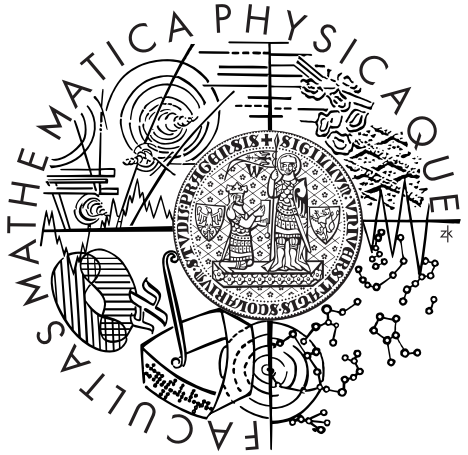
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jan Lopata

Prostory funkcí s necelými derivacemi na intervalu

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: obecná matematika

Praha 2012

Rád bych na tomto místě poděkoval svému vedoucímu docentu Petru Kaplickému za příkladné vedení bakalářské práce. Děkuji také svým rodičům za podporu po celou dobu studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Název práce: Prostory funkcí s necelými derivacemi na intervalu

Autor: Jan Lopata

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V odborné literatuře se setkáváme s různými způsoby zavedení Sobolevova prostoru $W^{1,1}$ na otevřeném a omezeném intervalu. V této práci je uvedeme do souvislosti. Ukážeme, že zúplnění množiny funkcí se spojitou první derivací, prostor funkcí se slabou derivací a prostor absolutně spojitých funkcí jsou izometricky izomorfní. Dále ukážeme, že Sobolevův prostor $W^{1,\infty}$ je izometricky izomorfní prostoru lipschitzovských funkcí. Ukážeme také několik triviálních i netriviálních vnoření pro Besovovy prostory. Nakonec se podíváme na otázku, zda jsou funkce z Besovova prostoru pro jisté parametry obsaženy v množině spojitých funkcí.

Klíčová slova: Sobolevův prostor, absolutně spojitá funkce, Besovův prostor

Title: Spaces of functions with fractional derivatives on interval

Author: Jan Lopata

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In literature we can find a variety of ways to introduce Sobolev space $W^{1,1}$ on bounded and open interval. In this thesis we will put them in context. We will show that completion of set of function with continuous first derivative, the space of functions with weak derivative and space of absolutely continuous functions are isometrically isomorphic. Furthemore, we will demonstrate that the Sobolev space $W^{1,\infty}$ is isometrically isomorphic to space of Lipschitz functions. We will also show several trivial and nontrivial embeddings for Besov spaces. Finnaly, we will examine the question, whether functions from Besov space are, given some parameters, included in set of continuous functions.

Keywords: Sobolev Space, absolutely continuous function, Besov Space

Obsah

Úvod **1**

1 Sobolevovy prostory **2**
1.1 Sobolevův prostor $W^{1,1}$ a jeho izomorfismy 2
1.1.1 Třídy cauchyovských posloupností 3
1.1.2 Funkce se slabou derivací 5
1.1.3 Absolutně spojité funkce 6
1.2 Sobolevův prostor $W^{1,\infty}$ 17

2 Prostory funkcí s necelou derivací **19**
2.1 Úvod, definice 19
2.2 Základní vlastnosti 19
2.3 Závislost $B^{s,p}_{\lambda}$ na s, p, λ 21
2.4 Věty o vnoření 24
2.5 Otevřená otázka 28

A Dodatek **29**
A.1 Použitá tvrzení 29

Seznam použité literatury **32**

Úvod

V této práci zavedeme Sobolevovy prostory $W^{1,1}$ a $W^{1,\infty}$, a to poněkud jiným způsobem, než jsou uvedeny v klasické knize od R. A. Adamse [4]. Ukážeme, že tyto prostory můžou být reprezentovány různými způsoby a funkce v nich obsažené mají hezké vlastnosti – například jsou absolutně spojité a mají slabou derivaci.

Poté se přesuneme k teorii funkcí s necelou derivací a zavedeme Besovovy prostory podle článku od J. Simona [2]. Naše definice budou velmi podobné definicím uvedeným v další klasické knize od C. Benneta a R. Sharpleyho [1]. Ukážeme několik základních vlastností těchto prostorů, několik triviálnějších vnoření a podíváme se i na některé těžší inkluze. Nakonec si položíme otevřenou otázku, na kterou by bylo zajímavé nalézt odpověď.

1. Sobolevovy prostory

1.1 Sobolevův prostor $W^{1,1}$ a jeho izomorfismy

Ve větší části této kapitoly budeme postupovat podle knihy [3]. Poněkud abstraktněji definujeme prostor $W^{1,1}$ na otevřeném a omezeném intervalu. S využitím znalostí z teorie míry pak ukážeme, že se vlastně jedná o prostor absolutně spojitých funkcí na tomto intervalu.

Definice. Nechť f je reálná funkce na intervalu I. **Nosič** funkce f na I definujme předpisem $\operatorname{supt} f = \overline{\{x \in I : f(x) \neq 0\}}$.

Definice. Nechť I je otevřený interval, $n \in \mathbb{N}$. Symbolem $\mathcal{C}^n(I)$ budeme značit množinu funkcí $f : I \to \mathbb{R}$ se spojitou n-tou derivací na I. Symbolem $\mathcal{C}^\infty(I)$ označíme průnik množin $\mathcal{C}^n(I)$ přes všechna $n \in \mathbb{N}$. Pod symbolem $\mathcal{C}_c^n(I)$ rozumíme množinu takových funkcí z $\mathcal{C}^n(I)$, které mají v I kompaktní nosič. Průnik množin $\mathcal{C}_c^n(I)$ přes všechna $n \in \mathbb{N}$ pak označíme jako $\mathcal{C}_c^\infty(I)$.

Označení. Pokud nebude uvedeno jinak, budeme v celé Kapitole 1 pokládat interval $I = (a, b)$ za otevřený a omezený.

Definice. Označme jako X množinu takových funkcí f z $\mathcal{C}^1(I)$, pro které je

$$\|f\|_X := \int_I (|f| + |f'|)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

konečná. X je normovaný lineární prostor s normou $\|\cdot\|_X$. Zřejmě platí $X \subset L^1(I)$.

Poznámka. Prostor X není obecně Banachův.

Důkaz. Nechť $I = (-1, 1)$. Uvažujme následující posloupnost funkcí z X:

$$f_n(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-1, -1/n), \\ 1 - \frac{1}{2n} - \frac{n}{2}x^2, & x \in [-1/n, 1/n], \\ 1 - x, & x \in (1/n, 1) \end{cases}$$

a funkci

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-1, 0], \\ 1 - x, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Funkce f má derivaci f' skoro všude, navíc $f' \in L^1$ a přitom v L^1 neexistuje spojitý reprezentant f'. Po krátkém výpočtu lze ukázat, že

$$\|f_n - f\|_X = \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{n}$$

a posloupnost funkcí f_n tedy konverguje v normě $\|\cdot\|_X$ k funkci f. Funkce f však neleží v X, a proto není prostor X úplný. □

Tvrzení ze základního kurzu funkcionální analýzy uvedeme bez důkazu. Nalezneme jej například v klasické knize [10] na str. 56, 1. věta v kapitole The Completion.

Věta 1. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Potom existuje Banachův prostor $\tilde{X}$ a lineární zobrazení $T : X \to \tilde{X}$ takové, že*

(i) pro každé $x, y \in X$ platí $\|Tx - Ty\|_{\tilde{X}} = \|x - y\|_X$ (T je izometrie),

(ii) $\overline{T(X)} = \tilde{X}$ (obraz X je hustý v $\tilde{X}$).

Pokud existuje Banachův prostor Y a lineární izometrie $L : X \to Y$ taková, že $\overline{L(X)} = Y$, potom existuje izometrický izomorfismus $S : \tilde{X} \to Y$.

Definice. Prostor $\tilde{X}$ z předchozí věty budeme nazývat **zúplnění** prostoru X. Toto zúplnění je určeno jednoznačně až na izometrický izomorfismus.

Definice. Symbolem $W^{1,1}(I)$ označme libovolné zúplnění prostoru X vzhledem k normě $\|\cdot\|_X$ a nazývejme jej **Sobolevovým prostorem** $W^{1,1}$. Normu prostoru $W^{1,1}(I)$ budeme značit jako $\|\cdot\|_{W^{1,1}(I)}$.

Úmluva. Pokud nebude hrozit nedorozumnění, budeme $(W^{1,1}(I), \|\cdot\|_{W^{1,1}(I)})$ zkráceně značit symbolem $(W^{1,1}, \|\cdot\|_{W^{1,1}})$.

Poznámka. Právě definovaný prostor $W^{1,1}$ je natolik abstraktní, že nemá smysl bavit se o jeho prvcích, natožpak se pokoušet počítat jejich normu. Nicméně druhá část Věty 1 nám umožní popsat prostor $W^{1,1}(I)$ méně abstraktně. Pokud k prostoru $W^{1,1}$ nalezneme vhodný Banachův prostor Y a vhodnou lineární izometrii L, pak už jsou podle této věty prostory Y a $W^{1,1}$ izometricky izomorfní. V dalším textu uvedeme hned tři takovéto izomorfismy.

1.1.1 Třídy cauchyovských posloupností

Následujícím postupem ukážeme, že prostor $W^{1,1}$ je izometricky izomorfní prostoru tříd ekvivalence cauchyovských posloupností funkcí z X.

Definice. Symbolem X_{ch} označme prostor všech cauchyovských posloupností funkcí z X.

Tvrzení 2. *Nechť $\{f_n\} \in X_{ch}$. Pak existují funkce $f, g \in L^1(I)$ takové, že*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1(I)} = 0 \quad a \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_{L^1(I)} = 0. \tag{1.2}$$

Funkce f, g jsou v prostoru L^1 určeny jednoznačně.

Důkaz. Posloupnosti $\{f_n\}, \{f_n'\}$ jsou zřejmě cauchyovské v L^1. Závěr pak plyne z úplnosti prostoru L^1. □

Definice. Pomocí funkcí z Tvrzení 2 zavedeme na X_{ch} **pseudonormu**

$$\|\{f_n\}\|_{ch} := \int_I |f| + |g| \,\mathrm{d}x = \|f\|_{L^1(I)} + \|g\|_{L^1(I)}. \tag{1.3}$$

Dále definujme **třídy cauchyovských posloupností** takto:

$$\{f_n^1\} \sim \{f_n^2\} \Leftrightarrow \|\{f_n^1\} - \{f_n^2\}\|_{ch} = 0,$$
$$[\{f_n\}] := \Big\{\{f_n^1\} \in X_{ch} : \{f_n^1\} \sim \{f_n\}\Big\}. \tag{1.4}$$

Libovolnou posloupnost $\{f_n^1\}$ z X_{ch} splňující $\{f_n^1\} \sim \{f_n\}$ nazývejme **reprezentantem** třídy $[\{f_n\}]$. **Množinu tříd cauchyovských posloupností** označíme jako Y_1. Definujme operace

$$[\{f_n^1\}] + [\{f_n^2\}] := [\{f_n^1\} + \{f_n^2\}], \quad \lambda[\{f_n\}] := [\lambda\{f_n\}],$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{f_n^1\}, \{f_n^2\}, \{f_n\} \in X_{ch}$. K prostoru Y_1 dodáme normu

$$\|[\{f_n\}]\|_{Y_1} := \|\{f_n\}\|_{ch}.$$

Ověření korektnosti operací a vlastností normy není příliš obtížné.

Tvrzení 3. *Prostor Y_1 z předchozí definice je Banachův.*

Důkaz. Buď $[\{f_n^1\}], [\{f_n^2\}], \ldots$ cauchyovská posloupnost z Y_1. K prvkům této posloupnosti zvolme reprezentanty $\{f_n^1\}, \{f_n^2\}, \ldots$ libovolně. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nalezneme z Tvrzení 2 funkce $f^k, g^k \in L^1$ splňující

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n^k - f^k\|_{L^1(I)} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \|(f_n^k)' - g^k\|_{L^1(I)} = 0. \tag{1.5}$$

Z definice normy $\|\cdot\|_{Y_1}$ jsou posloupnosti f^k, g^k cauchyovské v L^1 a existují tedy funkce f, g takové, že

$$\lim_{k\to\infty} \|f^k - f\|_{L^1(I)} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} \|(f^k)' - g\|_{L^1(I)} = 0. \tag{1.6}$$

Díky (1.5) nalezneme pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ číslo $n_k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_k$ a speciálně pro n_k platí

$$\|f_n^k - f^k\|_1 < \frac{1}{k}, \quad \|(f_n^k)' - g^k\|_1 < \frac{1}{k}. \tag{1.7}$$

Provedeme odhad

$$\|f_{n_k}^k - f\|_1 \leq \|f_{n_k}^k - f^k\|_1 + \|f^k - f\|_1$$

(podobně pro derivaci). Členy napravo lze podle (1.6) a (1.7) libovolně zmenšit pro dost velké k. Z toho plyne, že

$$f_{n_k}^k \to f \quad \text{a} \quad (f_{n_k}^k)' \to g \quad \text{v } L^1 \text{ pro } k \to \infty. \tag{1.8}$$

Díky tomu máme $\{f_{n_k}^k\} \in X_{ch}$.

