Univerzita Karlova v Prahe
Matematicko-fyzikálna fakulta

BAKALÁRSKA PRÁCA

Adrian Lisko

Ergodická teória

Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci bakalárskej práce:	doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Študijný program:	Matematika
Študijný obor:	Finančná matematika

Praha 2012

Dovoľujem si na tomto mieste poďakovať doc. RNDr. Danielovi Hlubinkovi, Ph.D., vedúcemu bakalárskej práce, za jeho podporu a cenné rady pri vzniku tejto bakalárskej práce.

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov. Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplyvajúce zo zákona č. 121/2000 Zb., autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavrenie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa čl. 60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dňa ..... Podpis autora

Názov práce: Ergodická teória

Autor: Adrian Lisko

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.

Abstrakt: Bakalárska práca kompiluje základné poznatky z ergodickej teórie. Motiváciou k napísaniu tejto práce bolo zoznámiť sa so zaujímavou okrajovou látkou a precvičiť si už prebratú látku s ňou spojenú. Práca začína zadefinovaním transformácií zachovávajúcich mieru a prechádza od vlasnosti rekurencie a Poincarrého vety k ergodicite a Birkhoffovej ergodickej vete a mixovaniu. Nakoniec je ukázaná spojitosť Birkhoffovej ergodickej vety s Kolmogorovovým silným zákonom veľkých čísiel. Teoretické poznatky sú priblížené na príkladoch základných transformácií vyskytujúcich sa v ergodickej teórii.

Kľúčové slová: zachovávajúci mieru, ergodický, rekurencia, pravdepodobnosť, mixovanie

Title: Ergodic theory

Author: Adrian Lisko

Department: Department of probability and mathematical statistics

Supervisor: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.

Abstract: This Bachelor Thesis compiles basics of ergodic theory. Motivation for writing this text was interesting topic and linkeage between it and the mathematics already learned. The Thesis begins with defining measure-preserving transformations and continues with recurrence and Poincarré's recurrence theorem to ergodicity and Birkhoff's ergodic theorem and mixing. In the end, it is shown that Birkhoff's ergodic theorem generalizes Kolmogorov's strong law of large numbers for stationary random sequences. Theory is demonstrated on a handful of examples of basic transformations.

Keywords: measure-preserving, ergodic, recurrence, probability, mixing

Obsah

Úvod **2**

1 Historický kontext **3**
1.1 Pôvod 3
1.2 Súčasný význam 3

2 Transformácie zachovávajúce mieru **4**
2.1 Príklady 5

3 Rekurencia a invariancia **8**
3.1 Rekurencia 8
3.2 Invariancia 9

4 Ergodicita **10**
4.1 Základné pojmy 10
4.2 Príklady 11
4.3 Ergodické vety 14
4.4 Mixovanie 19
4.5 Príklady 21

5 Spojitosť so zákonom veľkých čísiel **23**
5.1 Kolmogorovov (silný) ZVČ 23

Záver **25**

Zoznam použitej literatúry **26**

Úvod

Práca sa venuje základným poznatkom z ergodickej teórie, pričom motiváciou je pomocou Birkhoffovej ergodickej vety dokázať Kolmogorov silný zákon veľkých čísiel pre stacionárne náhodné postupnosti.

Práca je rozdelená do piatich kapitol. Prvá kapitola podáva strohý úvod do histórie a vývoja ergodickej teórie. V druhej kapitole sa definujú transformácie zachovávajúce mieru, tj. základné zobrazenia, na ktorých ergodická teória stavia. V tretej kapitole sa dostávame k Poincarrého vete o rekurencii ako prvej ergodickej vete. Štvrtá kapitola pojednáva o ergodicite a uvádza Birkhoffovu ergodickú vetu ako riešenie Boltzmannovej hypotézy. V piatej kapitole uvádzame spojitosť medzi Birkhoffovou ergodickou vetou a Kolmogorovým silným zákonom veľkých čísiel. Teória je priblížená na základných príkladoch transformácií, používaných v ergodickej teórii.

1 Historický kontext

1.1 Pôvod

Pojem *ergodický* prvý krát zmienil fyzik Boltzman v štatistickej mechanike u svojej hypotézy. Tento pojem je odvodený z gréckych slov *ergon* - práca, energia a *odos* - cesta. Boltzmannova hypotéza hovorí, že pre veľké systémy vzájomne reagujúcich častíc v rovnovážnom stave platí, že u častice s danou trajektóriou sa časový priemer rovná priestorovému. Ukázalo sa však, že takto postavená hypotéza je neplatná. Ďalšie štúdium podmienok, za ktorých sú si tieto dva piemery rovné viedli ku vzniku *ergodickej teórie* ako ju poznáme dnes.

1.2 Súčasný význam

Moderný význam ergodickej teórie by sa dal popísať ako štúdium dlhodobého priemerného správania sa systému, ktorý sa vyvíja v čase.

Príklady disciplín, kde sa používajú výsledky ergodickej teórie:

1. *Fyzika*
   V štatistickej mechanike, mechanika ideálnych plynov. Skúma sa stav systému s N časticiami a jeho vývoj v spojitom alebo diskrétnom čase podľa deterministických fyzikálnych pravidiel. Predmetom štúdia sú priemerné hodnoty pozorovanej veličiny systému pre jednu časticu za dlhé obdobie, tj. časové priemery alebo pre celý súbor častíc v jednom okamihu, tj. priestorové priemery.

2. *Štatistika*
   Z tohto pohľadu sú predmetom štúdia stacionárne náhodné procesy a Zákon veľkých čísiel. Ergodická teória poskytuje nástroje, ktoré ho zobecňujú pre takéto procesy.

3. *Teória informácie*
   Použitie najmä u kódovania, kde ľubovoľnú správu budeme chápať ako postupnosť symbolov z konečnej abecedy a štúdiom odchyliek a chýb, vzniklých pri dekódovaní.

2 Transformácie zachovávajúce mieru

Základným zobrazením, s ktorým Ergodická teória je *trasformácia zchovávajúca mieru.*

Transformácia je zobrazenie, ktorého doména aj obor hodnôt je tá istá množina. Keďže táto práca sa zaoberá Ergodickou teóriou z pohľadu teórie miery, budeme potrebovať pojem merateľnosti. Nech $(E, \mathcal{E}, \mu)$ je merateľný priestor. Potom povieme, že transformácia $T : E \to E$ je *merateľná*, ak $T^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ pre každú $A \in \mathcal{E}$. T je *invertibilná merateľná transformácia*, ak T aj T^{-1} sú merateľné. Ďalšou základnou vlasnosťou transformácií, s ktorými budeme pracovať, je schopnosť zachovávať mieru. Povieme, že T je *transformácia zachovávajúca mieru*, ak $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ pre každé $A \in \mathcal{E}$. Hovoríme tiež, že T *zachováva mieru* μ alebo μ je *T-invariatná.* Ak T je invertibilná zachováva mieru μ, potom platí $\mu(T(A)) = \mu(A)$ pre každé $A \in \mathcal{E}$.

Aby sme nemuseli určovať či daná transformácia zachováva mieru pre všetky merateľné množiny z celej sigma algebry, uvedieme si lemma, ktoré nám v nasledujúcich príkladoch zjednoduší prácu.

Lemma 2.1. *Nech $\mathcal{E}_0$ je systém množín uzavretý na konečné prieniky a $\mathcal{E}$ σ-algebra ním generovaná. Ak $T^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ a $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ pre každé $A \in \mathcal{E}_0$, potom T je transformácia zachovávajúca mieru.*

Dôkaz. Máme $\sigma(\mathcal{E}_0) = \mathcal{E}$. Položme

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{E} : T^{-1}(A) \in \mathcal{E},\ \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)\}.$$

Potom $\mathcal{D}$ je *Dynkinov systém* [5] a platí $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{E}$. Z *Dynkinovho lemmatu* [5] potom $\sigma(\mathcal{E}_0) \subset \mathcal{D}$ a teda $\mathcal{E} = \mathcal{D}$. Tým je tvrdenie dokázané.

□

Teraz stačí pri každej transformácii testovať:

1. Intervaly $[a, b)$. Ak $E = \mathbb{R}$ alebo $E = I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\mathcal{E}$ je Borelovská σ-algebra;

2. Obdĺžniky $[a, b) \times [c, d)$. Ak $E = \mathbb{R}^2$ alebo $E = [0, 1]^2$ je interval a $\mathcal{E}$ je Borelovská σ-algebra;

3. Oblúky. Ak E je kruh a $\mathcal{E}$ je Borelovská σ-algebra;

4. Konečne rozmerné valce $C_{-m,n}(a_{-m}, \ldots, a_n)$. Ak $E = \{-N, \ldots, N\}^{\mathbb{Z}}$ alebo $\{1, \ldots, N\}^{\mathbb{Z}}$ a $\mathcal{E}$ je σ-algebra.

