

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Lucie Mohelníková

## Generování grafů

Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Dvořák, Ph.D.

Studijní program: Informatika

Studijní obor: obecná informatika

Praha 2012



Na tomto místě bych ráda poděkovala Mgr. Zdeňku Dvořákovi, Ph.D. za odborné vedení mé práce, za věnovaný čas a předané cenné zkušenosti. Dále bych chtěla poděkovat svým nejbližším za podporu při studiu a psaní této práce.



Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 21.5.2012



Název práce: Generování grafů

Autor: Lucie Mohelníková

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Dvořák, Ph.D., Informatický ústav Univerzity Karlovy

Abstrakt: Zabýváme se generováním grafů z vybraných tříd, zejména pak grafů nakreslených na plochách. Zaměřujeme se na metodu generování za pomoci dekontrakcí vrcholů, pro níž je zásadní identifikace počátečních (ireducibilních) grafů. Uvádíme přehled výsledků o ireducibilních triangulacích a kvadrangulacích různých ploch, zejména pak nízkého rodu (rovina, projektivní rovina, Kleinova láhev). Hlavním přínosem této práce je identifikace 21 ireducibilních triangulací toru, čímž dokazujeme výsledek Lawrencenka bez použití výpočetní techniky.

Klíčová slova: ireducibilní, triangulace, torus

Title: Generating graphs

Author: Lucie Mohelníková

Department: Department of Applied Mathematics

Supervisor: Mgr. Zdeněk Dvořák, Ph.D., Computer Science Institute of Charles University

Abstract: The main topic of this thesis are the methods used to generate graphs from prescribed classes, especially graphs embeddable in surfaces. An important technique in this context is to generate the graphs by vertex decontractions. The identification of initial (irreducible) graphs is crucial for this technique. We give an overview of the results regarding the irreducible triangulations and quadrangulations of various surfaces, especially the surfaces of low genus (sphere, projective plane, Klein bottle). The main result of this work is the identification 21 irreducible triangulations which proves the result of Lawrencenko without using of information technology.

Keywords: irreducible, triangulations, torus





# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Definice pojmů a značení</b>	<b>5</b>
2.1	Plochy . . . . .	5
2.2	Kontrahovatelnost hran . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Ireducibilní grafy</b>	<b>7</b>
3.1	Triangulace ploch . . . . .	7
3.2	Kvadrangulace ploch . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Ireducibilní triangulace toru</b>	<b>11</b>
4.1	Grafy obsahující vrchol stupně 4 . . . . .	11
4.2	Grafy minimálního stupně 5 . . . . .	19
4.3	Grafy se všemi vrcholy stupně 6 . . . . .	25
4.4	Izomorfismy . . . . .	28
4.5	Závěr . . . . .	30
	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>31</b>



# 1. Úvod

Generování grafů je velmi zajímavá partie informatiky a diskrétní matematiky. V praxi se využívá například při testování algoritmů nebo pro generování objektů s daným pravděpodobnostním rozložením pro potřeby pravděpodobnostních algoritmů. Další užití lze nalézt v teoretické oblasti, například při dokazování matematickou indukcí, kdy vycházíme z toho, že zkoumaná vlastnost se použitím operací (např. dekontrakcí) zachová, či při testování hypotéz na malých grafech.

Je známo mnoho metod pro generování grafů v závislosti na třídě grafů, jejich požadované velikosti a pravděpodobnostním rozdělení. Tyto metody můžeme rozdělit na globální, kde graf sestavujeme vhodným skládáním jeho částí, a lokální, kdy graf postupně vytváříme změnami omezené velikosti. Příkladem globální metody je generování regulárních grafů skládáním náhodně zvolených párování ([1], [2], [3] a [4]).

Nás budou více zajímat lokální metody, kdy graf generujeme z nějaké množiny základních (ireducibilních) grafů pomocí jedné či několika lokálních operací. Konkrétně se budeme zabývat případem grafů nakreslených na plochách. Například všechny rovinné 3-souvislé triangulace lze vygenerovat z  $K_4$  dekontrakcemi hran, jak plyne z Tutteho věty [5] o kontrahovatelných hranách v 3-souvislých grafech.