Ukážeme závěr tvrzení, t. j. že $[\{f_{n_l}^l\}_{l=1}^\infty]$ je hledanou limitou cauchyovské posloupnosti $\{[\{f_n^k\}]\}_{k=1}^\infty$ v Y_1. Pro libovolné pevné $k \in \mathbb{N}$ počítejme

$$\|[\{f_j^k\}_{j=1}^\infty] - [\{f_{n_j}^j\}_{j=1}^\infty]\|_{Y_1} = \|\{f_j^k - f_{n_j}^j\}_{j=1}^\infty\|_{ch} = \|f^k - f\|_1 + \|(f^k)' - g\|_1.$$

Poslední rovnost plyne z definice normy $\|\cdot\|_{ch}$ a ze vztahů (1.5) a (1.8). Pravá strana rovnosti jde k nule pro $k \to \infty$ podle (1.6).

V prostoru Y_1 tedy libovolná cauchyovská posloupnost konverguje, a prostor Y_1 je proto Banachův. □

Tvrzení 4. *Prostor Y_1 je izometricky izomorfní se Sobolevovým prostorem $W^{1,1}$.*

Důkaz. Zobrazení $L : X \to Y_1$ z Věty 1 definujme předpisem

$$L(f) := [\{f, f, \ldots, \}]. \tag{1.9}$$

Z definice normy na Y_1 okamžitě dostáváme, že L je izometrie. Nyní ukážeme platnost vztahu $\overline{L(X)} = Y_1$. Inkluze $\subseteq$ je zřejmá z definice uzávěru.

Opačnou inkluzi dokazujme takto: Nechť $[\{f_n\}] \in Y_1$. Jako $\{f_n\}$ označme libovolného reprezentanta třídy $[\{f_n\}]$. Ukážeme, že $L(f_k) \to [\{f_n\}]$ pro $k \to \infty$ v Y_1. Z Tvrzení 2 ihned dostáváme existenci $f, g \in L^1$ splňujících

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_1 = 0. \tag{1.10}$$

Pro fixované $k \in \mathbb{N}$ počítejme

$$\|L(f_k) - [\{f_n\}]\|_{Y_1} = \|\{f_k - f_n\}_{n=1}^\infty\|_{ch} = \|f_k - f\|_1 + \|f_k' - g\|_1.$$

Pravá strana nerovnosti jde k nule pro $k \to \infty$ díky (1.10) a důkaz je hotov. □

1.1.2 Funkce se slabou derivací

V knize [4] je uveden jiný způsob zavedení Sobolevova prostoru. Ukážeme, že prostor takto definovaný jest izometricky izomorfní našemu $W^{1,1}$.

Definice. Nechť $f \in L^1(I)$. Řekneme, že funkce $g \in L^1(I)$ je slabou derivací funkce f na I, jestliže platí

$$\int_I f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_I g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I). \tag{1.11}$$

a značíme ji f'. Tohoto značení se budeme držet v celé sekci 1.1.2.

Poznámka. Pro funkce z množiny X pojmy slabá a klasická derivace splývají.

Poznámka. Existuje funkce, která má slabou derivaci, ale nemá klasickou derivaci v žádném bodě. Příkladem budiž charakteristická funkce množiny racionálních čísel na intervalu $(0, 1)$.

Poznámka. Existuje funkce, která má klasickou derivaci, ale nemá slabou derivaci. Položme například $f(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$. Tato funkce je všude diferencovatelná, ale $\int_0^1 |f'| = \infty$, a tedy $f' \notin L^1$.

Definice. Klademe

$$Y_2 := \Big\{ f \in L^1(I); f' \in L^1(I) \Big\}. \tag{1.12}$$

Y_2 je zřejmě vektorový prostor. Dále položme

$$\|f\|_{Y_2} := \|f\|_1 + \|f'\|_1. \tag{1.13}$$

Tvrzení 5. *Nechť $\{f_n\} \in X_{ch}$, $f, g \in L^1(I)$ a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1(I)} = \lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_{L^1(I)} = 0. \tag{1.14}$$

Pak g je slabou derivací funkce f.

Důkaz. Pro libovolnou funkci φ z $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ počítejme *per partes*

$$\int_I f_n\varphi'\,\mathrm{d}x = -\int_I f_n'\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Protože φ, φ' jsou omezené na I, dostáváme použitím (1.14) vztah

$$\Big|\int_I f_n\varphi'\,\mathrm{d}x - \int_I f\varphi'\,\mathrm{d}x\Big| \leq \int_I |f_n - f||\varphi'|\,\mathrm{d}x \leq C\int_I |f_n - f| \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty$$

a podobně

$$\Big|\int_I f_n'\varphi\,\mathrm{d}x - \int_I g\varphi\,\mathrm{d}x\Big| \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty,$$

což jasně dokazuje hledaný vztah

$$\int_I f\varphi'\,\mathrm{d}x = -\int_I g\varphi\,\mathrm{d}x \quad \text{pro každou } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

□

Lemma 6. *Prostor Y_2 je Banachův.*

Důkaz nalezneme v knize [4] na stranách 45–46.

Tvrzení 7. *Prostor Y_2 je izometricky izomorfní se Sobolevovým prostorem $W^{1,1}$.*

Důkaz. Zobrazení $L : X \to Y_2$ definujme jako identitu. L je pak zřejmě izometrie. Budeme dokazovat platnost vztahu $\overline{L(X)} = Y_2$. Inkluze $\subseteq$ plyne z definice uzávěru. Naopak, nechť $f \in Y_2$. Stačí ukázat, že f lze aproximovat funkcemi z X. Důkaz tohoto nalezneme v knize [4] na straně 53. □

1.1.3 Absolutně spojité funkce

V této sekci ukážeme, že prostor Y_2 je množinově roven prostoru absolutně spojitých funkcí $\mathcal{AC}$ (a dodefinujeme zde vhodně normu). Díky Tvrzení 7 to bude znamenat, že Sobolevův prostor $W^{1,1}$ je izomorfní prostoru absolutně spojitých funkcí.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je **absolutně spojitá**, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že pro každý disjunktní systém intervalů $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^n$, $(a_j, b_j) \subset (a, b)$, $j = 1, \ldots, n$ platí

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\Big|f(b_j) - f(a_j)\Big| < \varepsilon. \tag{1.15}$$

Třídu absolutně spojitých funkcí na (a, b) značíme $\mathcal{AC}(a, b)$. Je zřejmé, že $\mathcal{AC}(a, b)$ je vektorový prostor (se standardními operacemi $+$, $\cdot$ nad tělesem $\mathbb{R}$).

Poznámka. Absolutně spojitá funkce je zřejmě stejnoměrně spojitá.

Tvrzení 8. *Nechť f je stejnoměrně spojitá funkce na intervalu (a, b). Potom existuje spojitá funkce $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ taková, že $\tilde{f} \equiv f$ na (a, b).*

Důkaz. Ukážeme, že existují jednostranné limity funkce v krajních bodech intervalu (a, b). Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu najdeme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x, y \in (a, b), |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{1.16}$$

Nechť $\{a_n\}$ je libovolná posloupnost reálných čísel splňující $a_n \in (a, b)$ a $\{a_n\}$ konverguje k a. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - a_m| < \delta$ pro každé $n, m \geq n_0$ a podle (1.16) také platí $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$. $\{f(a_n)\}$ je tedy cauchyovská a konverguje k nějakému $c \in \mathbb{R}$. Lze snadno ověřit, že c nezávisí na volbě posloupnosti $\{a_n\}$. Podle Heineovy věty máme $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = c \in \mathbb{R}$ a klademe $\tilde{f}(a) := c$.

Důkaz pro $x \to b-$ je analogický. □

Poznámka. Díky předchozímu tvrzení lze absolutně spojité funkce definovat také na uzavřeném intervalu. Definice se pak v zásadě nijak neliší, protože absolutně spojitou funkci na intervalu (a, b) lze vhodně rozšířit do krajních bodů tak, aby zůstala absolutně spojitá i na $[a, b]$. Naopak je zřejmé, že restrikce na neprázdný interval absolutní spojitost zachovává.

Definice. Nechť M je množina funkcí $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce z M jsou **stejně absolutně spojité**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové,

že pro každé $f \in M$ platí (1.15). Obdobně definujeme **stejně spojité**, **stejně stejnoměrně spojité** a **stejně omezené funkce**.

Definice. Nechť $\varphi \in L^1(I)$. Řekneme, že množinová funkce

$$E \longmapsto \int_E |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t, \quad E \subseteq I \text{ měřitelná} \tag{1.17}$$

je absolutně spojitá, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta > 0$ takové, že

$$\lambda(E) < \delta \;\Rightarrow\; \int_E |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon. \tag{1.18}$$

Lemma 9. *Nechť $\varphi \in L^1(I)$. Potom je množinová funkce* (1.17) *absolutně spojitá.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Funkce $|f|$ je měřitelná, a tedy pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in I; |f(x)| > \alpha\}$ měřitelná. Položme $f_n := \min\{|f|, n\}$. Pak $f_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $f_n \nearrow |f|$ na I a z Leviho věty proto máme

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I |f|.$$

Protože je tato limita konečná, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\Big| \int_I f_{n_0} - \int_I |f| \Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $\delta := \varepsilon/2n_0$. Pro E měřitelnou splňující $\lambda(E) < \delta$ počítejme

$$\int_E |f| \leq \Big| \int_E |f| - \int_E f_{n_0} \Big| + \int_E f_{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2} + n_0\lambda(E) < \varepsilon.$$

□

Lemma 10. *Nechť $\varphi \in L^1(I)$ a f je funkce na I splňující*

$$f(x) - f(y) = \int_y^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

pro libovolné $[x, y] \subset I$. Pak f je absolutně spojitá na I.

Důkaz. Zřejmě pro všechna $[x, y] \subset I$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_y^x |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{1.19}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Z Lemmatu 9 k němu nalezneme $\delta > 0$ splňující (1.18). Nechť $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^n$, $(a_j, b_j) \in I$, $j = 1, \ldots, n$ je disjunktní systém intervalů splňující $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$ a položme $E := \cup_{j=1}^n (a_j, b_j)$. Pak snadno spočteme

$$\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| \leq \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t = \int_E |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon$$

a f je tedy absolutně spojitá funkce na I. □

Věta 11. *Nechť $f \in Y_2$. Potom existuje spojitá funkce $\tilde{f}$ na I taková, že $\tilde{f} = f$ skoro všude a pro všechna $[x, y] \subset I$ platí*

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) = \int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.20}$$

a funkce $\tilde{f}$ je podle Lemmatu 10 absolutně spojitá na I.

Důkaz. V Tvrzení 7 jsme ukázali, že funkci z Y_2 lze aproximovat funkcemi z X v normě $\|\cdot\|_{Y_2}$. Nechť tedy $f \in Y_2$ a posloupnost $\{f_n\} \subset X$ konverguje k f v prostoru Y_2.

Budeme postupovat takto: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme funkci $\tilde{f}_n$, která je spojitým rozšířením funkce f_n na $\overline{I}$. Poté ověříme, že funkce posloupnost $\{\tilde{f}_n\}$ splňuje předpoklady Arzelovy–Ascoliho věty (viz Věta 41 v dodatku) – t. j. stejnou omezenost a stejnou spojitost funkcí $\tilde{f}_n$. Tento postup nám zaručí existenci funkce $\tilde{f}$ a bude stačit jen ověřit závěr věty.

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in I$ dostáváme z vlastnosti $f_n \in \mathcal{C}^1(I)$ rovnost

$$f_n(x) - f_n(y) = \int_y^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.21}$$

speciálně

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le \int_y^x |f_n'(t)|\,\mathrm{d}t \tag{1.22}$$

a dále

$$|f_n(x)| \le |f_n(y)| + \int_y^x |f_n'(t)|. \tag{1.23}$$

Integrací nerovnosti (1.23) podle proměnné y přes I dostáváme

$$\sup_I |f_n| \le \frac{1}{|I|}\int_I |f_n|\,\mathrm{d}x + \int_I |f_n'|\,\mathrm{d}x. \tag{1.24}$$

Odsud již plyne, že funkce f_n jsou stejně omezené na I.

