Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Hana Bílková

Petersenovské obarvení a jeho varianty

Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Robert Šámal, Ph.D.
Studijní program:	Informatika
Studijní obor:	Obecná informatika

Praha 2012

Děkuji především svému vedoucímu Mgr. Robertu Šámalovi, Ph.D. za velmi cenné rady, nápady a připomínky při vedení bakalářské práce. Také bych chtěla poděkovat rodině za podporu během studia a tvorbu potřebného zázemí. Můj dík patří rovněž přátelům za podporu při psaní bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 24. 5. 2012 Hana Bílková

Název práce: Petersenovské obarvení a jeho varianty

Autor: Hana Bílková

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Robert Šámal, Ph.D., Informatický ústav Univerzity Karlovy

Abstrakt: Petersenovské obarvení 3-regulárního grafu G je ekvivalentní tzv. normálnímu obarvení za použití pěti barev. Normální obarvení je dobré hranové obarvení takové, že každá hrana je spolu se svými čtyřmi sousedy obarvena dohromady třemi nebo pěti různými barvami. Podle Jaegerovy hypotézy lze každý 3-regulární graf bez mostů petersenovsky obarvit. Platnost hypotézy by dokázala další zajímavá tvrzení pro 3-regulární grafy. V tomto textu se budeme zabývat normálním obarvením pro větší počet barev. Z Jaegerovy věty o nenulovém ${\mathbb{Z}_2}^3$-toku plyne, že každý graf bez mostů lze normálně obarvit sedmi barvami. Zde dokážeme existenci obarvení devíti barvami pro grafy s mostem, s řezem velikosti dva nebo s trojúhelníkem nezávisle na Jaegerově větě. Důkaz využívá myšlenku Andersenova důkazu existence silného hranového obarvení 3-regulárních grafů deseti barvami. V závěru řekneme, jak by mohl jít důkaz dokončit pro zbylé třídy 3-regulárních grafů.

Klíčová slova: grafy, cykly, nenulové toky, hranové barvení

Title: Petersen coloring and variants

Author: Hana Bílková

Department: Department of Applied Mathematics

Supervisor: Mgr. Robert Šámal, Ph.D., Computer Science Institute of Charles University

Abstract: The Petersen coloring of 3-regular graph G is equivalent to the normal coloring by five colors. The normal coloring is a good coloring of edges such that every edge and its four neighbours have together three or five different colors. Jaeger conjectures that every bridgeless 3-regular graph has a Petersen coloring. If the conjecture were true, it would imply other interesting statements about 3-regular graphs. In this text we investigate normal coloring by more than five colors. Jaeger theorem about nowhere-zero ${\mathbb{Z}_2}^3$-flow implies that every bridgeless graph has normal coloring by seven colors. Independently on the Jaeger theorem, we prove the existence of normal coloring by nine colors for graphs with a bridge, a cut of size two or with a triangle. The idea of our proof comes from Andersen's proof of existence of strong coloring by ten colors for 3-regular graphs. Finally, we sketch the idea of the proof for other classes of 3-regular graphs.

Keywords: graphs, cycles, nowhere-zero flows, edge colorings

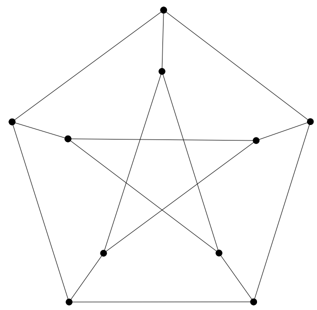
Obsah

1. Úvod

1.1 Základní definice, tvrzení a hypotézy

Petersenovské obarvení je speciální typ hranového obarvení 3-regulárních grafů. Na úvod si zavedeme několik důležitých pojmů a vyslovíme základní známá tvrzení a řešené hypotézy související s tímto obarvením.

Mějme *kubický* (tj. 3-regulární) graf G bez násobných hran a smyček. Nechť P je Petersenův graf.



Obrázek 1.1: Petersenův graf

Definice. *Petersenovské obarvení grafu* G *je zobrazení* $\pi : E(G) \to E(P)$ *takové, že pro všechny hrany* $e_1, e_2, e_3 \in E(G)$ *platí, že pokud* e_1, e_2, e_3 *je trojice sousedních hran, potom* $\pi(e_1), \pi(e_2), \pi(e_3)$ *je trojice sousedních hran.*

Mějme *dobré hranové obarvení* φ grafu G (tj. $\varphi : E(G) \to \{barvy\}$, sousední hrany mají různé barvy).

Definice. *Hranu* $e \in E(G)$ *nazveme v obarvení* φ bohatou, *pokud jsou ona a její čtyři sousedi obarveni pěti různými barvami. Pokud jsou na těchto pěti hranách použity dohromady jen tři barvy, řekneme, že je hrana* e chudá.

Definice. *Hranové obarvení* φ *je* normální, *pokud je každá hrana bohatá nebo chudá.*

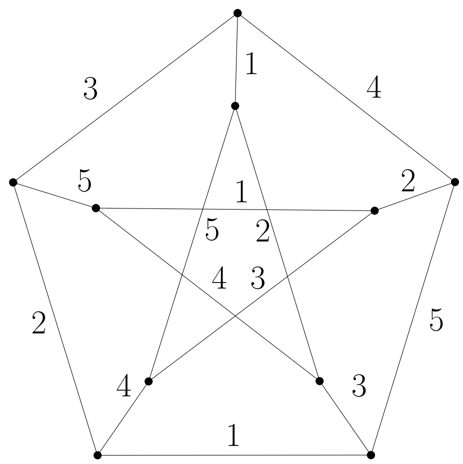
Máme zavedena dvě hranová obarvení, je čas si říct, jak spolu souvisí. K tomu dobře poslouží následující věta (Proposition 13 v Jaegerově článku [1]).

Věta 1.1. (Jaeger) *Kubický graf* G *má petersenovské obarvení právě tehdy, když je normálně obarvitelný pěti barvami.*

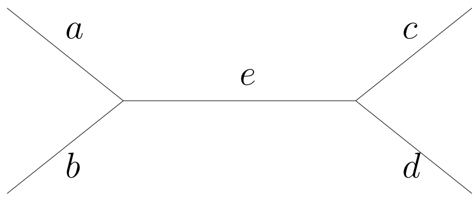
Důkaz. Nechť má graf G petersenovské obarvení π. Petersenův graf má obarvení φ pěti barvami takové, že každá hrana je bohatá, viz obrázek 1.2.

Hranu e grafu G obarvíme barvou $\varphi(\pi(e))$. Výsledné obarvení grafu G je normální obarvení pěti barvami:

Obarvení je dobré, protože sousední hrany e, f a g se obarví barvami $\varphi(\pi(e))$, $\varphi(\pi(f))$ a $\varphi(\pi(g))$. Ty jsou různé, neboť hrany $\pi(e)$, $\pi(f)$ a $\pi(g)$ jsou podle definice π sousední hrany v Petersenově grafu, proto jim zobrazení φ přiřadí různé barvy.



Obrázek 1.2: Obarvení Petersenova grafu



Obrázek 1.3: Označení hrany a jejích sousedů

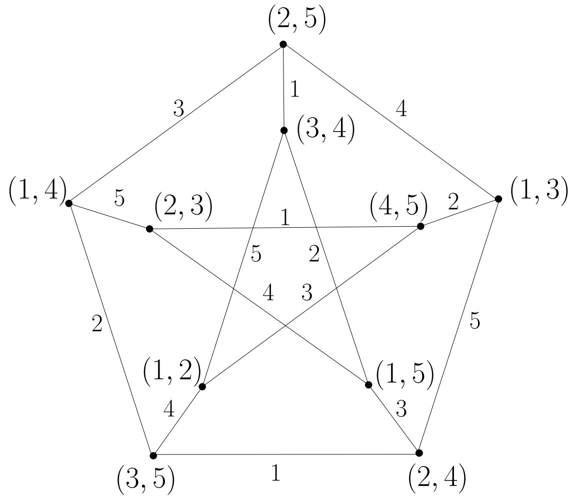
Dále dokážeme, že každá hrana e je botahá nebo chudá. Označíme sousedy hrany e dle obrázku 1.3.

Rozmyslíme si, na jaké hrany se a, b, c, d, e mohou zobrazit použitím zobrazení π. Musí platit, že $\pi(a)$, $\pi(b)$, $\pi(e)$ je trojice sousedních hran a $\pi(c)$, $\pi(d)$, $\pi(e)$ je trojice sousedních hran. Buď $\{\pi(a), \pi(b)\} = \{\pi(c), \pi(d)\}$, pak je v konečném obarvení hrana e chudá, nebo jsou $\pi(a)$, $\pi(b)$, $\pi(c)$ a $\pi(d)$ čtyři různí sousedé $\pi(e)$, potom je e v konečném obarvení bohatá, protože Petersenův graf má při obarvení φ všechny hrany bohaté.

Pro důkaz opačné implikace předpokládejme, že má graf G normální obarvení pěti barvami $\{1, \ldots, 5\}$. Hledáme petersenovské obarvení $\pi(e) : E(G) \to E(P)$. Pro obarvení Petersenova grafu z obrázku 1.2 označíme každý vrchol Petersenova grafu dvojčíslím barev, které nemá žádná hrana vycházející z tohoto vrcholu, viz obrázek 1.4.

Pro každou z $\binom{5}{2} = 10$ možných dvojic barev máme právě jeden vrchol touto dvojicí označený. Protože jsou všechny hrany bohaté, mohou být hranou spojeny pouze vrcholy (α, β), (γ, δ), kde $\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset$. Všechny dvojice vrcholů, které podmínku splňují, v Petersenově grafu spojeny jsou.

Stejné označení vrcholů provedeme u normálně obarveného grafu G. Hledané zobrazení π, bude zobrazení, které bohaté hraně $e = (u, v)$, $u = (\alpha, \beta)$, $v = (\gamma, \delta)$ přiřadí hranu se stejně označenými vrcholy v Petersenově grafu. Chudé hraně $e = (u, v)$, $u = (\alpha, \beta)$, $v = (\alpha, \beta)$, barvy ϵ přiřadí π hranu v Petersenově grafu barvy ϵ s krajním vrcholem (α, β). Sousední trojice hran v grafu G incidentní s vrcholem označeným dvojicí (μ, ν) se zobrazí na hrany, které jsou taktéž incidentní s vrcholem (μ, ν). Protože je vrchol (μ, ν) v Petersenově grafu jen jeden, jsou obrazy třech sousedních hran rovněž sousední hrany. Zobrazení π je tedy petersenovské obarvení. $\square$



Obrázek 1.4: Označení vrcholů Petersenova grafu

Poznámka 1.2. *Označení vrcholů Petersenova grafu na obrázku 1.4 vychází z konstrukce Kneserových grafů. Vrcholy Kneserova grafu $KG_{n,k}$ tvoří všechny k-prvkové podmnožiny n-prvkové množiny, hrany vedou mezi množinami, které mají prázdný průnik. Petersenův graf je $KG_{5,2}$.*

Jaeger vyslovil následující hypotézu (zníněna je v Jaegerově článku [1]):

Hypotéza 1.3. (Jaeger) *Každý kubický graf bez mostů má petersenovské obarvení.*

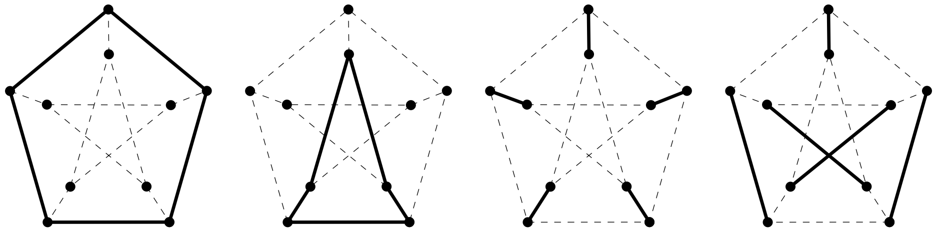
Pokud by Jaegerova hypotéza platila, platila by i hypotéza Cycle Double Cover a Bergeova-Fulkersonova hypotéza (viz článek Jaegera [1]). Hypotézy byly vysloveny v článcích Seymoura [5] (Cycle Double Cover) a Fulkersona [6] (Berge-Fulkerson) a říkají následující:

Hypotéza 1.4. (Cycle Double Cover) *Pro každý kubický graf bez mostů G existuje množina cyklů $\mathcal{C}$ a zobrazení $\psi : \{e : e \in E(C), C \in \mathcal{C}\} \to E(G)$ takové, že obraz cyklu je cyklus, obraz sousedních hran jsou sousední hrany a pro každou hranu $e \in E(G)$ existují právě dvě hrany z množiny cyklů, jejichž obraz je hrana e.*

Hypotéza 1.5. (Berge-Fulkerson) *Pro každý kubický graf G bez mostů existuje šest perfektních párování takových, že každá hrana G je právě ve dvou těchto párováních.*

Myšlenka převodu hypotéz na Jaegerovu hypotézu. Pro Petersenův graf existuje množina cyklů splňující podmínky Cycle Double Cover i pro něj existuje šest požadovaných perfektních párování, viz obrázek 1.5. V množině cyklů pro Cycle Double Cover bude kružnice na prvním obrázku a pětkrát cyklus na druhém obrázku, pokaždé jinak otočený. Jedno z párování pro Bergeovu-Fulkersonovu hypotézu vidíme na třetím obrázku a zbylých pět bude vypadat jako to na čtvrtém obrázku, jen bude mít každé jiné otočení.

