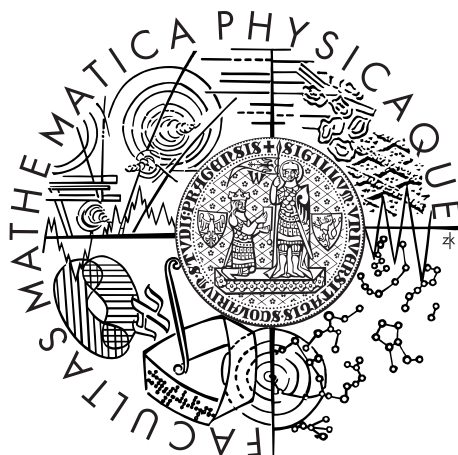


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCA



Karol Tarčák

Použitie hp-verzie nespojitej Galerkinovej metódy pre simuláciu stlačiteľného prúdenia

Katedra numerické matematiky

Vedúci diplomovej práce: prof. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D., DSc.

Študijný program: Matematika

Študijný obor: Numerická a výpočtová matematika

Praha 2012

Rád by som poďakoval vedúcemu práce prof. RNDr. Vítovi Dolejšimu, Ph.D., DSc. za podporu a čas, ktorý mi venoval.

Vyhlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 12.04.2012.

Karol Tarčák

Názov práce: Použitie hp-verzie nespojitej Galerkinovej metódy pre simuláciu stlačiteľného prúdenia

Autor: Karol Tarčák

Katedra: Katedra numerickej matematiky

Vedúci diplomovej práce: prof. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D., DSc.

Abstrakt: V predloženej práci sa zaoberáme odhadom rezidua nespojitej Galerkinovej metódy pre riešenie Navier-Stokesových rovníc. Najprv zhrnieme konštrukciu modelu viskózneho stlačiteľného prúdenia k odvodeniu Navier-Stokesových rovníc a tiež pripomenieme nespojitú Galerkinovu metódu. Navrhujeme rozšírenie už existujúceho odhadu rezidua pre stacionárne úlohy na nestacionárne úlohy. Následne si všímame priebeh hodnôt odhadu a upravíme hp-adaptívny algoritmus, aby využíval nový odhad. Na záver aplikujeme modifikovaný algoritmus na úlohy a ukážeme výsledne adaptované siete.

Kľúčové slova: nespojitá Galerkinova metóda, adaptivita, odhad rezidua

Title: Application of hp-adaptive discontinuous Galerkin method to compressible flow simulation

Author: Karol Tarčák

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D., DSc.

Abstract: In the present work we study an residuum estimate of discontinuous Galerkin method for the solution of Navier-Stokes equations. Firstly we summarize the construction of the viscous compressible flow model via Navier-Stokes partial differential equation and discontinuous Galerkin method. Then we propose an extension of an already known residuum estimate for stationary problems to non-stationary problems. We observe the behavior of the proposed estimate and modify an existing hp-adaptive algorithm to use our estimate. Finally we apply the modified algorithm on test cases and present adapted meshes from the numerical experiments.

Keywords: discontinuous Galerkin method, adaptivity, error estimate

Obsah

1	Popis prúdenia	6
1.1	Základná hypotéza	6
1.2	Lagrangeov popis prúdenia	6
1.3	Eulerov popis prúdenia	7
1.4	Zákony zachovania	7
1.4.1	Rovnica kontinuity	8
1.4.2	Pohybové rovnice	9
1.4.3	Rovnica energie	11
1.5	Termodynamické vzťahy	12
1.6	Stlačiteľné viskózne prúdenie	13
2	Nespojitá Galerkinova metóda	14
2.1	Triangulácia oblasti	14
2.2	Diskretizácia	15
2.2.1	Neviskózne členy	18
2.2.2	Viskózne členy	20
2.3	Numerické riešenie	20
2.4	Implementácia	21
3	Odhad rezidua	23
3.1	Stacionárna úloha	23
3.2	Nestacionárna úloha	27
3.2.1	Odhad regularity riešenia	33
3.3	Numerické experimenty	34
	Literatúra	41

Úvod

V súčasnosti rôzne priemyselné odvetvia využívajú numerické simulácie fyzikálnych dejov, aby bol vývoj a testovanie rýchlejšie, kvalitnejšie a lacnejšie. Medzi často riešené problémy patrí simulácia prúdenia tekutiny ako obtekanie prekážok, profilov, interakcia telies s tekutinou alebo prúdenie v kanáli. Pre všetky tieto úlohy je potrebné spočítať riešenie pre matematický model založený na Navier-Stokesových rovniciach. Vhodná a obľúbená metóda pre hľadanie riešenia je nespojitá Galerkinova metóda, ktorá je podobne ako metóda konečných objemov alebo konečných prvkov založená na slabej formulácii úlohy prúdenia. Výpočet riešenia nespojitou Galerkinovou metódou je možné urýchliť a upresniť správnu voľbou výpočtovej siete. V práci navrhujeme odhad rezidua, na ktorého základe bude možné v priebehu adaptívne meniť výpočtovú sieť.

V prvej kapitole práce pripomenieme základné pojmy zákony zachovania a základné veličiny mechaniky kontinua. Následne z nich odvodíme diferenciálne rovnice (i Navier-Stokesové rovnice), ktoré tvoria systém popisujúci stlačiteľné viskózne prúdenie. V druhej kapitole odvodíme implicitné schéma pre nespojitú Galerkinovu metódu.

Odhadom rezidua pre numerické riešenie sa budeme zaoberať v tretej kapitole. Pripomenieme odhad pre stacionárne úlohy a nadväzujúc rozšírime odhad i na nestacionárnu úlohu. So získaným odhadom navrhujeme úpravu *hp*-adaptívneho algoritmu a vykonáme numerické experimenty.

Kapitola 1

Popis prúdenia

Cieľom kapitoly je uviesť rovnice popisujúce prúdenia tekutín. Na začiatok zavedieme niekoľko značení a pripomenieme základnú hypotézu. Ďalej rozoberieme Lagrangeov a Eulerov popis prúdenia a z fyzikálnych zákonov odvodíme rovnice prúdenia. Obsah kapitoly vychádza z [10], kde je problematika skúmaná detailne.

1.1 Základná hypotéza

Predpokladajme, že tekutina je *kontinuum*, t.j. v každom bode objemu vyplneného tekutinou a každom časovom okamihu sa nachádza práve jedna častica tekutiny. Ďalej predpokladajme, že všetky funkcie popisujúce prúdenie sú dostatočne diferencovateľné, t.j. funkcie sú spojito diferencovateľné v takom rade, v akom je to potrebné.

1.2 Lagrangeov popis prúdenia

Nech $t \in [0, T)$, $T > 0$, je časový interval, v ktorom uvažujeme prúdenie tekutiny. Potom $\Omega_t \equiv \Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$ označíme oblasť vyplnenú tekutinou v čase t .

Uvažujme pohyb každej jednotlivéj častice po trajektórii:

$$x = \varphi(X, t) \equiv \varphi(X, t_0; t), \quad (1.1)$$

kde x sú Lagrangeové súradnice častice v čase t , X je referenčná súradnica

častice v čase t_0 a φ reprezentuje trajektóriu častice. Teda platí

$$X = \varphi(X, t_0) \equiv \varphi(X, t_0; t_0). \quad (1.2)$$

Ak predpokladáme existenciu derivácií φ , tak môžeme rýchlosť a zrýchlenie častice danej referenciou X definovať nasledovne:

$$\hat{\mathbf{v}}(X, t) := \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t), \quad (1.3a)$$

$$\hat{\mathbf{a}}(X, t) := \frac{\partial \varphi}{\partial t^2}(X, t). \quad (1.3b)$$

1.3 Eulerov popis prúdenia

V prípade, že budeme pozorovať častice tekutiny prechádzajúce bodom x v čase t , tak dostávame z (1.1), (1.3):

$$\mathbf{v}(x, t) = \hat{\mathbf{x}}(X, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t),$$

kde $x = \varphi(X, t)$. Takže zrýchlenie častice prechádzajúcej bodom x v čase t je

$$\mathbf{a}(X, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 v_i(x, t) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(x, t)$$

za predpokladu $\mathbf{v} \in (\mathcal{C}(\Omega \times (0, T)))^3$.

1.4 Zákony zachovania

K odvodeniu diferenciálnych rovníc mechaniky tekutín potrebujeme vetu o transporte.

Veta 1.4.1 (Veta o transporte). Nech $t_0 \in (0, T)$, $\nu(t_0)$ je ohraničená oblasť a $\bar{\nu}(t_0) \subset \Omega_{t_0}$. Nech φ definuje zmenu oblasti $\nu(t_0)$ v čase a má nasledujúce vlastnosti:

- φ je spojito diferencovateľné, vzájomne jednoznačné zobrazenie oblasti $\nu(t_0)$ na $\nu(t)$,
- φ má Jakobián \mathcal{J} , ktorý je spojitý, ohraničený na intervale (t_1, t_2) a spĺňa $\mathcal{J}(X, t) > 0$, $\forall X \in \nu(t_0)$, $\forall t \in (t_1, t_2)$.

Nech $F(x, t)$ má spojité a ohraničené derivácie prvého rádu na množine $\{(x, t); t \in (t_1, t_2), x \in \nu(t)\}$. Potom pre $\forall t \in (t_1, t_2)$ existuje konečná derivácia

$$\frac{d}{dt} \int_{\nu(t)} F(x, t) dx = \int_{\nu(t)} \left(\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(F\mathbf{v})(x, t) \right) dx \quad (1.4)$$

Dôkaz. vid'. [10] □

Označíme

$$\mathcal{M} := \{(x, t); t \in (0, T), x \in \Omega\}.$$

Nech $F(x, t) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ je Eulerová reprezentácia nejakej veličiny (transportovanej časticami tekutiny). Uvažujme častice vyplňujúce ohraničenú oblasť $\nu(t) \subset \Omega$. Potom je celkové množstvo veličiny dané funkciou F v objeme $\nu(t)$ a čase t rovné

$$\mathcal{F}(x) := \int_{\nu(t)} F(x, t) dx$$

Ďalej budeme pracovať s matematickými formuláciami základných zákonov termodynamiky.