Ukážeme, že pro každé $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé $n \ge n_0$ přirozené a pro libovolnou měřitelnou množinu $E \subset I$ platilo

$$\lambda(E) < \delta \;\Rightarrow\; \int_E |f_n'(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon. \tag{1.25}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Z Lemmatu 9 najdeme $\delta_0 > 0$ takové, že pro $E \subset I$ měřitelnou platí

$$\lambda(E) < \delta_0 \;\Rightarrow\; \int_E |f'(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon/2.$$

Dále z toho, že $f_n \to f$ v Y_2, najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby pro $n \ge n_0$ platilo

$$\int_I |f_n' - f'| < \varepsilon/2. \tag{1.26}$$

Z toho máme platnost (1.25) pro $n \ge n_0$. Poté pro každé $n \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$ najdeme δ_n podle Lemmatu 9 a položíme $\delta := \min\{\delta_0, \dots \delta_{n_0}\}$. Pak platí (1.25) pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Z (1.25) a z (1.22) plyne

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x, y \in I\ :\ |x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \tag{1.27}$$

funkce f_n jsou tedy na I stejně stejnoměrně spojité. Podle Tvrzení 8 existují funkce $\tilde{f}_n$ spojité na $\overline{I}$. Stejná spojitost funkcí $\tilde{f}_n$ je snadná a plyne z definice.

Ze vztahu (1.24) a z existence limit v krajních bodech pak dostáváme stejnou omezenost funkcí $\tilde{f}_n$ na $\overline{I}$.

Nyní na posloupnost funkcí $\{\tilde{f}_n\}$ použijeme Arzelovu–Ascoliho větu. Ta nám dá existenci podposloupnosti $\{\tilde{f}_{n_k}\}$, která na $\overline{I}$ konverguje stejnoměrně ke spojité funkci, označme ji $\tilde{f}$.

Zřejmě $\tilde{f}_{n/I} = f_n$, a tedy $f_{n_k} \to \tilde{f}_{/I}$ v L^1. Protože $f_n \to f$ v L^1, musí platit $\tilde{f} = f$ v L^1, což znamená, že $\tilde{f} = f$ skoro všude na I. Pro $x, y \in I$ máme díky stejnoměrné konvergenci

$$\Big(f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y)\Big) \to \Big(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\Big) \quad \text{pro } k \to \infty.$$

Dále

$$\Big|\int_y^x f'_{n_k} - \int_y^x f'\Big| = \Big|\int_y^x (f'_{n_k} - f')\Big| \le \|f'_{n_k} - f'\|_{L^1(I)} \to 0 \quad \text{pro } k \to \infty,$$

což spolu s rovností (1.21) dává platnost vztahu (1.20).

Použitím Lemmatu 10 dostaneme absolutní spojitost funkce $\tilde{f}$ na I. □

Lemma 12. *Nechť $f \in \mathcal{C}^1((a,b)) \cap \mathcal{C}([a,b])$, $\varepsilon, \delta > 0$ a nechť je $E \subset (a,b)$ měřitelná a platí $\lambda(E) < \delta$ a $\int_E |f'| \ge 4\varepsilon$. Pak existuje systém po dvou disjunktních intervalů $(a_j, b_j) \subset (a,b)$, $j \in \{1, \dots M\}$ takový, že*

$$\sum_{j=1}^{M} (b_j - a_j) < \delta \quad a \quad \sum_{j=1}^{M} |f(b_j) - f(a_j)| \ge \varepsilon. \tag{1.28}$$

Důkaz. Protože E je měřitelná množina, platí

$$\lambda(E) = \inf\{\sum_{j=1}^{m} (d_j - c_j), E \subset \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j)\}.$$

Z definice infima existuje množina $G := \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j)$ splňující $\sum_{j=1}^{m} (d_j - c_j) < \delta$ a $E \subset G$. Množina G je zřejmě otevřená.

Označme $G^+ := \{x \in G\,;\, f'(x) > 0\}$ (G^- analogicky). Protože f' je spojitá, je G^+ (G^-) otevřená, a tedy měřitelná. Jest $\int_G |f'| \ge \int_E |f'| \ge 4\varepsilon$. Dále platí $\int_G |f'| = \int_{G^-} |f'| + \int_{G^+} |f'|$. Zřejmě alespoň u jedné z množin G^+, G^- musí nastat případ, kdy integrál funkce $|f'|$ přes onu množinu je větší nebo roven 2ε. Nechť toto nastane bez újmy na obecnosti na množině G^+.

Podle Věty 49 (viz dodatek) existuje systém po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_j, b_j) takový, že $G^+ = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (a_j, b_j)$. Máme

$$\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) = \lambda(G^+) \le \lambda(G) < \delta$$

a zároveň

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(b_j) - f(a_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{a_j}^{b_j} f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{G^+} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \ge 2\varepsilon.$$

Pro nějaké dostatečně velké $M \in \mathbb{N}$ pak máme (1.28).

□

Lemma 13. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $f_n \in \mathcal{C}^1((a,b))$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je ekvivalentní*

(i) funkce f_n jsou stejně absolutně spojité na (a,b),

(ii) množinové funkce

$$E \longmapsto \int_E |f_n'|, \quad E \subseteq (a,b) \text{ měřitelná}$$

jsou stejně absolutně spojité, t. j. pro každé $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lambda(E) < \delta \;\Rightarrow\; \int_E |f_n'(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Důkaz. Pro důkaz implikace $(ii) \;\Rightarrow\; (i)$ stačí pro libovolný systém intervalů $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^m$ z definice stejně abs. spojitých funkcí splňující $\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta$ položit $E = \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j)$. Potom máme

$$\sum_{j=1}^m |f_n(b_j) - f_n(a_j)| \le \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} |f_n'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_E |f_n'(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Druhou implikaci dokážeme obměnou. Nechť tedy neplatí (ii). Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ a měřitelná množina $E \subset I$ míry menší než δ splňující $\int_E |f_n'| \ge 4\varepsilon$. Podle předchozího lemmatu pak existuje konečný systém disjunktních intervalů $\{(a_j, b_j)_{j=1}^M\}$ takový, že $\sum_{j=1}^M (b_j - a_j) < \delta$ a platí

$$\sum_{j=1}^M (b_j - a_j) < \delta, \qquad \sum_{j=1}^M |f_n(b_j) - f_n(a_j)| \ge \varepsilon.$$

Funkce f_n proto nejsou stejně absolutně spojité na I. □

Definice. Nechť J je nezáporná reálná funkce z prostoru $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ s následujícími vlastnostmi:

(i) $J(x) = 0$ pro $|x| \ge 1$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}} J(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Pro $\varepsilon > 0$ definujeme **zhlazující funkci** $J_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1} J(x/\varepsilon)$. J_ε splňuje

(i) $J_\varepsilon(x) = 0$ pro $|x| \ge \varepsilon$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Pro takové funkce u, pro které má pravá strana výrazu

$$\Big(J_\varepsilon * u\Big)(x) = \int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y \tag{1.29}$$

smysl, nazýváme konvoluci $J_\varepsilon * u$ **zhlazením** u.

Následující lemma pochází z knihy [4].

Lemma 14. *Nechť $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce nulová mimo interval I. Potom platí:*

(i) Jestliže $u \in L^1(I)$, potom $J_\varepsilon * u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) Jestliže $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, potom $J_\xi * u$ konverguje stejnoměrně k u na $\mathbb{R}$ pro $\xi \to 0+$.

Důkaz. Nechť $u \in L^1(I)$. Je zřejmé, že $J_\varepsilon * u$ má v $\mathbb{R}$ kompaktní nosič. Zvolme $\varepsilon > 0$ pevné. Označme $h(x, y) = J_\varepsilon(x - y)u(y)$. Funkce $h(x, \cdot)$ je měřitelná, dále pro $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, y) = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k J_\varepsilon(x - y)u(y).$$

Funkce $J_\varepsilon^{(k)}$ je omezená na $\mathbb{R}$, a tedy platí

$$\Big|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, y)\Big| \le \Big|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k J_\varepsilon(x - y)\Big||u(y)| \le K(\varepsilon, k)|u(y)|.$$

$K(\varepsilon, k)|u(y)|$ je integrovatelná majoranta funkce $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, y)$. Podle věty o derivaci integrálu dle parametru tedy platí

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\Big(J_\varepsilon * u\Big)(x) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k h(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k \Big(J_\varepsilon(x - y)\Big)u(y)\,\mathrm{d}y, \quad (1.30)$$

z čehož plyne (i).

Nechť dále $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Dle definice stačí ukázat platnost výroku

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \xi \in (0, \delta)\ \forall x \in \mathbb{R} : |J_\xi * u(x) - u(x)| < \varepsilon. \quad (1.31)$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné pevné. Ze stejnoměrné spojitosti u na $[a - 1, b + 1]$ nalezneme $\delta \in (0, 1)$ takové, že $|u(y) - u(x)| < \varepsilon$, kdykoliv $0 < y - x < \delta$ a $(x, y) \subset [a - 1, b + 1]$. Pro $\xi \in (0, \delta)$ a $x \in [a - \xi, b + \xi]$ pak s využitím vlastností zhlazující funkce máme

$$\begin{aligned} |J_\xi * u(x) - u(x)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}} J_\xi(x - y)u(y)\,\mathrm{d}y - u(x)\Big| \\ &= \Big|\int_{\mathbb{R}} J_\xi(x - y)\Big(u(y) - u(x)\Big)\,\mathrm{d}y\Big| \\ &\le \sup_{|x-y|<\xi<\delta} |u(y) - u(x)| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Pro $x \notin [a - \xi, b + \xi]$ je dokonce $|J_\xi * u(x) - u(x)| = 0$ a důkaz bodu (ii) je tímto završen. □

Lemma 15. *Nechť $\{u_n\}$ je taková posloupnost prvků z $L^1(I)$, že množinové funkce*

$$E \longmapsto \int_E |u_n|\,\mathrm{d}x, \quad E \subseteq I \text{ měřitelná}$$

jsou stejně absolutně spojité. Potom platí

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{\|u_n\|_{L^1(I)}\Big\} < +\infty.$$

Důkaz. Položme $\varepsilon = 1$. K němu najdeme $\delta > 0$ z definice stejné absolutní spojitosti. Dále položme $m \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo $m \geq |I|/\delta + 1$. Interval I rovnoměrně rozdělíme na m intervalů I_k. Jistě $\lambda(I_k) < \delta$ pro každé $k \in \{1, \ldots, m\}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\int_I |u_n| = \sum_{k=1}^{m} \int_{I_k} |u_n| < m < +\infty.$$

□

Věta 16. *Nechť $\{u_n\}$ je taková posloupnost prvků z $L^1(I)$, že množinové funkce $E \longmapsto \int_E |u_n| \,\mathrm{d}x$ (pro $E \subseteq I$ měřitelné) jsou stejně absolutně spojité. Potom existuje podposloupnost $\{u_{n_k}\}$, která konverguje slabě v prostoru $L^1(I)$.*

Před důkazem této věty připomeneme potřebné objekty z teorie míry.

Definice. Míra μ definovaná na σ-algebře $\mathcal{B}$ všech borelovských množin v lokálně kompaktním Hausdorffově prostor X se nazývá **borelovská míra** na X. Řekneme, že borelovská míra μ je **regulární**, jestliže je pro každou množinu $E \in \mathcal{B}$ splněno

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V);\, E \subset V,\, V \text{ otevřená}\}$$

a

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K);\, K \subset G,\, K \text{ kompaktní}\}.$$

Definice. Řekneme, že komplexní funkce f definovaná na lokálně kompaktním Hausdorffově prostoru X se **anuluje v nekonečnu**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní množina $K \subset X$ taková, že $|f(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \notin K$. Třídu všech spojitých reálných funkcí na X, které se anulují v nekonečnu, značíme $\mathcal{C}_0(X)$. Je zřejmé, že $\mathcal{C}_c(X)$ je hustou podmnožinou prostoru $\mathcal{C}_0(X)$ v supremové normě. Toho budeme později využívat.

Poznámka. Pod pojmem lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor si budeme pro jednoduchost představovat otevřený omezený interval (a, b).

Tvrzení 17. *Buď X lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Každé spojité lineární zobrazení $\Phi : \mathcal{C}_0(X) \to \mathbb{R}$ lze zapsat ve tvaru*

$$\Phi(f) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu_\Phi, \quad f \in \mathcal{C}_0(X), \tag{1.33}$$

kde μ_Φ je reálná regulární znaménková borelovská míra na X.