Podle Jaegerovy hypotézy existuje petersenovské obarvení π každého kubického grafu bez mostů G. Platí, že vzor cyklu v Petersenově grafu je množina cyklů v G, a také, že vzor párování v Petersenově grafu je párování v G. Pro graf G tedy platí jak hypotéza Cycle Double Cover, tak Bergeova - Fulkersonova hypotéza.



Obrázek 1.5: Cycle Double Cover a Bergeova-Fulkersonova hypotéza u Petersenova grafu

1.2 Normální obarvování více než pěti barvami

Co se stane, pokud při hranovém obarvování kubických grafů povolíme více než pět barev? Lze pak obarvit všechny hrany tak, aby každá byla bohatá nebo chudá?

Definice. *Silné hranové obarvení grafu G je dobré hranové obarvení φ, pro které platí, že na žádné cestě délky tři nejsou dvě stejně obarvené hrany. Neboli, pokud označíme sousedy e a sousedy sousedů e (bez hrany e samotné) jako $S(e)$, pak platí $\forall f \in S(e) : \varphi(e) \neq \varphi(f)$.*

Poznámka 1.6. *Při silném obarvení jsou všechny hrany bohaté, silné obarvení je tedy zároveň normální.*

Poznámka 1.7. *Pokud bychom naopak chtěli, aby byly všechny hrany chudé, musel by graf G být nutně hranově obarvitelný třemi barvami, což lze pouze někdy. Kubické grafy, které nejsou obarvitelné třemi barvami, se nazývají snarky, patří do nich mimo jiné také Petersenův graf.*

Věta 1.8. *Pro obarvování 3-regulárních grafů deseti a více barvami existuje silné hranové obarvení.*

Pro 13 barev je existence silného obarvení zřejmá. (Obarvujeme hrany v libovolném pořadí, při obarvování hrany e se musíme vyhnout barvám hran z $S(e)$. Těch je maximálně 12, protože $|S(e)| \leq 12$, jedna barva pro e tedy zbývá.)

Z Brooksovy věty plyne, že existuje silné obarvení kubického grafu G při použití 12 barev:

Z grafu G vyrobíme následnovně graf G'. Vrcholy $V(G')$ budou odpovídat hranám $E(G)$. Hrany povedou mezi těmi vrcholy, které odpovídají hranám $e, f \in E(G)$, $e \in S(f)$ (resp. $f \in S(e)$, platí vždy oboje najednou). Protože $|S(e)| \leq 12$, má G' maximální stupeň 12. Počet barev potřebný na silné obarvení grafu G je roven vrcholové barevnosti grafu G'. Brooksova věta říká, že není-li G' úplný graf nebo lichá kružnice, je jeho vrcholová barevnost menší nebo rovna maximálnímu stupni. Graf G' lichá kružnice zjevně není. Úplný graf, tj. zde K_{13}, to taky není, protože by to znamenalo, že G má 13 hran (poznamenejme, že G' je souvislý). Počet hran kubického grafu musí být ale dělitelný třemi, platí totiž $3 \times |V(G)| = 2 \times |E(G)|$. Číslo 13 dělitelné třemi není. Pro silné hranové obarvení 3-regulárních grafů tedy 12 barev opravdu stačí.

Tvrzení, že každý kubický graf je silně obarvitelný deseti barvami, dokázal Andersen [2] a nezávisle také Horák, Qing a Trotter [3].

Andersenův důkaz je inspirací k důkazu stěžejní věty tohoto textu, proto zde uvedeme jeho hlavní myšlenku.

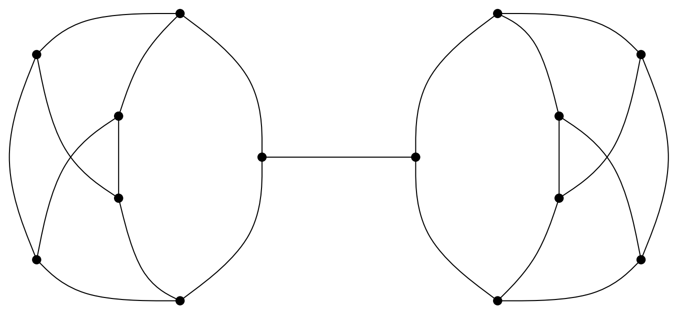
Idea důkazu věty 1.8. (Andersen)

Nejprve dokážeme lemma, které říká, že hrany grafu G lze silně obarvit deseti barvami, až na hrany incidentní s vrcholem $v_0 \in V(G)$. Vzdálenost $d(e)$ hrany $e \in E(G)$, $e = (u, v)$, od vrcholu v_0 bude minimum vzdáleností vrcholů u, v od v_0. Nyní postupně barvíme hrany $E(G)$ od nejvzdálenějších. Při barvení hrany $e = (u, v)$ existuje soused f hrany e, který má menší vzdálenost od v_0. Bez újmy na obecnosti $f = (u, x)$, pak x je blíže vrcholu v_0 než vrcholy u, v. Žádná z tří hran incidentních s x proto není obarvena. A jelikož všechny tři hrany incidentní s x patří do $S(e)$, má hrana e v $S(e)$ maximálně devět obarvených hran, jedna barva jí tak zbývá.

Dále si uvědomme, že pokud budeme hrany barvit podle vzdálenosti ne od jednoho vrcholu, ale od více vrcholů, resp. od nějakého podgrafu G, budeme moci předchozí postup také použít.

Zbývá dobarvit konstantní počet hran. Dobarvení grafu Andersen dále dělí na případy, kdy má graf řez velikosti jedna, řez velikosti dva, netriviální řez velikosti tři, zbylé grafy dobarvuje podle délky nejkratšího cyklu, který graf obsahuje. Rozebírá případy s trojúhelníkem, čtyřcyklem a pěticyklem. Nakonec dokáže, že lze dobarvit graf, který má všechny cykly delší než šest.

Poznámka 1.9. *Devět a méně barev pro silné hranové obarvení kubických grafů nestačí. Příklad grafu, který není silně hranově obarvitelný devíti barvami je na obrázku 1.6. (Každá komponenta, která by vznikla odebráním mostu, má deset hran, z nichž žádné dvě nesmějí být obarveny stejnou barvou.)*



Obrázek 1.6: Kubický graf, který není silně obarvitelný devíti barvami

1.3 Normální obarvení a nenulové toky

S hranovým obarvením grafů úzce souvisí nenulové toky.

Definice. *Nechť A je komutativní grupa. Nenulový A-tok v orientovaném grafu G je zobrazení $\tau : E(G) \to A$ takové, že platí:*

1. $\forall e \in E(G) : \tau(e) \neq 0$
2. $\forall v \in V(G) :$

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} \tau((u, v)) = \sum_{(v,u)\in E(G)} \tau((v, u))$$

Nás bude zajímat nenulový $\mathbb{Z}_2{}^3$-tok. Pro prvek $a \in \mathbb{Z}_2{}^3$ platí $a = -a$, nezáleží tedy na orientaci hran grafu G. Budeme proto uvažovat grafy neorientované. Druhá podmínka pro nenulový tok bude vypadat takto:

$\forall v \in V(G)$:

$$\sum_{e \in E(G): v \in e} \tau(e) = 0.$$

Jaeger [4] dokázal následující větu:

Věta 1.10. (Jaeger) *Každý 3-regulární graf bez mostů má nenulový $\mathbb{Z}_2{}^3$-tok.*

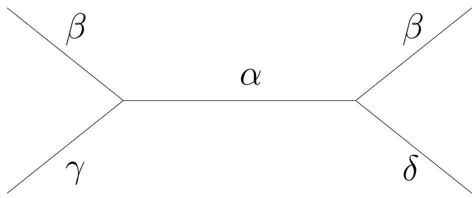
Z této věty plyne:

Věta 1.11. *Každý 3-regulární graf bez mostů má normální obarvení sedmi barvami.*

Důkaz. Pro každý 3-regulární graf bez mostů G podle věty 1.10 existuje $\mathbb{Z}_2{}^3$-tok τ. Komutativní grupa $\mathbb{Z}_2{}^3$ má bez nuly sedm prvků, zobrazení τ budeme tedy považovat za obarvení sedmi barvami. Zbývá dokázat, že je obarvení normální.

Obarvení je dobré: Kdyby pro dvě sousední hrany e a f platilo: $\tau(e) = \tau(f)$, pak $\tau(e)+\tau(f) = 0$. Zároveň ale platí rovnost $\tau(e)+\tau(f)+\tau(g) = 0$, kde g sousedí s hranami e i f. Dostáváme $\tau(g) = 0$, což je ve sporu s tím, že τ je nenulový tok.

Všechny hrany jsou bohaté nebo chudé: Jediný případ, kdy hrana při dobrém obarvení není bohatá ani chudá, je na obrázku 1.7 až na přejmenování barev a symetrii (α, β, γ a δ jsou různé).



Obrázek 1.7: Ani chudá ani bohatá hrana

Jestliže ale takové obarvení vzniklo z nenulového toku τ, znamená to:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

a

$$\alpha + \beta + \delta = 0.$$

Z toho plyne:

$$-(\alpha + \beta) = \gamma$$

a

$$-(\alpha + \beta) = \delta.$$

Jelikož ke každému prvku v $\mathbb{Z}_2{}^3$ existuje pouze jeden prvek opačný, znamená to, že $\gamma = \delta$, což je spor s předpokladem.

Obarvení je normální. □

V následující kapitole dokážeme větu 1.12, viz níže, bez použití věty 1.10.

Věta 1.12. *Pro 3-regulární grafy, které mají řez velikosti jedna nebo dva nebo které obsahují trojúhelník, existuje normální obarvení devíti barvami.*

Pro grafy bez mostů sice věta 1.12 neříká oproti větě 1.11 nic nového, nicméně k důkazu použijeme jinou metodu a je možné, že případným zkombinováním obou důkazů by se dalo tvrzení vylepšit.

Poznámka 1.13. *S nenulovými toky a s normálním obarvením souvisí také obarvování 3-regulárních grafů pomocí tzv. Steinerových systémů trojic. Steinerův systém trojic* $\mathcal{S}$ *na množině* M *je množina trojic taková, že každé dva prvky z* M *jsou spolu v právě jedné trojici. Obarvení kubického grafu Steinerovým systémem trojic* $\mathcal{S}$ *je zobrazení* $\xi : E(G) \to M$ *takové, aby pro sousední trojici hran* e, f *a* g *tvořily prvky* $\xi(e)$, $\xi(f)$ *a* $\xi(g)$ *trojici v* $\mathcal{S}$.