Definujeme ešte pojem *orbity*, ktorá nám pomôže pri práci s iteráciami danej transformácie. Povieme, že $\{T^n(x)\}_{n\geq 0}$ je **orbita** v bode $x \in E$. Ak T je invertibilná, potom $\mathcal{O} = \{T^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Pojem orbita bol prevzatý zo štatistickej fyziky, kde sa používa pri opise pohybu nebeských telies.

2.1 Príklady

Uvedieme si základné transformácie, ktoré sa v ergodickej teórii používajú a ukážeme si, ktoré mieru zachovávajú a ktoré nie.

1. **Rotačné transformácie**
   Označme K^1 kružnicu o polomere 1, teda $K^1 = \{z = e^{2\pi i\theta}, 0 \leq \theta < 1\}$. Potom rotáciu R_α o uhol $2\pi\alpha$ na K^1 definujeme ako

   $$R_\alpha(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i(\theta+\alpha)}.$$

   Pre body $z_1, z_2 \in K^1$, tj. $z_1 = e^{2\pi i\theta_1},\ z_2 = e^{2\pi i\theta_2}$, definujeme ich vzdialenosť pomocou metriky

   $$d(z_1, z_2) = min\{|\theta_2 - \theta_1|, 1 - |\theta_2 - \theta_1|\}.$$

   Nech teraz $R_\alpha : K^1 \to K^1$ je rotácia a λ je normovaná Lebesgueova miera na kruhu K^1. Potom miera λ(A) oblúka A je daná dĺžkou oblúka vydelenou 2π, tak aby $\lambda(K^1) = 1$. Takto nadefinovaná miera je potom ekvivaletná 1-dimenziálnej Lebesgueovej miere na intervale $[0, 1)$ a miera každého oblúka odpovedá miere nejakého podintervalu. Je zrejmé, že rotáciou oblúka dostatneme zase oblúk stejnej miery. Teda platí, že ak A je oblúk, potom

   $$\lambda(R_\alpha^{-1}A) = \lambda(A),\ \forall A \subset K^1.$$

   Systém všetkých oblúkov na kruhu generuje Borelovskú σ-algebru $\mathcal{B}$. Potom z lemma 2.1 dostávame, že R_α zachováva mieru. Vidíme, že pre rotácie platí $R_\alpha = R_{-\alpha}^{-1}$ a teda $\lambda(R_\alpha A) = \lambda(R_\alpha^{-1}A) = \lambda(A)$, tj. ide o invertibilnú transformáciu.

2. **Dyadické transformácie**
   Majme konečný merateľný priestor $([0, 1), \mathcal{B}([0, 1)), \lambda)$, kde λ je Lebesgueova miera na Borelovskej σ-algebre $\mathcal{B}$ na intervale $[0, 1)$. Dyadickú transformáciu alebo *doubling map* definujeme ako

   $$T(x) = 2x \bmod 1 = \begin{cases} 2x & \text{ak } 0 \leq x < 1/2, \\ 2x - 1 & \text{ak } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

   Ukážeme, že T zachováva mieru. Pre $[a, b) \subset [0, 1)$ máme

   $$T^{-1}[a, b) = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cup \left[\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

   a teda

   $$\lambda(T^{-1}[a, b)) = \frac{b-a}{2} + \frac{(b+1)-(a+1)}{2} = b - a = \lambda([a, b))\ .$$

   Daná rovnosť platí pre všetky sprava uzavreté podintervaly intervalu $[0, 1)$. Z Teórie miery vieme, že generujú σ-algebre $\mathcal{B}$. Z lemma 2.1 znova dostávame, že T zachováva mieru. V tomto prípade však nejde o invertibilnú transformáciu, a preto $\lambda(T[a, b)) = 2\lambda([a, b))$ a teda $\lambda(T[a, b)) \neq \lambda([a, b))$.

3. **Pekárska transformácia** (*z angl. Baker's transformation*)
Jej názov je odvodený od postupu akým pekár hnieti cesto. Ide o 2-dimenzionálny príklad predchádzajúcej transformácie, tiež zachováva mieru a navyše je aj invertibilná. Pracujeme na súčinovej Borelovskej σ-algebre $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ na množine $[0,1)^2$ so súčinovou Lebesgueovou mierou $\lambda \otimes \lambda$. T je definovaná ako

$$T(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}) & \text{ak } 0 \leq x < 1/2, \\ (2x-1, \frac{y+1}{2}) & \text{ak } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

Pre $[a,b)^2 \subset [0,1)^2$ máme

$$T^{-1}[a,b)^2 = \left\{ \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cup \left[\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right) \right\} \times [a,b)$$

a teda

$$\lambda(T^{-1}[a,b)^2) = \left\{ \frac{b-a}{2} + \frac{(b+1)-(a+1)}{2} \right\} * (b-a) = (b-a)^2 = \lambda([a,b)^2).$$

Aplikovaním lemma 2.1 na systém všetkých podobdĺžnikov dostávame, že T zachováva mieru. Pretože táto transformácia je ale invertibilná, ukážeme si ako T^{-1} zachováva mieru. Pre

$$T[a,b)^2 = [2a, 2b) \times \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

dostávame nasledujúcu rovnosť

$$\lambda(T[a,b)^2) = (2b-2a) * \left(\frac{b-a}{2}\right) = \lambda([a,b)^2).$$

4. **Bernoulliho shift**
Nech $\Sigma_N^+ = \{1, \ldots, N\}^{\mathbb{N}}$ je priestor jednostranného posunu (*z angl. one-sided shift*) a transformácia $\sigma^+ : \Sigma_N^+ \to \Sigma_N^+$ je Bernoulliho shift alebo ľavý posun (*z angl. left shift*) definovaný ako

$$\sigma^+ \left((x_i)_{i=0}^{\infty}\right) = (x_{i+1})_{i=0}^{\infty}.$$

Potom *konečne rozmerný valec* v Σ_N^+ definujeme ako množinu tvaru

$$C_n(a_0, \ldots, a_n) = \{\underline{x} = (x_i)_{i=0}^{\infty} \in \Sigma_N^+;\ x_i = a_i, \text{ pre každé } 0 \leq i \leq n\},$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $a_i \in \{1, \ldots, N\}$ pre $0 \leq i \leq n$. Nech $\mathcal{E}$ je σ-algebra generovaná cylindrami a $(\Sigma_N^+, \mathcal{E})$ merateľný priestor. Povieme, že súčinová miera $\mu_{\underline{p}} = p_1 \times \ldots \times p_N$ je *Bernoulliho miera* daná pravdepodobnostným vektorom $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_N)$, ak pre každý cylinder $C_n(a_0, \ldots, a_n)$ platí

$$\mu_{\underline{p}}(C_n(a_0, \ldots, a_n)) = p_{a_0} p_{a_1} \cdots p_{a_n}$$

Keďže sme Bernoulliho mieru definovali na všetkých cylindroch z Σ_N^+, z *vety o rozšírení miery* [5] dostávame mieru na celej σ-algebre $\mathcal{E}$.

Teraz ukážeme, že σ^+ zachováva mieru $\mu_{\underline{p}}$. Chceme pre $A \in \mathcal{E}$, aby $\mu_{\underline{p}}((\sigma^+)^{-1}A) = \mu_{\underline{p}}(A)$. Vezmime cylinder $C_n(a_0, \ldots, a_n)$ a nekonečný vektor $\underline{x} \in \Sigma_N^+$. Platí

$$\begin{aligned}
\underline{x} \in (\sigma^+)^{-1}(C_n(a_0, \ldots, a_n)) &\iff \sigma^+(\underline{x}) \in (C_n(a_0, \ldots, a_n)) \\
&\iff \sigma^+(\underline{x})_i = a_i \text{ pre } 0 \leq i \leq n \\
&\iff \sigma^+(\underline{x})_{i+1} = a_i \text{ pre } 0 \leq i \leq n \\
&\iff x_1 = a_0, \ldots, x_{n+1} = a_n.
\end{aligned}$$

Pričom x_0 môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu z množiny $\{1, \ldots, N\}$, tj.

$$(\sigma^+)^{-1}(C_n(a_0, \ldots, a_n)) = \bigcup_{i=1}^{N} C_{n+1}(i, a_0, \ldots, a_n).$$

Aplikovaním miery máme

$$\begin{aligned}
\mu_{\underline{p}}\big((\sigma^+)^{-1}C_n(a_0, \ldots, a_n)\big) &= \mu_{\underline{p}}\Bigg(\bigcup_{i=1}^{N} C_{n+1}(i, a_0, \ldots, a_n)\Bigg) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \mu_{\underline{p}}(C_{n+1}(i, a_0, \ldots, a_n)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} p_i p_{a_0} \cdots p_{a_n} = p_{a_0} \cdots p_{a_n} \Bigg(\sum_{i=1}^{N} p_i\Bigg) \\
&= p_{a_0} \cdots p_{a_n} = \mu_{\underline{p}}(C_n(a_0, \ldots, a_n))).
\end{aligned}$$

Využili sme nezávislosť zložiek vektora pri druhej rovnosti a definíciu pravdepodobnostného vektora, pri súčte pravdepodobností jeho zložiek v piatej rovnosti. Z lemma 2.1 potom platí $\mu_{\underline{p}}((\sigma^+)^{-1}A) = \mu_{\underline{p}}(A)$ pre každé $A \in \mathcal{E}$ a teda σ^+ zachováva mieru $\mu_{\underline{p}}$.