1.4.1 Rovnica kontinuity

Hustota tekutiny, $\rho : \mathcal{M} \rightarrow (0, \infty)$, umožňuje vyjadriť hmotnosť, m , tekutiny v oblasti $\nu \subset \Omega_t$

$$m(\nu, t) := \int_{\nu} \rho(x, t) dx$$

za predpokladu, že

$$\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}),$$

$$\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}).$$

Zákon zachovania hmotnosti znie: hmotnosť m časti tekutiny v objeme $\nu(t)$ nezávisí na čase t , t.j.

$$\frac{dm(\nu(t), t)}{dt} = 0, \quad t \in (t_1, t_2). \quad (1.6)$$

Na (1.6) aplikujeme vetu o transporte (1.4.1) a získame

$$\frac{d}{dt} \int_{\nu(t)} \rho(x, t) dx = \int_{\nu(t)} \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})(x, t) \right) = 0,$$

čím dostávame rovnicu kontinuity (podrobne [10])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.7)$$

1.4.2 Pohybové rovnice

Pohybové rovnice odvodíme zo zákona zachovania hybnosti: okamžitá zmena celkovej hybnosti objemu tekutiny, ktorý je tvorený v každom časovom okamihu rovnakými časticami a ktorý v čase t vyplňa objem $\nu(t)$, je rovná sile pôsobiacej na $\nu(t)$. Nech

$$\begin{aligned} \rho &\in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}), \\ \mathbf{v} &\in (\mathcal{C}^1(\mathcal{M}))^3 \end{aligned}$$

a $\mathcal{F}(\nu(t))$ je sila pôsobiaca na objem $\nu(t)$. Potom celková hybnosť objemu tekutiny $\nu(t)$ je daná

$$\mathcal{H}(\nu(t), t) = \int_{\nu(t)} (\rho \mathbf{v})(x, t) dx.$$

a zákon zachovania hybnosti môžeme vyjadriť v tvare

$$\frac{d\mathcal{H}(\nu(t), t)}{dt} := \mathcal{F}(\nu(t)), \quad t \in (t_1, t_2). \quad (1.8)$$

Na tekutiny pôsobia dva druhy síl, objemové a plošné:

- objemová sila pôsobiaca na objem tekutiny $\nu(t)$ je určená svojou hustotou $\mathbf{f} \in (\mathcal{C}(\mathcal{M}))^3$

$$\mathcal{F}_v(\nu(t), t) := \int_{\nu(t)} (\rho \mathbf{f})(x, t) dx,$$

- plošná sila reprezentuje pôsobenie tekutiny vo vnútri oblasti $\nu(t)$ v čase t a je daná tenzorom napätia $\mathcal{T} = (\tau_{ij})_{i,j=1}^3 \in (\mathcal{C} \times B_1(0))^3$:

$$\mathcal{F}_s(\nu(t), t) := \int_{\partial\nu(t)} \sum_{i,j=1}^3 n_{ij}(x) \tau_{ij}(x, t) dS,$$

kde

$$B_1(0) = \{z \in \mathbb{R}^d; |z| < 1\}$$

a $\mathbf{n}(x)$ je jednotková vonkajšia normála k $\partial\nu(t)$ v bode x .

Predpokladajme všeobecný tvar \mathcal{F} , t.j. zanedbáme viskozitu („vnútorné trenie“) tekutiny a uvažujme interakciu medzi objemami tekutiny iba prostredníctvom tlakovej sily:

$$\mathcal{F}(\nu(t), t) = \int_{\nu(t)} (\rho \mathbf{f})(x, t) dx + \int_{\partial\nu(t)} \sum_{i,j=1}^d n_{ij}(x) \tau_{ij}(x, t) dS.$$

Použitím vety o transporte (1.4.1) a Greenovej vety dostaneme Eulerove rovnice v konzervatívnom tvare:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) = \rho f_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

Vzťahy medzi tenzorom napätia a ostatnými veličinami určujúcimi prúdenie sú charakterizované *rheologickými rovnicami* a ak budeme brať do úvahy vplyv viskozity, tak pre viskózne prúdenie platí

$$\mathcal{T} = -p\mathbb{I} + \mathcal{T}',$$

kde \mathbb{I} je jednotkový tenzor. Viskóznou časť tenzoru napätia popisujú *Stokesové postuláty*:

1. $\mathcal{T} = -p\mathbb{I} + \mathcal{T}'$
2. Tenzor \mathcal{T}' je spojitou funkciou tenzoru rýchlosti deformácie

$$\mathbb{D}(\mathbf{v}) = (d_{ij})_{i,j=1}^d, \quad d_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

3. Tekutina je izotropné médium, t.j. vlastnosti tekutiny sú rovnaké vo všetkých smeroch.
4. Ak je tenzor rýchlosti deformácie nulový, potom na tekutinu pôsobia iba tlakové sily, t.j.

$$\mathbb{D} \equiv 0 \quad \implies \quad \mathcal{T} = -p\mathbb{I}.$$

5. Vzťah medzi \mathcal{T}' a \mathbb{D} je lineárny.

Ak tenzor napätia závisí lineárne na tenzore rýchlosti deformácie, nazývame tekutinu *Newtonovská*.

Predpokladajme, že sú Stokesové postuláty splnené, potom môžeme tenzor napätia vyjadriť v tvare

$$\mathcal{T} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D},$$

kde λ , μ sú konštantné alebo skalárne funkcie termodynamických veličín (viď. [10]). Ďalej nech platí

$$\rho \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}),$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}), \quad i, j \in 1, 2, 3.$$

Použijeme vetu o transporte (1.4.1) a odvodíme Navier-Stokesové rovnice:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} - \nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + \operatorname{div}(2\mu\mathbb{D}) \quad (1.11)$$

1.4.3 Rovnica energie

Zákon zachovania energie má nasledujúce znenie: okamžitá zmena celkovej energie objemu tekutiny, ktorý tvorí v každom časovom okamihu rovnaké častice a ktorý vyplňa objem $\nu(t)$ v čase t , je rovná súčtu výkonu objemových a povrchových síl a množstva tepla dodaného systému:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\nu(t)} E(x, t) dx &= \int_{\nu(t)} \rho(x, t) \mathbf{f}(x, t) \cdot \mathbf{v}(x, t) dx \\
&+ \int_{\partial\nu(t)} \sum_{i,j=1}^d \tau_{ij}(x, t) n_j(x) v_i(x, t) dS \\
&+ \int_{\nu(t)} \rho(x, t) q(x, t) dx - \int_{\partial\nu(t)} \mathbf{q}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) dS,
\end{aligned}$$

kde $E = \rho \left(e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right)$ je celková energia, e špecifická energia na jednotku hmotnosti a \mathbf{q} je tepelný tok. Za vhodných predpokladov,

$$\rho, f_{ij}, v_i, \tau_{ij}, q_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}), \quad i, j \in 1, 2, 3,$$

aplikujeme vetu o transporte (1.4.1), Fourierov zákon,

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta,$$

kde k je *koefficient tepelnej vodivosti*, θ je absolútna teplota a dostaneme rovnicu energie

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E\mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathcal{T}\mathbf{v}) + p\rho - \operatorname{div}\mathbf{q} \quad (1.12)$$

1.5 Termodynamické vzťahy

Systém rovníc (1.7), (1.11) a (1.12) obsahuje len päť rovníc (pre $d = 3$), ale až sedem neznámych: $v_1, v_2, v_3, \rho, p, \theta$ a E . Čiže pre úplnú formuláciu úlohy potrebujeme pridať ešte dve dodatočné rovnice.

Budeme sa zaoberať len ideálnym plynom, pre ktorý platia *stavové rovnice*

$$p = R\rho\theta, \quad (1.13)$$

$$e = c_V\theta, \quad (1.14)$$

kde $R = c_P - c_V$ je *plynová konštanta*, c_P *merná tepelná kapacita pri stálom tlaku* a c_V *merná tepelná kapacita pri stálom objeme*.

1.6 Stlačiteľné viskózne prúdenie

Sústavu rovníc (1.7), (1.11), (1.12), (1.13) môžeme zapísať v tvare

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^d \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^d \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s}, \quad (1.15)$$

kde \mathbf{w} je stavový vektor, \mathbf{f}_s neviskózne (*Eulerove*) toky, \mathbf{R}_s viskózne toky a pre $d = 3$ sú určene nasledujúc

$$\mathbf{w} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, E)^T, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = (\rho v_s, \rho v_1 v_s + \delta_{1s} p, \rho v_2 v_s + \delta_{2s} p, \rho v_3 v_s + \delta_{3s} p, (E + p)v_s)^T, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \left(0, \tau_{s1}, \tau_{s2}, \tau_{s3}, \sum_{j=1}^3 \tau_{sj} v_j + k \frac{\partial \theta}{\partial x_s} \right)^T. \quad (1.18)$$

Predpokladajme, že sa $\partial\Omega$ skladá z troch vzájomne disjunktných častí: $\partial\Omega_i$ vstupu, $\partial\Omega_o$ výstupu a $\partial\Omega_w$ pevnej steny. So začiatočnými a okrajovými podmienkami

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}^0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.19)$$

$$\rho = \rho_D, \mathbf{v} = \mathbf{v}_D, \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \tau_{ij} n_j \right) v_i + k \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega_i, \quad (1.20)$$

$$\sum_{j=1}^d \tau_{ij} n_j = 0, i = 1, \dots, d, \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega_o, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{v} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega_w \quad (1.22)$$

získavame formuláciu úlohy.

Kapitola 2

Nespojitá Galerkinova metóda

V nasledujúcej kapitole aplikujeme nespojitú Galerkinovu metódu na sústavu rovníc popisujúcich prúdenie z predchádzajúcej kapitoly. V texte používam poznatky z [7], [4], [9].

2.1 Triangulácia oblasti

Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je oblasť s Lipschitzovsky spojitou hranicou $\Gamma = \partial\Omega$ a nech \mathcal{T}_h je rozdelenie $\bar{\Omega}$, uzáveru Ω , na konečný počet vzájomne disjunktných oblastí K . Potom \mathcal{T}_h nazývame trianguláciou oblasti Ω .

$$\begin{aligned} \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K &= \bar{\Omega}, \\ K_i^0 \cap K_j^0 &= \emptyset \quad \forall K_i, K_j \in \mathcal{T}_h, K_i \neq K_j \end{aligned}$$

Polomer najväčšej sféry, ktorú môžeme vložiť do elementu K značíme $h_K = \text{diam}(K)$ a položíme $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$. Hranicu elementu K označíme ∂K a jeho Lebesgueovu mieru $|K|$.

Nech \mathcal{F}_h je množina hrán všetkých elementov triangulácie \mathcal{T}_h . Potom nech \mathcal{F}_h^I značí množinu všetkých vnútorných hrán Ω a \mathcal{F}_h^B množinu všetkých hrán hranice $\partial\Omega$. Zavedieme značenie

- $\mathcal{F}_h^i = \{\Gamma \in \mathcal{F}_h; \Gamma \subset \partial\Omega_i\}$,
- \mathcal{F}_h^D ... množina hrán na hranici $\partial\Omega$, na ktorých je zadaná Dirichletová okrajová podmienka, analogicky \mathcal{F}_h^N pre Neumannove okrajové podmienky

- $\mathcal{F}_h^{io} = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^o$
- podobne $\mathcal{F}_h^o, \mathcal{F}_h^w, \mathcal{F}_h^{DN}, \mathcal{F}_h^{ID}, \mathcal{F}_h^{IN}$.