Důkaz. Označme si $\mathcal{C}_0^c(X)$ jako prostor všech funkcí $f : X \to \mathbb{C}$ takových, že $\mathrm{Re}f \in \mathcal{C}_0(X)$ a $\mathrm{Im}f \in \mathcal{C}_0(X)$. Nyní definujme $\Phi^c : \mathcal{C}_0^c(X) \to \mathbb{C}$ takto:

$$\Phi^c(f) := \Phi(\mathrm{Re}f) + i\Phi(\mathrm{Im}f).$$

Podle Rieszovy věty (viz dodatek, Věta 42) existuje k funkcionálu Φ^c komplexní regulární borelovská míra μ_Φ taková, že

$$\Phi^c(f) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu_\Phi.$$

Označme $\mu_\Phi = \mu_1 + i\mu_2$, kde μ_1, μ_2 jsou reálné znaménkové míry. Pro $f \in \mathcal{C}_0(X)$ platí, že $f + i0 \in \mathcal{C}_0^c(X)$, a tedy

$$\Phi^c(f + i0) = \Phi(f) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu_\Phi = \int_X f \,\mathrm{d}\mu_1 + i \int_X f \,\mathrm{d}\mu_2.$$

Protože $\Phi(f) \in \mathbb{R}$, jest $\int_X f \,\mathrm{d}\mu_2 = 0$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}_0(X)$, a proto $\mu_2 = 0$. Platí tedy, že $\mu_\Phi = \mu_1$. Míra μ_Φ je podle Rieszovy věty regulární a borelovská. □

Nyní již budeme pracovat s funkcemi z prostoru $\mathcal{C}_0((a,b))$ se supremovou normou.

V Tvrzení 17 jsme ukázali, že duál prostoru $\mathcal{C}_0((a,b))$ je obsažen v prostoru všech reálných nezáporných borelovských měr na (a,b), ba dokonce jsme zde pro každý prvek z $\mathcal{C}_0((a,b))^*$ našli jeho reprezentanta. V situaci z Věty 16 postupujme následovně. Definujme

$$F_n(f) := \int_a^b f(x)u_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b f \,\mathrm{d}\mu_n, \quad f \in \mathcal{C}_0((a,b))$$

a počítejme

$$|F_n(f)| = |\int_a^b f(x)u_n(x) \,\mathrm{d}x| \leq \int_a^b |f(x)||u_n(x)| \,\mathrm{d}x \leq \sup_{x\in(a,b)} |f(x)| \, \|u_n\|_1.$$

Podle Lemmatu 15 tedy dostáváme

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|F_n\| = \sup\{|F_n(f)| \,;\, |f| \leq 1, f \in \mathcal{C}_0((a,b)), n \in \mathbb{N}\} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_1 < \infty$$

(norma nalevo je z $\mathcal{C}_0((a,b))^*$). Funkcionály F_n tedy leží v kouli o poloměru $\sup\{\|u_n\|_1; n \in \mathbb{N}\}$ v duálu prostoru $\mathcal{C}_0(a,b)$.

Poznamenejme, že prostor $\mathcal{C}_0(a,b)$ je separabilní (spočetnou hustou podmnožinou budiž například množina všech polynomů na intervalu (a,b) s racionálními koeficienty.) Nyní můžeme uplatnit důsledek Banach-Alaogluova teorému (viz dodatek, Důsledek č. 45), což nám dává slabě* konvergentní podposloupnost $\{F_{n_k}(f)\}$ v duálu prostoru $\mathcal{C}_0((a,b))$ a díky Rieszově větě také slabě* konvergentní posloupnost měr μ_{n_k}. To však ještě není tvrzení dokazované věty.

Důkaz věty 16. Podle předchozího existuje podposloupnost $\{u_{n_k}\}$ a reálná borelovská regulární znaménková míra μ taková, že

$$\int_I u_{n_k}\varphi \,\mathrm{d}x \to \int_I \varphi \,\mathrm{d}\mu \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{C}_0(I). \tag{1.34}$$

Nejprve dokážeme, že pro každou borelovskou množinu $B \subset I$ existuje

$$\gamma(B) := \lim_{k\to\infty} \int_B u_{n_k} \,\mathrm{d}x. \tag{1.35}$$

Ukážeme, že posloupnost $\{\int_B u_{n_k} \,\mathrm{d}x\}$ je cauchyovská. Zvolme $\varepsilon > 0$, k němu najdeme $\delta > 0$ z předpokladu stejné absolutní spojitosti. Charakteristická funkce χ_B množiny $B \subset I$ je měřitelná, omezená shora jedničkou a podle Luzinovy věty

(viz dodatek, Věta 46) najdeme posloupnost $\{\varphi_l\}$ z $\mathcal{C}_c(I)$ takovou, že $|\varphi_l| \le 1$ na I pro všechna $l \in \mathbb{N}$ a $\varphi_l(x) \to \chi_B(x)$ skoro všude na I.

Dovolme si malou poznámku. Luzinova věta dává posloupnost spojitých funkcí, nikoliv funkcí z $\mathcal{C}_c(I)$. To by mohl být problém, pokud se bude množina B dotýkat hranice I. V tom případě je snadným řešením vzít posloupnost funkcí φ_n z Luzinovy věty a upravit ji – podle Věty 43 existují spojité funkce následujících vlastností: $\psi_n = 0$ na $\frac{1}{2n}$-okolí ∂I, $\psi_n = \varphi_n$ na $I \setminus (\frac{1}{n}$-okolí $\partial I)$. Tato úprava zřejmě konvergenci neovlivní a přitom máme $\psi_n \in \mathcal{C}_c(I)$. Pokračovat budeme bez změny označení.

Podle Jegorovovy věty (viz dodatek, Věta 47) ke známému kladnému δ nalezneme otevřenou množinu $B_\delta \subset I$ míry menší než δ takovou, že funkce φ_l konvergují stejnoměrně k χ_B na množině $I \setminus B_\delta$. Máme tedy

$$\begin{aligned}
\Big|\int_B (u_{n_i} - u_{n_j})\,\mathrm{d}x\Big| &= \Big|\int_I (u_{n_i} - u_{n_j})\chi_B\,\mathrm{d}x\Big| \\
&\le \Big|\int_{B_\delta} (u_{n_i} - u_{n_j})(\chi_B - \varphi_l)\,\mathrm{d}x\Big| \\
&\quad + \Big|\int_I (u_{n_i} - u_{n_j})\varphi_l\,\mathrm{d}x\Big| + \Big|\int_{I\setminus B_\delta} (u_{n_i} - u_{n_j})(\chi_B - \varphi_l)\,\mathrm{d}x\Big| \\
&\le 2\int_{B_\delta} (|u_{n_i}| + |u_{n_j}|)\,\mathrm{d}x + \sup_{I\setminus B_\delta} |\chi_B - \varphi_l| \int_I (|u_{n_i}| + |u_{n_j}|)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \Big|\int_I (u_{n_i} - u_{n_j})\varphi_l\,\mathrm{d}x\Big|.
\end{aligned}$$

Ze stejnoměrné konvergence φ_l k χ_{B_δ} lze pro zvolené ε nalézt $l_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sup\{|\chi_B(x) - \varphi_l(x)|\,;\, x \in I \setminus B_\delta\} < \varepsilon$ pro všechna $l \ge l_0$. Protože φ_{l_0} je z prostoru $\mathcal{C}_c(I)$, posloupnost $\int_I u_{n_k}\varphi_{l_0}\,\mathrm{d}x$ podle (1.34) konverguje, a je tedy cauchyovská. To znamená, že existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i, j \ge k_0$ platí

$$\Big|\int_I (u_{n_i} - u_{n_j})\varphi_{l_0}\,\mathrm{d}x\Big| < \varepsilon.$$

Protože podle Lemmatu 15 existuje $K \in \mathbb{R}$ omezující L^1-normy funkcí u_n, dostáváme z předchozího a z předpokladu stejné absolutní spojitosti odhad

$$\Big|\int_B (u_{n_i} - u_{n_j})\,\mathrm{d}x\Big| \le 4\varepsilon + 2\varepsilon K + \varepsilon = (5 + 2K)\varepsilon.$$

Jestě dokážeme, že $\gamma(B) = \mu(B)$ pro každou borelovskou množinu $B \subset I$. Mějme $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{C}_0(I), \varphi_k \nearrow \chi_I$. Podle (1.34) máme

$$\lim_{l\to\infty} \Big|\int_I \varphi_k u_{n_l}\,\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_I \varphi_k\,\mathrm{d}\mu\Big| \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N}.$$

Podle Leviho věty však posloupnost $\{\int_I \varphi_k\,\mathrm{d}\mu\}$ konverguje k $\mu(I)$. Protože také máme

$$\Big|\int_I \varphi_k u_{n_l}\,\mathrm{d}x\Big| \le \int_I |u_{n_l}| \le \sup \|u_n\|_1 < \infty,$$

dostáváme $\mu(I) < \infty$.

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu z definice stejné absolutní spojitosti najdeme $0 < \delta < \varepsilon$. Pak nalezněme množiny $K, U \subset (a,b)$ tak, aby platilo $K \subset B \subset U$, K byla kompaktní, U otevřená v (a,b) a $\mu(U \setminus K) < \delta$, $\lambda(U \setminus K) < \delta$. To lze díky regularitě obou měr.

Dále podle Urysonova lemmatu (viz dodatek, Věta 43) najdeme $\varphi \in \mathcal{C}_c(I)$ tak, aby $\varphi = 1$ na K a $\varphi = 0$ na $I \setminus U$ a $|\varphi| \leq 1$. Nyní počítejme

$$\begin{aligned}
|\mu(B) - \gamma(B)| &\leq \Big| \int_I (\chi_B - \varphi)\,\mathrm{d}\mu \Big| + \Big| \int_I \varphi\,\mathrm{d}\mu - \int_I u_{n_k}\varphi\,\mathrm{d}x \Big| \\
&\quad + \Big| \int_I u_{n_k}\varphi\,\mathrm{d}x - \int_I u_{n_k}\chi_B\,\mathrm{d}x \Big| + \Big| \int_I u_{n_k}\chi_B\,\mathrm{d}x - \gamma(B) \Big| \\
&\leq 2\mu(\{\chi_B \neq \varphi\}) + \Big| \int_I \varphi\,\mathrm{d}\mu - \int_I u_{n_k}\varphi\,\mathrm{d}x \Big| \\
&\quad + 2 \int\limits_{\{\chi_B \neq \varphi\}} |u_{n_k}|\,\mathrm{d}x + \Big| \int_I u_{n_k}\chi_B\,\mathrm{d}x - \gamma(B) \Big|.
\end{aligned}$$

Protože je $\{\chi_B \neq \varphi\} \subset U \setminus K$, máme podle definice množin B, K a díky stejné absolutní spojitosti vztah

$$|\mu(B) - \gamma(B)| \leq 2\delta + 2\varepsilon + \Big| \int_I \varphi\,\mathrm{d}\mu - \int_I u_{n_k}\varphi\,\mathrm{d}x \Big| + \Big| \int_I u_{n_k}\chi_B\,\mathrm{d}x - \gamma(B) \Big|.$$

Členy v absolutních hodnotách vymizí pro $k \to \infty$, a proto máme $\mu(B) = \gamma(B)$.

Nyní důkaz dokončíme. Je-li $\lambda(B) = 0$, pak je i $\mu(B) = 0$, a míra μ je tedy absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře. Podle Radon–Nykodýmovy věty (viz dodatek, Věta **??**) lze míru μ reprezentovat jako funkci u z prostoru $L^1(I)$. Z (1.35) tedy máme $\mu(B) = \int_B u\,\mathrm{d}x$ neboli

$$\int_I u_{n_k}\chi_B\,\mathrm{d}x \to \int_I u\chi_B\,\mathrm{d}x.$$

Lineární obal charakteristických funkcí χ_B je hustý v prostoru $L^\infty(I)$, a proto $\{u_{n_k}\}$ konverguje slabě k funkci u v $L^1(I)$, jinými slovy platí

$$\lim_{k\to\infty} \int_I u_{n_k}\varphi\,\mathrm{d}x = \int_I u\varphi\,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } \varphi \in L^\infty(I).$$

□

Lemma 18. *Nechť $f \in \mathcal{AC}(a,b)$. Potom existuje $\{f_n\} \subset \mathcal{C}^1(a,b) \cap \mathcal{AC}(a,b)$ posloupnost stejně absolutně spojitých funkcí splňujících*

- *f_n konvergují stejnoměrně k f,*
- *množinové funkce dané předpisem*

$$E \longmapsto \int_E |f_n'|, \quad E \subseteq (a,b) \text{ měřitelná} \tag{1.36}$$

  jsou stejně absolutně spojité,

- *f_n' konvergují slabě k funkci g v prostoru $L^1(a,b)$.*

Důkaz. Podle Tvrzení 8 lze funkci f spojitě rozšířit na $[a,b]$. Rozšiřme funkci f na interval $(a-1,b+1)$ položením $f(x)=f(a)$ na $(a-1,a)$ a $f(x)=f(b)$ na $(b,b+1)$. Rozšířená funkce f je také absolutně spojitá.