Kotzig [6] ukázal, že vnitřkově 4-souvislé triangulace obdobně jdou vygenerovat z osmistěny. Manca [9] a Lehel [10] se zabývali generováním všech rovinných 4-regulárních grafů. Dokázali, že všechny 4-regulární rovinné grafy lze vygenerovat z osmistěny použitím právě čtyř operací. Broersma, Duijvestijn a Göbel v [12] dokázali, že lze vygenerovat všechny rovinné 3-souvislé 4-regulární grafy z osmistěny s pomocí tří operací. Barnette v článku [11] dokazuje, že je možné vygenerovat všechny grafy ze speciálních podtříd 4 a 5-souvislých grafů z jednoho počátečního grafu aplikováním 2 (resp. 3) operací. Aktuálně nejrychlejší generátor neizomorfních grafů mnoha různých tříd rovinných grafů *plantri* od Brinkmanna a McKaye [8] také používá tyto metody.

V této práci se budeme zabývat zobecněními těchto výsledků na plochy různého rodu. Zásadní částí těchto zobecnění bývá nalezení seznamu ireducibilních grafů, či alespoň omezení jejich počtu či jejich velikostí. Po zavedení základních pojmů a značení v kapitole 2 uvedeme přehled známých výsledků o ireducibilních triangulacích a kvadrangulacích ploch, zejména pak nízkého rodu (rovina, projektivní rovina, Kleinova láhev, torus).

Lawrencenko [7] navrhl algoritmus pro nalezení ireducibilních triangulací toru a jeho implementací našel seznam 21 těchto triangulací.

V kapitole 4 dokážeme tento výsledek bez použití výpočetní techniky.



## 2. Definice pojmů a značení

Zavedeme si definice podobně jako v knize B. Bollobáse [13].

### 2.1 Plochy

Plocha  $\Sigma$  je kompaktní 2-dimenzionální varieta bez hranice. Plochy se dělí na dva typy: orientovatelné a neorientovatelné. Orientovatelná plocha vzniká tak, že ke sféře ( $S_0$ ) přilepíme  $p$  uší. Tyto plochy značíme  $S_p$ . Naopak neorientovatelné plochy lze vytvořit přilepením  $q$  křížitek na sféru, značíme je  $N_q$ . Eulerův rod plochy nabývá hodnot  $2p$  pro orientovatelné plochy a  $q$  pro neorientovatelné plochy. Eulerův rod plochy  $\Sigma$  značíme  $g(\Sigma)$ .

Plocha  $S_1$  je torus,  $N_1$  je projektivní rovina a  $N_2$  je Kleinova láhev. Na obrázku 2.1 je nakreslen torus, projektivní rovina a Kleinova láhev v mnohoúhelníkové reprezentaci. Příslušná plocha vznikne tak, že ztotožníme hrany se stejným písmenem ve směru šipky, která se nachází na této hraně.

Graf je nakreslitelný na plochu, pokud existuje nakreslení na tuto plochu takové, že se žádné dvě hrany nekříží.

Eulerův rod grafu definujeme jako minimum z Eulerových rodů ploch, na které je daný graf nakreslitelný.

Budeme také používat Eulerovu formuli ve tvaru  $|E(G)| \leq |V(G)| + |F(G)| - 2 + g$ . Rovnost nastává, pokud každá stěna grafu je homeomorfní otevřenému disku.

Cyklus  $C$  v grafu nakresleném na ploše  $\Sigma$  je *kontrahovatelný*, když existuje disk  $\Delta \subset \Sigma$  s hranicí  $C$ . Není-li cyklus kontrahovatelný, pak říkáme, že je *nekontrahovatelný*.

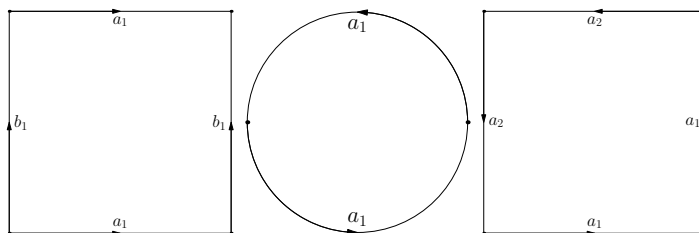
*Triangulací* uzavřené plochy budeme rozumět takový graf, jehož všechny stěny jsou trojúhelníky.