Každému elementu K priradíme *lokálny Sobolevov index* $s_K \in \mathbb{N}$ a *lokálny (polynomiálny) stupeň aproximácie* $p_K \in \mathbb{N}$. Potom pre vektory $\mathbf{s} = (s_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ a $\mathbf{p} = (p_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ a danú trianguláciu \mathcal{T}_h definujeme

$$H^{\mathbf{s}}(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{\varphi; \varphi|_K \in H^{s_K}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2.1)$$

$$S_{h\mathbf{p}} = \{\varphi \in L^2(\Omega); \varphi|_K \in P_{p_K}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2.2)$$

kde $P_r(K)$ je priestor polynómov r -tého stupňa na K . Pre vektorové funkcie definujeme priestor

$$\mathbf{S}_{h\mathbf{p}} := (S_{h\mathbf{p}})^d,$$

analogicky $\mathbf{H}^{\mathbf{s}}(\Omega, \mathcal{T}_h)$.

Pre $\varphi \in \mathbf{H}^r(\Omega, \mathcal{T}_h)$, $r > 0$ a príslušnú jednotkovú vonkajšiu normálu \mathbf{n}_Γ budeme používať nasledovne značenie a konvencie

- $\Gamma \in \mathcal{F}_h^I \Leftrightarrow \Gamma = K_L \cap K_R, K_L, K_R \in \mathcal{T}_h$
 - v smere normály \mathbf{n}_Γ leží K_L ,
 - $\varphi|_\Gamma^{(L)}$... stopa $\varphi|_{K_L}$ na Γ ,
 - $\langle \varphi \rangle_\Gamma = \frac{1}{2}(\varphi|_\Gamma^{(L)} + \varphi|_\Gamma^{(R)})$,
 - $[\varphi]_\Gamma = \varphi|_\Gamma^{(L)} - \varphi|_\Gamma^{(R)}$,
- $\Gamma \in \mathcal{F}_h^{DN} \Leftrightarrow \Gamma \subset K_R \cap \partial\Omega$
 - \mathbf{n}_Γ smeruje do vonkajšku Ω
 - $\langle \varphi \rangle_\Gamma \equiv [\varphi]_\Gamma \equiv \varphi|_\Gamma^{(R)}$.

2.2 Diskretizácia

Z formulácie problému (1.15) získame definíciu slabého riešenia štandardným postupom, podrobne viď. [4], [9], [10], [11], [12].

Nech \mathbf{w} je riešenie (1.15), $\mathbf{w}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))$. Rovnicu (1.15) vynásobíme funkciou $\varphi \in \mathbf{H}^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$, zintegrujeme nad $K \in \mathcal{T}_h$, použijeme

Greenovu vetu a sčítame cez všetky elementy triangulácie. Dostaneme vzťah

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_{\partial K} \sum_{s=1}^d \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) n_s \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS - \int_K \sum_{s=1}^d \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_s} \, dx \right) \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \sum_{s=1}^d \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_s} \, dx \\
&- \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^d \langle \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) \rangle n_s \cdot [\boldsymbol{\varphi}] \, dS \\
&- \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^D} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^d \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) n_s \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS. \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Rovnicu (2.3) rozšírime o penalizačné členy

$$\begin{aligned}
&+ \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I} \int_{\Gamma} \sigma[\mathbf{w}] \cdot [\boldsymbol{\varphi}] \, dS - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^D} \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{w}_B \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^w} \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{w} \cdot \zeta(\boldsymbol{\varphi}) \, dS \\
&- \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^{io}} \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{w}_B \cdot \zeta(\boldsymbol{\varphi}) \, dS - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^w} \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{w}_B \cdot \zeta(\boldsymbol{\varphi}) \, dS,
\end{aligned}$$

kde σ je penalizačný parameter zvolený následovne

$$\sigma|_{\Gamma} = \frac{C_W}{\text{diam}(\Gamma) Re}, \quad \Gamma \in \mathcal{F}_h^B,$$

Re je Reynolds číslo, C_W vhodná konštanta a stavový vektor \mathbf{w}_B je v závislosti na okrajových podmienkach určený

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_B &= (\rho|_{\Gamma}, 0, \dots, 0, \theta|_{\Gamma} \rho|_{\Gamma})^T, \quad \Gamma \in \mathcal{F}_h^w, \\
\mathbf{w}_B &= LRP(\mathbf{w}|_{\Gamma}^{(L)}, \mathbf{w}_D, \mathbf{n}_{\Gamma}), \quad \Gamma \in \mathcal{F}_h^{io}.
\end{aligned}$$

$LRP(\cdot, \cdot, \cdot)$ je riešenie lokálneho Riemannového problému na hrane $\Gamma \in \mathcal{F}_h^{io}$ pre daný stavový vektor \mathbf{w}_D . Zobrazenie $\zeta : \mathbb{R}^{d+2} \rightarrow \mathbb{R}^{d+2}$ penalizuje komponenty \mathbf{w} , pre ktoré je zadaná Dirichletová podmienka na pevnej stene

$$\zeta(\mathbf{w}) = (0, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{d+1}, 0)^T.$$

$\rho_D \cdot \mathbf{v}_D$ funkcie sú dané v okrajových podmienkach a $\rho|_\Gamma$, θ_Γ sú hodnoty hustoty a absolútnej teploty extrapolované na príslušné časti hranice.

Viskózne toky \mathbf{R}_s môžeme vyjadriť v tvare

$$\mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k}, \quad s = 1, \dots, d,$$

kde $K_{s,k}$ sú matice typu $(d+2) \times (d+2)$ (podrobne [2], [4], [11], [12]).

Do rovnice (2.3) doplníme stabilizačné členy

$$\begin{aligned} & - \eta \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^d \left\langle \sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}^T(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle n_s \cdot [\mathbf{w}] dS \\ & + \eta \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^D} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^d \sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}^T(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} n_s \cdot \mathbf{w}_B dS \end{aligned}$$

kde η je tzv. stabilizačný parameter. η môžeme zvoliť ľubovoľne, avšak najbežnejšie sú nasledujúce tri varianty:

- $\eta = 1 \dots$ *SIPG* (*Symmetric Interior Penalty Galerkin*),
- $\eta = 0 \dots$ *IIPG* (*Incomplete IPG*),
- $\eta = -1 \dots$ *NIPG* (*Nonsymmetric IPG*).

Definujeme formy

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h(\mathbf{w}, \varphi) & := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \sum_{s=1}^d \left(\sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} dx \\ & - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^d \left\langle \sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right\rangle n_s \cdot [\varphi] dS \\ & - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^D} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^d \left(\sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) n_s \cdot \varphi dS \\ & - \eta \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^d \left\langle \sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}^T(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle n_s \cdot [\mathbf{w}] dS \\ & + \eta \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^D} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^d \sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}^T(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} n_s \cdot \mathbf{w}_B dS, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_h(\mathbf{w}, \varphi) &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_{\partial K} \sum_{s=1}^d \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) n_s \cdot \varphi \, dS - \int_K \sum_{s=1}^d \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \, dx \right), \\
\mathcal{J}_h^\sigma(\mathbf{w}, \varphi) &:= \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I} \int_{\Gamma} \sigma[\mathbf{w}] \cdot [\varphi] \, dS - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^D} \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{w}_B \cdot \varphi \, dS \\
&\quad - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^w} \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{w} \cdot \zeta(\varphi) \, dS - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^{io}} \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{w}_B \cdot \zeta(\varphi) \, dS \\
&\quad - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^w} \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{w}_B \cdot \zeta(\varphi) \, dS,
\end{aligned}$$

Potom môžeme rovnicu (2.3) vyjadriť v tvare:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{w}_h}{\partial t}, \varphi_h \right) + \mathbf{a}_h(\mathbf{w}, \varphi) + \mathbf{b}_h(\mathbf{w}, \varphi) + \mathcal{J}_h^\sigma(\mathbf{w}, \varphi) = 0.$$

2.2.1 Neviskózne členy

Toky cez hranice elementov aproximujeme (podobne ako pri metóde konečných objemov) pomocou numerického toku

$$\sum_{s=1}^d \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) n_s \cdot \varphi \Big|_{\partial K} \approx H(\mathbf{w}|_{\Gamma}^{(L)}, \mathbf{w}|_{\Gamma}^{(R)}, \mathbf{n}) \cdot \varphi \Big|_{\partial K}$$

kde $H(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$ splňa

- $H(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$ je Lipschitzovsky spojitý vzhľadom k \mathbf{u} a \mathbf{v} ,
- $H(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$ je konzistentný

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^d \mathbf{f}_s(\mathbf{u}) n_s, \tag{2.4}$$

- $H(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$ je konzervatívny

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = -H(\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{n}). \tag{2.5}$$

Keďže pre \mathbf{f}_s platí rovnosť (viď. [10])

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbb{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w}, \quad s = 1, \dots, d, \quad (2.6)$$

kde

$$\mathbb{A}_s(\mathbf{w}) \equiv \frac{D\mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}}, \quad s = 1, \dots, d, \quad (2.7)$$

sú Jakobiho matice \mathbf{f}_s , položíme

$$\sum_{s=1}^d \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \Big|_K = \sum_{s=1}^d \mathbb{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \Big|_K.$$

Ďalej definujeme Vijayasundaramov numerický tok (z [14]):

$$H_V(\mathbf{w}|_\Gamma^{(L)}, \mathbf{w}|_\Gamma^{(R)}, \mathbf{n}) = \mathbb{P}^+(\langle \mathbf{w}|_\Gamma, \mathbf{n} \rangle) \mathbf{w}|_\Gamma^{(L)} + \mathbb{P}^-(\langle \mathbf{w}|_\Gamma, \mathbf{n} \rangle) \mathbf{w}|_\Gamma^{(R)}$$

kde \mathbb{P} , \mathbb{T} , \mathbb{A} sú také matice, že

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) &= \sum_{s=1}^d \mathbb{A}_s(\mathbf{w})n_s = \mathbb{T}\mathbb{A}\mathbb{T}^{-1}, \\ \mathbb{P}^\pm &= \mathbb{T}\mathbb{A}^\pm\mathbb{T}^{-1}. \end{aligned}$$

Zavedieme formu $\tilde{\mathbf{b}}_h$ (viď. [5], [6]):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}_h(\mathbf{w}, \varphi) &= \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^B} \int_{\Gamma} \left(\mathbb{P}^+(\mathbf{w}, \mathbf{n})\mathbf{w}|_\Gamma^{(L)} \right) \cdot \varphi \, dS \\ &+ \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^w} \int_{\Gamma} \left(\mathbb{P}^-(\mathbf{w}, \mathbf{n})\tilde{\mathcal{M}}(\mathbf{w}|_\Gamma^{(L)}) \right) \cdot \varphi \, dS \\ &+ \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I} \int_{\Gamma} \left(\mathbb{P}^+(\langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{w}|_\Gamma^{(L)} + \mathbb{P}^-(\langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle)\mathbf{w}|_\Gamma^{(R)} \right) \cdot [\varphi] \, dS \\ &- \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \sum_{s=1}^d \mathbb{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \, dx, \end{aligned}$$

kde zobrazenie $\tilde{\mathcal{M}} : \mathbb{R}^{d+2} \rightarrow \mathbb{R}^{d+2}$ má pre $\mathbf{w} = (\rho, \mathbf{v}, e)^T$ predpis

- neviskózne prúdenie

$$\tilde{\mathcal{M}}(\mathbf{w}) := (\rho, \rho\mathbf{v} - 2\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), e)^T,$$