3 Rekurencia a invariancia

V celej kapitole, ak neurčíme inak, budeme pracovať s konečným merateľným priestorom $(E, \mathcal{E}, \mu)$ a transformáciou zachovávajúcou mieru $T : E \to E$.

3.1 Rekurencia

V tejto podkapitole si ukážme historicky prvú najznámejšiu ergodickú vetu - *Poincarrého vetu o rekurencii.* Poincarré ju dokázal v roku 1899, keď skúmal pohyb nebeských telies.

Povieme, že T je *rekurentná*, ak pre každú merateľnú množinu A platí, že pre skoro každé $x \in A$ existuje $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí $T^n x \in A$. Povieme, že T je *konzervatívna* transformácia, ak pre ľubovolnú merateľnú množinu A, $\mu(A) > 0$, existuje $n \in \mathbb{N}$, také, že $\mu(T^{-n}A \cap A) > 0$.

Poznámka 3.1. Všimneme si, že množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)$ obsahuje všetky body, ktoré sa ocitnú po niekoľkých iteráciách v množine A. Podmienka rekurencie hovorí, že množina bodov, pre ktoré neexistuje návrat po niekoľkých iteráciach späť do množiny A je miery nula. Teda platí nasledujúca rovnosť

$$\mu(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)) = 0.$$

Lemma 3.2. *T je konzervatívna práve vtedy, keď je rekurentná.*

Dôkaz. $\Rightarrow$
Nech T je konzervatívna transformácia zachovávajúca mieru a $\mu(A) > 0$. Položme

$$B = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}(A).$$

Ak $\mu(B) > 0$, potom z predpokladu konzervatívnosti T existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $\mu(B \cap T^{-n}(B)) > 0$. Potom ale musí existovať $x \in B$, pre ktoré platí $T^n x \in B$, čo je spor s tým, ako sme si nadefinovali B. Teda musí platiť $\mu(B) = 0$ a z poznámky je T rekurentná.

$\Leftarrow$
Teraz nech T je rekurentná a $\mu(A) > 0$. Potom z

$$\mu(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} [A \cap T^{-n}(A)]) = \mu(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)) = 0$$

vyplýva, že pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ platí $\mu(A \cap T^{-n}(A)) > 0$. Teda T je konzervatívna. $\square$

Veta 3.3 (Poincarrého veta o rekurencii)**.** *Nech $(E, \mathcal{E}, \mu)$ je merateľný priestor konečnej miery. Ak $T : E \to E$ je transformácia zchovávajúca mieru, potom T je rekurentná.*

Dôkaz. Stačí ak ukážeme, že T je konzervatívna. Pre spor predpokladajme, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $\mu(T^{-n}(A) \cap A) = 0$. Potom pre ľubovolné nezáporné $l, k \in \mathbb{N}$, $l \neq k$, búno $l = k + n$, $n > 0$ dostávame

$$\begin{aligned} \mu(T^{-l}(A) \cap T^{-k}(A)) &= \mu(T^{-n-k}(A) \cap T^{-k}(A)) \\ &= \mu(T^{-k}[T^{-n}(A) \cap A]) \\ &= \mu(T^{-n}(A) \cap A) = 0. \end{aligned}$$

U poslednej rovnosti sme využili, že T zachováva mieru. Vidíme, že $\{T^{-n}A\}_{n \geq 0}$ je po dvoch disjunktná postupnosť množín. Zrejme $T^{-n}(A) \subset E$, a teda aj $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) \subset E$. Potom platí

$$\infty > \mu(E) \geq \mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} [T^{-n}(A)]) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}(A)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A) = \infty.$$

Čo nám dáva spor a tým je veta dokázaná.

□

Dôsledok 3.4. *Nech T je rekurentná transformácia zachovávajúca mieru. Potom pre skoro každé $x \in A$ existuje nekonečne veľa $n \in \mathbb{N}$ takých, že $T^n x \in A$.*

Rekurenciu môžme ekvivalentne charakterizovať pomocou *stlačiteľnosti* množiny:

- povieme, že $C \in \mathcal{E}$ je *stlačiteľná*, ak $T^{-1}(C) \subset E$ a $\mu(E \setminus T^{-1}(C)) > 0$.

T je nestlačiteľná, ak nepripúšťa žiadne stlačiteľné množiny. Ďalšia ekvivaletná charakterizácia rekurencie je pomocou pojmu *túlavej* množiny:

- povieme, že merateľná množina W je *túlavá*, ak pre $\forall i, j \geq 0$, $i \neq j$ platí $T^{-i}W \cap T^{-j}W = \emptyset$.

3.2 Invariancia

Invariancia je dôležitým pojmom, ktorý budeme potrebovať k zadefinovaniu ergodicity. Povieme, že $A \subset E$ je *striktne invariantná*, ak $A = T^{-1}A$ a *invariantná*, ak $\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0$. Povieme, že merateľná funkcia f je *invariantná*, ak $f \circ T = f$ s.v. na E.

Poznámka 3.5. Striktnú invarianciu množiny A môžme teda vyjadriť aj pomocou jej charakteristickej funkcie: $\mathbb{I}_A \circ T = \mathbb{I}_A$.

4 Ergodicita

Ak neuvedieme inak, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravdepodobnostný merateľný priestor a T je transformácia zachovávajúca mieru na tomto priestore. V prípade pravdepodobnostného priestoru sa nejedná o významnú reštrikciu, keďže sa jedná tiež o konečne merateľný priestor s mierou normalizovanou na hodnotu 1.

4.1 Základné pojmy

Povieme, že T je *ergodická*, ak pre každú striktne invariantnú merateľnú množinu $A \subset \Omega$ platí $\mu(A) = 1$ alebo $\mu(A) = 0$.

Ergodická transformácia sa v literatúre vyskytuje aj pod názvami *metricky tranzitívna* alebo *metricky nerozložiteľná*. Pri rozložiteľnosti sa pozastavíme. Platí totiž, že neergodické transformácie, ktoré zachovávajú mieru, sú *rozložiteľné*, tj. vhodnou reštrikciou miery a transformácie môžeme z neergodickej transformácie dostať dve ergodické. Nech $A \in \mathcal{A}$ je ľubovoľná striktne invariantná s $P(A) > 0$. Definujme reštrikciu P_A miery P na množinu A (analogicky $P_{\Omega \setminus A}$) ako podmienenú pravdepodobnosť

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \ \forall B \in \mathcal{A}.$$

T zachovávajúca mieru P, potom zachováva aj P_A ($P_{\Omega \setminus A}$), teda touto reštrikciou sme rozložili P na dve invariantné miery. Následnou reštrikciou T vzhľadom k A ($\Omega \setminus A$) dostaneme transformáciu $T|_A$ ($T|_{\Omega \setminus A}$), ktorá je už ergodická. Ergodická T je potom v tomto zmysle *nerozložiteľná*.

Ergodicitu môžeme testovať aj pomocou invariatných funkcií. K tomu slúži nasledujúce lemma.

Lemma 4.1. *Nech T je transformácia zachovávajúca mieru na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

1. *T je ergodická,*
2. *ak každá merateľná funkcia $f : E \to \mathbb{R}$ je invariantná, potom* f *je konštantná s.v.*

Dôkaz. (1) $\Rightarrow$ (2)
Nech T je ergodická a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je merateľná invariatná funkcia. Chceme ukázať, že je konštantná s.v. Z invariancie funkcie máme $f \circ T = f$ s.v., teda na množine miery 0 si môžeme funkciu ľubovolne dodefinovať. Nech je potom f invariantná všade, tj. $f(T(x)) = f(x)$ pre každé $x \in \Omega$. Položme

$$A_k = \{x \in \Omega : f(x) > k\}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

A_k je merateľná, pretože f je merateľná a teda $f^{-1}((k, \infty)) \in \mathcal{A}$. A_k je invariatná, lebo

$$\begin{aligned} T^{-1}A_k &= \{x \in \Omega : Tx \in A_k\} \\ &= \{x \in \Omega : f(Tx) > k\} \\ &= \{x \in \Omega : f(x) > k\} \\ &= A_k. \end{aligned}$$

Prvé dve rovnosti sú zrejmé z definície jednotlivých zobrazení, v poslednej sme využili invarianciu funkcie f.