Položme $f_n(x) := J_{1/n} * f(x)$, kde J je vhodná funkce z definice zhlazení. Z Lemmatu 14 plyne, že $f_n \in \mathcal{C}^1(a,b)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Ukážeme, že funkce f_n jsou stejně absolutně spojité: Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice absolutní spojitosti pro f. Nechť nyní je $n \in \mathbb{N}$ libovolné a $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^m$ je libovolný disjunktní systém intervalů v (a,b) splňující $\sum_{j=1}^m (b_j-a_j) < \delta$. Počítejme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m |f_n(b_j)-f_n(a_j)| &= \sum_{j=1}^m \Big|\Big(J_{1/n}*f\Big)(b_j) - \Big(J_{1/n}*f\Big)(a_j)\Big| \\ &= \sum_{j=1}^m \Big|\int_{\mathbb{R}} J_{1/n}(y)\Big(f(b_j-y)-f(a_j-y)\Big)\,\mathrm{d}y\Big| \\ &\le \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}} J_{1/n}(y)\Big|f(b_j-y)-f(a_j-y)\Big|\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Suma na pravé straně je konečná, můžeme zaměnit pořadí sumy a integrálu. Navíc platí, že $J_{1/n}=0$ mimo interval $(-1/n,1/n)$. Dostáváme

$$\sum_{j=1}^m |f_n(b_j)-f_n(a_j)| \le \int_{-1/n}^{1/n} J_{1/n}(y) \sum_{j=1}^m \Big|f(b_j-y)-f(a_j-y)\Big|\,\mathrm{d}y.$$

Protože $y \in (-1,1)$, platí $(a_j-y, b_j-y) \subset (a-1,b+1)$ a samozřejmě také $\sum_{j=1}^m (b_j-y)-(a_j-y) < \delta$. Suma na pravé straně je tedy díky absolutní spojitosti f na $(a-1,b+1)$ menší než epsilon. Nakonec, díky vlastnosti funkce $J_{1/n}$, máme

$$\sum_{j=1}^m |f_n(b_j)-f_n(a_j)| < \varepsilon \int_{-1/n}^{1/n} J_{1/n}(y)\,\mathrm{d}y = \varepsilon$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Funkce f_n jsou tedy stejně absolutně spojité.

Stejná absolutní spojitost množinových funkcí (1.36) plyne z Lemmatu 13. Zbytek dokazovaného pak dostáváme okamžitě použitím Věty 16. □

Věta 19. *Prostor Y_2 je množinově roven prostoru absolutně spojitých funkcí.*

Důkaz. Inkluzi $Y_2 \subset \mathcal{AC}$ jsme již dokázali ve Větě 11. Nyní ověříme, že každá funkce $f \in \mathcal{AC}$ leží v prostoru Y_2.

Buď tedy $f \in \mathcal{AC}$. Podle Lemmatu 18 nalezněme posloupnost funkcí f_n z prostoru $\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{AC}$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ a f_n' konvergují slabě k g v $L^1(I)$. Počítejme: Díky stejnoměrné konvergenci máme pro libovolné $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ vztah

$$\Big|\int_I f_n\varphi'\,\mathrm{d}x - \int_I f\varphi'\,\mathrm{d}x\Big| \le \int_I |f_n-f||\varphi'|\,\mathrm{d}x \le L|I| \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \to 0$$

(L je konečná konstanta omezující φ'). Dále díky slabé konvergenci máme

$$\Big|\int_I f_n'\varphi\,\mathrm{d}x - \int_I g\varphi\Big| \to 0$$

a z integrace *per partes* dostaneme

$$\int_I f_n' \varphi \, \mathrm{d}x = -\int_I f_n \varphi' \, \mathrm{d}x.$$

Dohromady z těchto výpočtů máme

$$\int_I f \varphi' \, \mathrm{d}x = -\int_I g \varphi \, \mathrm{d}x \quad \text{pro každé } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

To podle definice znamená, že g je slabou derivací funkce f. Zřejmě $f, g \in L^1(I)$, a tedy $f \in Y_2$. □

Definice. Na prostoru $\mathcal{AC}(a,b)$ definujme normu

$$\|f\|_{\mathcal{AC}} := \int_a^b |f| + |f'| \, \mathrm{d}x.$$

Existenci f' (slabé derivace funkce f) zaručí Věta 19. Ověření vlastností normy není příliš obtížné.

Prostory Y_2 a $\mathcal{AC}$ jsou si množinově rovny a je na nich zavedena stejná norma, je proto zřejmé, že jsou izometricky izomorfní. Podle Tvrzení 7 a Věty 1 je tedy prostor $\mathcal{AC}$ izometricky izomorfní Sobolevovu prostoru $W^{1,1}$.

1.2 Sobolevův prostor $W^{1,\infty}$

V této krátké kapitole se budeme zabývat Sobolevovým prostorem $W^{1,\infty}$ na omezeném intervalu. Ukážeme, že se jedná o prostor lipschitzovských funkcí.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Symbolem $L^\infty(a,b)$ označujeme prostor všech měřitelných funkcí $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ splňujících $\|f\|_{L^\infty(a,b)} < \infty$, kde

$$\|f\|_{L^\infty(a,b)} := \inf\{c \in \mathbb{R}; |f| \le c \text{ skoro všude na } (a,b)\}.$$

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Symbolem $W^{1,\infty}(a,b)$ označujme prostor takových funkcí $f \in L^\infty(a,b)$, které mají slabou derivaci f' a jejichž norma

$$\|f\|_{W^{1,\infty}} := \|f\|_{L^\infty} + \|f'\|_{L^\infty}$$

je konečná.

Definice. Funkce $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je lipschitzovská, jestliže existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x, y \in (a,b)$ platí

$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y|.$$

V takovém případě píšeme $f \in \mathcal{C}^{0,1}(a,b)$.

Lemma 20. *Platí:* $W^{1,\infty}(a,b) \subset W^{1,1}(a,b)$.

Důkaz. Ukážeme, že každá funkce z $W^{1,\infty}$ náleží do prostoru Y_2 (ověříme podmínku (1.12)). Nechť $f \in W^{1,\infty}$. Funkce f' je podle definice slabou derivací f. Platí také, že $\|f\|_{W^{1,1}} < \infty$, jak se dá nahlédnout snadným výpočtem

$$\|f\|_{L^1} + \|f'\|_{L^1} = \int_a^b |f(t)| + |f'(t)| \, \mathrm{d}t \le (b-a)(\|f\|_{L^\infty} + \|f'\|_{L^\infty}).$$

□

Tvrzení 21. *Buď $f \in W^{1,\infty}(a,b)$. Pak existuje $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{0,1}(a,b)$ taková, že $f = \tilde{f}$ skoro všude na (a,b).*

Důkaz. Nechť $f \in W^{1,\infty}(a,b)$. Podle předchozího lemmatu je $f \in W^{1,1}(a,b)$. Můžeme tedy použít Větu 11, která dává spojitou funkci $\tilde{f}$ splňující $f = \tilde{f}$ skoro všude a pro $x, y \in (a,b), x < y$ také platnost vztahu

$$|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| = \Big| \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t \Big|. \tag{1.37}$$

Označme $K := \|f'\|_{L^\infty}$. Protože $K < \infty$, je funkce f' omezená skoro všude. Existuje tedy množina N nulové míry taková, že

$$\sup_{t \in (a,b)\setminus N} |f'(t)| = K.$$

Protože je integrál v (1.37) Lebesgueův, platí

$$\Big| \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t \Big| \le \int_x^y |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{(x,y)\setminus N} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \le K(y-x).$$

Z toho plyne, že funkce $\tilde{f}$ je lipschitzovská s konstantou $\|f'\|_{L^\infty}$. □

Tvrzení 22. *Každá lipschitzovská funkce na (a,b) leží v prostoru $W^{1,\infty}(a,b)$.*

Důkaz. Nechť f je K-lipschitzovská. f je zřejmě absolutně spojitá a omezená na (a,b). Proto platí $\|f\|_{L^\infty} < \infty$. Podle Věty 19 k funkci f existuje slabá derivace $f' \in L^1((a,b))$ a také, dle Věty 11, platí rovnost $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t$. Z tohoto obdržíme vztah

$$\Big| \frac{1}{x-y} \int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t \Big| = \Big| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \Big| \le K.$$

Podle Věty 51 z dodatku platí

$$f'(y) = \lim_{x \to y} \Big(\frac{1}{x-y} \int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t \Big) \text{ s. v. na } (a,b).$$

Dohromady dostaneme, že $|f'| \le K$ skoro všude, což znamená, že $f \in W^{1,\infty}$. □

2. Prostory funkcí s necelou derivací

2.1 Úvod, definice

V této části budeme postupovat podle Simonova článku [2]. Budeme se zabývat prostory funkcí zobrazujících omezený interval do $\mathbb{R}$. Konkrétně definujeme Besovův prostor a prostor s-lipschitzovských funkcí s parametry $0 < s < 1, 1 \leq p \leq \infty$ a $1 \leq \lambda \leq \infty$. Budeme zkoumat různá vnoření těchto prostorů a závislosti na změnách proměnných s, p, λ.

Definice. Nechť $1 \leq p \leq \infty$, I je omezený interval v $\mathbb{R}$ a $\mathrm{d}x$ je Lebesgueova míra na I. Symbolem $L^p(I)$ budeme označovat prostor tříd měřitelných funkcí $f : I \to \mathbb{R}$ takových, že $\|f\|_{L^p(I)} < \infty$, kde

$$\|f\|_{L^p(I)} = \Big(\int |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \Big)^{1/p} \quad \text{pro } p < \infty$$

a

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{Ess\,sup}_{x \in I} |f(x)| \qquad \text{pro } p = \infty.$$

Definice. Pro $h \in \mathbb{R}, h \geq 0$ označme $I_h := \{x \in I : x + h \in I\}$. Dále definujme translační operátor τ_h předpisem $(\tau_h f)(x) := f(x + h)$. Zřejmě pro $f \in L^p(I)$ je i $\tau_h f$, $\tau_h f - f$ definováno na I_h.

Definice. Nechť I je omezený interval na $\mathbb{R}$. Pro $0 < s < 1, 1 \leq p \leq \infty$ definujeme **prostor s-lipschitzovských funkcí**

$$\mathrm{Lip}^s(I) := \{f \in L^\infty(I); \|f\|_{\mathrm{Lip}^s} < \infty\},$$
$$\|f\|_{\mathrm{Lip}^s} = \operatorname*{Ess\,sup}_{x \in I,\, y \in I} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^s} + \|f\|_{L^\infty(I)}.$$

Dále definujeme pro $0 < s < 1, 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq \lambda \leq \infty$ **Besovův prostor**

$$B^{s,p}_\lambda(I) := \{f \in L^p(I); \|f\|_{B^{s,p}_\lambda} < \infty\},$$
$$\|f\|_{B^{s,p}_\lambda} = \|f\|_{L^p(I)} + \Big(\int_0^\infty (h^{-s} \|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)})^\lambda \tfrac{\mathrm{d}h}{h} \Big)^{1/\lambda} \qquad \text{pro } \lambda < \infty,$$
$$\|f\|_{B^{s,p}_\lambda} = \|f\|_{L^p(I)} + \sup_{h > 0} \Big\{ h^{-s} \|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)} \Big\} \qquad \text{pro } \lambda = \infty.$$

2.2 Základní vlastnosti

Úmluva. Do konce této kapitoly budeme předpokládat následující: I je omezený interval, jehož délka je $|I|$. Dále $0 < \{s, r\} < 1, 1 \leq \{p, q\} \leq \infty$ a $1 \leq \{\lambda, \mu\} \leq \infty$.

Tvrzení 23. *Prostor $B^{s,p}_\lambda$ je lineární, $\|\cdot\|_{B^{s,p}_\lambda}$ je norma.*

Důkaz. Ověříme, že zobrazení $f \to \|f\|_{B^{s,p}_\lambda(I)}$ je norma – platnost podmínek

- $\|f\|_{B^{s,p}_\lambda} = 0$, právě když je $f = 0$ ve smyslu prostoru $L^p(I)$,
- $\|af\|_{B^{s,p}_\lambda} = |a|\|f\|_{B^{s,p}_\lambda}$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$

plyne okamžitě z definice a z vlastností L^p prostorů. Zbývá ověřit, že

- $\|f+g\|_{B^{s,p}_\lambda} \le \|f\|_{B^{s,p}_\lambda} + \|g\|_{B^{s,p}_\lambda}$.