- viskózne prúdenie

$$\tilde{\mathcal{M}}(\mathbf{w}) := (\rho, -\rho\mathbf{v}, e)^T.$$

2.2.2 Viskózne členy

Nech \mathbf{w}_N je stavový vektor spĺňajúci (1.22) a nech $\mathbf{K}_{s,k}^w$, $s, k = 1, \dots, d$ sú matice identické, až na posledný nulový riadok, s $\mathbf{K}_{s,k}$

$$\sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}^w(\mathbf{w}_N) \frac{\partial \mathbf{w}_N}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma} := \sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}_N) \frac{\partial \mathbf{w}_N}{\partial x_k} \Big|_{\Gamma}, \quad \Gamma \in \mathcal{F}_h^w, s = 1, \dots, d.$$

Budeme sa zaoberať len *IIPG* variantou nespojitej Galerkinovej metódy, t.j. položíme $\eta = 0$. Definujeme formu $\tilde{\mathbf{a}}_h$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}) &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \sum_{s=1}^d \left(\sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_s} dx \\ &\quad - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^d \left\langle \sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right\rangle n_s \cdot [\boldsymbol{\varphi}] dS \\ &\quad - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^{io}} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^d \left(\sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) n_s \cdot \boldsymbol{\varphi} dS \\ &\quad - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^w} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^d \left(\sum_{k=1}^d \mathbf{K}_{s,k}^w(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) n_s \cdot \boldsymbol{\varphi} dS. \end{aligned}$$

2.3 Numerické riešenie

Nech $\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h \in \mathbf{H}^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$, položíme

$$\tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) := \tilde{\mathbf{a}}_h(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) + \tilde{\mathbf{b}}_h(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) + \mathcal{J}_h^\sigma(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h). \quad (2.8)$$

Definícia. Funkciu $\mathbf{w}_h \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{S}_{hp})$ nazývame *semi-diskrétnym* riešením (1.15) práve vtedy, ak spĺňa

$$\begin{aligned} 1. & \mathbf{w}_h(0) = \mathbf{w}_{h,0}, \\ 2. & \left(\frac{\partial \mathbf{w}_h}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi}_h \right) + \tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_h \in \mathbf{S}_{hp}, \forall t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.9)$$

kde $\mathbf{w}_h(0)$ je \mathbf{S}_{hp} -aproximáciou začiatočnej podmienky.

Aproximujeme časovú deriváciu v (2.9) pomocou spätnej Eulerovej metódy. Nech $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = T$ je rozdelenie časového intervalu $(0, T)$, $\tau_m = t_m - t_{m-1}$ a nech $\mathbf{w}_h^m \in \mathbf{S}_{hp}$ je po častiach polynomiálna aproximácia $\mathbf{w}_h(t_m)$, $m = 0, 1, \dots, r$. Nasledujúce schéma je prvého radu v čase (pretože používame Eulerovu metódu).

Definícia. Funkcie $\mathbf{w}_h^m \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{S}_{hp})$, $m = 0, 1, \dots, r$ nazývame približným riešením (1.15) podľa *implicitnej* DG-metódy práve vtedy, ak spĺňajú

1. \mathbf{w}_h^0 je \mathbf{S}_{hp} -aproximáciou začiatočnej podmienky (2.10)
2. $\left(\frac{\mathbf{w}_h^m - \mathbf{w}_h^{m-1}}{\tau_m}, \boldsymbol{\varphi}_h \right) + \tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}_h^m, \boldsymbol{\varphi}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_h \in \mathbf{S}_{hp}, m = 0, \dots, r,$
3. $\mathbf{w}_h^m \in \mathbf{S}_{hp}$.

Definícia. Funkciu $\mathbf{w}_h \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{S}_{hp})$ nazývame diskretným riešením stacionárnej úlohy prúdenia ($\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \equiv 0$ v (1.15)) práve vtedy, ak spĺňa

$$\tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_h \in \mathbf{S}_{hp}. \quad (2.11)$$

Poznamenajme, že metóda je konzistentná, t.j. pokiaľ $\mathbf{u} : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je dostatočne regulárne riešenie (1.15), potom platí (viď. [4])

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right)_{L^2(\Omega)} + \tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^2(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (2.12)$$

2.4 Implementácia

Nech $N_h = \dim \mathbf{S}_{hp}$ a nech $B_h = \{\mathbf{z}_i \in \mathbf{S}_{hp}; i = 1, \dots, N_h\}$ je báza priestoru \mathbf{S}_{hp} . Potom \mathbf{w}_h^m môžeme vyjadriť ako súčet lineárne nezávislých funkcií báze B_h

$$\mathbf{w}_h^m = \sum_{i=1}^{N_h} \xi_i^m \mathbf{z}_i, \quad \xi_i^m \in \mathbb{R}, \mathbf{z}_i \in B_h, i = 1, \dots, N_h.$$

Ďalej definujeme vektor $\mathbf{W}_h^m := \{\xi_i^m\}_{i=1}^{N_h}$. Pomocou izomorfizmu

$$\mathbf{w}_h^m \in \mathbf{S}_{hp} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{W}_h^m \in \mathbb{R}^{N_h}$$

formulujeme úlohu (2.10) ako algebraický problém

$$\left(\frac{1}{\tau_m} \mathbf{M} + \mathbf{C}(\mathbf{W}_h^m) \right) \mathbf{W}_h^m = \frac{1}{\tau_m} \mathbf{M} \mathbf{W}_h^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

kde \mathbb{C} korešponduje s formou $\tilde{\mathbf{c}}_h$ a \mathbb{M} so skalárnym súčinom $(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)_{L^2(\Omega)}$. Pri voľbe vhodnej konštrukcie bázy B_h je možné dosiahnuť, že matica \mathbb{M} bude blokovo-diagonálna.

Úloha (2.13) je sústavou nelineárnych algebraických rovníc, ktorú môžeme pomocou Newtonovej metódy iteratívne riešiť. V jednotlivých iteráciách Newtonovej metódy použijeme na riešenie sústavy lineárnych rovníc vhodnú iteratívnu metódu (napr. GMRES), detailne [4], [9].

Kapitola 3

Odhad rezidua

V súčasnosti je často chyba približného riešenia pre nelineárne úlohy v čase odhadovaná nasledujúcim spôsobom:

- u ... presné riešenie úlohy,
- u_h ... približné riešenie úlohy,
- \mathcal{R} ... reziduum,
- $\tilde{\mathcal{R}}$... aproximácia rezidua,

položíme

$$\mathcal{R}(u_h) - \mathcal{R}(u) = \mathcal{R}(u_h) - \tilde{\mathcal{R}}(u_h) + \tilde{\mathcal{R}}(u_h) - \mathcal{R}(u),$$

potom $\mathcal{R}(u_h) - \tilde{\mathcal{R}}(u_h)$ označuje časovú chybu a $\tilde{\mathcal{R}}(u_h) - \mathcal{R}(u)$ označuje priestorovú chybu. Pre daný spôsob rozdelenia však nemáme rigorózne zdôvodnenie.

Cieľom kapitoly je rozšíriť odhad rezidua pre stacionárny prípad Navier-Stokesových rovníc na nestacionárnu úlohu. Navrhovaný spôsob je založený na odhade rezidua v duálnej norme.

3.1 Stacionárna úloha

Najprv uvedieme z [9], [5], [6] odhad pre stacionárnu úlohu

$$\sum_{s=1}^d \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^d \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s}. \quad (3.1)$$

Prevedieme diskretizáciu pre rovnicu (3.1) analogicky ako pre nestacionárny prípad prúdenia (1.15) a dostaneme formu $\tilde{\mathbf{c}}_h$, vid'. (2.8) a formuláciu diskrétneho riešenia (2.11).

Nech X je priestor funkcií s normou $\|\cdot\|_X$ (jej voľbu popíšeme neskôr) a príslušným duálnym priestorom X' . Nech $u \in \mathbf{H}^2(\Omega) \subset X$ je slabé riešenie (3.1) a $u_h \in X$. Položme $X = \mathbf{H}^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$, kde \mathcal{T}_h je triangulácia Ω . Pomocou formy $\tilde{\mathbf{c}}_h$ zdefinujeme operátor $\mathbf{A}_h : X \rightarrow X'$

$$\langle \mathbf{A}_h u_h, \varphi \rangle = \tilde{\mathbf{c}}_h(u_h, \varphi), \quad u_h, \varphi \in X. \quad (3.2)$$

Potom duálna norma operátora \mathbf{A}_h je daná nasledovne

$$\|\mathbf{A}_h u_h\|_{X'} = \sup_{0 \neq \varphi \in X} \frac{\langle \mathbf{A}_h u_h, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_X}.$$

Konzistencia DG-metódy (2.12) umožňuje definovať reziduum v tvare

$$\mathcal{R}(u_h) = \|\mathbf{A}_h u_h - \mathbf{A}_h u\|_{X'} = \|\mathbf{A}_h u_h\|_{X'} = \sup_{0 \neq \varphi \in X} \frac{\langle \mathbf{A}_h u_h, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_X},$$

kde u je presné riešenie a $\mathbf{A}_h u = 0$. Spočítať hodnotu $\sup_{0 \neq \varphi \in X} \frac{\tilde{\mathbf{c}}_h(u_h, \varphi)}{\|\varphi\|_X}$ nedokážeme, pretože X je nekonečno-dimenzionálny priestor. Môžeme však hľadať supremum nad dostatočne veľkou konečne-dimenzionálnou podmnožinou X .

Nech $S_{h\mathbf{p}}$ je definovaný pre \mathcal{T}_h ako v predchádzajúcej kapitole. Zavedieme dva konečne-dimenzionálne priestory:

$$\begin{aligned} S_{h\mathbf{p}+1} &= \{\varphi \in L^2(\Omega); \varphi|_K \in P_{\mathbf{p}+1}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ S_{K,r} &= \{\varphi \in L^2(\Omega); \varphi|_K \in P_r(K), \varphi|_{\Omega \setminus K} = 0\}. \end{aligned}$$

Potom definujeme

$$\eta(u_h) = \sup_{0 \neq \varphi \in S_{h\mathbf{p}+1}} \frac{\tilde{\mathbf{c}}_h(u_h, \varphi)}{\|\varphi\|_X}, \quad u_h \in X$$

ako *globálny indikátor rezidua* a

$$\eta_K(u_h) = \sup_{0 \neq \varphi \in S_{K,\mathbf{p}+1}} \frac{\tilde{\mathbf{c}}_h(u_h, \varphi)}{\|\varphi\|_X}, \quad u_h \in X, K \in \mathcal{T}_h \quad (3.3)$$

lokálny indikátor rezidua na elemente.