Z ergodicity T platí, že pre každé $k \in \mathbb{R}$ je $P(A_k) = 0$ alebo $P(A_k) = 1$. Teda

1. ak f je rovné konštante c s.v., dostávame:
   - $P(A_k) = 0$ pre všekty $f(x) = c > t$,
   - $P(A_k) = 1$ pre všekty $f(x) = c \leq t$.
2. ak by f nebola konštantná s.v., potom by sme našli nejaké $t_0 \in \mathbb{R}$ také, že $0 < P(A_{t_0}) < 1$ a to je spor s tým čo sme práve dokázali.

(1) $\Leftarrow$ (2)
Predpokladajme platnosť opačnej implikácie. Nech teda $A \in \mathcal{A}$ je invariatná a $\mathbb{I}_A$ je jej indikátor. Ten je potom invariatná funkcia, pretože T zachováva mieru a platí

$$\mathbb{I}_A \circ T = \mathbb{I}_{T^{-1}A} = \mathbb{I}_A.$$

Aplikujme predpoklad a dostaneme, že f je konštantná s.v. Indikátor nadobúda len dvoch hodnôt, a preto

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_A = 0 \text{ s.v.} \quad &\Rightarrow \quad P(A) = \int \mathbb{I}_A \mathrm{d}\mu = 0, \\ \mathbb{I}_A = 1 \text{ s.v.} \quad &\Rightarrow \quad P(A) = \int \mathbb{I}_A \mathrm{d}\mu = 1. \end{aligned}$$

Teda T je ergodická a tým máme aj druhú implikáciu dokázanú.

□

4.2 Príklady

1. **Rotácie**
   Ukážeme si, že rotácie R_α sú neergodické pre α racionálne alebo ergodické, ak je α iracionálne. Budeme pracovať s R_α v tzv. aditívnom tvare

   $$R_\alpha(x) = (x + \alpha) \mod 1, \quad \forall x \in [0, 1).$$

   Interval $[0, 1)$ predstavuje priestor tried ekvivalencií na reálnych číslach $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Tj. pre každé $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ platí $x = y + k$, $k \in \mathbb{Z}$ a teda $[0, 1)$ obsahuje presne jedného reprezentanta pre každú triedu ekvivalencie $x + \mathbb{Z}$. Toto ekvivaletné vyjadrenie nám dovoľuje bijekcia $x \mapsto e^{2\pi i x}$ medzi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ a K^1. Pracujeme teda na Borelovskom priestore $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \mathcal{B}, \lambda)$ s jednotkovou Lebesgueovou mierou λ.

   - [**Racionálne rotácie**]
     Nech $\alpha \in \mathbb{Q}$.
     Nápad: orbity racionálnych rotácií majú konečne mnoho prvkov; ak každý z týchto prvkov obalíme „veľmi malými“ intervalmi, potom množina ich zjednotenia nebude triviálna a jej miera bude medzi 0 a 1.

Poznámka 4.2. Pre $\alpha \in \mathbb{Q}$ je každá orbita $\mathcal{O}^+_{R_\alpha}$ q-periodická.

Dôkaz. Nech teda $\alpha = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ sú vzájomne nedeliteľné. Potom pre každé $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

$$R^q_\alpha(x) = x + q\frac{p}{q} \bmod 1 = x + p \bmod 1 = x.$$

Teda každý bod je q-periodický.

□

Vezmime interval $I_{2q} \subset [0,1)$ o dĺžke $\dfrac{1}{2q}$ a skonštruujme jeho orbitu, napr.

$$A = \bigcup_{i=0}^{q-1} \left[\frac{i}{q}, \frac{i}{q} + \frac{1}{2q}\right].$$

Potom $A \subset [0,1)$ je zrejme invariatná, keďže R_α posiela každý interval $\left[\frac{i}{q}, \frac{i}{q} + \frac{1}{2q}\right]$ na iný a tieto intervaly sú po dvoch disjunktné. Potom

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \lambda\left(\bigcup_{i=0}^{q-1} \left[\frac{i}{q}, \frac{i}{q} + \frac{1}{2q}\right]\right) = \sum_{i=0}^{q-1} \lambda\left(\left[\frac{i}{q}, \frac{i}{q} + \frac{1}{2q}\right]\right) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{2q} = q\frac{1}{2q} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

teda $0 < \lambda(A) < 1$ a R_α nie je ergodická transformácia.

- **[Iracionálne rotácie]**
  Nech $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Pre dôkaz ergodicity použijeme lemma 4.1., teda stačí dokázať, že ak je funkcia f invariantná, potom je konštatná λ-s.v. K tomu použijeme poznatky z *teórie Fourierových radov*, a preto budeme pracovať s invariatnými funkciami z $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \mathcal{B}, \lambda)$. Potom môžeme $f \in \mathcal{L}_2$ rozvinúť do Fourierovho radu

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}, \quad \text{kde} \quad c_n = \int f(x) e^{-2\pi i n x} \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}$$

  a $f \circ R_\alpha$ do radu

$$f(R_\alpha(x)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n (x+\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \alpha} e^{2\pi i n x},$$

  pričom sme využili, že exituje $k \in \mathbb{Z}$ také, že $(x+\alpha) \bmod 1 = x+\alpha-k$. Potom pre každé $k \in \mathbb{Z}$ máme $e^{2\pi i n(-k)} = 1$. Z predpokladu invariancie f máme rovnosť

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} = f(x) = f(R_\alpha(x)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \alpha} e^{2\pi i n x}.$$

Z *vety o jednoznačnosti Fourierových koeficientov* [6] musí platiť

$$c_n = c_n e^{2\pi i n\alpha} \iff c_n(1 - e^{2\pi i n\alpha}) = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

kde $e^{2\pi i n\alpha}$ je vlastne n-tá rotácia R_α^n. Iracionálne rotácie majú odlišné a nekonečné orbity a teda aj špeciálne, $R_\alpha^n(0) = n\alpha \bmod 1$. Preto $n\alpha \bmod 1 \neq 0$ pre $n \neq 0$ a z toho plynie

$$\forall n \neq 0, \quad (1 - e^{2\pi i n\alpha}) \neq 1 \quad \Rightarrow \quad c_n = 0.$$

Teda $f = c_0$ je konštatná a z lemma je R_α ergodická.

2. **Dyadické transformácie**
   Táto transformácia je ergodická. Majme Borelovský merateľný priestor $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \mathcal{B}, \lambda)$ a $T(x) = 2x \bmod 1$. Dôkaz spravíme analogicky ako v predchádzajúcom prípade. Zase budeme využívať Fourierove rady a lemma. Chceme dokázať, že ak je funkcia invariatná, tak je potom λ-s.v. konštantná. Nech $f \in \mathcal{L}_2$ je invariantná, teda platí $f \circ T = f$ na $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Rozviňme f a $f \circ T$ do Fourierových radov a porovnajme. Dostávame rovnosť

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} = f(x) = f(T(x)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n(2x-k)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n 2x},$$

   kde $c_n = \int f(x) e^{-2\pi i n x} \mathrm{d}x$. Aj tu sme podobne použili, že pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$ je $2x \bmod 1 = 2x - k$ a potom $e^{2\pi i n(-k)} = 1$, pre každé $k \in \mathbb{Z}$. Člen $e^{2\pi i n 2x}$ má na pravej strane rovnosti koeficient c_n, pričom na ľavej strane má koeficient c_{2n}. Opäť z vety o jednoznačnosti Fourierových koeficientov máme

$$c_n = c_{2n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

   Nech pre nejaké $n \neq 0$ je $|c_n| \neq 0$. Vieme, že

$$|c_n| = |c_{2n}| = |c_{4n}| = \ldots = |c_{2^k n}|.$$

   Keďže $f \in \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$, musí platiť *Riemann-Lebesgueovo lemma* [6]. Potom nutne z vyššie uvedenej rovnosti dostávame, že

$$n \neq 0, \quad |c_n| = 0.$$

   Ak by to neplatilo, dostali by sme z tohto lemma pre danú rovnosť spor. Na druhej strane, ak $n = 0$, potom c_n nemusí byť nutne rovná nule a dostaneme len jeden koeficient $c_0 = c_{2^k 0}$, čo zas nie je v spore s Riemann-Lebesgueovým lemma. Celkovo, Fourierov rad pre $f(x)$ pozostáva len z jendného člena pre $n = 0$, tj. $f(x) = c_0$. Teda f je konštantná a lemma (4.1) uzavrie dôkaz ergodicity T.

