega$* z roku 1982. Autor zde mimo jiné dokazuje, že v prostoru $\beta\omega - \omega$ existuje bod, který sice je hromadným bodem nějaké spočetné množiny, ale není hromadným bodem žádné spočetné diskrétní množiny. Avšak není zde úplná paralela se starším výsledkem K. Kunena, který dokázal existenci bodu, který je hromadným bodem diskrétní spočetné množiny, a ta je “v podstatě jediná” v tom smyslu, že všechny spočetné diskrétní množiny, mající daný bod jako hromadný, tvoří centrovány systém. Problém, zda existuje úplná paralela tohoto výsledku s van Millovým, je znám už téměř třicet let: Existuje bod, který není hromadným bodem žádné spočetné diskrétní množiny, ale je hromadným bodem nějaké “v podstatě jediné” spočetné množiny?

Doktoranda tento problém zaujal už v době magisterského studia a jeho disertace dává definitivní kladnou odpověď (Theorem 2.33). Ukázalo se však, že k výsledku je zapotřebí nově a značně netriviálně interpretovat a skloubit do uceleného logického kontextu řadu již publikovaných prací, jejichž autoři (Hewitt, van Douwen, van Mill, Dow, Gubbi, Szymański, Simon) měli sice na mysli odlišná a značně vzdálená témata, avšak existence hledaného bodu z jejich prací vyplývá. Zřejmě proto doktorand doplnil zadané téma tvrzeními o dalších zajímavých typech ultrafiltrů a o jejich vlastnostech: Dává charakterizaci Canjarova ultrafiltru (Theorem 3.39), konstruuje (konzistentně) P-bod, který není Canjarovým ultrafiltrem a který nemá rapid předchůdce v Rudinově-Keislerově uspořádání (Theorems 3.40 a 3.61) a končí příklady tří jednoduchých (ve smyslu Borelovské hierarchie) ideálů na $\mathcal{P}(\omega)$ z hlediska forcingových vlastností příslušné kvocientové algebry. Vše uvedené jsou nové a původní výsledky doktoranda.

Předložená práce nade vši pochybnost prokazuje, že mgr. Jonathan Verner je schopen přinášet nové a kvalitní výsledky ve vysoce aktuální problematice a prezentovat je kultivovanou formou. Doporučuji, aby mu byl na základě této práce přiznán po úspěšné obhajobě titul PhD.

V Praze, 15. června 2011



prof. RNDr. Petr Simon, DrSc.

školitel.