Ak $u \in X$ je riešenie (3.1), potom platí

$$0 = \eta(u) = \eta_K(u) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

a tiež

$$\eta(u_h) \leq \mathcal{R}(u_h) = \|\mathbf{A}_h u_h - \mathbf{A}_h(u)\|_{X'} \quad \forall u_h \in X.$$

Pokiaľ $((\cdot, \cdot)) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ skalárny súčin generujúci normu $\|\cdot\|_X$ spĺňa pre $p \geq 0$ podmienku

$$((\varphi, \psi))_X = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{S}_{K_i, p}, \forall \psi \in \mathbf{S}_{K_j, p}, K_i \neq K_j,$$

potom platí (viď. [6])

$$\eta(u_h)^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K(u_h)^2.$$

Ako vhodná voľba sa ukazuje skalárny súčin

$$((\varphi, \psi))_X = (\varphi, \psi)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \sum_{K \in \mathcal{F}_h^V} (\varphi, \psi)_{L^2(K)} \quad \varphi, \psi \in X$$

s príslušnou normou $\|\cdot\|_X = (\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\cdot\|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2)^{1/2}$, kde $\varepsilon = \frac{1}{Re}$ alebo ε je vhodne zvolená konštanta, daná pomerom difúzie k konvekcií.

Výpočet $\eta_K(\mathbf{w}_h)$

Zvoľme $K \in \mathcal{T}_h$ ľubovoľne, ale pevne a nech $\boldsymbol{\psi}_i$, $i = 1, \dots, N$ je príslušná báza priestoru \mathbf{S}_{K, p_K} . Definujeme maticu

$$\mathbb{C} := \{C_{ij}\}_{i,j=1}^N, \quad C_{ij} := ((\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_j))_X$$

a položíme

$$\mathbf{d} := \{d_i\}_{i=1}^N, \quad d_i := \tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\psi}_i).$$

Nech $\boldsymbol{\psi} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \boldsymbol{\psi}_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, potom

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_X = \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j C_{ij},$$

teda (3.3) je ekvivalentné úlohe hľadania maxima pre funkcionál

$$\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\psi}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\psi}_i) \quad (3.4)$$

nad množinou koeficientov $\alpha_i \in \mathbb{R}$, ktoré splňajú

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j C_{ij} = 1.$$

Danú úlohu môžeme riešiť pomocou metódy Lagrangeových multiplikátorov. Nech

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\alpha_1, \dots, \alpha_N) &= \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_N) - \lambda \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j C_{ij} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_i d_i - \lambda \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j C_{ij}, \end{aligned}$$

potom pre maximum funkcionálu (3.4) platí

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \alpha_i} = d_i + 2\lambda d_i C_{ii} + \lambda \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j C_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \\ 1 &= \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j C_{ij}, \end{aligned}$$

alebo v maticovom tvare

$$0 = \mathbf{d} + \lambda \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.5)$$

$$1 = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.6)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{C}} := \{\tilde{C}_{ij}\}_{i,j=1}^N, \quad \tilde{C}_{ij} = C_{ij} + \delta_{ij} C_{ii}.$$

Z (3.5) plynie identita

$$\boldsymbol{\alpha} = -\lambda^{-1} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{d},$$

ktorú aplikujeme na (3.6) a dostaneme

$$\lambda^2 = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathbf{C} \tilde{\boldsymbol{\alpha}},$$

kde

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = -\tilde{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{d}.$$

Pokiaľ položíme $\boldsymbol{\alpha} := \frac{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}{\lambda}$, platí

$$\eta_K(\mathbf{w}_h) = \sum_{i=1}^N \alpha_i d_i.$$

3.2 Nestacionárna úloha

Na rozdiel od stacionárneho prípadu musíme brať do úvahy i časovú deriváciu, $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$, v sústave (1.15). Na (2.10) sa môžeme pozerat' ako na časovo nespojitú a po častiach konštantnú Galerkinovu metódu, podobne ako v [13].

Skonstruujeme „trianguláciu“ \mathcal{T}_τ časového intervalu $(0, T)$, t.j. rozdelíme $(0, T)$ na $r > 0$ intervalov I_m :

$$\begin{aligned} \bigcup_{m=1}^r I_m &= (0, T), I_m = (t_{m-1}, t_m), \\ \{I_m\}_{m=1}^r &= \mathcal{T}_\tau, \tau_m = t_m - t_{m-1}. \end{aligned}$$

Prenásobíme (2.10) funkciou $\psi \in H^1(I_m)$ a integrujeme nad I_m :

$$\int_{I_m} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right) \psi dt + \int_{I_m} \tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}) \psi dt = 0$$

Platí rovnosť (*per-partes*):

$$\int_{I_m} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right) \psi dt = (\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}) \psi|_{t_m}^- - (\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}) \psi|_{t_{m-1}}^+ - \int_{I_m} (\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}) \psi' dt.$$

Položme $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}) \psi|_{t_{m-1}}^+ = (\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}) \psi|_{t_{m-1}}^-$, dosadením späť a opätovným použitím *per-partes* dostaneme:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{I_m} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right) \psi dt \\ &+ \int_{I_m} \tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}) \psi dt + (\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}) \psi|_{t_{m-1}}^+ - (\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}) \psi|_{t_{m-1}}^-. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Označme

$$\begin{aligned} Y &:= H^1(\mathcal{T}_\tau; \mathbf{H}^2(\Omega, \mathcal{T}_h)), \\ \{\varphi\}_m &= \varphi_+^m - \varphi_-^m, \\ \varphi_\pm^m &= \lim_{\delta \rightarrow 0_\pm} \varphi(t_m + \delta). \end{aligned}$$

Pomocou formulácie (3.7) definujeme formu

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}}_{h,\tau}^m(\mathbf{w}_h, \phi_h) &= \int_{I_m} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_h}{\partial t}, \phi_h \right) dt + (\{\mathbf{w}_h\}_{m-1}, \phi_h(t_{m-1}^+, x))_{L^2(I_m)} \\ &+ \int_{I_m} \tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}, \phi_h) dt, \quad \mathbf{w}_h, \phi_h \in Y. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Poznamenanajme, že pre presné riešenie \mathbf{w} úlohy (1.15) platí

$$\tilde{\mathbf{c}}_{h,\tau}^m(\mathbf{w}, \phi_h) = 0 \quad \forall \phi_h \in Y. \quad (3.9)$$

Podobne ako pre stacionárny prípad zavedieme operátor $\mathbf{A}_{h,\tau}^m : Y \rightarrow Y'$

$$\langle \mathbf{A}_{h,\tau}^m \mathbf{w}_h, \phi_h \rangle = \tilde{\mathbf{c}}_{h,\tau}^m(\mathbf{w}_h, \phi_h), \quad \mathbf{w}_h, \phi_h \in Y. \quad (3.10)$$

Potom duálna norma operátora $\mathbf{A}_{h,\tau}^m$ je daná následovne

$$\|\mathbf{A}_{h,\tau}^m \mathbf{w}_h\|_{Y'} = \sup_{0 \neq \phi_h \in Y} \frac{\langle \mathbf{A}_{h,\tau}^m \mathbf{w}_h, \phi_h \rangle}{\|\phi_h\|_Y}.$$

a reziduum zapíšeme s pomocou (3.9) v nasledujúcom tvare

$$\mathcal{R}^m(\mathbf{w}_h) = \|\mathbf{A}_{h,\tau}^m \mathbf{w}_h - \mathbf{A}_{h,\tau}^m \mathbf{w}\|_{Y'} = \|\mathbf{A}_{h,\tau}^m \mathbf{w}_h\|_{Y'} = \sup_{0 \neq \phi_h \in Y} \frac{\langle \mathbf{A}_{h,\tau}^m \mathbf{w}_h, \phi_h \rangle}{\|\phi_h\|_Y}.$$

Opäť kvôli veľkosti priestoru Y nedokážeme vyčíslit hodnotu

$$\sup_{0 \neq \phi_h \in Y} \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{h,\tau}^m(\mathbf{w}_h, \phi_h)}{\|\phi_h\|_Y},$$

preto budeme hľadať supremum nad dostatočne veľkou podmnožinou Y . Zavedieme priestor $S_{h,\mathbf{p}}^{\tau,q}$ po častiach polynomiálnych funkcií v časopriestore ([15], [9])

$$S_{h,\mathbf{p}}^{\tau,q} = \{\phi \in L^2(\Omega_T); \phi|_{K \times I_m} = \sum_{s=0}^q \varphi_s z^s, \varphi_s \in P_q(I_m), z^s \in S_{hp}, I_m \in \mathcal{T}_\tau\},$$

kde $q > 0$ určuje stupeň polynomiálnej aproximácie v čase. Zrejme $S_{h,\mathbf{p}}^{\tau,q} \subset Y$. Podobne ako pre stacionárny prípad definujeme odhad

$$\eta_T(\mathbf{w}_h) = \sup_{0 \neq \phi_h \in S_{h,\mathbf{p}}^{\tau,q+1}} \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{h,\tau}^m(\mathbf{w}_h, \phi_h)}{\|\phi_h\|_Y}.$$

Avšak nemusíme sa ohraničiť iba na jeden typ chyby, „prirodzene“ sa ponúka možnosť rozšíriť množinu, nad ktorou hľadáme supremum

$$\eta_S(\mathbf{w}_h) = \sup_{0 \neq \phi_h \in \mathbf{S}_{h,\mathbf{p}+1}^{\tau,q}} \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{h,\tau}^m(\mathbf{w}_h, \phi_h)}{\|\phi_h\|_Y},$$

$$\eta_{ST}(\mathbf{w}_h) = \sup_{0 \neq \phi_h \in \mathbf{S}_{h,\mathbf{p}+1}^{\tau,q+1}} \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{h,\tau}^m(\mathbf{w}_h, \phi_h)}{\|\phi_h\|_Y}.$$

Zrejme pre $\mathbf{w}_h \in \mathbf{S}_{h,\mathbf{p}}^{\tau,q}$ platí:

$$\eta_S \leq \eta_{ST},$$

$$\eta_T \leq \eta_{ST}.$$

Keď $\mathbf{w}_h \in \mathbf{S}_{h,\mathbf{p}}^{\tau,q+1}$ je približné riešenie (2.10), potom platí

$$\eta_S(\mathbf{w}) = \eta_T(\mathbf{w}) = \eta_{ST}(\mathbf{w}) = 0.$$

Pri aplikácii nám bude stačiť (pre používané (2.10) schéma) brať do úvahy $q = 0$ a $\text{supp}(\phi_h) \subset I_m \times \Omega$.