3. **Bernoulliho shift**
   Jeho ergodicitu dokážeme nižšie spolu s mixovaním.

4.3 Ergodické vety

Ergodické vety patria k hlavným výsledkom ergodickej teórie. Sú priamym dôsledkom štúdia pôvodnej Boltzmannovej hypotézy. Najprv si uvedieme jedno lemma a vetu, ktoré nám pomôžu pri dokazovaní *Birkhoffovej ergodickej vety.*

Lemma 4.3. *Člen c_u nazveme lídrom konečnej postupnosti $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ ak jeden z radov $c_u, c_u + c_{u+1}, \ldots, c_u + \ldots + c_{n-1}$ má kladný súčet. Potom súčet radu lídrov je nezáporný.*

Dôkaz. Pre $n = 1$ zrejme. Nech to platí pre $0 \leq k < n$.

Indukčný krok $k \to n$. Ak c_0 nie je líder, potom všetci lídri z $c_0, \ldots, c_{n-1}$ sú aj v $c_1, \ldots, c_{n-1}$. Pre týchto $n-1$ prvkov, ale platí indukčný predpoklad. Tým máme jednu časť.
Teraz nech c_0 je líder a k je najmenšie prirodzené číslo také, že $\sum_{i=1}^{k} c_{i=0} > 0$. Z toho sporom dokážeme, že $c_1, \ldots, c_k$ sú lídri. Nech c_i pre nejaké $i \in \{1, \ldots, k\}$ nie je líder. Potom ale z indukčného predpokladu platí $c_i + \ldots + c_k \leq 0$. Aby $c_0 + \ldots + c_k > 0$, musí platiť, že $c_0 + \ldots + c_i$ je kladné. A to je spor, pretože k je najmenšie prirodzené číslo, pre ktorý je c_0 líder. Teda lídri majú kladný súčet a pre ostatné členy platí v prípade existencie ešte nejakých lídrov indukčný predpoklad, pretože ich menej ako n prvkov.

□

Veta 4.4 (Maximálna ergodická veta)**.** *Nech*

$$N = \left\{ \omega : \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(T^k \omega) > 0 \right\}.$$

Ak f je integrovateľná, potom

$$\int_N f dP \geq 0.$$

Dôkaz. Nech f je integrovateľná a položme

$$G = \left\{ \omega : \sup_{n \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i \omega) > 0 \right\}$$

a

$$G_k = \left\{ \omega : \max_{1 \leq u \leq k} \sum_{i=0}^{u-1} f(T^i \omega) > 0 \right\}.$$

Potom $G_k \subset G_{k+1}$, $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k$ a $\lim_{k \to \infty} G_k = G$ a z integrovateľnosti f sú G aj $G_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ merateľné. Potom z *Lebesgueovej vety o dominantnej konvergencii*[5] platí $\int_{G_k} f \, \mathrm{d}P \to \int_G f \, \mathrm{d}P$ pre $k \to \infty$ a z *Cesarovej konvergencie priemerov* [5] dostávame platnosť $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{G_k} f \, \mathrm{d}P \to \int_G f \, \mathrm{d}P$ pre $n \to \infty$. Preto stačí, ak dokážeme, že

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{G_k} f \, \mathrm{d}P \geq 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Pre $n = 1$ platí triviálne $\int_{G_1} f(\omega)\,\mathrm{d}P \geq 0$. Ukážme si teda pre $n = 2$. V tomto prípade dostaneme

$$\int_{G_1} f(\omega)\,\mathrm{d}P + \int_{G_2} f(\omega)\,\mathrm{d}P \geq 0,$$

kde $G_1 = \{f(\omega) > 0\}$ a $G_2 = \{f(\omega) > 0 \text{ alebo } f(\omega) + f(T\omega) > 0\}$. Odtiaľ použitím indikátorov dostaneme

$$\int [f(\omega)\mathbb{I}_{G_1} + f(\omega)\mathbb{I}_{G_2}]\,\mathrm{d}P \geq 0.$$

Daná nerovnosť platí z nezápornosti funkcie na daných množinách a indikátora pre každé ω. Teraz si vezmime pevné $n > 2$ a položme $H_u = T^{-u}G_{n-u}$. Potom

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \int_{G_k} f(\omega)\,\mathrm{d}P &= \sum_{u=0}^{n-1} \int_{G_{n-u}} f(\omega)\,\mathrm{d}P \\
&= \sum_{u=0}^{n-1} \int_{H_u} f(T^u\omega)\mathrm{d}P \\
&= \int \left\{ \sum_{u=0}^{n-1} f(T^u\omega)\mathbb{I}_{H_u} \right\} \mathrm{d}P.
\end{aligned}$$

Prvú rovnosť dostaneme preradením integrálov, v druhej rovnosti použijeme, že T zachováva mieru a substitúciu premenných a tretiu rovnosť dostaneme použitím indikátora množiny H_u a linearity integrálov, keďže ide o konečnú sumu. Ďalej stačí už iba ukázať, že $\sum_{u=0}^{n-1} f(T^u\omega)\mathbb{I}_{H_u}(\omega)$ je nezáporná pre každé ω. Túto sumu si rozpíšeme nasledovným spôsobom. Bod ω leží v G_k práve vtedy, keď jedna zo súm

$$f(\omega), f(\omega) + f(T\omega), \ldots, f(\omega) + \ldots + f(T^k\omega)$$

je kladná. Teda ω leží v G_{n-u} práve vtedy, keď jedna zo súm

$$f(\omega), f(\omega) + f(T\omega), \ldots, f(\omega) + \ldots + f(T^{n-u-1}\omega)$$

je kladná. Potom $\omega \in H_u = T^{-u}G_{n-u}$, teda $T^u\omega \in G_{n-u}$ práve vtedy, keď jedna zo súm

$$f(T^u\omega), f(T^u\omega) + f(T^{u+1}\omega), \ldots, f(T^u\omega) + \ldots + f(T^{n-1}\omega)$$

je kladná a teda dostávame našú želanú sumu. Teraz zafixujme ω a položme $c_u = f(T^u\omega)$. Použitím lemma 4.3. na c_u uzavrieme dôkaz.

□

Ako sme si uviedli v prvej kapitole, fyzika stála u zrodu ergodickej teórie. Pri fyzikálnych experimentoch je nutné opakovať merania a potom pracovať s ich časovými priemermi, tj. priemermi z hodnôt nameraných v jednotlivých časoch. Ak $x \in X$ je východzí stav a $f : X \to \mathbb{R}$ je namerané pozorovanie, potom merania v ďalších časoch sú dané hodnotami $f(x), f(Tx), \ldots, f(T^kx), \ldots$ Potom *časový priemer* prvých n nameraných pozorovaní je

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(T^kx)}{n}.$$

Ďalej *priestorový priemer* pozorovania je jednoducho daný ako

$$\int f \, \mathrm{d}P.$$

U fyzikálnych experimentov je podstatné zistiť priestorový priemer pozorovania vzhľadom k invariantnej miere, ale časové priemery sú vďaka opakovaniu meraní v čase jednoduchšie pre výpočet. A preto sa naskytla v minulosti otázka aproximácie priestorových priemerov časovými a Boltzmann sa pokúsil dať na ňu odpoveď.

Uveďme si preto pre porovnanie s Birkhoffovou ergodickou vetou presné znenie *Boltzmannovej ergodickej hypotézy*: Nech X je množina stavov. Pre skoro každý východzí stav $x \in X$ potom časové priemery ľubovolného pozorovania f konvergujú s časom blížiacim k nekonečnu k priestorovým priemerom .

Veta 4.5 (Birkhoffova ergodická veta)**.** *Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech T je transformácia zachovávajúca mieru na tomto priestore. Ak f je integrovateľná, potom existuje integrovateľná a invariantná funkcia $\hat{f}$ taká, že*

$$\int \hat{f} \, \mathrm{d}P = \int f \, \mathrm{d}P$$

a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = \hat{f}(\omega) \quad s.v.$$

Ak T je ergodická, potom $\hat{f} = \int f \, \mathrm{d}P$ s.v.

Dôkaz. Dôkaz si rozdelíme na niekoľko častí.