V článku [7] Archdeacon uvádí hypotézu, že každý 3-regulární graf lze obarvit nějakým Steinerovým systémem trojic. Holroyd a Škoviera [8] ukázali pomocí toků, že každý 3-regulární graf bez mostů lze obarvit Fanovou rovinou, což je Steinerův systém trojic na sedmi prvcích. Obarvení Fanovou rovinou je ekvivalentní ${\mathbb{Z}_2}^3$*-toku, a tedy i z jeho existence plyne existence normálního obarvení sedmi barvami. Dále dokázali, že 3-regulární grafy lze obarvit jakýmkoli Steinerovým systémem, který má více než jednu trojici. Grannell, Griggs, Knor a Škoviera [9] našli Steinerův systém, kterým lze obarvit všechny kubické grafy, tedy i grafy s mosty. Možná překvapivě dají grafy s mosty více práce a vyžadují větší Steinerův systém než grafy bez mostů. Podobná situace nastává v případě normálního barvení, kde důkaz věty 1.12 bude podstatně náročnější než u věty 1.11.*

2. Důkaz stěžejní věty

V této kapitole dokážeme větu 1.12. Nejprve uvedeme algoritmus pro částečné obarvení grafu a potom postupně dokážeme, že lze dobarvit graf s řezem velikosti jedna, s řezem velikosti dva nebo s trojúhelníkem.

2.1 Algoritmus pro částečné obarvení

Zmíněný algoritmus uvedeme v důkazu následující věty. Větu lze ještě malinko vylepšit (zpřesnit), je k tomu ale potřeba pojmů zavedených až v průběhu popisu algoritmu. Přesné znění věty tedy uvedeme až na konci této sekce, viz strana 19, věta 2.12.

Věta 2.1. *Nechť G je 3-regulární graf, $V' \subseteq V(G)$, $V' \neq \emptyset$. Pak lze hrany grafu G až na hrany podgrafu indukovaného vrcholy V' obarvit devíti barvami tak, že budou všechny hrany grafu G až na hrany incidentní s vrcholy V' bohaté nebo chudé. Navíc pro každou hranu e mezi vrcholy V' a $V(G) \setminus V'$ budou existovat buď tři možnosti obarvení nebo čtyři možnosti obarvení s tím, že se pro každou ze čtyř možností musí změnit barva těch sousedních hran hrany e, které nejsou incidentní s V'.*

Idea důkazu. Vrcholy $V(G)$ lineárně uspořádáme tak, aby vzdálenější od V' byly za těmi, které jsou k V' blíže. Dále zorientujeme hrany $E(G)$ směrem zezadu dopředu (tj. od vzdálenějších k bližším).

Algoritmus na obarvování hran bude vypadat následovně. Budeme brát vrcholy zezadu dopředu, vcházejícím hranám vždy (až na drobné výjimky) přiřadíme barvu, kterou již nebudeme měnit a která neporuší podmínku na bohatost nebo chudost nějaké hrany. Vycházejícím hranám přiřadíme tzv. typ I, II nebo III. Definice typů uvedeme v důkazu samotném, v podstatě jde ale o to, že si u dané hrany zapamatujeme možnosti jejího obarvení.

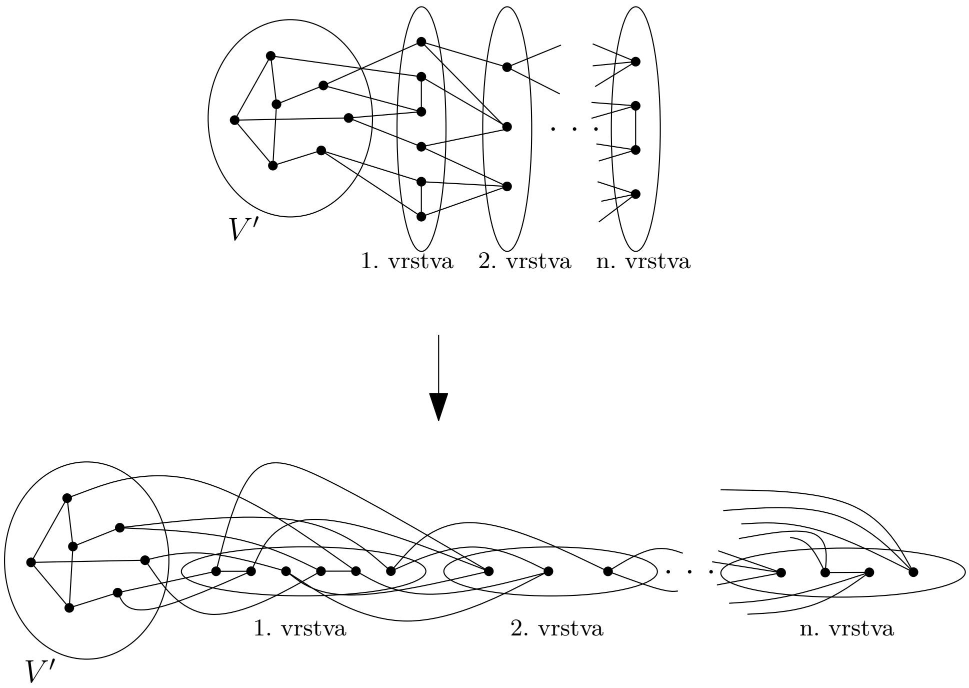
Je potřeba především ověřit, že se algoritmus nikdy nedostane do slepé uličky, kdy by např. pro nějakou hranu nezbyla žádná možnost obarvení apod.

Důkaz.
- Označme vzdálenost vrcholu v od V' jako $d(v)$, kde vzdáleností je myšlen počet hran nejkratší cesty od vrcholu v k nějakému z vrcholů V'. Vrcholy $V(G) \setminus V'$ rozdělíme do vrstev podle vzdálenosti od V'. V první vrstvě budou ty se vzdáleností jedna, v druhé se vzdáleností dva atd. Zřejmě platí, že z každého vrcholu vede alespoň jedna hrana do nižší vrstvy.

  Nyní zavedeme na vrcholech $V(G) \setminus V'$ lineární uspořádání $\prec$ takové, aby platilo $\forall u, v \in (V(G) \setminus V') : u \prec v \Rightarrow d(u) \leq d(v)$. Uděláme to tak, že nejprve vezmeme vrcholy z první vrstvy v libovolném pořadí, pak z druhé vrstvy atd.

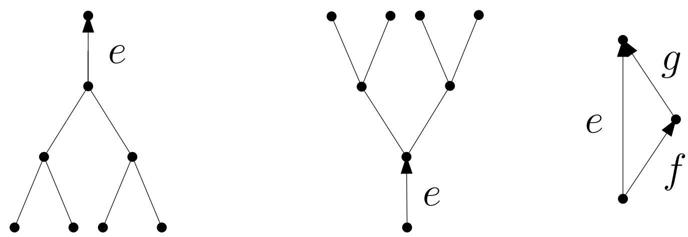
  Hrany zorientujeme podle $\prec$. Pokud pro hranu $\{u, v\}$ platí $v \prec u$, bude orientace hrany z u do v. Jestliže dříve platilo, že z každého vrcholu vede hrana do nižší vrstvy, nyní z každého vrcholu alepoň jedna hrana vychází, zbylé do něj vchází.

  Dále si definujme *předchůdce hrany* $e = (u, v)$, jejíž orientace je z u do v, jako její sousedy a a b incidentní s vrcholem u a sousedy těchto sousedů



Obrázek 2.1: Přechod od vrstev k lineárnímu uspořádání

(kromě hrany e samotné). *Bezprostřední předchůdci hrany* e budou označovat pouze hrany a a b. Obdobně sousedi e incidentní s v budou *bezprostřední následníci* a spolu se svými sousedy *následníci* hrany e. Na obrázku 2.2 jsou načrtnutí předchůdci (první obrázek) a následníci (druhý obrázek) hrany e. Pozor ale na to, že předchůdci nemusí vždy vést „dozadu“ a následníci „dopředu“, neboli záleží na orientaci hrany e, ale ne na orientaci jejích sousedů. Na třetím obrázku je případ, kdy jsou hrany f a g zároveň předchůdci i následníci hrany e.



Obrázek 2.2: Předchůdci a následníci hrany e

- Máme vše připraveno k obarvování hran grafu. Budeme postupně brát vrcholy podle lineárního uspořádání $\prec$ od nejvzdálenějších od V' (nejprve vezmeme vrchol v, pro který platí $\forall u \in (V(G) \setminus V') : u \prec v$). U každého vrcholu přiřadíme hranám, které z něj vycházejí, jeden z typů popsaných níže. Hranám vcházejícím do vrcholu přiřadíme pevně barvu, až na případ, kdy z daného vrcholu bude vycházet hrana typu II. V takovém případě budou vcházející hrany obarveny v okamžiku barvení vycházející hrany typu II. Platí, že každá hrana bude mít v nějakém okamžiku přidělen některý z typů (typicky předtím, než bude pevně obarvena).

Probereme všechny vrcholy z $V(G)\setminus V'$. Na konci tak budou pevně obarveny hrany podgrafu indukovaného vrcholy $V(G) \setminus V'$ (až na hrany, které budou předchůdcem hrany typu II), hrany mezi vrcholy $V(G) \setminus V'$ a vrcholy V' budou mít přiřazen typ.

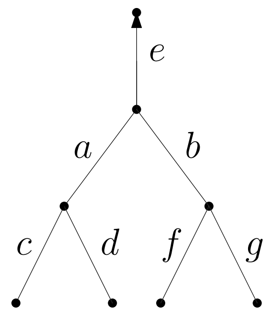
- Popis typů I, II, III

  U každé hrany e, jež má nějaký typ, evidujeme seznam barev, kterými můžeme danou hranu obarvit, aby bezprostřední předchůdci e neměli s hranou e stejnou barvu a dále aby mohla být splněna podmínka bohatosti, resp. chudosti bezprostředních předchůdců hrany e. Hrana e pak bude vždy obarvena barvou, kterou má ve svém seznamu.

  Typ I

  Hrana e je typu I, pokud platí:

  1. Všichni předchůdci hrany e mají pevně danou barvu.
  2. Pokud předchůdce e označíme jako na obrázku 2.3, pak pro obarvení hran φ platí: $\varphi(a) \notin \{\varphi(f), \varphi(g)\}$ a $\varphi(b) \notin \{\varphi(c), \varphi(d)\}$. Tuto podmínku označíme $\triangle$.



Obrázek 2.3: Označení předchůdců hrany e

Poznámka 2.2. *Kvůli podmínce $\triangle$ nemůžou být bezprostřední předchůdci hrany e chudí, musí být tedy bohatí.*

Pozorování 2.3. *Hranu e typu I je možné obarvit minimálně třemi různými barvami, aby bezprostřední předchůdci e byli bohatí.*

Důkaz. Na hraně e se musíme vyhnout barvám všech jejích předchůdců a těch je maximálně šest. Tři barvy z devíti tak určitě zbývají. $\square$

Značení: Trojici možných barev na hraně e označíme T_e (pokud je víc možností obarvení, na zbylé zapomeneme). Dále si u hrany e označíme N_e dvojici barev, které mají bezprostřední předchůdci e. Řekneme, že barvy v N_e jsou *nebezpečné* pro e.

Poznámka 2.4. *Barvy v N_e jsou označeny jako nebezpečné, protože pokud by jeden z bezprostředních následníků e měl barvu z N_e, musí být e chudá a další z bezprostředních následníků musí mít už nutně druhou barvu z N_e, není zde žádný výběr.*

Poznámka 2.5. *Pro každou hranu e typu I platí $T_e \cap N_e = \emptyset$.*

Typ I je ideální pro další barvení v tom smyslu, že se s ním dobře pracuje, nicméně nelze mít všechny hrany typu I, protože by vůbec nevznikaly chudé hrany. U typu II už chudé hrany vzniknout mohou.