Nech $\phi = \psi(t)\varphi(x)$, $\psi|_{I_m} \in P_q(I_m)$, $I_m \in \mathcal{T}_\tau$, $\varphi \in S_{h,\mathbf{p}}$, potom z definície normy Bochnerového priestoru Y

$$\|\phi\|_Y^2 = \sum_{I_m \in \mathcal{T}_\tau} \int_{I_m} \left(\|\psi(t)\varphi(x)\|_X^2 + \left\| \frac{d}{dt}(\psi(t)\varphi(x)) \right\|_X^2 \right) dt$$

platí

$$\|\phi\|_Y = \|\psi\|_{H^1((0,T),\mathcal{T}_\tau)} \|\varphi\|_X.$$

Uvažujme \mathbf{w}_h konštantné v čase, potom η_S nezávisí na τ_m

$$\begin{aligned} \eta_S(\mathbf{w}_h) &= \sup_{0 \neq \phi_h \in \mathbf{S}_{h,\mathbf{p}+1}^{\tau,q}} \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{h,\tau}^m(\mathbf{w}_h, \phi_h)}{\|\phi_h\|_Y} = \sup_{\substack{\phi_h \in \mathbf{S}_{h,\mathbf{p}+1}^{\tau,q} \\ \phi_h = \psi_h(t)\varphi_h(x) \neq 0}} \frac{\int_{I_m} \tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}_h, \phi_h) dt}{\|\psi_h\|_Y \|\varphi_h\|_X} \\ &= \sup_{\substack{\phi_h \in \mathbf{S}_{h,\mathbf{p}+1}^{\tau,q} \\ \phi_h = \psi_h(t)\varphi_h(x) \neq 0}} \frac{\int_{I_m} \psi_h dt}{\|\psi_h\|_Y} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}_h, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|_X} \\ &= \sup_{0 \neq \varphi_h \in \mathbf{S}_{h,\mathbf{p}+1}} \bar{C} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{c}}_h(\mathbf{w}_h, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|_X}, \quad \bar{C} > 0. \end{aligned}$$

Uvažujme \mathbf{w}_h , ktoré je presné na časovom intervale I_m , potom

$$\begin{aligned}\eta_T(\mathbf{w}_h) &= \sup_{0 \neq \phi_h \in \mathcal{S}_{h,\mathbf{P}}^{\tau,q+1}} \frac{\tilde{\mathcal{C}}_{h,\tau}^m(\mathbf{w}_h, \phi_h)}{\|\phi_h\|_Y} = \sup_{\substack{\phi_h \in \mathcal{S}_{h,\mathbf{P}}^{\tau,q+1} \\ \phi_h = \psi_h(t)\varphi_h(x) \neq 0}} \frac{(\{\mathbf{w}_h\}_{m-1}, \phi_h(t_{m-1}^+, x))}{\|\psi_h\|_Y \|\varphi_h\|_X} \\ &= O(\tau_m).\end{aligned}$$

Vhodnosť odhadu

Aby sme mohli pozorovať chovanie definovaných odhadov vykonáme sériu výpočtov pre úlohu

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) &= \varepsilon \Delta u, \\ u(x, 0) &= u_0, \\ u|_{\partial\Omega \times (0,T)} &= u_D,\end{aligned}\tag{3.11}$$

kde $\Omega = (-1, 1)^2$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $T = 1$ a u_0 , u_D sú zvolené tak, aby

$$u(x_1, x_2, t) = \left(1 + \exp\left(\frac{1 + x_1 + x_2 - t}{2\varepsilon}\right) \right)^{-1}$$

bolo riešením (3.11). Keďže poznáme exaktné riešenie úlohy, môžeme určiť i e_h . Spočítame teda riešenie, chybu a odhady na konci výpočtu. Výpočty vykonávame

- pre rôzne hrubé siete (uniformné trojuholníkové),
- pre rôzne stupne aproximácie,
- pre rôzne veľkosti časového kroku (explicitne určené).

Budeme si všímať chovanie jednotlivých odhadov rezidua. Očakávame, že pre zmenšujúci sa časový krok bude klesať $\|e_h\|$ i η_T , η_{ST} . Podobne pre zvyšujúci sa stupeň aproximácie alebo pre jemnejšiu sieť očakávame, že bude klesať s $\|e_h\|$ aj η_T a η_{ST} .

Z výsledkov (tabuľka 3.1) je vidieť, že

1. od určitej veľkosti časového kroku τ sa zásadne nemení $\|e_h\|$,
2. v rovnakom kroku ako v 1. je pomer $\frac{\eta_S}{\eta_T} \sim 10^2$,

3. od rovnakého kroku ako v 1., pre znižujúci časový krok τ stúpa η_{ST} i pomer $\frac{\eta_S}{\eta_T}$,
4. pre zvyšujúci sa stupeň aproximácie p_K nastáva stav z 1. pri menšom časovom kroku,
5. podobne pre postupne zjemňovanú sieť (h) nastáva stav z 1. pri menšom časovom kroku.

p_K	h	$\#\mathcal{T}_h$	DOF	τ	$\ e_h\ _{L^2(0,T;X)}$	η_S	η_T	η_{ST}	η_S/η_T
1	2.357E-01	288	864	2.500E-02	3.311E-01	4.790E-01	1.775E-02	4.793E-01	2.699E+01
1	2.357E-01	288	864	1.250E-02	3.243E-01	5.509E-01	9.637E-03	5.510E-01	5.717E+01
1	2.357E-01	288	864	6.250E-03	3.224E-01	5.921E-01	5.720E-03	5.922E-01	1.035E+02
1	2.357E-01	288	864	3.125E-03	3.218E-01	6.151E-01	3.077E-03	6.151E-01	1.999E+02
1	2.357E-01	288	864	1.563E-03	3.217E-01	6.272E-01	1.308E-03	6.272E-01	4.796E+02
1	2.357E-01	288	864	7.815E-04	3.217E-01	6.333E-01	6.179E-04	6.333E-01	1.025E+03
1	1.178E-01	1152	3456	2.500E-02	2.478E-01	2.302E-01	1.953E-02	2.310E-01	1.178E+01
1	1.178E-01	1152	3456	1.250E-02	2.243E-01	2.851E-01	1.046E-02	2.853E-01	2.725E+01
1	1.178E-01	1152	3456	6.250E-03	2.167E-01	3.219E-01	5.858E-03	3.220E-01	5.496E+01
1	1.178E-01	1152	3456	3.125E-03	2.146E-01	3.428E-01	3.354E-03	3.429E-01	1.022E+02
1	1.178E-01	1152	3456	1.563E-03	2.141E-01	3.544E-01	1.993E-03	3.544E-01	1.778E+02
1	1.178E-01	1152	3456	7.815E-04	2.140E-01	3.605E-01	8.036E-04	3.605E-01	4.486E+02
2	2.357E-01	288	1728	2.500E-02	2.279E-01	1.529E-01	1.836E-02	1.540E-01	8.325E+00
2	2.357E-01	288	1728	1.250E-02	2.021E-01	2.007E-01	9.740E-03	2.009E-01	2.061E+01
2	2.357E-01	288	1728	6.250E-03	1.952E-01	2.328E-01	5.112E-03	2.329E-01	4.556E+01
2	2.357E-01	288	1728	3.125E-03	1.942E-01	2.514E-01	2.848E-03	2.514E-01	8.826E+01
2	2.357E-01	288	1728	1.563E-03	1.945E-01	2.614E-01	1.394E-03	2.614E-01	1.875E+02
2	2.357E-01	288	1728	7.815E-04	1.948E-01	2.666E-01	6.557E-04	2.666E-01	4.067E+02
2	1.178E-01	1152	6912	2.500E-02	1.846E-01	4.548E-02	1.987E-02	4.963E-02	2.289E+00
2	1.178E-01	1152	6912	1.250E-02	1.223E-01	6.454E-02	1.071E-02	6.542E-02	6.024E+00
2	1.178E-01	1152	6912	6.250E-03	9.262E-02	8.008E-02	5.594E-03	8.027E-02	1.431E+01
2	1.178E-01	1152	6912	3.125E-03	8.246E-02	9.008E-02	2.890E-03	9.013E-02	3.117E+01
2	1.178E-01	1152	6912	1.563E-03	7.983E-02	9.574E-02	1.538E-03	9.575E-02	6.224E+01
2	1.178E-01	1152	6912	7.815E-04	7.930E-02	9.876E-02	8.057E-04	9.876E-02	1.226E+02

Tabuľka 3.1: Výpočet η_S , η_T , η_{ST}

3.2.1 Odhad regularity riešenia

Máme odvodený odhad rezidua, ktorý nám umožní určiť elementy siete vhodné k úprave. Potrebujeme ešte rozhodnúť ako rozpoznať prípad elementu, ktorý si vyžaduje zvýšiť stupeň aproximácie (ak je riešenie dostatočne regulárne), alebo naopak rozdelenie na menšie elementy.

Nech u je presné a u_h príslušné numerické riešenie. Na základe [6], [8] a [1] vieme, že pre skoky na hranici elementov $K \in \mathcal{T}_h$ platí

$$\int_{\partial K} [u - u_h]^2 dS = \int_{\partial K} [u_h]^2 dS \approx Ch_K^{2\mu_K-1} |u|_{H^{s_K}(\Omega)}^2,$$

kde $C > 0$, $\mu_K = \min(p_K + 1, s_K)$ a s_K označuje lokálny stupeň regularity u , teda $u|_K \in H^{s_K}(K)$. Definujeme nasledujúci indikátor regularity

$$g_K(u_h) := \frac{\int_{\partial K} [u_h]^2 dS}{|K|h_K^{2p_K-2}}, \quad K \in \mathcal{T}_h.$$

Potom, ak je presné riešenie dostatočne regulárne ($s_K \geq p_K + 1$), tak

$$g_K(u_h) = O\left(\frac{h_K^{2p_K+1}}{h_K^2 h_K^{2p_K-2}}\right) = O(h_K),$$

naopak, ak je riešenie nie je dostatočne regulárne ($s_K < p_K + 1$), tak

$$g_K(u_h) = O\left(\frac{h_K^{2p_K-1}}{h_K^2 h_K^{2p_K-2}}\right) = O\left(h_K^{2(s_K-p_K)-1}\right).$$

Čiže, môžeme použiť g_K , $K \in \mathcal{T}_h$ ako indikátor:

- $g_K \geq 1 \mapsto$ riešenie je dostatočne regulárne \mapsto zvýšime stupeň aproximácie p_K
- $g_K < 1 \mapsto$ riešenie nie je dostatočne regulárne \mapsto rozdelíme K na viacej elementov.