Postupujme následovně: Označme $M_h f := \|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)}$ a $\mathrm{d}m(h) := \frac{\mathrm{d}h}{h}$. Pak díky trojúhelníkové nerovnosti pro funkcionál M_h plynoucí z vlastností L^p prostorů máme

$$\Big(\int_0^\infty (h^{-s} M_h(f+g))^\lambda \,\mathrm{d}m(h)\Big)^{1/\lambda} \le \Big(\int_0^\infty (h^{-s}(M_h f + M_h g))^\lambda \,\mathrm{d}m(h)\Big)^{1/\lambda}. \quad (2.1)$$

Z trojúhelníkové nerovnosti v prostoru $L^\lambda(m)$ dostáváme

$$(2.1) \le \int_0^\infty (h^{-s} M_h f)^\lambda \,\mathrm{d}m(h)\Big)^{1/\lambda} + \int_0^\infty (h^{-s} M_h g)^\lambda \,\mathrm{d}m(h)\Big)^{1/\lambda}.$$

Spolu s trojúhelníkovou nerovností v prostoru L^p pak získáme dokazovanou nerovnost pro Besovovy prostory. $B^{s,p}_\lambda(I)$ je pak zřejmě vektorový prostor. □

Tvrzení 24. *Prostor $B^{s,p}_\lambda$ je úplný.*

Důkaz. Buď $\{f_n\} \subset B^{s,p}_\lambda(I)$ cauchyovská v $B^{s,p}_\lambda$. Pak je $\{f_n\}$ také cauchyovská v $L^p(I)$. Díky úplnosti $L^p(I)$ existuje $f \in L^p(I)$ taková, že $f_n \to f$ v $L^p(I)$. Pro každé $h \ge 0$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \|\tau_h f_n - f_n\|_{L^p(I_h)} = \|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)}. \quad (2.2)$$

Nyní se věnujme případu, kdy $\lambda < \infty$. Z (2.2) plyne, že pro všechna $h > 0$ platí

$$g_n(h) := h^{-s\lambda-1}\|\tau_h f_n - f_n\|_{L^p(I_h)} \to h^{-s\lambda-1}\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)}$$

Protože je f_n v $B^{s,p}_\lambda$ cauchyovská, máme $\|f_n\|_{B^{s,p}_\lambda} \le K < \infty$. Podle Fatouova lemmatu (viz dodatek, Věta 53) pak platí

$$\int_0^\infty h^{-s\lambda-1}\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)} \,\mathrm{d}h \le \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n(h) \,\mathrm{d}h \le K,$$

a proto $f \in B^{s,p}_\lambda$. Podobně ukážeme, že

$$\|f_n - f\|_{B^{s,p}_\lambda} \to 0$$

pro $n \to \infty$ a funkce f je tedy limitou f_n v prostoru $B^{s,p}_\lambda(I)$.

Pro pevné $n \in \mathbb{N}$ počítejme

$$\lim_{k\to\infty} h^{-s\lambda-1}\|\tau_h(f_n - f_k) - (f_n - f_k)\|_{L^p(I_h)} = h^{-s\lambda-1}\|\tau_h(f_n - f) - (f_n - f)\|_{L^p(I_h)}.$$

Podle Fatouova lemmatu jest

$$\begin{aligned}[f_n - f]^\lambda_{B^{s,p}_\lambda} &:= \int_0^\infty h^{-s\lambda-1}\|\tau_h(f_n - f) - (f_n - f)\|_{L^p(I_h)} \,\mathrm{d}h \\ &\le \liminf_{k\to\infty} \int_0^\infty h^{-s\lambda-1}\|\tau_h(f_n - f_k) - (f_n - f_k)\|_{L^p(I_h)} \,\mathrm{d}h.\end{aligned}$$

Protože f_n je cauchyovská v $B^{s,p}_\lambda(I)$, lze výraz na pravé straně odhadu libovolně zmenšit volbou dost velkého n. Z toho už je zřejmé, že $\|f_n - f\|^\lambda_{B^{s,p}_\lambda} \to 0$ pro $n \to \infty$. Pro $\lambda < \infty$ je tedy prostor $B^{s,p}_\lambda(I)$ úplný.

Nyní ukážeme úplnost pro případ $\lambda = \infty$. Ze vztahu (2.2) a z toho, že $\{f_n\}$ je cauchovská v $B^{s,p}_\infty$ máme

$$\sup_{h>0} h^{-s}\|\tau_h f - f\|_p < \infty,$$

a tedy $f \in B^{s,p}_\infty(I)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Z cauchyovskosti nalezneme n_0 tak, že pro každé $n, k \geq n_0$ a $h > 0$ platí

$$h^{-s}\|\tau_h(f_n - f_k) - (f_n - f_k)\|_p < \varepsilon.$$

Pro $k \to \infty$ a přechodem k supremu dostáváme

$$\sup_{h>0} h^{-s}\|\tau_h(f_n - f) - (f_n - f)\|_p \leq \varepsilon,$$

a tedy $f_n \to f$ v prostoru $B^{s,p}_\infty(I)$. □

Uveďme ještě několik jednoduchých poznatků. Nalezneme je v článku [2] na stranách 121–122.

Tvrzení 25. *Platí* $\mathrm{Lip}^s(I) = B^{s,\infty}_\infty(I)$ *a pro libovolné* $f \in L^\infty(I)$ *platí rovnost*

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}^s} = \|f\|_{B^{s,\infty}_\infty}.$$

Tvrzení 26. *Nechť J je interval a $J \subset I$. Restrikcí libovolné funkce $f \in B^{s,p}_\lambda(I)$ na J dostaneme funkci z $B^{s,p}_\lambda(J)$, speciálně pro $f \in L^p(I)$ platí*

$$\|f\|_{B^{s,p}_\lambda(J)} \leq \|f\|_{B^{s,p}_\lambda(I)}.$$

Tvrzení 27. *Translací libovolné funkce $f \in B^{s,p}_\lambda(I)$ o libovolnou konstantu $k > 0$ dostaneme funkci z $B^{s,p}_\lambda(I - k)$, speciálně pro $f \in L^p(I)$ platí*

$$\|\tau_k f\|_{B^{s,p}_\lambda(I-k)} = \|f\|_{B^{s,p}_\lambda(I)}.$$

2.3 Závislost $B^{s,p}_\lambda$ na s, p, λ

Tvrzení 28. *Pro $s \geq r$ platí $B^{s,p}_\lambda(I) \subset B^{r,p}_\lambda(I)$.*

Důkaz. Uvědomme si, že

$$h^{-s} \geq h^{-r} \qquad \text{pro } h \in (0,1), \tag{2.3}$$

$$h^{-r} \in (|I|^{-r}, 1), h^{-s} \in (|I|^{-s}, 1) \qquad \text{pro } h \in (1, |I|). \tag{2.4}$$

Označme $M_h f := \|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)}$ a $\mathrm{d}m(h) := \frac{\mathrm{d}h}{h}$. Nejprve předpokládejme, že $|I| > 1$. Nechť $f \in B^{s,p}_\lambda(I)$. Počítejme

$$\|f\|_{B^{r,p}_\lambda} = \|f\|_p + \Big(\int_0^1 (h^{-r} M_h f)^\lambda \,\mathrm{d}m(h) + \int_1^{|I|} (h^{-r} M_h f)^\lambda \,\mathrm{d}m(h). \Big)^{1/\lambda}$$

Odhadujme pomocí (2.3)

$$\int_0^1 (h^{-r}M_h f)^\lambda \,\mathrm{d}m(h) \le \int_0^1 (h^{-s}M_h f)^\lambda \,\mathrm{d}m(h).$$

Díky vztahům v (2.4) dostaneme také

$$\begin{aligned}\int_1^{|I|} (h^{-r}M_h f)^\lambda \,\mathrm{d}m(h) &\le \frac{|I|^{-s\lambda}}{|I|^{-s\lambda}} \int_1^{|I|} (M_h f)^\lambda \,\mathrm{d}m(h)\\ &\le |I|^{s\lambda} \int_1^{|I|} (h^{-s}M_h f)^\lambda \,\mathrm{d}m(h),\end{aligned}$$

a proto jest

$$\begin{aligned}\|f\|_{B^{r,p}_\lambda} &\le \|f\|_p + |I|^s \Big(\int_0^1 (h^{-s}M_h f)^\lambda \,\mathrm{d}m(h) + \int_1^{|I|} (h^{-s}M_h f)^\lambda \,\mathrm{d}m(h)\Big)^{1/\lambda}\\ &\le |I|^s \,\|f\|_{B^{s,p}_\lambda},\end{aligned}$$

z čehož plyne dokazovaná inkluze.

Pro případ $|I| \le 1$ dostaneme tvrzení snadno pomocí odhadu (2.3). □

Tvrzení 29. *Nechť $r \le p < \infty$. Potom platí $B^{s,p}_\lambda(I) \subset B^{s,r}_\lambda(I)$.*

Důkaz. Podle Hölderovy nerovnosti pro $g \in L^p(\Omega), p > r$ platí, že

$$\|g\|_{L^r(\Omega)} \le \Big(\int_\Omega |g|^p \Big)^{1/p} \Big(\int_\Omega 1^{p/(p-r)} \Big)^{(p-r)/pr} \le C\|g\|_{L^r(I)},$$

kde $C = |\Omega|^{1/r-1/p}$. Nechť je tedy $f \in B^{s,p}_\lambda(I)$. Odhadneme

$$\begin{aligned}\|f\|_{B^{s,r}_\lambda} &= \|f\|_{L^r} + \Big(\int_0^\infty (h^{-s}\|\tau_h f - f\|_{L^r(I_h)})^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda}\\ &\le C\|f\|_p + C\Big(\int_0^\infty (h^{-s}\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)})^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda} = C\|f\|_{B^{s,p}_\lambda},\end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Věta 30. *Nechť je $\lambda \le \mu$. Potom platí*

$$B^{s,p}_\lambda(I) \subset B^{s,p}_\mu(I),$$

$$\|f\|_{B^{s,p}_\mu(I)} \le \frac{2}{s}\|f\|_{B^{s,p}_\lambda(I)}, \quad f \in B^{s,p}_\lambda(I).$$

K důkazu této věty budeme potřebovat pseudonormu $\|\cdot\|^*_{B^{s,p}_\lambda}$.

Definice. Položme

$$\omega_p(h) := \sup_{0\le t\le h} \|\tau_t f - f\|_{L^p(I_t)},$$

$$\begin{aligned}\|f\|^*_{B^{s,p}_\lambda} &:= \Big(\int_0^\infty (h^{-s}\omega_p(h))^\lambda \tfrac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda} && \text{pro } \lambda < \infty,\\ \|f\|^*_{B^{s,p}_\lambda} &:= \sup_{h>0} h^{-s}\omega_p(h) && \text{pro } \lambda = \infty.\end{aligned}$$

Definice. Na Besovově prostoru můžeme také zavést pseudonormu

$$[f]_{B^{s,p}_\lambda} := \|f\|_{B^{s,p}_\lambda} - \|f\|_p.$$

Použitím této pseudonormy dosáhneme větší srozumitelnosti důkazu Věty 30.

Lemma 31. *Pro všechna $f \in B^{s,p}_\lambda(I)$ platí*

$$[f]_{B^{s,p}_\lambda} \le \|f\|^*_{B^{s,p}_\lambda} \le \frac{1}{2^s - 1}[f]_{B^{s,p}_\lambda}.$$

Důkaz. První nerovnost je zřejmá z toho, že $\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)} \le \omega_p(h)$. Ukažme druhou nerovnost. Pro $0 \le t \le 2h$ počítejme: $\tau_t f - f = \tau_h f - f + \tau_h(\tau_{t-h} f - f)$, a tedy

$$\|\tau_t f - f\|_{L^p(I_t)} \le \|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)} + \omega_p(h).$$

Přechodem k supremu na levé straně přes $0 < t \le 2h$ dostaneme

$$\omega_p(2h) \le \|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)} + \omega_p(h).$$

Po úpravách a použití trojúhelníkové nerovnosti pro $\lambda < \infty$ dostaneme

$$\Big(\int_0^\infty (h^{-s}\omega_p(2h))^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda} \le \Big(\int_0^\infty (h^{-s}\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)})^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda} + \Big(\int_0^\infty (h^{-s}\omega_p(h))^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda}.$$

Po záměně proměnné $2h$ za h na levé straně máme

$$(2^s - 1)\Big(\int_0^\infty (h^{-s}\omega_p(h))^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda} \le \Big(\int_0^\infty (h^{-s}\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)})^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda},$$

což je požadovaná nerovnost. V případě $\lambda = \infty$ provedeme podobnou úpravu – namísto integrování vezmeme supremum – a dostaneme

$$2^s \sup_{h>0} h^{-s}\omega_p(h) = \sup h^{-s}\omega_p(2h) \le \sup_{h>0} h^{-s}\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)}) + h^{-s}\omega_p(h),$$

čímž je důkaz ukončen. □

Lemma 32. *Pro všechna $f \in B^{s,p}_\lambda(I)$ platí*

$$\|f\|^*_{B^{s,p}_\infty} \le (s\lambda)^{1/\lambda}\|f\|^*_{B^{s,p}_\lambda}.$$

Důkaz. Nechť $t > 0$. $\omega_p(h)$ je neklesající funkce h, a proto

$$\Big(\int_0^\infty (h^{-s}\omega_p(h))^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda} \ge \Big(\int_t^\infty (h^{-s}\omega_p(h))^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda} \ge \omega_p(t)\Big(\int_t^\infty h^{-s\lambda}\frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda}$$

$$= (s\lambda)^{-1/\lambda} t^{-s}\omega_p(t),$$

a tedy

$$\sup_{t>0} t^{-s}\omega_p(t) \le (s\lambda)^{1/\lambda}\Big(\int_0^\infty (h^{-s}\omega_p(h))^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda}.$$

□

Důkaz Věty 30. Nechť $\lambda < \mu$ Použitím Lemmat 31 a 32 dostaneme

$$[f]_{B^{s,p}_\infty} \le \|f\|^*_{B^{s,p}_\infty} \le (s\lambda)^{1/\lambda}\|f\|^*_{B^{s,p}_\lambda} \le \frac{(s\lambda)^{1/\lambda}}{2^s-1}[f]_{B^{s,p}_\lambda}.$$

Snadno můžeme ověřit, že funkce $\lambda \mapsto (s\lambda)^{1/\lambda}$ nabývá svého maxima, jestliže $s\lambda = e$. Proto $(s\lambda)^{1/\lambda}/(2^s-1) \le e^{s/e}/(2^s-1) \le 2/s$. (Poslední nerovnost dostaneme například rozvojem exponenciely $e^{s\log 2}$.) Platí tedy

$$[f]_{B^{s,p}_\infty} \le \frac{2}{s}[f]_{B^{s,p}_\lambda}. \tag{2.5}$$

Protože platí $1 < 2/s$, je věta pro $\mu = \infty$ vztahem (2.5) dokázána.