Typ II

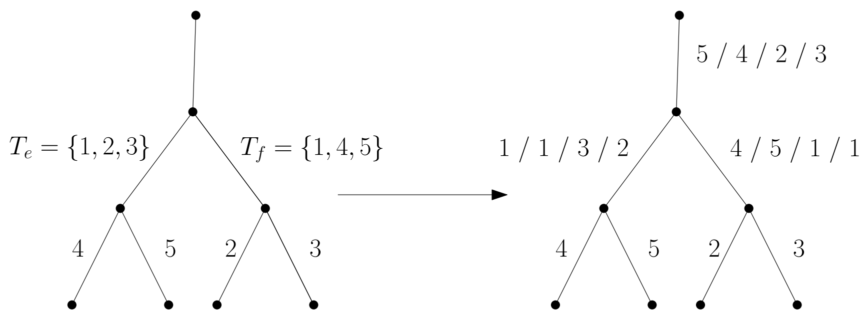
Hranu e typu II charakterizuje množina čtyř barev C_e, které jsou navíc rozděleny do dvou dvojic, a barva κ_e, kde $\kappa_e \notin C_e$.

Pro hranu e typu II platí:

1. Hranu e lze obarvit čtyřmi různými barvami z C_e (tak, aby neměla stejnou barvu jako bezprostřední předchůdci a aby bezprostřední předchůdci byli bohatí nebo chudí).
2. Podle konečného obarvení hrany e je zároveň zvolena barva bezprostředních předchůdců e a to následujícím způsobem. Jeden z bezprostředních předchůdců bude mít barvu, která je ve dvojici s barvou hrany e.
3. Druhý z bezprostředních předchůdců hrany e bude mít barvu κ_e, platí $\kappa_e \notin C_e$.
4. Orientace bezprostředních předchůdců je směrem k hraně e a všichni předchůdci bezprostředních předchůdců e mají již pevně danou barvu. (Tj. oproti hraně typu I požadujeme pevné obarvení jednoho „patra“ navíc, ale zase nejsou známí bezprostřední předchůdci e.)

Příklad 2.6. *Nechť $C_e = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, dvojice jsou (α, β) a (γ, δ). Pak pokud e má barvu γ, jeden její bezprostřední předchůdce bude mít barvu δ a druhý barvu κ_e.*

Poznámka 2.7. *Pokud Vám Typ II připadá poněkud šroubovaně definovaný, pak vězte, že vznikne přirozeně, když se potkají dvě hrany typu I, viz obrázek 2.4.*



Obrázek 2.4: Ukázka vzniku hrany typu II ($C = \{2, 3, 4, 5\}$, $\kappa = 1$)

Typ III

Tento typ by se dal také nazvat „nedokončený typ I“. Je potřeba jej definovat především proto, že ne vždy známe všechny předchůdce hrany, které máme přiřadit typ.

Pro hranu e typu III platí:

1. Hrana e nemá pevně určeny barvy všech svých předchůdců.
2. Podmínka $\triangle$ s tím, že obarvení hrany a nesmí být stejné jako barvy již *obarvených* hran z $\{f, g\}$. Zápisem $\varphi(a) \notin \{\varphi(f), \varphi(g)\}$ rozumíme, že $\varphi(a) \neq \varphi(f)$, je-li definováno a $\varphi(a) \neq \varphi(g)$, je-li definováno. Obdobně $\varphi(b) \notin \{\varphi(c), \varphi(d)\}$. (Označení hran — viz obrázek 2.3.)

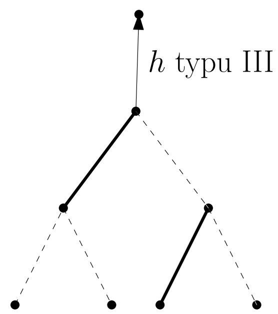
Poznámka 2.8. *U hrany typu III (na rozdíl od hran typů I a II) se může stát, že se typ změní, a to na typ I v okamžiku, kdy se obarví všichni její předchůdci.*

Poznámka 2.9. *Druhá podmínka zaručí bohatost bezprostředních předchůdců hrany e.*

Pozorování 2.10. *Hranu e lze obarvit alespoň čtyřmi barvami. Seznam možných barev označíme S_e.*

Důkaz. Z devíti barev máme zakázané barvy známých předchůdců, kterých je maximálně pět. □

Poznámka 2.11. *Vždy, když budeme obarvovat nějakou hranu f, musíme dát pozor, jestli není „poblíž“, tj. na stejné cestě délky tři, nějaká hrana typu III, u které by obarvením hrany f přestalo platit pravidlo $\triangle$. Tj. nesmíme dovolit, aby dvojice hran vyznačená na obrázku 2.5 a podobné dvojice měly pro nějakou hranu h typu III stejnou barvu. Ověření platnosti tohoto pravidla si necháme na konec důkazu.*



Obrázek 2.5: Dvojice hran, která nesmí být shodně obarvena pro splnění pravidla $\triangle$ u hrany h typu III

- Proč algoritmus dává obarvení požadovaných vlastností

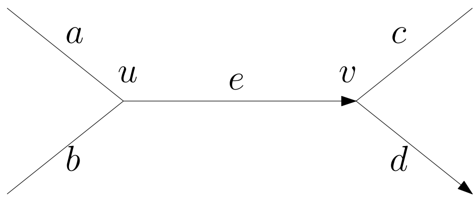
  Když už víme, jak jednotlivé typy vypadají, a budeme prozatím předpokládat, že bude možné postupně u všech vrcholů vycházejícím hranám přiřadit typ a vcházejícím hranám přiřadit pevně barvu (až na výjimku, kdy vychází hrana typu II) a že se nikdy neporuší podmínka $\triangle$ u typu III, můžeme si říct, proč celý algoritmus funguje.

  Označme množinu hran grafu $G - V'$ jako E_1 a množinu hran mezi vrcholy $V(G) \setminus V'$ a V' jako E_2.

Po ukončení algoritmu budou mít hrany z E_2 nějaký typ a proto i seznam tří nebo čtyř možných obarvení, jedno z nich vybereme, případně ještě dobarvíme i bezprostřední předchůdce hran typu II. Hrany obarvujeme jednu po druhé, abychom případně mohli u hran e typu III vyloučit z S_e barvy předchůdců. (U hran z E_2 netestujeme bohatost nebo chudost.)

Pokud je hrana f někdy typu I nebo II, zajistí svým bezprostředním předchůdcům, že budou po obarvení f bohatí nebo chudí. Jestliže je hrana f typu III, zajistí totéž těm bezprostředním předchůdcům, kteří budou mít v době obarvování f známé všechny své sousedy až na f samotnou. Stačí proto, aby pro všechny hrany $e \in E_1$ platilo, že hrana e je pro svého posledního obarvovaného souseda (bezprostředním) předchůdcem, a budou všechny hrany z E_1 bohaté nebo chudé. Všichni sousedé hran z E_1 jsou totiž v $E_1 \cup E_2$, a tedy mají někdy nějaký typ. Poslední obarvovaný soused hrany $e \in E_1$ skutečně takovou vlastnost má, což nyní ukážeme.

Nechť hrana $e = (u, v)$ má orientaci z u do v. Označíme si sousedy e jako na obrázku 2.6.



Obrázek 2.6: Značení

Hrana e je předchůdcem těch sousedů, kteří jsou orientováni směrem od hrany e. Alespoň jedna hrana z $\{c, d\}$ má orientaci od hrany e, jinak by $v \in V'$, a tedy $e \notin E_1$. Bez újmy na obecnosti nechť d má orientaci od hrany e. Platí, že všechny hrany z $\{a, b, c\}$, jež jsou orientovány směrem k hraně e, budou mít v okamžiku obarvení hrany d již pevně danou barvu. Poslední obarvovaný soused hrany e je tak buď hrana d nebo nějaká z hran a, b, c, která je orientována od hrany e. Pokud je hrana d typu II, pak má hrana c orientaci směrem k hraně e a je obarvována současně s hranou d. Ničemu to ale nevadí, zde je hrana d (společně s hranou c) dokonce nutně poslední obarvovaný soused hrany e a obarvením d je zajištěna bohatost nebo chudoust hrany e.

Hrany v E_1 jsou proto skutečně bohaté nebo chudé.

- Obarvování a přiřazování typů u jednotlivých vrcholů

  Podíváme se postupně na vrcholy podle počtu vcházejících a vycházejících hran. Víme, že vycházející hrana je alespoň jedna (z konstrukce lineárního uspořádání vrcholů — vrcholy, do kterých vchází tři hrany, musí být nutně ve V').

  3 ***výstupní,*** 0 ***vstupních***

  Vycházející hrany jsou navzájem svými bezprostředními předchůdci, žádná tedy nemůže mít všechny předchůdce obarvené, proto všem třem přiřadíme typ III. Podmínka $\triangle$ platí, protože žádná hrana nemá obarveného svého bezprostředního předchůdce.

2 ***výstupní,*** 1 ***vstupní***

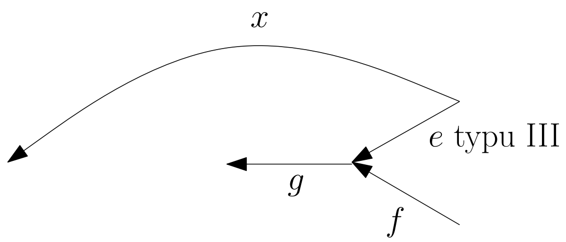
Stejně jako v předchozím případě jsou vycházející hrany navzájem svými předchůdci a mohou mít jedině typ III. Navíc je tady třeba dobarvit vcházející hranu. Ať je vcházející hrana jakéhokoli typu, vždy má několik možností obarvení, které uspokojí dříve obarvené hrany, stačí jednu z nich vybrat. Podmínka $\triangle$ zřejmě pro obě vycházející hrany platí. (Vycházející hrany ani následníci vycházejících hran nejsou zatím obarveni.)

1 ***výstupní,*** 2 ***vstupní***

Tuto možnost dále rozdělíme podle typu vcházejících hran. Vcházející hrany označme e a f, vycházející hranu označme g.

III a cokoli

Bez újmy na obecnosti nechť e je hrana typu III a f druhá vcházející hrana. Hrana f má alespoň tři možnosti obarvení. Vybereme z nich takovou barvu, kterou není obarven žádný z bezprostředních předchůdců e. Barva bezprostředních předchůdců nemusí být známá (např. při situaci na obrázku 2.7), pak na hraně f vybereme libovolnou vyhovující barvu, resp. vyhneme se barvě pouze jednoho bezprostředního předchůdce e. Pokud je f typu II, dobarvíme rovněž její bezprostřední předchůdce.



Obrázek 2.7: Barva hrany x není při obarvování hrany g známá

Pro hranu e máme alespoň čtyři možné barvy. Obarvíme ji tou, která není na hraně f ani na jejích bezprostředních předchůdcích (opět některý nemusí být obarvený, pak se vyhýbáme méně barvám).

Vycházející hrana g bude mít typ I nebo III, podle počtu obarvených předchůdců ($\triangle$ platí).

Slučováním hran typu I nebo typu II dostaneme opět hrany typu I nebo II. Není potřeba ověřovat, jestli jsou určeni všichni předchůdci, resp. předchůdci bezprostředních předchůdců, jsou totiž zřejmě určeni vždy.

I a I

Podpřípady:

- $|T_e \cap T_f| = 0$

  V tomto případě obarvíme hranu e barvou z $T_e \setminus N_f$ a hranu f barvou $T_f \setminus N_e$. Z předpokladu $|T_e \cap T_f| = 0$ plyne, že jsme nevybrali pro obě stejnou barvu. Podmínka $\triangle$ platí, výstupní hrana g tak má typ I.

- $|T_e \cap T_f| \geq 2$

  Opět vede na výstupní hranu g typu I. Pro jakoukoli hranu x typu I platí, že $T_x \cap N_x = \emptyset$. Proto, když $|T_e \cap T_f| \geq 2$, platí $|T_e \setminus N_f| \geq 2$

a $|T_f \setminus N_e| \geq 2$, pro hrany e, f tedy můžeme vybrat navzájem různé barvy z těchto rozdílů. Podmínka $\triangle$ platí.

