Oprava části o Brownově mostu

Definice 1
Prostor $D = D[0,1]$ je prostor funkcí f na $[0,1]$, pro které platí

(i) pro každé $0 \leq t < 1$ existuje $f(t+) = \lim_{s \to t+} f(s)$ a $f(t+) = f(t)$, tedy funkce f jsou zprava spojité,

(ii) pro každé $0 < t \leq 1$ existuje $f(t-) = \lim_{s \to t-} f(s)$.

Poznámka 2
Na prostoru D je Skorochodova metrika separabilní a navíc v této metrice konvergence ke spojité funkci odpovídá konvergenci stejnoměrné. Důkaz těchto poznatků lze najít například v knize [1], str. 112.

Věta 3
Buďte $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ náhodné veličiny na separabilním metrickém prostoru (S, d) takové, že $Z_n \xrightarrow{d} Z$. Potom existuje pravděpodobnostní prostor s náhodnými veličinami $V \stackrel{d}{=} Z$ a $V_n \stackrel{d}{=} Z_n$, $n \in \mathbb{N}$, takovými, že $V_n \xrightarrow{s.j.} V$.

Poznámka 4
Důkaz Věty 3 lze nalézt v literatuře, konkrétně v knize [2], str. 56, Theorem 3.30.

Věta 5
Nechť Z_n jsou nezávislé náhodné veličiny s distribuční funkcí $F(t)$ a empirickou distribuční funkcí $\hat{F}(t)$. Nechť náhodné procesy Y_n jsou definované následujícím vztahem

$$Y_n(t) = \sqrt{n}(\hat{F}(t) - F(t)),$$

pak $Y_n \xrightarrow{d} Y$, kde Y je gaussovský náhodný proces na D, pro který platí

$$EY_t = 0,$$

$$s \leq t \quad : \quad EY_sY_t = F(s)(1 - F(t)).$$

Poznámka 6
Důkaz Věty 5 se nachází v knize [1], str. 141, Theorem 16.4.

Tvrzení 7
Existuje trojúhelníkové schéma $R(0,1)$ náhodných veličin $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, v řádcích nezávislé, takové, že

$$\tilde{H_n} = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{(X_{n,i} \leq x)} - x\right) \xrightarrow{s.j.} B^0,$$

stejnoměrně v proměnné $x \in [0,1]$, kde B^0 je Brownův most.

Důkaz

Toto tvrzení je důsledkem Věty 3 a Věty 5.

$\square$

Poznámka 8

Ze stejnoměrné konvergence $\tilde{H}_n \xrightarrow{s.j.} B^0$ na $[0,1]$ dostáváme pomocí trojúhelníkové nerovnosti konvergenci

$$\sup_{[0,1]} |H_n| \xrightarrow{s.j.} \sup_{[0,1]} |B^0|,$$

tím dostáváme také konvergenci v distribuci pro $X_{n,k} = X_k$. Ve speciálním případě, kdy jsou veličiny rovnoměrně rozdělené na $(0,1)$, pak máme konvergenci pro Kolmorogovovu-Smirnovovu statistiku k Brownově mostu.

Seznam použité literatury

[1] Billingsley, P.: *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968

[2] Kallenberg, O.: *Foundations of Modern Probability*, Springer, New York, 1997