Z numerických experimentov v [6] vieme, že je výhodnejšie používať g_K po dodatočnej úprave:

$$\tilde{g}_K(u_h) := \frac{\int_{\partial K} [u_h]^2 dS}{|K|h_K^{2p_K-4}}, \quad K \in \mathcal{T}_h.$$

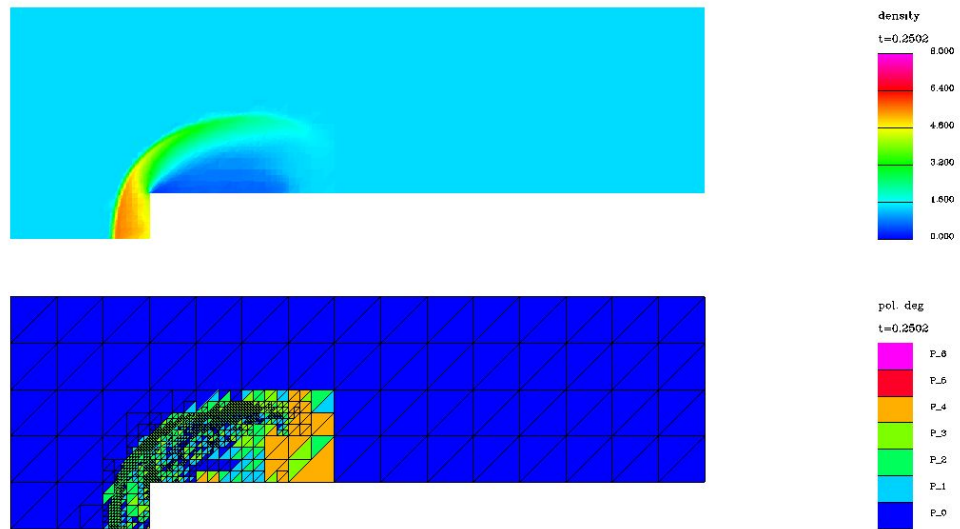
3.3 Numerické experimenty

Pripomenieme algoritmus z [5]:

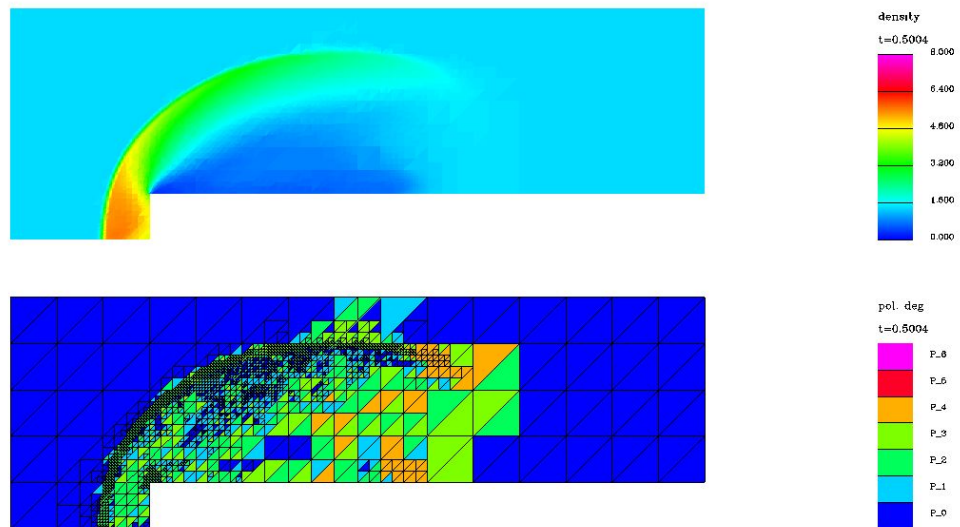
1. Nech $\omega > 0$ a \mathcal{T}_h je sieť na Ω s príslušným priestorom S_{hp} .
2. Vypočítame numerické riešenie \mathbf{w}_h , (2.10).
3. Pre každé $K \in \mathcal{T}_h$ spočítame $\eta_T^K(\mathbf{w}_h)$ a $\eta_{ST}^K(\mathbf{w}_h)$.
4. Ak $\eta_{ST}(\mathbf{w}_h) < \omega$ alebo $\eta_{ST}^K(\mathbf{w}_h) < \omega, \forall K \in \mathcal{T}_h$, tak ukončíme výpočet.
5. Pre každý element $K \in \mathcal{T}_h \mapsto$ ak platí $\eta_{ST}(\mathbf{w}_h) > \omega$:
 - (a) Určíme $\tilde{g}_K(\mathbf{w}_h)$.
 - (b) Buď $\tilde{g}_K(\mathbf{w}_h) \leq 1$, potom položíme $p_K \mapsto p_K + 1$,
 - (c) alebo ($\tilde{g}_K(\mathbf{w}_h) > 1$) a rozdelíme K na menšie elementy.
6. Vytvoríme novú sieť $\tilde{\mathcal{T}}_h$ a priestor \tilde{S}_{hp} .
7. Pokračujeme krokom 2.

$\tilde{\gamma}_\tau$ je vhodne zvolená konštanta, vzhľadom k pozorovaniu: $\tilde{\gamma}_\tau \cong 10^{-2}$.

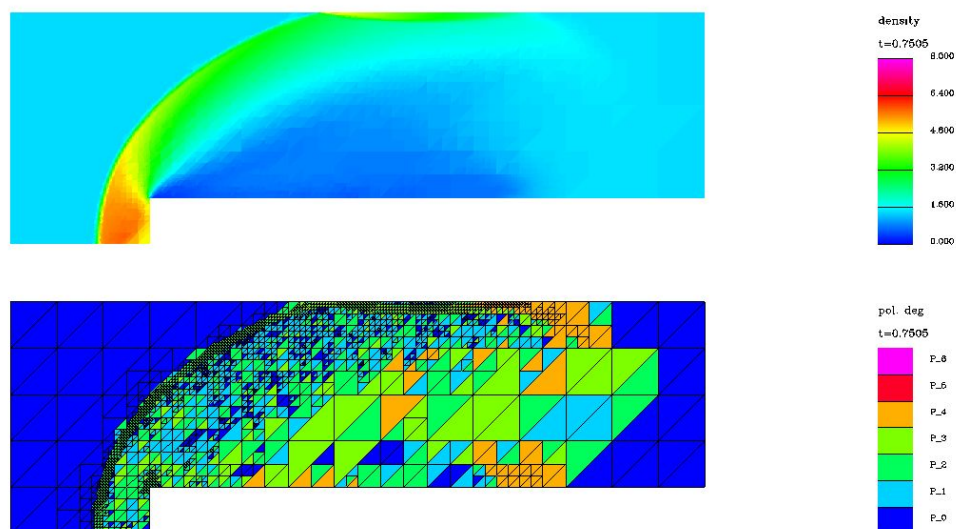
Uvažujme neviskózne stlačiteľné prúdenie cez kanál so schodom (*forward step flow*, [16]). Adaptívny výpočet bol naštartovaný s uniformnou trojuholníkovou sieťou zloženou z 125 elementov. Časový krok bol daný pevne, explicitne. V priebehu výpočtu bola sieť postupne adaptovaná podľa uvedeného algoritmu. Na výpočet bol použitý balík ADGFEM, [3].



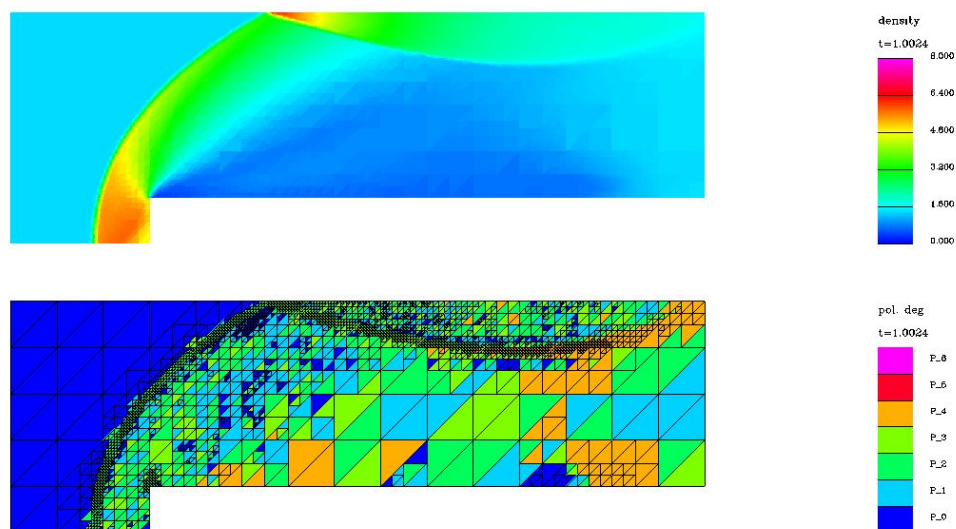
Obr. 3.1: Numerické riešenie a výpočtová sieť pre čas $t = 0.25$



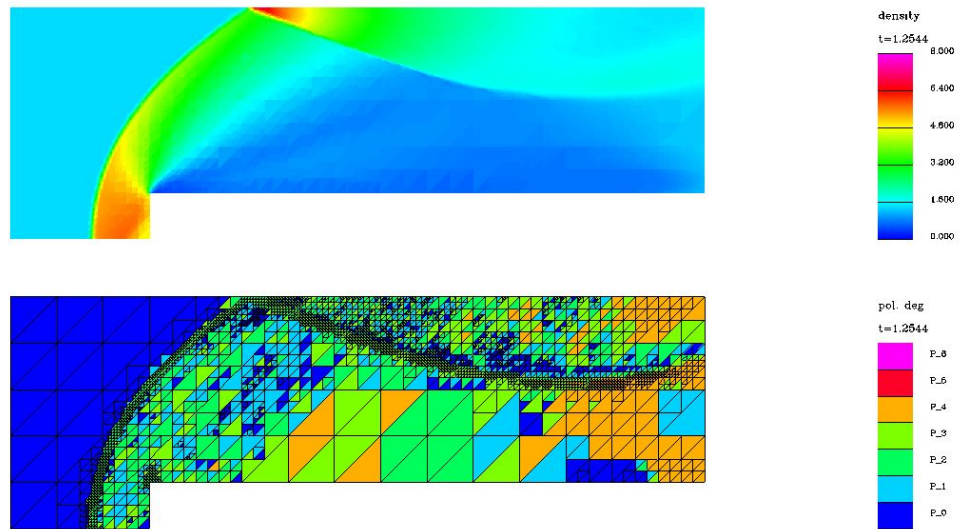
Obr. 3.2: Numerické riešenie a výpočtová sieť pre čas $t = 0.5$



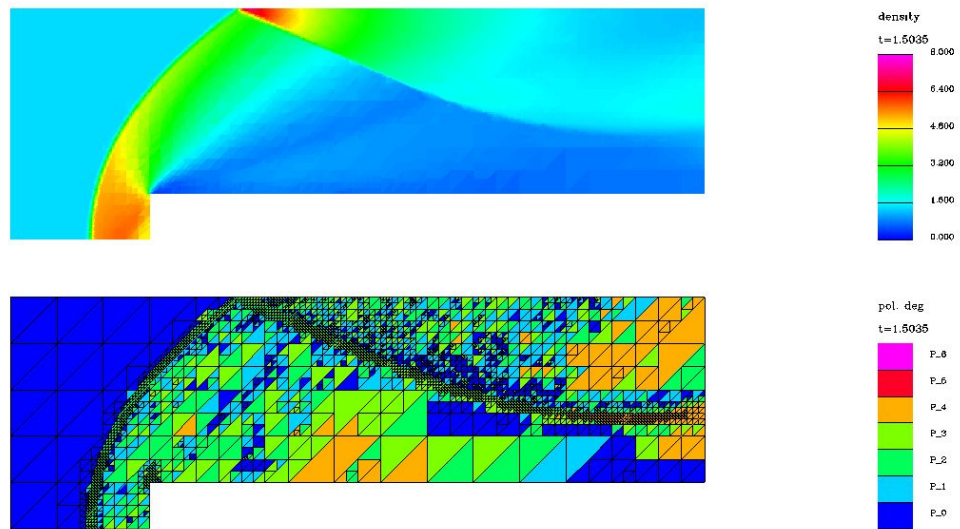
Obr. 3.3: Numerické riešenie a výpočtová sieť pre čas $t = 0.75$