1. Najprv si dokážeme, že postupnosť

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) \right\}$$

konverguje s.v. Majme $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a položme

$$Y_{a,b} = \left\{ \omega : \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) < a < b < \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) \right\}.$$

Preznačme $Y = Y_{a,b}$. Y je merateľná, pretože je prienikom dvoch množín, ktorých merateľnosť nám dáva integrovateľnosť f a prienik zachováva merateľnosť. Ukážeme, že Y je naviac invariatná (tj. $Y = T^{-1}Y$).

$$\begin{aligned}
T^{-1}Y &= \left\{ \omega : \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{k+1}\omega) < a < b < \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{k+1}\omega) \right\} \\
&= \left\{ \omega : \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^{k}\omega) < a < b < \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^{k}\omega) \right\} \\
&= \left\{ \omega : \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{k}\omega) < a < b < \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{k}\omega) \right\} \\
&= Y.
\end{aligned}$$

V druhej rovnosti sme preindexovali sumy. V tretej rovnosti sme spravili nasledovnú úpravu (u limsup analogicky)

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(T^k\omega) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} f(T^k\omega) - f(\omega)\right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) + \frac{f(T^n\omega) - f(\omega)}{n} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega).
\end{aligned}$$

Zo σ-konečnosti pravdepodobnostného priestoru a integrovateľnosti f máme integrovatelnosť $f - b$. Jednoduchým prerovnaním dostaneme množinu N z ergodickej maximálnej vety

$$\left\{b < \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j\omega)\right\} = \left\{0 < \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (f(T^j\omega) - b)\right\}$$

Ďalej vidíme, že

$$Y_{a,b} = Y_{a,b} \cap \left\{\omega : b < \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j\omega)\right\}$$

a preto po aplikovaní maximálnej ergodickej vety na $f - b$ dostaneme

$$\int_{Y_{a,b}} (f - b)\mathrm{d}P \geq 0 \iff \int_{Y_{a,b}} f\mathrm{d}P \geq bP(Y_{a,b}).$$

Rovnaký postup zopakujeme pre $-f,\ -a,\ -b$ a vyjde nám podobne

$$\int_{Y_{a,b}} (a - f)\mathrm{d}P \geq 0 \iff aP(Y_{a,b}) \geq \int_{Y_{a,b}} f\mathrm{d}P.$$

Teda celkovo máme $aP(Y_{a,b}) \geq bP(Y_{a,b})$, pričom predpokladáme $a < b$. Teda musí platiť, že $P(Y_{a,b}) = 0$. Zjednotením cez všetky páry $a, b \in \mathbb{Q}$ dostaneme $\hat{Y} = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} Y_{a,b}$ a zo σ-merateľnosti potom $P(\hat{Y}) = 0$. Mimo množiny $\hat{Y}$ sa limes inferior a limes superior postupnosti priemerov rovnajú a teda majú limitu s.v., tj.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j\omega) = \hat{f}(\omega) \quad s.v.$$

Tým máme dokázanú prvú časť.

2. Ukážeme si integrovateľnosť limitnej funkcie $\hat{f}$.

$$\begin{aligned}
\int |\hat{f}|\mathrm{d}P &= \int \left|\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j\omega)\right| \mathrm{d}P \leq \liminf_{n\to\infty} \int \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j\omega)\right| \mathrm{d}P \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int \sum_{j=0}^{n-1} \left|f(T^j\omega)\right| = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \int \left|f(T^j\omega)\right| \mathrm{d}P \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{n}\int |f|\mathrm{d}P = \int |f|\mathrm{d}P \leq \infty.
\end{aligned}$$

V druhej nerovnosti sme použili *Fatouovo lemma* [5]. Tretiu nerovnosť dostávame z trojuholníkovej nerovnosti pre sumy. V štvrtej rovnosti sme použili konečnosť sumy a linearitu integrálu. Piata rovnosť nám vyšla vďaka invariantnosti f na Ω a substitúcii $y_j = T^j\omega \in \Omega$ pre každé $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

3. Invariancia $\hat{f}$: chceme $\hat{f} \circ T = \hat{f}$. Počítajme pre ľubovolné $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(T\omega) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{k+1}\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) + \frac{f(T^n\omega) - f(\omega)}{n} \right) \\
&= \hat{f}(\omega) + 0 = \hat{f}(\omega).
\end{aligned}$$

V druhej rovnosti sme spravili jednoduchú úpravu indexov. V tretej rovnosti sme pridali $f(\omega) - f(\omega)$, aby sme dostali nultý člen pôvodnej sumy a následne sme to celé rozdelili na súčet známej sumy a ostatných členov. Ďalšia suma sa rovná správaniu v limite pre $n \to \infty$. Teda $\hat{f}(T\omega) = \hat{f}(\omega)$.

4. Rovnosť integrálov f a limity $\hat{f}$. Označme $s_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$ a vidíme, že $s_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} \hat{f}(\omega)$ pre každé $\omega \in \Omega$ *s.v.* Opäť využitím invariancie f a substitúcie máme $\int s_n \mathrm{d}P = \int f \mathrm{d}P$. Následne dostávame

$$\int \hat{f} \mathrm{d}P = \int \lim_{n\to\infty} s_n \mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty} \int s_n \mathrm{d}P = \int f \mathrm{d}P.$$

Druhú rovnosť dostaneme použitím *Lebesgueovej vety o dominantnej konvergencii.* Ostatné rovnosti sú zrejmé.

5. Zostáva už len dokázať, že integrál $\hat{f}$ sa rovná integrálu f. Vďaka ergodicite T máme z lemma 4.1 pre invariantnú $\hat{f}$, že je rovná konštante c. Potom

$$\int \hat{f} \, \mathrm{d}P = \int c \, \mathrm{d}P = c \cdot P(\Omega) = c \cdot 1 = c.$$

Z predtým dokázaného $\int \hat{f} \, \mathrm{d}P = \int f \, \mathrm{d}P$ potom máme, že aj $\int f \, \mathrm{d}P = c$. Teda pre každé $\omega \in \Omega$ *s.v.* dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = c = \int f \, \mathrm{d}P.$$

A to sme chceli dokázať.

□

4.4 Mixovanie

Nech T je transformácia zachovávajúca mieru na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Povieme, že T je *mixujúca*, ak pre ľubovoné dve merateľná množiny $A, B \in \mathcal{A}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(T^{-n}(A) \cap B) = P(A)P(B).$$

V literatúre sa táto vlastnosť ešte rozlišuje na silnú a slabú. Tak ako sme si ju zadefinovali my, ide o *silne mixujúcu* vlastnosť. Potom T je *slabo mixujúca*, ak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |P(T^{-i}(A) \cap B) - P(A)P(B)| = 0.$$

Vieme, že T zachováva mieru, a preto $P(T^{-n}A) = P(A)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Nech $P(A) > 0$. Podelme obe strany číslom $P(A)$ a dostaneme

$$\frac{P(T^{-n}(A) \cap B)}{P(A)} \xrightarrow{n\to\infty} P(B) \iff \frac{P(T^{-n}(A) \cap B)}{P(T^{-n}A)} \xrightarrow{n\to\infty} P(B).$$

Vidíme, že ako n rastie do nekonečna, množiny $T^{-n}(A)$ a B sa stávajú nezávislé. Hovoríme, že množiny A a B sú *asymptoticky nezávislé.*

Vlastnosť mixovania opäť nemusíme kontrolovať pre každé dva prvky σ-algebry $\mathcal{A}$. Stačí ak ju skontrolujeme pre každé dva prvky zo systému uzavretého na konečné prieniky.

Lemma 4.6. *Nech $\mathcal{A}_0$ je systém uzavretý na konečné prieniky a generuje σ-algebru $\mathcal{A}$. Ak vlastnosť mixovania platí pre ľubovolné dve $A, B \in \mathcal{A}_0$, potom T je mixujúca.*

Dôkaz. Nech $A, B \in \mathcal{A}$ a $\varepsilon > 0$. Vezmeme $A_0, B_0 \in \mathcal{A}_0$ také, že

$$P(A \triangle A_0) < \varepsilon \quad \text{a} \quad P(B \triangle B_0) < \varepsilon.^1$$

Existencia množín A_0, B_0 plynie z nasledovného. Položme

$$\mathcal{D} = \{C \in \mathcal{A} : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, C_0 \in \mathcal{A}_0 \text{ také, že } P(C \triangle C_0) < \varepsilon\}.$$

Potom $\mathcal{D}$ je Dynkinov systém a platí $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$. Z predpokladu vieme, že $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$ a z Dynkinovho lemmatu, že $\sigma(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{D}$. Teda $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}$ a tým je existencia overená.