- $|T_e \cap T_f| = 1$

  Pokud $N_e \not\subseteq T_f$, obarvíme nejprve hranu e barvou z množiny $T_e \setminus N_f$ a pak hranu f barvou z $T_f \setminus N_e$, kterou není obarvena hrana e ($T_f \setminus N_e$ má alespoň dva prvky). Bude tak platit $\triangle$, g bude mít typ I. Obdobně budeme postupovat, když $N_f \not\subseteq T_e$.

  Zbývá případ, kdy $N_e \subseteq T_f$, $N_f \subseteq T_e$ a $|T_e \cap T_f| = 1$. Pak situace až na permutaci barev vypadá následovně: $T_e = \{1, 2, 3\}$, $N_e = \{4, 5\}$, $T_f = \{1, 4, 5\}$, $N_f = \{2, 3\}$. Možná obarvení výstupní hrany, hrany e a hrany f (v tomto pořadí) jsou: $(4, 1, 5)$, $(5, 4, 1)$, $(3, 2, 1)$ a $(2, 3, 1)$. Výstupní hrana g má tak typ II ($C_g = \{2, 3, 4, 5\}$ s dvojicemi $(2, 3)$, $(4, 5)$, $\kappa_g = 1$). Celá situace je načrtnuta také na obrázku 2.4.

I a II

Bez újmy na obecnosti nechť e je hrana typu I a f typu II.

Podpřípady:

- $|N_e \cap C_f| = 0$

  Pro hranu f vybereme barvu α z $C_f \setminus T_e \neq \emptyset$. Podle barvy hrany f se dobarví její bezprostřední předchůdci. Zbývá dobarvit hranu e. Pro ni vybereme z T_e barvu β, kterou nemá žádný bezprostřední předchůdce f. Nemůže se stát $\alpha = \beta$ kvůli výběru barvy α. Podmínka $\triangle$ platí, hrana g bude typu I.

- $|N_e \cap C_f| = 1$

  Nechť společná barva N_e a C_f je α (takže $\alpha \notin T_e$) a α je v C_f ve dvojici s β. Pak hranu f obarvíme barvou β, její bezprostřední předchůdci budou mít barvy α a κ_f. Hranu e obarvíme barvou z $T_e \setminus \{\alpha, \beta, \kappa_e\} = T_e \setminus \{\beta, \kappa_e\}$. Platí $\beta \notin N_e$. Podmínka $\triangle$ je splněna, hrana g bude mít typ I.

- $|N_e \cap C_f| = 2$

  Pokud $|T_e \cap C_f| \leq 1$, vybereme pro f barvu, která není ani v T_e ani v N_e, podle toho obarvíme její bezprostřední předchůdce. Hranu e následně obarvíme barvou, kterou bezprostřední předchůdci f nemají. Platí $\triangle$, hraně g přiřadíme typ I.

  Pokud $|T_e \cap C_f| = 2$, rozlišíme, jestli $\kappa_f \in T_e$ či $\kappa_f \notin T_e$. V druhém případě obarvíme hranu e barvou z $T_e \setminus C_f$ a hranu f barvou z $C_f \setminus N_e$. Podmínka $\triangle$ platí, hrana g bude typu I.

  V případě, že $\kappa_f \in T_e$, máme až na permutaci barev: $T_e = \{1, 2, 3\}$, $N_e = \{4, 5\}$, $C_f = \{1, 2, 4, 5\}$, $\kappa_f = 3$. Jestliže jsou v C_f dvojice $(1, 4)$ a $(2, 5)$, obarvíme hranu e barvou 2, hranu f barvou 1, předchůdci f budou tedy obarveni barvami 4 a 3. Platí $\triangle$, hrana g má typ I.

  A konečně poslední případ, kdy je ve dvojici $(1, 2)$ a $(4, 5)$. Zde máme pro obarvení výstupní hrany g, hrany e a hrany f (v tomto pořadí) možnosti: $(3, 2, 1)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(1, 3, 2)$, $(5, 3, 4)$ a $(4, 3, 5)$. Pokud zapomeneme na první a třetí možnost (které jsou mimochodem pro další obarvování stejné), dostáváme výstupní hranu g typu II ($C_g = \{1, 2, 4, 5\}$ s dvojicemi $(1, 2)$, $(4, 5)$, $\kappa_g = 3$).

II a II

- Jestliže platí $C_f \setminus (C_e \cup \{\kappa_e\}) \neq \emptyset$, pak pro hranu f zvolíme barvu, která leží v $C_f \setminus (C_e \cup \{\kappa_e\})$, dobarvíme její bezprostřední předchůdce. Barvám bezprostředních předchůdců f se vyhneme na hraně e a dobarvíme bezprostřední předchůdce e. Platí podmínka $\triangle$, výstupní hrana g bude mít typ I.

  Obdobně vyřešíme případ, kdy $C_e \setminus (C_f \cup \{\kappa_f\}) \neq \emptyset$.
- Pokud neplatí ani jedna z předchozích podmínek a $\kappa_e \in C_f$, obarvíme hranu f druhou barvou z dvojice, ve které je κ_e. Tuto barvu označme α. Pro hranu e a jednoho jejího bezprostředního předchůdce zvolíme dvojici, kde není α, a z této dvojice použijeme na hranu e barvu, která není rovna barvě κ_f. Platí podmínka $\triangle$, hrana g bude typu I.

  Obdobně obarvujeme, pokud $\kappa_f \in C_e$.
- Zbývá případ, kdy platí $C_e = C_f$.

  Pokud mají obě hrany i stejné dvojice barev, tak na hraně e a jejím bezprostředním předchůdci zvolíme jednu dvojici a na f a jejím bezprostředním předchůdci druhou dvojici. Kde bude která barva z dvojice, určíme libovolně. (Platí $\kappa_e \notin C_f = C_e$ a naopak.) Podmínka $\triangle$ je splněna, hrana g bude typu I.

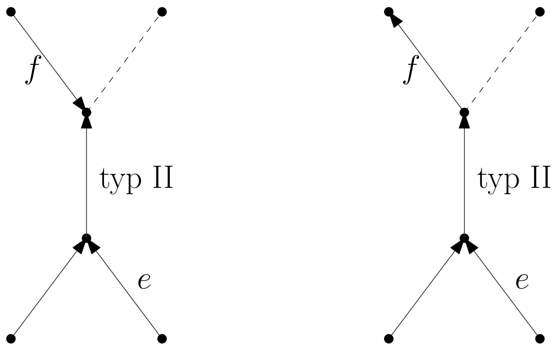
  Pokud jsou dvojice „křížem“, tj. v C_e (bez újmy na obecnosti) $(1, 2)$ a $(3, 4)$ a v C_f $(1, 3)$ a $(2, 4)$, obarvíme hranu e barvou 1, jejího bezprostředního předchůdce tedy barvou 2. Dále hranu f obarvíme druhou barvou z dvojice z C_f, ve které je barva bezprostředního předchůdce e, tj. tady bude mít f barvu 4 a její bezprostřední předchůdce barvu 2. Podmínka $\triangle$ platí, výstupní hrana g je typu I.

- Zbývá ukázat, že když nějaké hraně přiřazujeme barvu a nějaký předchůdce nebo následník této hrany má typ III, tak že se u dané hrany typu III nepokazí podmínka $\triangle$. K tomu, aby se podmínka $\triangle$ pokazila, by musela existovat hrana h typu III taková, že obarvovaná hrana je předchůdce h, a navíc bychom ji museli obarvit stejnou barvou, jako má hrana, která s ní tvoří pro hranu h dvojici jako na obrázku 2.5.

  Aby byla obarvovaná hrana e předchůdcem hrany h, musí být h předchůdcem nebo následníkem hrany e. Pro každou obarvovanou hranu tedy zkontrolujeme případy, kdy je hrana typu III v následnících a kdy je v předchůdcích. Pokud je nějaká hrana h typu III předchůdce a zároveň následník hrany e, probereme ji dvakrát, nicméně jednou nebudeme považovat hranu e za předchůdce h. Například kdyby při třetí situaci na obrázku 2.2 byla obarvována hrana e, pak při probírání následníků hrany e nebudeme uvažovat, že je e pro hrany f a g předchůdce (i když ve skutečnosti je), ale při probírání předchůdců e už hranu e za předchůdce f a g považovat budeme. Abychom považovali při probírání následníků hrany e hranu e za předchůdce hrany h, která je následníkem e, musí být orientace hrany h směrem od vrcholu v hrany $e = (u, v)$. Tímto způsobem určitě probereme všechny možné případy.

Pokud obarvuju nějakou hranu, pak má buď typ I, II nebo III nebo je bezprostředním předchůdcem hrany typu II.

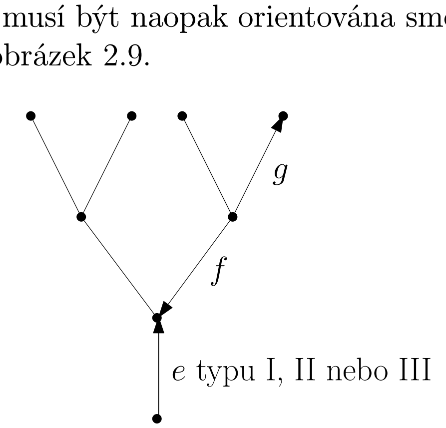
Nejprve nechť obarvovaná hrana e je bezprostředním předchůdcem hrany typu II. Pak její předchůdci mají již určenou barvu (podle definice typu II) a tedy nemají typ III. Její bezprostřední následníci taky nemají typ III (jeden je typu II, druhý je bezprostřední předchůdce hrany typu II). Ostatní následníci buď sousedí s bezprostředním předchůdcem hrany typu II, a proto jsou již obarveni, tj. nemají typ III, nebo jsou to bezprostřední následníci hrany typu II. Potom, pokud je jejich orientace směrem k hraně typu II, není obarvovaná hrana e jejich předchůdcem, a pokud je orientace směrem od hrany typu II, nemají ještě určený žádný typ, nemohou být typu III. Poslední situace je načrtnuta na obrázku 2.8.



Obrázek 2.8: Obarvování bezprostředního předchůdce e hrany typu II

Když je obarvovaná hrana e typu I, II nebo III, její bezprostřední následníci jsou orientováni buď k e, pak hrana e není jejich předchůdce (alespoň ji za předchůdce nepovažujeme při probírání následníků e), nebo směrem od e, potom ještě nemají typ.

Ostatní následníci musí být taky orientováni směrem od e, aby e byla jejich předchůdce. Následníka označíme g, hranu mezi e a g označíme f. Aby tedy byla hrana e byla předchůdce hrany g, musí být g orientována směrem od hrany e. Hrana f musí být naopak orientována směrem k e, aby mohla mít hrana g typ, viz obrázek 2.9.



Obrázek 2.9: Obarvování hrany e typu I, II nebo III

Jestliže g je typu III, tak f je taky typu III (nemá určeného předchůdce g) a navíc bude f obarvována společně s hranou e. Již víme, že pokud se potká hrana typu III s hranou jakéhokoliv typu, výsledná hrana má typ I nebo III, její předchůdci tak budou bohatí. Zde tedy f bude bohatá hrana. Bohatost či chudost druhého bezprostředního předchůdce hrany g hrana e neovlivňuje. Podmínka $\triangle$ proto zůstává zachována.

Předchůdci hran typu I nebo II jsou obarveni, a tak nemají typ III, až na bezprostřední předchůdce hrany typu II, kteří ale taky nemají typ III.

Zbývá případ, kdy obarvujeme hranu e typu III a v jejích předchůdcích je jiná hrana typu III.