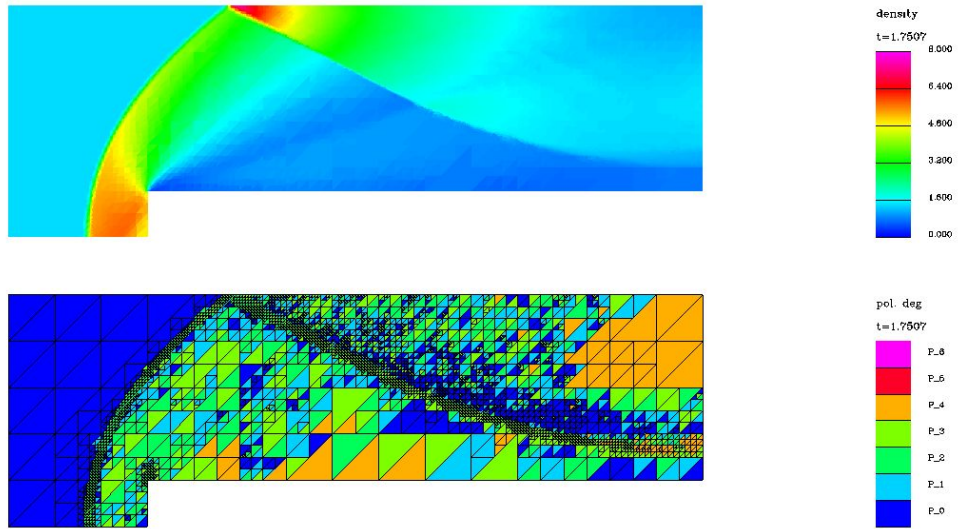
Obr. 3.4: Numerické riešenie a výpočtová sieť pre čas $t = 1.0$



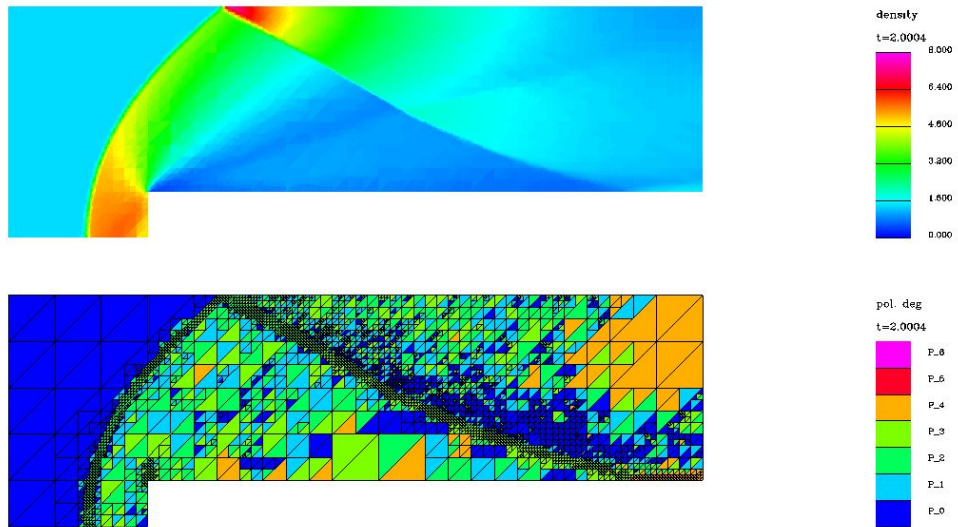
Obr. 3.5: Numerické riešenie a výpočtová sieť pre čas $t = 1.25$



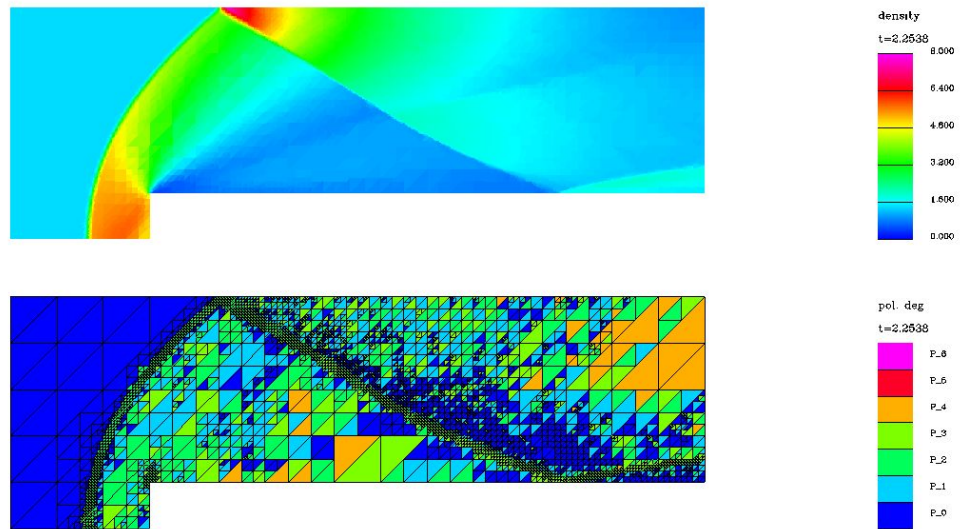
Obr. 3.6: Numerické riešenie a výpočtová sieť pre čas $t = 1.5$



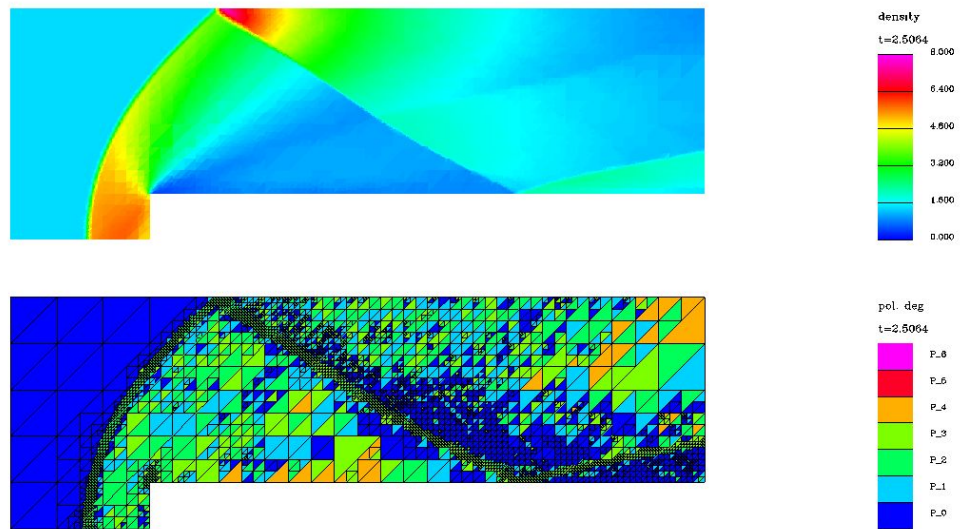
Obr. 3.7: Numerické riešenie a výpočtová sieť pre čas $t = 1.75$



Obr. 3.8: Numerické riešenie a výpočtová sieť pre čas $t = 2.0$



Obr. 3.9: Numerické riešenie a výpočtová sieť pre čas $t = 2.25$



Obr. 3.10: Numerické riešenie a výpočtová sieť pre čas $t = 2.5$

Záver

V práci sme zaviedli základné pojmy a rovnice súvisiace s problémom prúdenia. Zároveň sme odvodili variantu nespojitej Galerkinovej metódy. V poslednej kapitole sme odvodili odhad rezidua pre stacionárne i nestacionárne úlohy. S navrhnutým odhad sme vykonali numerické experimenty za účelom pozorovania chovania odhadu a tiež, či je daný odhad vhodný k použitiu na adaptívne modifikovanie výpočetných sietí.

Odhad bol však odvodený iba pre predstavené schéma prvého radu. Teda by bolo možné princíp odhadu rozšíriť i na schéma vyššieho radu. Tiež sme ukázali, že odhad ohraničuje reziduum v norme len zdola. Zostáva otázkou, či je možné reziduum ohraničiť navrhnutým odhadom i zhora. Navrhnutý odhad by bolo tiež možné použiť k adaptívnej zmene časového kroku na základe pomerov navrhnutých indikátorov η_S, η_T . Otázkou zostáva tiež chovanie indikátorov a algoritmu pre ďalšie úlohy, než ktoré boli prezentované.

Literatúra

- [1] V. Dolejší, M. Feistauer, and V. Sobotíková. Analysis of the discontinuous Galerkin method for nonlinear convection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005(194):2709–2733, 2005.
- [2] V. Dolejší. On the discontinuous Galerkin method for the numerical solution of the Navier–Stokes equations. *Numerical Methods in Fluids*, pages 1083—1106, 2004.
- [3] V. Dolejší. A D G F E M - software platform for the solution of nonlinear convection-diffusion problems with the aid of discontinuous Galerkin finite element method, 2007.
- [4] V. Dolejší. Semi-implicit interior penalty discontinuous Galerkin methods for viscous compressible flows. *Commun. Computational Physics*, pages 231–274, 2008.
- [5] V. Dolejší. hp-discontinuous Galerkin method for compressible flows. *In the proceeding of The International Conference Presentation of Mathematics 2010*, pages 23–39, 2010.
- [6] V. Dolejší. hp-DGFEM for nonlinear convection-diffusion problems. <http://www.karlin.mff.cuni.cz/ms-preprints/prep.php>, 2011.
- [7] V. Dolejší, M. Feistauer, and C. Schwab. On some aspects of the discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. *Mathematics and Computers in Simulation*, 61(3–6):333 – 346, 2003.
- [8] V. Dolejší, M. Feistauer, and C. Schwab. On some aspects of the discontinuous galerkin finite element method for conservation laws. *Math. Comput. Simul.*, 61:333–346, 2003.

- [9] V. Dolejší, M. Holík, and J. Hozman. Efficient solution strategy for the semi-implicit discontinuous Galerkin discretization of the Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 230(11):4176 – 4200, 2011.
- [10] M. Feistauer, J. Felcman, and I. Straškraba. *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, 2003.
- [11] R. Hartmann and P. Houston. Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Navier–Stokes equations I: Method formulation. *Int. J. Num. Anal. Model.*, 3(1):1–20, 2006.
- [12] R. Hartmann and P. Houston. Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Navier–Stokes equations II: Goal-oriented a posteriori error estimation. *Int. J. Num. Anal. Model.*, 3(2):141–162, 2006.
- [13] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems. 2nd revised and expanded ed.* Berlin, Springer, 2006.
- [14] G. Vijayasundaram. Transonic flow simulation using upstream centered scheme of Godunov type in finite elements. *J. Comput. Phys.*, 63:416–433, 1986.
- [15] M. Vlasák, V. Dolejší, and J. Hájek. A priori error estimates of an extrapolated space-time discontinuous Galerkin method for nonlinear convection-diffusion problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(6):1456–1482, 2011.
- [16] P. Woodward and P. Colella. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. of Comput. Phys.*, 54:115–173, 1984.