Ďalej z invariancie P pri T máme

$$P\left(T^{-n}B \triangle T^{-n}B_0\right) = P\left(T^{-n}(B \triangle B_0)\right) = P(B \triangle B_0) < \varepsilon.$$

Z toho pre

$$\begin{aligned}\left(A \cap T^{-n}B\right) \triangle \left(A_0 \cap T^{-n}B_0\right) &= (A \triangle A_0) \cap \left(T^{-n}B \triangle T^{-n}B_0\right) \\ &\subset (A \triangle A_0) \cup \left(T^{-n}B \triangle T^{-n}B_0\right)\end{aligned}$$

[1] $(K \triangle L) = (K \setminus L) \cup (L \setminus K) = (K \cup L) \cup (L \cap K)$

plynie, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}\left|P(A \cap T^{-n}B) - P(A_0 \cap T^{-n}B_0)\right| &= P\left((A \cap T^{-n}B) \triangle (A_0 \cap T^{-n}B_0)\right) \\ &\leq P\left(A \triangle A_0\right) + P\left(T^{-n}B \triangle T^{-n}B_0\right) \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ukážeme si ešte jednu nerovnosť pre $(A \cap B) \triangle (A_0 \cap B_0)$. Analogicky dostaneme

$$(A \cap B) \triangle (A_0 \cap B_0) \subset (A \triangle A_0) \cup (B \triangle B_0)$$

a z toho ďalej, že

$$\begin{aligned}|P(A \cap B) - P(A_0 \cap B_0)| &= P\left((A \cap B) \triangle (A_0 \cap B_0)\right) \\ &\leq P\left(A \triangle A_0\right) + P\left(B \triangle B_0\right) \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Nakoniec nám celkovo vyjde

$$\begin{aligned}\left|P(A \cap T^{-n}B) - P(A \cap B)\right| &\leq \left|P(A \cap T^{-n}B) - P(A_0 \cap T^{-n}B_0)\right| + \\ &+ \left|P(A_0 \cap T^{-n}B_0) - P(A_0 \cap B_0)\right| + |P(A_0 \cap B_0) - P(A \cap B)| \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon.\end{aligned}$$

Keďže $\varepsilon > 0$ bolo ľubovolné, tak platí $\lim_{n\to\infty} P(A \cap T^{-n}B) = P(A \cap B)$ a dôkaz je hotový.

□

Takže ďalej nám stačí testovať:

1. Intervaly *A, B*. Ak $\Omega = \mathbb{R}$ alebo $\Omega = I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\mathcal{A}$ je Borelovská σ-algebra;
2. Obdĺžniky *A, B*. Ak $\Omega = \mathbb{R}^2$ alebo $\Omega = [0,1)^2$ a $\mathcal{A}$ je Borelovská σ-algebra;
3. Cylindre *A, B*. Ak Ω je $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ alebo $\Sigma_{\mathbb{Z}}^+$ alebo podmnožina $\Omega = \Sigma_{\mathbb{Z}}$ alebo $\Sigma_{\mathbb{Z}}^+$ a $\mathcal{A}$ je σ-algebra generovanť cylindrami.

Mixovanie ja silnejšia vlastnosť ako ergodicita. K tomu nám slúži ďalšie tvrdenie.

Trvdenie 4.7. *Nech T zachováva mieru. Ak T je mixujúca, potom je ergodická.*

Dôkaz. Nech T je mixujúca. Chceme dokázať, že T je ergodická. Vezmime preto $A \in \mathcal{A}$ invariantnú. Z definície mixovania máme pre $B = A$

$$\lim_{n\to\infty} P(T^{-n}A \cap A) = P(A)^2.$$

Z invariancie platí, že $T^{-1}(A) = A$, a preto aj $T^{-n}(A) = A$ pre ľubovolné $n \in \mathbb{N}$ a teda $T^{-n}(A) \cap A = A$. Potom dostávame

$$P(A)^2 = \lim_{n\to\infty} P(T^{-n}A \cap A) = \lim_{n\to\infty} P(A) = P(A).$$

Reálne čísla vyhovujúce vzťahu $P(A)^2 = P(A)$ sú buď *0* alebo *1*. Teda T je ergodická.

□

To nám poslúži pri dokazovaní ergodicity Bernoulliho shiftu.

4.5 Príklady

1. **Dyadická transformácia**
   Nech $T(x) = 2x \bmod 1$ je daná transformácia na pravdepodobnostnom priestore $([0,1), \mathcal{B}, \lambda)$. Vďaka lemma 4.6. stačí dokázať vlastnosť mixovania pre ľubovoľné dva intervaly z $[0,1)$. Vezmime dva dyadické intervaly $I, J \subset [0,1)$ pre nejaké $i, j \in \mathbb{N}$

   $$I = \left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right), \quad J = \left[\frac{l}{2^j}, \frac{l+1}{2^j}\right) \quad 0 \le k < 2^i, \quad 0 \le l < 2^j.$$

   Vidíme, že

   $$T^{-1}I = \left[\frac{k}{2^{i+1}}, \frac{k+1}{2^{i+1}}\right) \cup \left[\frac{k}{2^{i+1}} + \frac{1}{2}, \frac{k+1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2}\right).$$

   Indukciou pre $n \ge 2$ dostaneme zjednotenie 2^n disjunktných intervalov dĺžky $\frac{1}{2^{i+n}}$ vzdialených od seba o $\frac{1}{2^n}$, tj.

   $$T^{-n}I = \bigcup_{m=1}^{2^n} \left[\frac{k}{2^{i+n}} + \frac{m}{2^n}, \frac{k+1}{2^{i+m}} + \frac{m}{2^n}\right).$$

   Pre $n > j$ pozostáva prienik $T^{-n}I \cap J$ z intervalov z $T^{-n}I$ obsiahnutých v J. Počet týchto intervalov dostaneme ako podiel dĺžky J, teda $P(J)$, a vzdialenosti medzi jednotlivými intervalmi v $T^{-n}I$, tj. $1/2^n$. Počet intervalov v $T^{-n}I \cap J$ teda činí

   $$\frac{P(I)}{1/2^n} = \frac{1/2^j}{1/2^n} = 2^{n-j}.$$

   Keďže dĺžka každého intervalu je $\frac{1}{2^{i+n}}$, počítajme

   $$\lim_{n\to\infty} P(T^{-n}I \cap J) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{i+n}} * 2^{n-j} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^i} * \frac{1}{2^j} = P(T^{-n}A)P(B).$$

   Tým dostávame, že T je mixujúca transformácia.

2. **Iracionálne rotácie**
   Nech $T_\alpha(x) = x + \alpha \bmod 1$ je rotácia, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ a $A = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ interval. Položme množinu indexov $L = \left\{i \in \mathbb{N}_0 : \left|T^i\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{6}\right\}$. Potom pre každé $n \in L$ platí, že $P(A \cap T^{-n}A) > \frac{1}{3}$ a vieme, že $P(A) = \frac{1}{4}$. Teda počítajme

   $$\left|P(A \cap T^{-n}A) - P(A)P(A)\right| > \frac{1}{12}.$$

   Následne z definície limity a vlastnosti mixovania dostávame, že T_α nie je mixujúca transformácia.

3. **Bernoulliho shift**
   Dokážeme, že $\sigma^+\left((x_i)_{i=0}^\infty\right) = (x_{i+1})_{i=0}^\infty$ je mixujúca transformácia. Potom z

tvrdenia 4.7 dostaneme aj jej erogdickosť. Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Položme $\Omega = \Sigma_{\mathbb{N}}^{+}$ so σ-algebrou $\mathcal{A}$ a $P = \mu_{\underline{p}}$. Podľa lemma 3.6 stačí dokázať, že $\lim_{n\to\infty} \mu_{\underline{p}}((\sigma^+)^{-n}A \cap B) = \mu_{\underline{p}}(A)\mu_{\underline{p}}(B)$ pre dva ľubovolné merateľné cylindre A, B a dostaneme, že σ^+ je mixujúca na celej σ-algebre. Nech

$$A = C_k(a_0, \dots, a_k) \quad \text{a} \quad B = C_l(b_0, \dots, b_l).$$

Pre $n \geq l+1$, $n, l \in \mathbb{N}$ máme

$$\underline{x} \in (\sigma^+)^{-n}(A) \iff \sigma^+(\underline{x})_{n+i} = a_i \quad \text{pre} \quad 0 \leq i \leq k.$$