Pokud je obarvovaná hrana e typu III, obarvujeme ji barvou různou od barev všech jejích obarvených předchůdců. Dále, pokud je v předchůdcích e hrana typu III, pak „kolizní“ hrany k hraně e (tj. hrany, které nesmí mít pro zachování pravidla $\triangle$ u nějaké hrany h typu III stejnou barvu jako e) jsou taky v předchůdcích e. Pravidlo $\triangle$ se proto neporuší.

Tím je věta 2.1 dokázána.

□

Přesnější znění právě dokázané věty 2.1:

Věta 2.12. *Nechť G je 3-regulární graf, $V' \subseteq V(G)$, $V' \neq \emptyset$. Pak lze hrany grafu G až na hrany podgrafu indukovaného vrcholy V' obarvit devíti barvami tak, že budou všechny hrany grafu G až na hrany incidentní s vrcholy V' bohaté nebo chudé. Navíc hrany mezi vrcholy V' a $V(G) \setminus V'$ budou všechny typu I, II nebo III. (Hrany podgrafu $G - V'$ jsou bohaté nebo chudé pro všechna možná obarvení hran mezi vrcholy V' a $V(G) \setminus V'$.)*

2.2 Obarvení grafů s malými řezy

Věta 2.13. *Pokud má graf G řez velikosti jedna, pak pro něj existuje normální obarvení devíti barvami.*

Důkaz. Označme hranu v řezu velikosti jedna e. Dále označme komponenty, které vzniknou po odebrání hrany e, jako C_1 a C_2.

Buď nejprve $V' = V(C_1)$, pak podle věty 2.12 existuje obarvení hran $E(C_2)$ a hrany e barvami $1, \ldots, 9$ takové, že budou všechny hrany z $E(C_2)$ bohaté nebo chudé.

Totéž uděláme pro $V' = V(C_2)$, ovšem s barvami $10, 11, \ldots, 18$. Po obarvení celé komponenty včetně hrany e přejmenujeme barvy na $1, \ldots, 9$ tak, aby hrana e měla při obou obarveních stejnou barvu a aby hrany sousedící s e měly v obou komponentách stejnou dvojici barev. Výsledkem je hranové obarvení grafu G devíti barvami.

Přebarvením zůstanou hrany v $E(C_1)$ chudé nebo bohaté, hranám $E(C_2)$ se nic nezměnilo, jsou tedy taky bohaté nebo chudé, a hrana e je chudá. Obarvení je normální. □

Věta 2.14. *Pokud má graf řez velikosti dva, pak pro něj existuje normální obarvení devíti barvami.*

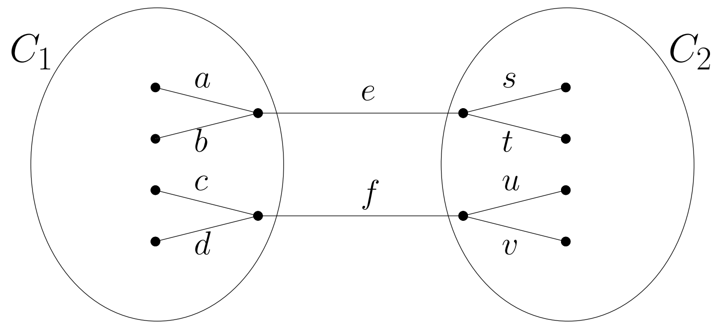
Důkaz. Stejně jako v předchozím případě obarvíme nejprve každou komponentu zvlášť, přičemž ale pro hrany v řezu vybereme pečlivěji barvu z možností jejich obarvení. Následně přebarvíme jednu komponentu (nebo i obě), aby byly hrany v řezu bohaté nebo chudé.

Označíme komponenty, které vzniknou odebráním hran řezu velikosti dva, jako C_1 a C_2. Dále označíme vrcholy v komponentě C_i incidentní s hranami v řezu x_i, y_i.

Můžeme předpokládat $x_i \neq y_i$, jinak by měl graf i řez velikosti jedna a pro takový graf obarvení existuje podle předchozí věty.

Barvíme komponenty C_1 a C_2 zvlášť dle věty 2.12. Hrany v řezu obarvíme dvakrát - při barvení C_1 i při barvení C_2. Výsledkem jsou dvě komponenty obarvené devíti barvami, z každé vychází dvě hrany (odpovídající hranám v řezu) typu I, II nebo III. Typu III budou pouze v případě, že jsou x_i a y_i spojené hranou, jinak mají hrany řezu všechny předchůdce v $E(C_i)$, tedy jsou všichni jejich předchůdci obarveni. Obarvení komponenty C_i (i s hranami v řezu) označíme φ_i.

Označíme hrany z řezu a jejich sousedy podle obrázku 2.10.



Obrázek 2.10: Značení pro řez velikosti dva

Případ 1

x_i a y_i nejsou spojené hranou (ani v jedné z komponent), a tedy hrany v řezu jsou v obou obarveních (φ_1 i φ_2) typu I nebo II.

Případ 1a

Pokud lze hrany e, f dobarvit tak, aby $\varphi_1(a)$, $\varphi_1(b)$, $\varphi_1(c)$, $\varphi_1(d)$, $\varphi_1(e)$, $\varphi_1(f)$ byly různé a $\varphi_2(e)$, $\varphi_2(f)$, $\varphi_2(s)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_2(v)$ byly různé, pak je tak dobarvíme. Následně barvy v druhé komponentě přejmenujeme tak, aby $\varphi_1(e) = \varphi_2(e)$, $\varphi_1(f) = \varphi_2(f)$, $\varphi_1(a) = \varphi_2(s)$, $\varphi_1(b) = \varphi_2(t)$, $\varphi_1(c) = \varphi_2(u)$ a $\varphi_1(d) = \varphi_2(v)$.

Hrany v řezu tak jsou chudé, hrany v komponentách zůstaly chudé nebo bohaté podle obarvení φ_1 a φ_2.

Případ 1b

Pokud tak hrany e, f dobarvit nelze, můžeme určitě dobarvit e, f alespoň tak, aby byly různé $\varphi_i(e)$ a $\varphi_i(f)$. Následně přebarvíme druhou komponentu tak, aby $\varphi_1(e) = \varphi_2(e)$ a $\varphi_1(f) = \varphi_2(f)$.

Další přebarvování ještě rozlišíme na dva případy podle toho, jestli platí alespoň jedna z rovností:

$$\{\varphi_1(a), \varphi_1(b), \varphi_1(c), \varphi_1(d)\} \cap \{\varphi_1(e), \varphi_1(f)\} = \emptyset$$

nebo

$$\{\varphi_2(s), \varphi_2(t), \varphi_2(u), \varphi_2(v)\} \cap \{\varphi_2(e), \varphi_2(f)\} = \emptyset.$$

Když platí, přejmenujeme barvy obarvení φ_1 v prvním případě nebo barvy obarvení φ_2 v případě druhém tak, aby:

$$\{\varphi_1(a), \varphi_1(b), \varphi_1(c), \varphi_1(d)\} \cap \{\varphi_2(s), \varphi_2(t), \varphi_2(u), \varphi_2(v)\} = \emptyset$$

a aby se nezměnily barvy $\varphi_i(e)$ a $\varphi_i(f)$ (proto přebarvujeme pokaždé jinou komponentu). Hrany v řezu tak budou bohaté. Toto přejmenování nelze provést pouze pokud by byly barvy $\varphi_1(a)$, $\varphi_1(b)$, $\varphi_1(c)$, $\varphi_1(d)$ různé i barvy $\varphi_2(s)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_2(v)$ různé a navíc by byly všechny různé od $\varphi_1(e) = \varphi_2(e)$ a $\varphi_1(f) = \varphi_2(f)$. Potom bychom totiž potřebovali deset barev. V takovém případě ale platí, že barvy $\varphi_1(a)$, $\varphi_1(b)$, $\varphi_1(c)$, $\varphi_1(d)$, $\varphi_1(e)$, $\varphi_1(f)$ jsou různé a taky $\varphi_2(e)$, $\varphi_2(f)$, $\varphi_2(s)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_2(v)$ jsou různé, což už obarvit umíme (případ 1a).

Když

$$\{\varphi_1(a), \varphi_1(b), \varphi_1(c), \varphi_1(d)\} \cap \{\varphi_1(e), \varphi_1(f)\} \neq \emptyset$$

i

$$\{\varphi_2(s), \varphi_2(t), \varphi_2(u), \varphi_2(v)\} \cap \{\varphi_2(e), \varphi_2(f)\} \neq \emptyset,$$

je přebarvování o něco složitější.

Lemma 2.15. *Lze zaručit, aby $\varphi_1(e) \notin \{\varphi_1(c), \varphi_1(d)\}$ a $\varphi_1(e) \neq \varphi_1(f)$. (Resp. symetricky $\varphi_1(f) \notin \{\varphi_1(a), \varphi_1(b)\}$ a $\varphi_1(e) \neq \varphi_1(f)$, ne ale obojí najednou.) Obdobně u druhé komponenty.*

Důkaz. Pokud jsou e i f typu I, potom pro hranu e zvolíme ze tří možných barev tu, která není v $\{\varphi_1(c), \varphi_1(d)\}$, pro hranu f pak můžeme vybrat barvu, aby $\varphi_1(e) \neq \varphi_1(f)$.

Pokud je typu II jen hrana e, lze se na hraně e jednoduše vyhnout barvám $\varphi_1(c)$, $\varphi_1(d)$ (obě jsou pevně dané nezávisle na konečné barvě hrany f). Pro hranu f vybereme barvu, kterou není obarvená e.

Pokud je typu II hrana f, kde $C_f = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ s dvojicemi (α, β) a (γ, δ) obarvíme hrany následovně. Pro e zvolíme barvu různou od $\{\kappa_f, \alpha\}$ a jestli je to možné, i různou od β. Na f zvolíme barvu α, což dává hranám c a d obarvení barvami κ_f, β. Jestliže se na hraně e není možné vyhnout všem třem barvám z $\{\kappa_f, \alpha, \beta\}$, je hrana typu I s $T_e = \{\kappa_f, \alpha, \beta\}$. Obarvení požadovaných vlastností je pak např.: $\varphi_1(f) = \gamma$, takže bude $\{\varphi_1(c), \varphi_1(d)\} = \{\kappa_f, \delta\}$, a $\varphi_1(e) = \alpha$.

Tím je lemma dokázáno. □

Dle lemmatu tedy nejprve obarvíme komponenty a hrany v řezu tak, aby $\varphi_1(e) \notin \{\varphi_1(c), \varphi_1(d)\}$, $\varphi_1(e) \neq \varphi_1(f)$ a aby $\varphi_2(f) \notin \{\varphi_2(s), \varphi_2(t)\}$, $\varphi_2(e) \neq \varphi_2(f)$. Barvy obarvení φ_2 přejmenujeme, aby platilo $\varphi_1(e) = \varphi_2(e)$ a $\varphi_1(f) = \varphi_2(f)$. Dále protože platí $\{\varphi_1(a), \varphi_1(b), \varphi_1(c), \varphi_1(d)\} \cap \{\varphi_1(e), \varphi_1(f)\} \neq \emptyset$, jsou hrany a, b, c, d, e, f ve φ_1 obarveny maximálně pěti barvami. Můžeme proto ty barvy z $\{\varphi_2(s), \varphi_2(t), \varphi_2(u), \varphi_2(v)\}$, které nejsou v $\{\varphi_2(e), \varphi_2(f)\}$ přejmenovat tak, aby nebyly z množiny barev $\{\varphi_1(a), \varphi_1(b), \varphi_1(c), \varphi_1(d)\}$. Nyní je již obarvení normální. Hranám v komponentách se na bohatosti či chudosti nic nezměnilo. Hrana e má sousedy a, b, s, t, platí, že $\{\varphi_2(s), \varphi_2(t)\}$ neobsahuje $\varphi_2(e)$ ani $\varphi_2(f)$, takže $\{\varphi_2(s), \varphi_2(t)\} \cap \{\varphi_1(a), \varphi_1(b), \varphi_1(c), \varphi_1(d)\} = \emptyset$. Hrana e je tedy bohatá.