Pokračujme tedy pro $\lambda < \mu < \infty$. Užitím Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$\Big(\int_0^\infty (h^{-s}\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)})^\mu \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\mu} = \Big(\int_0^\infty (h^{-s}\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)})^{\lambda+(\mu-\lambda)} \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\mu}$$

$$\le \Big(\sup_{h>0} h^{-s}\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)}\Big)^{(\mu-\lambda)/\mu}\Big(\int_0^\infty (h^{-s}\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)})^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\mu},$$

což znamená, že

$$[f]_{B^{s,p}_\mu} \le ([f]_{B^{s,p}_\infty})^{(\mu-\lambda)/\mu}([f]_{B^{s,p}_\lambda})^{\lambda/\mu}.$$

Použitím nerovnosti (2.5) dostaneme

$$[f]_{B^{s,p}_\mu} \le \Big(\frac{2}{s}\Big)^{1-\lambda/\mu}[f]_{B^{s,p}_\lambda} \le \frac{2}{s}[f]_{B^{s,p}_\lambda},$$

což dokazuje tuto větu. □

2.4 Věty o vnoření

Následující lemmata zde uvedeme bez důkazu – nalezneme je v článku [2] na stranách 122–130.

Lemma 33 (Youngova nerovnost)**.** *Nechť $f \in L^p(I), g \in L^r((0,a))$, kde $a > 0$, $1/p + 1/r \ge 1$. Definujme funkci F na I_a předpisem $F(x) = \int_0^a f(x+t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Potom $F \in L^q(I_a)$, kde $1/q = 1/p + 1/r - 1$, a platí*

$$\|F\|_{L^q(I_a)} \le \|f\|_{L^p(I)}\|g\|_{L^r((0,a))}$$

Lemma 34 (Hardyho nerovnost)**.** *Nechť $0 < T \le \infty$, $s > 0$ a g je nezáporná měřitelná funkce z $(0,T)$ do $\mathbb{R}$. Potom*

$$\Big(\int_0^T \Big(t^{-s}\int_0^T g(h)\frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/\lambda} \le \frac{1}{s}\Big(\int_0^T (t^{-s}g(t))^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/\lambda},$$

$$\sup_{0<t<T} t^{-s}\int_0^T g(h)\frac{\mathrm{d}h}{h} \le \frac{1}{s}\operatorname{Ess\,sup}_{0<t<T} t^{-s}g(t).$$

Lemma 35. *Nechť $f \in L^p(I), p < \infty, a > 0$ a*

$$\int_0^a \|f - \tau_h f\|_{L^p(I_h)} \frac{\mathrm{d}h}{h} < \infty.$$

Potom $f \in L^p(I_a)$ a ve smyslu prostoru $L^p(I_a)$ platí rovnost

$$f(x) = \frac{1}{a}\int_0^a \tau_h f(x)\,\mathrm{d}h + \int_0^a \int_0^{a-h} (Id - \tau_h)\tau_t f(x) \frac{\mathrm{d}t}{(t+h)^2}\,\mathrm{d}h.$$

Lemma 36. *Nechť je $s > r$. Potom*

$$B^{s,p}_\lambda(I) \subset B^{r,p}_1(I).$$

Navíc pro libovolné $f \in B^{s,p}_\lambda$ platí

$$\|f\|_{B^{r,p}_1} \le \frac{|I|^{s-r}}{s-r}\|f\|_{B^{s,p}_\lambda}.$$

Nyní dokážeme lemma, které je pro další postup klíčové.

Lemma 37. *Nechť $s - 1/p = -1/q$ a $p < q$. Potom platí*

$$B^{s,p}_1(I) \subset L^q(I).$$

Navíc pro všechna $a \le |I|/2$ a $f \in B^{s,p}_1(I)$ máme

$$\|f\|_{L^q(I)} \le 2^{1/q}\Big(\int_0^a h^{-s}\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)} \frac{\mathrm{d}h}{h} + a^{-s}\|f\|_{L^p(I)}\Big).$$

Důkaz. Nechť $f \in B^{s,p}_1(I), a > 0$. Protože $f \in L^p(I_h)$ a platí

$$\int_0^a \|f - \tau_h f\|_{L^p(I_h)} \frac{\mathrm{d}h}{h} \le a^s \int_0^a h^{-s}\|f - \tau_h f\|_{L^p(I_h)} \frac{\mathrm{d}h}{h},$$

jsou splněny předpoklady Lemmatu 35. Podle něj pak ve smyslu prostoru $L^p(I_a)$ platí rovnost

$$f(x) = \frac{1}{a}\int_0^a \tau_h f(x)\,\mathrm{d}h + \int_0^a \int_0^{a-h} (Id - \tau_h)\tau_t f(x) \frac{\mathrm{d}t}{(t+h)^2}\,\mathrm{d}h. \tag{2.6}$$

Nejprve odhadneme pomocí Youngovy nerovnosti (Lemma 33) $L^q(I_a)$-normu prvního integrálu v (2.6) – položíme $g(t) := 1, 1/r := 1 - s$ a dostaneme

$$\Big\|\frac{1}{a}\int_0^a \tau_h f\,\mathrm{d}h\Big\|_{L^q(I_a)} \le \frac{1}{a}\|f\|_{L^p(I)}\,\|1\|_{L^r((0,a))} = a^{-s}\|f\|_{L^p(I)}.$$

Dále pro fixované $h \in (0, a)$ odhadujme $L^q(I_a)$-normu vnitřního integrál ve dvojném integrálu z (2.6) – použijeme Youngovu nerovnost na pro funkce $\tau_h f - f$, $g(t) := (t+h)^{-2}$ a získáme

$$\Big\|\int_0^{a-h} (Id - \tau_h)\tau_t f \frac{\mathrm{d}t}{(t+h)^2}\Big\|_{L^q(I_a)} \le \|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)}\,\|g\|_{L^r((0,a-h))}. \tag{2.7}$$

Máme

$$\|g\|_{L^r((0,a-h))} = \Big(\frac{h^{1-2r} - a^{1-2r}}{2r-1}\Big)^{1/r} \le Ch^{1/r-2} = Ch^{-s-1},$$

kde $C = (2r-1)^{-1/r} \le 1$. Integrací odhadu (2.7) přes $h \in (0,a)$ dostaneme

$$\int_0^a \Big\| \int_0^{a-h} (Id - \tau_h)\tau_t f \frac{\mathrm{d}t}{(t+h)^2} \Big\|_{L^q(I_a)} \mathrm{d}h \le \int_0^a h^{-s} \|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)} \frac{\mathrm{d}h}{h}.$$

Integrál na pravé straně je konečný, protože $f \in B_1^{s,p}(I)$. Z (2.6) tedy dostaneme, že $f \in L^q(I_a)$ a že platí nerovnost

$$\|f\|_{L^q(I_a)} \le \int_0^a h^{-s} \|f - \tau_h f\|_{L^p(I_h)} \frac{\mathrm{d}h}{h} + a^{-s} \|f\|_{L^p(I)}. \tag{2.8}$$

Nyní označme $\tilde{I} := \{-x; x \in I\}$ a $\tilde{f}(x) := f(-x)$. Použitím (2.8) na $\tilde{f}$ dostaneme

$$\|\tilde{f}\|_{L^q(\tilde{I}_a)} \le \int_0^a h^{-s} \|f - \tau_h f\|_{L^p(I_h)} \frac{\mathrm{d}h}{h} + a^{-s} \|f\|_{L^p(I)}. \tag{2.9}$$

Dále označme $I = (\alpha, \beta)$ a vezměme $a \le (\beta - \alpha)/2$. Pro $q < \infty$ máme

$$\|f\|_{L^q(I)} \le \Big(\int_\alpha^{\beta-a} |f(x)|^q \,\mathrm{d}x + \int_{a+\alpha}^{\beta} |f(x)|^q \,\mathrm{d}x \Big)^{1/q} = \Big((\|f\|_{L^q(I_a)})^q + (\|\tilde{f}\|_{L^q(\tilde{I}_a)})^q \Big)^{1/q}.$$

Pro $q = \infty$ máme podobný vztah

$$\|f\|_{L^\infty(I)} \le \operatorname*{Ess\,sup}_{x \in (\alpha, \beta-a)} |f(x)| + \operatorname*{Ess\,sup}_{x \in (a+\alpha, \beta)} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty(I_a)} + \|\tilde{f}\|_{L^\infty(\tilde{I}_a)}.$$

Z předchozí nerovnosti (pro odpovídající q), z (2.8) a z (2.9) dostaneme závěr tvrzení. □

Následuje Sobolevova věta o vnoření pro Besovovy prostory.

Věta 38. *Nechť $s \ge r$, $s - 1/p = r - 1/q$. Potom*

$$B_\lambda^{s,p}(I) \subset B_\lambda^{r,q}(I)$$

a pro všechna $f \in B_\lambda^{s,p}(I)$ platí

$$\|f\|_{B_\lambda^{r,q}(I)} \le \frac{2^{1/q} 3^{2-r}}{r} \|f\|_{B_\lambda^{s,p}(I)}. \tag{2.10}$$

Důkaz. Důkaz je zřejmý pro případ $s = r$, porovnávané prostory jsou totožné. Nechť tedy $s > r$, $s - 1/p = r - 1/q$ a $f \in B_\lambda^{s,p}(I)$. Podle Lemmat 37 a 36 platí $B_\lambda^{s,p}(I) \subset B_1^{s-r,p}(I) \subset L^q(I)$, a tedy $f \in L^q$.

Nechť $t > 0$. Podle Tvrzení 26 a 27 máme $f \in B_\lambda^{s,p}(I_t)$, $\tau_t f \in B_\lambda^{s,p}(I_t)$. Z toho pak plyne $\tau_t f - f \in B_\lambda^{s,p}(I_t)$, díky Lemmatu 36 pak $\tau_t f - f \in B_1^{s-r,p}(I_t)$.

Označme $I = (\alpha, \beta)$. Nyní použijeme Lemma 37 pro $\tau_t f - f \in B_1^{s-r,p}(I_t)$, $(s-r) - 1/p = -1/q$, $a := t$. Navíc je nutno splnit $t \le |I_t|/2$, což znamená $t \le (\beta - t - \alpha)/2$, t. j. $t \le (\beta - \alpha)/3$. S těmito podmínkami dostáváme

$$\|\tau_t f - f\|_{L^q(I_t)} \le 2^{1/q}\Big(\int_0^t h^{r-s}\|\tau_h(\tau_t f - f) - (\tau_t f - f)\|_{L^p(I_{t+h})}\frac{\mathrm{d}h}{h} + t^{r-s}\|\tau_t f - f\|_{L^q(I_t)}\Big).$$

Uvědomme si, že $\tau_h(\tau_t f - f) - (\tau_t f - f) = \tau_t(\tau_h f - f) - (\tau_h f - f)$, a proto platí $\|\tau_h(\tau_t f - f) - (\tau_t f - f)\|_{L^p(I_{t+h})} \le 2\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)}$.