Potom každé $\underline{x} \in (\sigma^+)^{-n}(A) \cap B$ je tvaru

$$\underline{x} = b_0, \dots, b_l, x_{l+1}, \dots, x_{n-1}, a_0, \dots, a_k.$$

x_i nadobúda hodnoty z $\{1, \dots, N\}$ pre každé $l+1 \leq i \leq n-1$. Prienik $(\sigma^+)^{-n}(A) \cap B = (\sigma^+)^{-n}\big(C_k(a_0, \dots, a_k)\big) \cap C_l(b_0, \dots, b_l)$ môžeme teda napísať ako zjednotenie cylindrov dĺžky $n+k$ pre $n \geq l+1$

$$(\sigma^+)^{-n}(A) \cap B = \bigcup_{1 \leq x_{l+1}, \dots, x_{n-1} \leq N} C_{n+k}(b_0, \dots, b_l, x_{l+1}, \dots, x_{n-1}, a_0, \dots, a_k).$$

Aplikujme Bernoulliho mieru a z nezávislosti dostaneme

$$\begin{aligned}
\mu_{\underline{p}}\big((\sigma^+)^{-n}(A) \cap B\big) &= \sum_{1 \leq x_{l+1}, \dots, x_{n-1} \leq N} \mu_{\underline{p}}\big(C_{n+k}(b_0, \dots, b_l, \dots, a_0, \dots, a_k)\big) \\
&= \sum_{1 \leq x_{l+1}, \dots, x_{n-1} \leq N} p_{b_0} \cdots p_{b_l} p_{x_{l+1}} \cdots p_{x_{n-1}} \cdots p_{a_0} \cdots p_{a_k} \\
&= p_{b_0} \cdots p_{b_l} p_{a_0} \cdots p_{a_k} \sum_{x_{l+1}=1}^{N} p_{x_{l+1}} \cdots \sum_{x_{n-1}=1}^{N} p_{x_{n-1}} \\
&= (p_{b_0} \cdots p_{b_l})(p_{a_0} \cdots p_{a_k}) = \mu_{\underline{p}}(A)\mu_{\underline{p}}(B).
\end{aligned}$$

Pre x_i, $l+1 \leq i \leq n-1$ sme využili definíciu pravdepodobnostného vektora $\underline{p}$, kde $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$. Celkovo $\mu_{\underline{p}}\big((\sigma^+)^{-n}(A) \cap B\big) = \mu_{\underline{p}}(A)\mu_{\underline{p}}(B)$ a σ^+ je teda mixujúca transformácia. Tvrdenie 4.7. nám potom dá ergodicitu T.

5 Spojitosť so zákonom veľkých čísiel

Uvedieme si zákony veľkých čísiel, ako ich uvádza Bauer v [4] a následne ich dokážeme pomocou Birkhoffovej ergodickej vety.

Povieme, že postupnosť $\{X\}_{n\in\mathbb{N}}$ integrovateľných, reálnych, náhodných veličín *spĺňa silný zákon veľkých čísiel*, ak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - E_k) = 0 \quad \text{sj.}$$

5.1 Kolmogorovov (silný) ZVČ

Veta 5.1. *Každá postupnosť $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nezávislých a rovnako rozdelených (iid), integrovateľných, reálnych, náhodných veličín spĺňa zákon veľkých čísiel.*

Dôkaz. Keďže všetky náhodné veličiny majú rovnaké rozdelenie $\mu := P_{X_n}$, potom číslo $E(X_n) = \int x \mathrm{d}\mu = E(X_1)$ nezávisí od $n \in \mathbb{N}$. Musíme teda dokázať rovnosť

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = E(X_1) \quad \text{sj.}$$

1. iid postupnosť náhodných veličín $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je striktne stacionárna. Pre ľubovoľne pevne zvolené $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{N}_0$ máme

$$P\left(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(X_{t_i} \leq x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} F\left(x_i\right)$$

   a pre $k \in \mathbb{N}$ a $t_{i+k} \in \mathbb{N}_0$

$$P\left(X_{t_{1+k}} \leq x_1, \ldots, X_{t_{n+k}} \leq x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(X_{t_{i+k}} \leq x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} F\left(x_i\right).$$

   U oboch vyjadrení sme v prvej rovnosti použili nezávislosť náhodných veličín a v druhej rovnosti ich rovnaké rozdelenie s distribučnou funkciou F.

2. Teraz si ukážeme, že striktne stacionárna náhodná postupnosť generuje transformáciu zachovávajúcu mieru, ktorá je ergodická. Vezmime pravdepodobnostný priestor $\left(\bigtimes_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}, \mathcal{B}, P\right)$, kde P je Bernoulliho miera. Nech $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je projekcia na prvú zložku, tj. $f\left((x_i)_{i=1}^{\infty}\right) = x_1$ a $T : \Omega \to \Omega$ je Bernoulliho shift, tj. $T\left((x_i)_{i=1}^{\infty}\right) = (x_i)_{i=2}^{\infty}$. Ďalej $X_n := f \circ T^{n-1}$. Nech pre ľubovoľné, pevne zvolené $n \in \mathbb{N}$ a ľubovoľné $\omega \in \Omega$ je

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (X_1, \ldots, X_n) \in \bigtimes_{i=1}^{n} B_i \right\} \\ &= \left\{ \left(f(\omega), \ldots, f(T^{n-1}\omega)\right) \in \bigtimes_{i=1}^{n} B_i \right\}, \end{aligned}$$

kde $\bigtimes_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{B}$ je konečne rozmerný obdĺžnik a

$$\begin{aligned} f^{-1}A &= \left\{\omega : f\left(T^{i-1}\omega\right) \in B_i,\ 1 \le i \le n\right\} \\ &= \left\{\omega : T^{i-1}\omega \in f^{-1}\left(B_i\right),\ 1 \le i \le n\right\}. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} P\left(T^{-1}(f^{-1}A)\right) &= P\left(\left\{\omega : T^{i}\omega \in f^{-1}\left(B_i\right),\ 1 \le i \le n\right\}\right) \\ &= P\left(\left\{\omega : f(T^{i}\omega) \in B_i,\ 1 \le i \le n\right\}\right) \\ &= P\left(\left\{\omega : X_{i+1}(\omega) \in B_i,\ 1 \le i \le n\right\}\right) \\ &= P\left(\left\{\omega : X_{i}(\omega) \in B_i,\ 1 \le i \le n\right\}\right) \\ &= P\left(f^{-1}A\right), \end{aligned}$$

pričom v predposlednej rovnosti sme použili striktnú stacionaritu a tým sme teda dostali, že striktne stacionárna postupnosť náhodných veličín generuje trasformáciu zachovávajúcu mieru. Navyše už vieme z predchádzajúcej kapitoly, že Bernoulliho shift je aj erogdická transformácia.

3. Sú teda splnené všetky predpoklady Birkhoffovej ergodickej vety, a preto existuje invariatná, integrovateľná funkcia $\hat{f}$ taká , že

$$\int \hat{f}\ \mathrm{d}P = \int f\ \mathrm{d}P = \int x\ \mathrm{d}\mu = E(X_1)$$

a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = \int \hat{f}\ \mathrm{d}P = E(X_1) \quad \text{sj.}$$

To sme chceli a teda máme Kolmogorovov ZVČ dokázaný.

□

Záver

Táto práca si vzala za úlohu spracovať základné poznatky z ergodickej teórie. Postupne sme si nadefinovali základné zobrazenia, s ktorými teória pracuje - transformácie zachovávajúce mieru. Uviedli sme si ich základné príklady: dyadické a rotačné transformácie a Bernoulliho shift. Uviedli sme si taktiež vlastnosť rekurencie a s ňou súvisiacu prvú ergodickú vetu - Poincarrého vetu o rekurencii. Ďalej sme si dokázali základnú vetu ergodickej teórie - Birkhoffovu ergodickú vetu a zadefinovali vlastnosti ergodicity a mixovania. Na vyššie spomenutých príkladoch sme tieto vlastnosti testovali. Ako posledné sme si ukázali spojitosť medzi Birkhoffovou ergodickou vetou a Kolmogorovovým silným zákonom veľkých čísiel.

Literatúra

[1] Billingsley, Patrick *Ergodic Theory and Information.* John Wiley and Sons, 1965.

[2] Halmos, P.R. *Lectures on Ergodic Theory.* Tokyo: Mathematical Society of Japan, c1956,

[3] Silva, C.E. *Invitation to Ergodic Theory.* Volume 42., Student Mathematical Library, 2008, ISBN 978-0-8218-4420-5.

[4] Bauer, *Probability Theory.* Berlin: de Gruyter, 1996, (De Gruyter studies in mathematics, 23) ISBN 3-11-013935-9.

[5] Bauer, *Measure and Integration Theory.* Transl. from the German by Robert B. Bruckel. de Gruyter, 2001, (De Gruyter studies in mathematics, 26) ISBN 3-11-016719-0.

[6] Rudin, W. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Co., 1987, ISBN 0-07-100276-6.