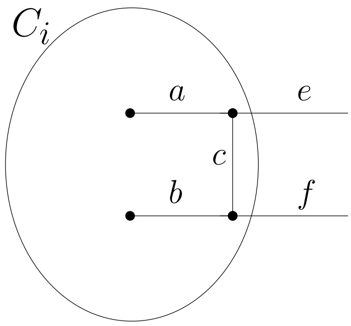
Hrana f má sousedy c, d, u, v, platí, že $\{\varphi_1(c), \varphi_1(d)\}$ neobsahuje $\varphi_1(e)$ ani $\varphi_1(f)$, takže $\{\varphi_2(u), \varphi_2(v)\} \cap \{\varphi_1(c), \varphi_1(d)\} = \emptyset$. Hrana f je proto taky bohatá.

Tím je skončen rozbor případu 1b.

Případ 2

Pokud jsou x_i a y_i alespoň v jedné komponentě spojené hranou, obarvíme danou komponentu (resp. komponenty) následovně.

Označení hran viz obrázek 2.11.



Obrázek 2.11: Značení

Hrany e a f jsou typu III, protože jsou navzájem svými předchůdci. Mají tedy obě alespoň čtyři možnosti obarvení. Navíc již z definice typu III v těchto možnostech nejsou barvy hran a, b, c. Aby platilo $\varphi_i(e) \neq \varphi_i(f)$ lze zařídit snadno. Dobarvení celého grafu se nyní dá převést na případ, kde

$$\{\varphi_1(a), \varphi_1(b), \varphi_1(c), \varphi_1(d)\} \cap \{\varphi_1(e), \varphi_1(f)\} = \emptyset$$

vyřešený výše.

Tím je důkaz věty 2.14 hotov.

□

2.3 Obarvení grafů s trojúhelníkem

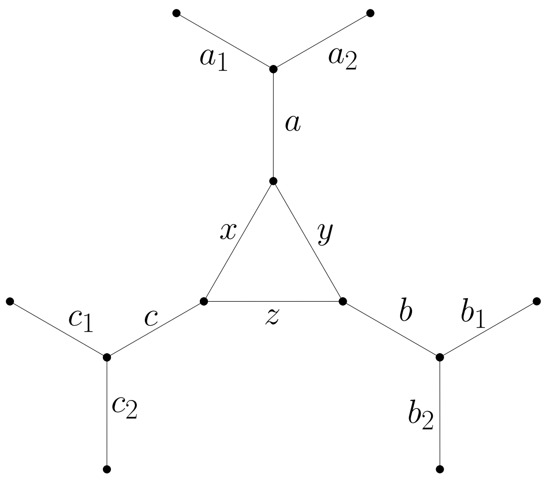
Věta 2.16. *Pokud graf G obsahuje trojúhelník, pak pro něj existuje normální obarvení devíti barvami.*

Důkaz. Označíme si hrany trojúhelníka, jejich sousedy a sousedy sousedů dle obrázku 2.12.

Použijeme větu 2.12, kde jako V' vezmeme vrcholy trojúhelníka. Hrany a, b a c budou po proběhnutí algoritmu typu I, II nebo III. Všechny hrany $e \in E(G)$, které nejsou incidentní s žádným vrcholem trojúhelníka, budou obarveny barvou $\varphi(e)$ a každá bude po dobarvení hran a, b a c bohatá nebo chudá.

Pokud se nám podaří dobarvit hrany a, b a c tak, aby platilo tvrzení: barvy hran a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c, c_1, c_2 nejsou všechny různé a zároveň $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, $\varphi(a) \neq \varphi(c)$ a $\varphi(b) \neq \varphi(c)$, máme vyhráno, jak uvidíme dále. Tvrzení označíme $\star$.

Poznámka 2.17. *Nerovnosti $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, $\varphi(a) \neq \varphi(c)$ a $\varphi(b) \neq \varphi(c)$ musí platit vždy, jinak by buď jedna hrana z $\{x, y, z\}$ nebyla ani bohatá ani chudá nebo by dvě z nich měly stejnou barvu, a tedy by obarvení nebylo dobré.*



Obrázek 2.12: Značení pro graf s trojúhelníkem

Dobarvení trojúhelníka v případě, že platí $\star$, proběhne následovně. Pro každou hranu z $\{x, y, z\}$ zjistíme počet různých barev obarvených hran ve vzdálenosti dva. (Pro hranu x jsou ve vzdálenosti nejvýše dva obarvené hrany a, a_1, a_2, b, c, c_1, c_2.) Pro alespoň jednu hranu z $\{x, y, z\}$ musí být tento počet maximálně šest. Nechť je to, bez újmy na obecnosti, pro hranu x. Obarvíme nejprve hranu y barvou, která není použita na hrany ve vzdálenosti dva (hrany $S(y)$). Obarvených hran v $S(y)$ je maximálně sedm, dvě barvy zbývají. Poté obarvíme hranu z barvou nepoužitou na $S(z)$. Obarvených hran v $S(z)$ je nejvýše osm (hrana y už je obarvena), jedna barva nutně zbývá. Nakonec obarvíme hranu x barvou, kterou nemá žádná z $S(x)$. Obarvených hran v $S(x)$ může sice být až devět, ale alespoň dvě mají stejnou barvu. Použitých je proto osm barev a jedna zbývá. Všechny hrany z $\{a, b, c, x, y, z\}$ jsou po tomto obarvení bohaté.

Dále se podíváme, kdy je možné zaručit, aby platilo tvrzení $\star$ (pak lze jistě graf dobarvit), a jak vypadají případy, kdy to možné není (ty pak dobarvíme jinak).

- Nějaká hrana z $\{a, b, c\}$ je typu II

  Bez újmy na obecnosti hrana c je typu II, $C_c = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ s dvojicemi (α, β) a (γ, δ)). Obarvíme nejprve hranu a jakoukoli možnou barvou. Pak přiřadíme barvu hraně b, aby $\varphi(b) \neq \varphi(a)$. Jestliže $\varphi(a) \in C_c$, vyhneme se na hraně b i barvě, která je s $\varphi(a)$ v C_c ve dvojici. Je určitě možné hraně b dvě barvy zakázat, protože má alespoň tři možnosti obarvení.

  Nyní jsou buď některé dvě barvy z $\varphi(a)$, $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\varphi(b)$, $\varphi(b_1)$, $\varphi(b_2)$ stejné, pak se na hraně c stačí vyhnout barvám $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$ a bude platit $\star$, nebo je všech šest barev různých. Potom v C_c existuje barva, která je shodná s jednou barvou z této šestice, bez újmy na obecnosti ať je to barva α. Pokud $\alpha = \varphi(a)$ nebo $\alpha = \varphi(b)$, položíme $\varphi(c) = \beta$. Kvůli výběru barvy $\varphi(b)$ nemůže $\beta = \varphi(a)$ ani $\beta = \varphi(b)$. Dále bude platit $\varphi(c_1) = \alpha$ nebo $\varphi(c_2) = \alpha$, platí tedy $\star$. Pokud $\alpha \neq \varphi(a)$ ani $\alpha \neq \varphi(b)$, stačí položit $\varphi(c) = \alpha$ a opět platí $\star$.

- Nějaká hrana z $\{a, b, c\}$ je typu III

  Mezi hranami z $\{a, b, c\}$ je nějaká typu III. Nějaká hrana tedy nezná všechny své předchůdce, což znamená, že některý její předchůdce je incidentní s vrcholy trojúhelníka, protože všechny ostatní hrany jsou obarvené. Některé dvě hrany z $\{a_1, a_2, a, b_1, b_2, b, c_1, c_2, c\}$ jsou proto totožné, jinak by předchůdce žádné z hran v $\{a, b, c\}$ nemohl být incidentní s vrcholy trojúhelníka. A když jsou dvě hrany totožné, nemůže mít všech devět různé barvy.

  Dobarvíme hrany a, b, c. Hranu a jakoukoli z možných barev, na hraně b se vyhneme $\varphi(a)$ a hranu c neobarvíme barvou $\varphi(a)$ ani $\varphi(b)$.

  Nyní platí $\star$.

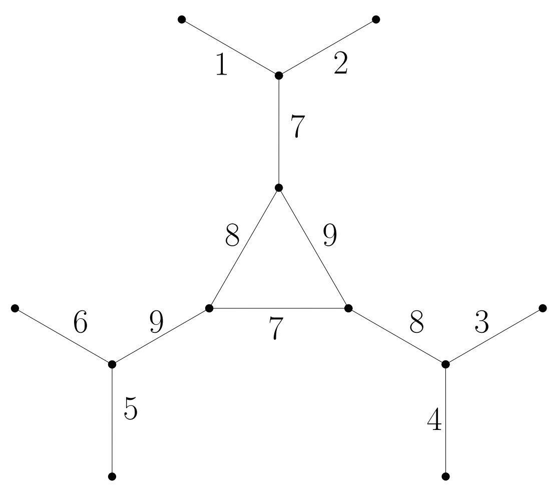
- Všechny hran z $\{a, b, c\}$ jsou typu I

  Pokud je to možné obarvíme $\{a, b, c\}$ tak, aby platilo tvrzení $\star$. Tj. jestli např. může mít hrana a nějakou z barev $\{\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(c_1), \varphi(c_2)\}$, začneme obarvováním hrany a touto barvou a pak už dobarvíme b a c aby a, b, c byly po dvou různé. Obdobně můžeme začít hranou b nebo hranou c.

  Když $\star$ zaručit nelze, znamená to, že žádná hrana v $\{a, b, c\}$ nemá povoleno obarvení nějakou barvou z $\{\varphi(a_1), \varphi(a_2), \varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(c_1), \varphi(c_2)\}$ (pro každou z nich jsou dvě sousední a zbylé čtyři nemůže mít na výběr z důvodů popsaných výše). Barvy z této šestice jsou navíc po dvou různé, jinak lze $\star$ splnit triviálně. Proto

  $$T_a = T_b = T_c = \{1, \dots, 9\} \setminus \{\varphi(a_1), \varphi(a_2), \varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(c_1), \varphi(c_2)\}.$$

  Bez újmy na obecnosti $\varphi(a_1) = 1$, $\varphi(a_2) = 2$, $\varphi(b_1) = 3$, $\varphi(b_2) = 4$, $\varphi(c_1) = 5$, $\varphi(c_2) = 6$ a $T_a = T_b = T_c = \{7, 8, 9\}$. Pak má např. obarvení na obrázku 2.13 požadované vlastnosti.

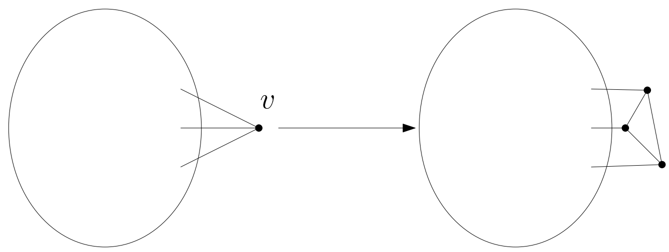


Obrázek 2.13: Obarvení pro speciální případ

□

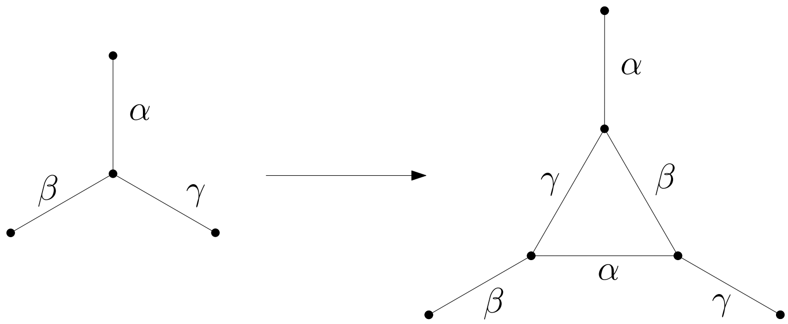
Poznámka 2.18. *Pokud trojúhelník na obrázku 2.13 kontrahujeme, pro stejné obarvení zbylých hran je graf pořád normálně obarven devíti barvami.*

Poznámka 2.19. *Jestliže existuje normální obarvení grafu G s použitím n barev, existuje i normální obarvení n barvami grafu G', který vznikne z grafu G nahrazením vrcholu $v \in V(G)$ trojúhelníkem (viz obrázek 2.14).*



Obrázek 2.14: Nahrazení vrcholu trojúhelníkem

Důkaz. Obarvení rozšíříme na trojúhelník v grafu G' podle obrázku 2.15.