Pro případ $\lambda < \infty$ počítejme

$$\begin{aligned} 2^{-1/q}\Big(&\int_0^{(\beta-\alpha)/3} (t^{-r}\|\tau_t f - f\|_{L^q(I_t)})^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/\lambda} \\ &\le 2\Big(\int_0^\infty \Big(t^{-r}\int_0^\infty h^{r-s}\|\tau_h f - f\|_{L^p(I_h)}\frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/\lambda} \\ &\quad + \Big(\int_0^\infty (t^{-s}\|\tau_t f - f\|_{L^p(I_t)})^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/\lambda}, \end{aligned}$$

což vede k užití Hardyho nerovnosti (Lemmatu 34). Dostáváme

$$\int_0^{(\beta-\alpha)/3} (t^{-r}\|\tau_t f - f\|_{L^q(I_t)})^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/\lambda} \le 2^{1/q}\Big(\frac{2}{r} + 1\Big)\Big(\int_0^\infty (t^{-s}\|\tau_t f - f\|_{L^p(I_t)})^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/\lambda}.$$

Na levé straně provedeme substituci $t := h/3$. Zde je vysvětlení: je-li $t = h/3$, platí $\tau_h f - f = \tau_{2t}(\tau_t f - f) + \tau_t(\tau_t f - f) + (\tau_t f - f)$, a dostáváme tedy odhad $\|\tau_h f - f\|_{L^q(I_h)} \le 3\|\tau_t f - f\|_{L^q(I_t)}$. Po substituci máme

$$\int_0^{\beta-\alpha} (h^{-r}\|\tau_h f - f\|_{L^q(I_h)})^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda} \le 3^{1-r}\int_0^{(\beta-\alpha)/3} (t^{-r}\|\tau_t f - f\|_{L^q(I_t)})^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/\lambda}. \quad (2.11)$$

Je-li $h \ge \beta - \alpha$, je I_h prázdná, a proto $\|\tau_h f - f\|_{L^q(I_h)} = 0$. Výraz $\beta - \alpha$ na levé straně (2.11) pak můžeme nahradit nekonečnem. Dohromady pak dostáváme

$$\int_0^\infty (h^{-r}\|\tau_h f - f\|_{L^q(I_h)})^\lambda \frac{\mathrm{d}h}{h}\Big)^{1/\lambda} \le 3^{1-r}2^{1/q}\Big(\frac{2}{r}+1\Big)\Big(\int_0^\infty (t^{-s}\|\tau_t f - f\|_{L^p(I_t)})^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/\lambda},$$

což se po jednoduchém odhadu stává vztahem (2.10).

Pro případ $\lambda = \infty$ postupujeme velmi podobně, pouze místo integrování bereme supremum přes odpovídající množinu. □

Nyní uvedeme některé důsledky 2. kapitoly.

Důsledek 39. *Nechť $s > 1/p$. Potom platí*

$$B_\lambda^{s,p}(I) \subset \mathrm{Lip}^{s-1/p}(I).$$

Navíc existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $f \in B_\lambda^{s,p}$ platí odhad

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}^{s-1/p}(I)} \le c\,\|f\|_{B_\lambda^{s,p}(I)}.$$

Důkaz. Použitím Tvrzení 25 a Vět 30 a 38 dostaneme existenci vhodné konstanty $c \in \mathbb{R}$ a řetězec inkluzí

$$B_\lambda^{s,p} \subset B_\infty^{s,p} \subset B_\infty^{s-1/p,\infty} = \mathrm{Lip}^{s-1/p}.$$

□

Důsledek 40. *Pro $s - 1/p > -1/q$, $p < q$ platí, že*

$$B_\lambda^{s,p}(I) \subset L^q(I)$$

a existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$, že pro všechna $f \in B_\lambda^{s,p}$ jest

$$\|f\|_q \leq c \, \|f\|_{B_\lambda^{s,p}}.$$

Důkaz. Pro $s < r$ a $r - 1/p = -1/q$ dostaneme z Lemmat 36 a 37 řetězec inkluzí $B_\lambda^{s,p} \subset B_1^{r,p} \subset L^q$ a hledanou konstantu $c \in \mathbb{R}$. □

Poznámka. Tento důsledek zahrnuje i speciální případ – inkluzi $B_\lambda^{s,1/p}(I) \subset L^\infty$ pro $s > 1/p$.

2.5 Otevřená otázka

Funkce z prostoru $B_\lambda^{s,p}(I)$ pro $s > 1/p$ jsou $(s-1/p)$-lipschitzovské a tedy spojité na I. Bylo by zajímavé zjistit, zda v nějakém smyslu platí inkluze

$$B_\lambda^{s,1/s}(I) \subset \mathcal{C}(\overline{I})$$

jako limitní případ předchozího pro $s \to \frac{1}{p}+$.

A. Dodatek

A.1 Použitá tvrzení

Věta 41 (Arzelà–Ascoli)**.** *Nechť $[a,b]$ je omezený interval a $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Jestliže jsou funkce f_n stejně omezené a stejně spojité, potom existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}$, která stejnoměrně konverguje.*

Viz [7], str. 317, Věta 163.

Věta 42 (Rieszova o reprezentaci)**.** *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Potom ke každému omezenému lineárnímu funkcionálu Φ na prostoru $\mathcal{C}_0(X)$ existuje právě jedna regulární komplexní borelovská míra μ taková, že platí*

$$\Phi(f) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

pro všechny funkce $f \in \mathcal{C}_0(X)$. Navíc je norma Φ rovna totální variaci μ, t. j.

$$\|\Phi\| = |\mu|(X).$$

Viz [9] str. 131, Věta 6.19.

Věta 43 (Urysonovo lemma)**.** *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor, $V \subset X$ je otevřená množina a $K \subset V$ je kompaktní množina. Potom existuje funkce $f \in \mathcal{C}_c(X)$ splňující $\chi_K \leq f \leq \chi_V$.*

Viz [9] str. 53, Věta 2.12.

Věta 44. *Nechť V je okolí nuly v separabilním topologickém vektorovém prostoru X a $\{\Lambda_n\}$ je posloupnost z X^* taková, že*

$$|\Lambda_n x| \leq 1 \quad \text{pro všechna } x \in V, n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Potom existuje podposloupnost $\{\Lambda_{n_i}\}$ a $\Lambda \in X^*$ tak, že

$$\Lambda x = \lim_{i \to \infty} \Lambda_{n_i} x \quad \text{pro všechna } x \in V.$$

Viz [8], str. 68, Věta 3.17. Z této věty plyne následující

Důsledek 45. *Nechť X je separabilní normovaný lineární prostor a $\{x_n^*\}$ je omezená posloupnost v X^*. Potom existuje prvek $x^* \in X^*$ a podposloupnost $\{x_{n_k}^*\}$ taková, že pro každé $x \in X$ platí $x_{n_k}^*(x) \to x^*(x)$ neboli $\{x_{n_k}^*\}$ je slabě* konvergentní v X^*.*

Věta 46. *Předpokládejme, že P je lokálně kompaktní topologický prostor, který je navíc σ-kompaktní (nejvýše spočetné sjednocení kompaktních množin). Dále nechť f je μ-skoro všude konečná funkce na P. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) f je μ-měřitelná funkce,

(ii) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina G taková, že $\mu G < \varepsilon$ a f je spojitá na $P \setminus G$,

(iii) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spojitá funkce φ na P a otevřená množina G tak, že $\mu G < \varepsilon$ a $f = \varphi$ na $P \setminus G$,

(iv) existuje posloupnost $\{\varphi_n\}$ spojitých funkcí na P taková, že

$$\varphi_n \to f \quad \mu\text{-skoro všude na } P.$$

Viz [5], str. 62, Věta 18.2.

Věta 47 (Jegorov)**.** *Nechť M je měřitelná množina konečné míry. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na M, která má skoro všude na M konečnou limitu $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje měřitelná množina N míry menší než ε taková, že posloupnost $\{f_n\}$ konverguje k f stejnoměrně na $M \setminus N$.*

Viz [6], str. 77, Věta 37.

Věta 48 (Levi)**.** *Nechť f_n jsou nezáporné měřitelné funkce na X a $f_n \nearrow f$. Potom $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_X f$.*

Viz [5], str. 25, Věta 8.5.

Věta 49 (Struktura otevřených množin v $\mathbb{R}$)**.** *Nechť G je otevřená množina v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, \sigma_{eukl})$. Potom existuje nejvýše spočetná množina po dvou disjunktních otevřených intervalů (a_n, b_n), kde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že*

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n).$$

Viz [11], str. 51, Věta 6.

Definice. Nechť μ je nezáporná míra na σ-algebře $\mathfrak{M}$ a nechť λ je libovolná míra na $\mathfrak{M}$. Říkáme, že λ je **absolutně spojitá** vzhledem k μ, a zapisujeme to symbolem $\lambda \ll \mu$, jestliže pro každou množinu $E \in \mathfrak{M}$, pro niž $\mu(E) = 0$, platí $\lambda(E) = 0$.

Jestliže existuje množina $A \in \mathfrak{M}$ taková, že pro každou množinu $E \in \mathfrak{M}$ je $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$, říkáme pak, že míra λ je **soustředěna na** A. To je ekvivalentní s podmínkou $\lambda(E) = 0$, kdykoli $E \cap A = \emptyset$.

Předpokládejme, že λ_1, λ_2 jsou míry na $\mathfrak{M}$, a nechť existují disjunktní množiny A, B takové, že λ_1 je soustředěna na A a λ_2 je soustředěna na B. V takovém případě říkáme, že λ_1 a λ_2 jsou **vzájemně singulární**, a zapisujeme to $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

Věta 50 (Lebesgue–Radon–Nikodymova)**.** *Nechť μ je nezáporná σ-konečná míra na σ-algebře $\mathfrak{M}$ na množině X a nechť λ je komplexní míra na $\mathfrak{M}$.*

(a) Existuje právě jedna dvojice komplexních měr λ_a a λ_s na $\mathfrak{M}$ taková, že

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \lambda_s, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

(b) Existuje právě jeden prvek $h \in L^1(\mu)$ takový, že platí

$$\lambda_a(E) = \int_E h \, \mathrm{d}\mu$$

pro každou množinu $E \in \mathfrak{M}$.

Viz [9], str. 141, Věta 6.10.

Definice. Nechť $x \in \mathbb{R}^k$. O posloupnosti $\{E_i\}$ borelovských množin v $\mathbb{R}^k$ budeme říkat, že se **vhodně smršťuje k bodu** x, jestliže existuje číslo $\alpha > 0$ s následující vlastností: existuje posloupnost koulí $B(x, r_i)$ takových, že $\lim r_i = 0$, $E_i \subset B(x, r_i)$ a

$$\lambda(E_i) \geq \alpha \, \lambda(B(x, r_i)) \quad \text{pro } i = 1, 2, 3, \ldots .$$

Věta 51. *Nechť každému bodu $x \in \mathbb{R}^k$ je přiřazena posloupnost $\{E_i(x)\}$, která se vhodně smršťuje k x, a nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$. Potom*

$$f(x) = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{\lambda(E_i(x))} \int_{E_i(x)} f \, \mathrm{d}\lambda \quad \textit{skoro všude.}$$

Viz [9], str. 161, Věta 7.10.

Věta 52 (Hölderova nerovnost)**.** *Nechť $f \in L^p$ a $g \in L^q$, kde p, q jsou čísla z $(1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom $fg \in L^1$ a*

$$\int fg \, \mathrm{d}\mu \leq \Big(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \Big(\int |g|^q \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/q}.$$

Viz [5] str. 32, Věta 10.3.

Věta 53 (Fatouovo lemma)**.** *Nechť $f_n : X \to [0, \infty], n \in \mathbb{N}$ jsou měřitelné funkce. Potom platí*

$$\int_X (\liminf_{n \to \infty} f_n) \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Viz [9], str. 35, Věta 1.28.

Seznam použité literatury

[1] Bennett, Colin, Sharpley, Robert. *Interpolation of Operators*. Boston: Academic Press, 1988. ISBN 0-12-088730-4.

[2] Simon, Jacques. Sobolev, Besov and Nikolskii Fractional Spaces: Imbeddings and Comparisons for Vector Valued Spaces on an Interval. In *Annali di Matematica pura ed applicata*, (IV), Vol. LCVII (1990), s. 177-148.

[3] Buttazzo, Giuseppe, Giaquinta, Mariano, Hildebrandt, Stefan. *One-dimensional variational problems: an introduction*. Oxford: Clarendon Press, 1988. ISBN 0-19-850465-9.

[4] Adams, Robert Alexander. *Sobolev spaces*. New York: Academic Press, 1975. ISBN 0-12-044150-0.

[5] Lukeš, Jaroslav, Malý, Jan. *Míra a integrál*. 2. vydání. Praha: Nakladatelství Karolinum, 2002. ISBN 80-246-0543-0.

[6] Jarník, Vojtěch. *Integrální počet II*. 1. vydání. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1955.

[7] Jarník, Vojtěch. *Diferenciální počet II*. 2. vydání. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1956.

[8] Rudin, Walter. *Functional analysis*. 2. vydání. Boston: McGraw-Hill, 1991. ISBN 0-07-054236-8.

[9] Rudin, Walter. *Analýza v reálném a komplexním oboru*. 2. přepracované vydání. Přeložili Ivan Netuka a Jiří Veselý. Praha: Academia, 2003. ISBN 80-200-1125-0.

[10] Yosida, Kôsaku. *Functional Analysis*. 6. vydání. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1980. ISBN 0-387-10210-8.

[11] Kolmogorov, A. N. , Fomin, S. V. *Introductory Real Analysis*. Přeložil a editoval Richard A. Silverman. New York: Dover Publications, 1975. ISBN 0-486-61226-0.