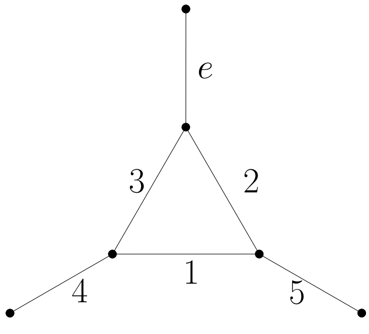


Obrázek 2.15: Obarvení grafu s přidaným trojúhelníkem

Hrany trojúhelníka jsou chudé, zbylým hranám se nezměnily barvy sousedů. □

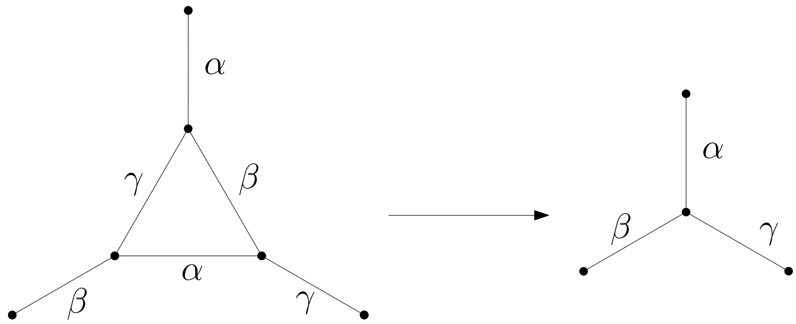
Poznámka 2.20. *Pro normalní obarvení pěti barvami platí i opačná implikace, tj. pokud existuje normální obarvení pěti barvami grafu G' obsahující trojúhelník, existuje i obarvení grafu G, kde je trojúhelník kontrahovaný.*

Důkaz. U normálního obarvení pěti barvami musí být hrany trojúhelníka chudé. Kdyby totiž jedna hrana byla bohatá jako např. na obrázku 2.16 hrana barvy 1, nelze obarvit hranu e.



Obrázek 2.16: Bohatá hrana trojúhelníka pro barvení pěti barvami vede ke sporu

Požadované obarvení grafu G dostaneme z obarvení grafu G', když všem hranám necháme jejich barvu. U trojúhelníku vypadá situace jako na obrázku 2.17, žádné hraně se zřejmě nezmění barvy sousedů.



Obrázek 2.17: Obarvení grafu s kontrahovaným trojúhelníkem pro barvení pěti barvami

□

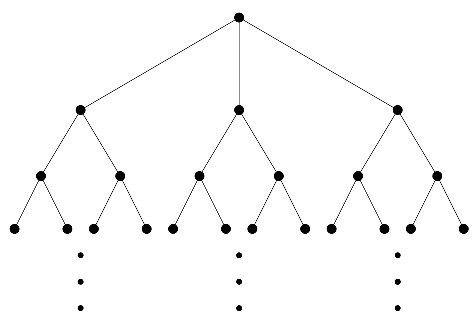
3. Počítačové experimenty

Podle předchozí kapitoly umíme obarvit hrany 3-regulárního grafu devíti barvami tak, aby obarvení bylo normální, v případě, že má graf řez velikosti jedna nebo dva nebo když obsahuje trojúhelník.

Pro kubické grafy, které nemají trojúhelník ani řez velikosti jedna nebo dva, by teoreticky mohl jít důkaz dokončit pomocí počítače. Je ale možné, že by trvalo příliš dlouho, než bychom se dočkali nějakého výsledku. Taky by se mohlo stát, že níže popsaná metoda pro nějaké grafy nebude fungovat vůbec.

Idea dokončení důkazu. Grafy obarvíme podle toho, jaký obsahují nejkratší cyklus (grafy, které nemají řez velikosti jedna, musí mít cyklus). Zvlášť obarvíme grafy s cykly velikosti alespoň k, kde k se dozvíme v průběhu důkazu, a následně pak grafy s nejkratším cyklem velikosti 4, 5, $\ldots$, $k-1$.

V každém případě použijeme na začátku barvení větu 2.12, kde V' budou vrcholy nějakého cyklu velikosti 4, 5, $\ldots$ nebo $k-1$, u grafů s delším cyklem budou V' vrcholy stromu, viz obrázek 3.1.



Obrázek 3.1: Strom u grafu bez krátkých cyklů

V kořeni stromu je nějaký vrchol grafu, v prvním patře jeho sousedi atd. Hloubku stromu určíme tak, aby šlo graf vždy dobarvit (určování hloubky stromu ještě rozebereme dále). Na hloubce stromu závisí konstanta k.

Úkolem je ověřit, že ve vzniklých $k-3$ různých případech lze obarvení rozšířit na všechny hrany grafu.

Pro grafy s krátkými cykly vypadá situace tak, že hrany mající právě jeden vrchol v cyklu jsou typu I, II nebo III, je třeba pro ně zvolit jednu z možností jejich obarvení a dobarvit hrany cyklu. Při ověření je nutné uvažovat všechny možné kombinace typů a barev, které typy charakterizují.

Kdyby u cyklu nějaké velikosti určitá kombinace barev a typů dobarvit nešla, můžeme ještě zkusit rozšířit množinu V' například o sousední vrcholy cyklu.

Pro grafy s dlouhými cykly máme strom z obrázku 3.1, který má v určité hloubce hrany typu I, II nebo III. Těmto hranám chceme vybrat barvu a následně dobarvit hrany směrem ke kořeni stromu. Pro malé stromy (stromy s malou hloubkou) graf ve všech případech pravděpodobně dobarvit nepůjde. Hloubku stromu budeme postupně zvětšovat, až dojdeme k případu, kdy pro všechny možné vstupní hrany typu I, II nebo III strom půjde dobarvit. To, že graf nemá krátké cykly, zaručí, že hrany stromu budou všechny různé (jinak by graf obsahoval krátký cyklus právě ve stromu). Dostatečnou délkou nejkratšího cyklu grafu můžeme dokonce zaručit, že vstupní hrany nebudou typu III, čímž omezíme případy, které je třeba u stromu ověřit, nicméně zase musíme dobarvit větší počet cyklů.

Pro krátké cykly a malé hloubky stromů bude asi možné vyzkoušet úplně všechny možnosti vstupních hran a najít dobarvení, dále je ale nutné vymyslet způsob, jak zkoušení co nejvíce omezit.

Jednoduchá vylepšení jsou např. tato:

1. Není třeba zkoušet každou kombinaci barev, která určuje nějakou hranu nějakého typu, s každou. Pokud je např. první hrana e typu I, může bez újmy na obecnosti $T_e = \{1, 2, 3\}$ a $N_e = \{4, 5\}$. U další hrany f jsou pak důležité pouze průniky s jednotlivými množinami, tj. např. $T_f = \{1, 4, 6\}$, $N_f = \{7, 8\}$ je zde totéž jako $T_f = \{2, 5, 7\}$, $N_f = \{8, 9\}$. Jinak řečeno, pokud přeznačením barev dostaneme něco, co už jsme zkoušeli, nemusíme to zkoušet znovu.

2. U stromu by se dalo použít podobného principu jako v algoritmu, který dokazoval větu 2.12. Víme, že v patře x jsou hrany typu I, II případně ještě III. V patře $(x - 1)$ budou hrany, které vzniknou, když se „potkají" dvě hrany typu I, II a případně III. Mimo jiné se zde tedy mohou vyskytnout hrany typu II. Přesně typ I už ale nikdy nevznikne. Každá hrana, která by v původním algoritmu dostala typ I, má ještě nějakou další možnost obarvení, než by povoloval typ I. Vznikne tak nová sada typů, každý z nich bude charakterizovaný množinou uspořádaných trojic barev, jimiž je možné obarvit hranu samotnou a její dva bezprostřední předchůdce. Tyto typy se budou opět do dvou potkávat a vznikne sada typů pro patro $(x - 2)$ atd.

   Takový algoritmus má šanci na úspěch v případě, že časem dostaneme takové typy, z kterých bude možné vždy vybrat barvy u kořene stromu tak, aby i tři hrany incidentní s kořenem byly bohaté nebo chudé.

   Problém je v tom, že po několika iteracích generování typů jich bude neúnosně mnoho. Pak by se musely nějak omezit, např. bychom si mohli pamatovat jen typy, které by byly podle nějakého kritéria minimální apod.

Co už je vyzkoušeno

Něco (velmi málo) z toho už jsem se pokoušela vyzkoušet. Prográmky pracovaly pouze s prvním vylepšením popsaným výše, jinak zkoušely všechny možnosti, proto je zde ani neuvádím.

Výsledky:

- Pro stromy nelze u kořene sloučit tři hrany typu II. Příklad, kde hrany e, f a g u kořene sloučit nejde, je $\kappa_e = 1, C_e = \{2, 3, 4, 5\}$ s dvojicemi $(2, 3)$ a $(4, 5)$, $\kappa_f = 9, C_f = \{2, 3, 4, 8\}$ s dvojicemi $(2, 3)$ a $(4, 8)$ a $\kappa_g = 5, C_g = \{1, 2, 4, 8\}$ s dvojicemi $(1, 2)$ a $(4, 8)$. (To, že tyto hrany u kořene sloučit opravdu nejde, lze jednoduše ověřit na papíře.) Z toho plyne, že nad hranami typu I, II a III je potřeba mít pro dokončení obarvení ještě alespoň dvě patra hran, protože kdyby bylo jen jedno, mohly by všechny vstupní hrany být typu I, ze tří dvojic typů I by mohly vzniknout tři hrany typu II uvedené výše a ty by nešly u kořene sloučit.

- Pokud graf obsahuje cyklus délky čtyři a hrany mající právě jeden vrchol v cyklu jsou všechny typu I, lze graf dobarvit.

V těchto experimentech pomocí počítače by se tedy dalo ještě pokračovat, nicméně dokončení normálního obarvení devíti barvami není nikterak důležité, protože platí věta 1.11, z které již víme, že grafy bez mostů normálně devíti barvami obarvit lze a grafy s mosty obarvit umíme podle věty 2.13.

Seznam použité literatury

[1] F. Jaeger. *On five-edge-coloring of cubic graphs and nowhere-zero flow problems.* Ars Combinatoria, 20-B (1985), s. 229–244.

[2] L. D. Andersen. *The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10.* Discrete Mathematics, 108 (1992), s. 231–252.

[3] P. Horák, H. Qing, W. T. Trotter. *Induced Matchings in Cubic Graphs.* Journal of Graph Theory, 17, No. 2 (1993), s. 151–160.

[4] F. Jaeger. *Flows and generalized coloring theorems in graphs.* Journal of Combinatorial Theory, B-26, No. 2 (1979), s. 205–216.

[5] P. D. Seymour. *Sums of circuits.* Graph theory and related topics (Proc. Conf., Univ. Waterloo, Waterloo, Ont., 1977), Academic Press, New York, 1979, s. 341–355.

[6] D. R. Fulkerson. *Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra*, Math. Programming, 1 (1971), s. 168–194.

[7] D. Archdeacon. *Coverings of graphs by cycles.* Congressus Numerantium, 53 (1986), s. 7–14.

[8] F. Holroyd, M. Škoviera. *Colouring of cubic graphs by Steiner triple systems.* Journal of Combinatorial Theory, B-91, No. 1 (2004), s. 57–66.

[9] M. Grannell, T. Griggs, M. Knor, M. Škoviera. *A Steiner triple system which colors all cubic graphs.* Journal of Graph Theory, 46, No. 1 (2004), s. 15–24.