*Kvadrangulace* uzavřené plochy je takový graf, jehož stěny jsou čtyřúhelníky.

### 2.2 Kontrahovatelnost hran

Pokud nebude uvedeno jinak, předpokládáme, že graf neobsahuje smyčky a násobné hrany.

*Kontrakci* hrany  $e$  (Obrázek 2.2) v grafu  $G$  provedeme tak, že tuto hranu odejmeme, vrcholy, které spojovala ztotožníme a vícenásobné hrany (které mají

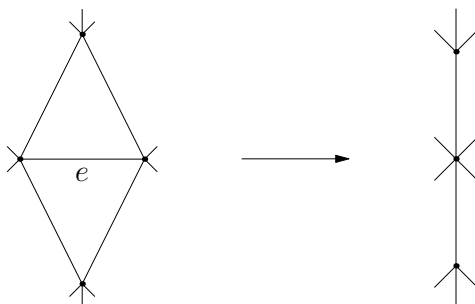


Obrázek 2.1: Torus  $S_1$ , projektivní rovina  $N_1$  a Kleinova láhev  $N_2$ .

totožné koncové vrcholy) nahradíme hranami jednoduchými. Hrana  $e$  je v triangulaci *kontrahovatelná*, pokud leží na právě dvou cyklech délky 3. Tyto dva cykly jsou stěny, proto odstraněním násobných hran při kontrakci nevzniknou stěny velikosti větší než 3 a výsledný graf je triangulace. Leží-li hrana  $e$  na třech a více cyklech délky tři, pak je *nekontrahovatelná*.

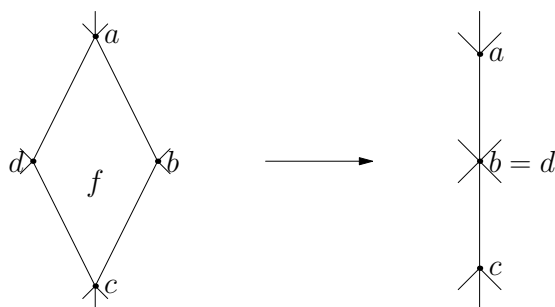
Triangulaci nazveme *ireducibilní*, pokud nemá žádnou kontrahovatelnou hranu.

Každou triangulaci lze vygenerovat z ireducibilních triangulací dekontrakcemi hran. Tento poznatek se využívá při generování triangulací v praxi, které se využívají např. při testování algoritmů. Při důkazech matematickou indukcí se využívá poznatku, že platí-li tvrzení pro ireducibilní triangulace dané plochy a je-li toto tvrzení zachovááno dekontrakcemi, pak platí pro libovolnou triangulaci dané plochy.



Obrázek 2.2: Kontrakce hrany  $e$ .

Nechť  $f$  je stěna v grafu  $G$  s hraničním cyklem  $abcd$ . *Stěnová kontrakce*  $f_{b,d}$  je znázorněna na obrázku 2.3. Nicméně, pokud  $b$  a  $d$  jsou sousední vrcholy nebo mají společného souseda  $s \neq a, c$ , pak stěnová kontrakce  $f_{b,d}$  vytvoří smyčky nebo násobné hrany. Pokud stěnová kontrakce poruší jednoduchost grafu  $G$ , pak tuto úpravu neaplikujeme. Pokud můžeme aplikovat stěnovou kontrakci  $f_{b,d}$ , pak řekneme, že  $f$  je *kontrahovatelná* v  $\{b, d\}$ . Existují až dva způsoby, jak lze danou stěnu kontrahovat, protože stěna má dvě dvojice protilehlých vrcholů. Kvadrangulace je *ireducibilní*, pokud nemá žádnou kontrahovatelnou stěnu.



Obrázek 2.3: Kontrakce stěny  $f$ .

# 3. Ireducibilní grafy

## 3.1 Triangulace ploch

Než začneme hovořit o jednotlivých plochách, je dobré si uvědomit vlastnosti, které mají všechny společné.

Richmond, Gao a Thomassen[17] dokázali následující větu, z které plyne existence konečně mnoha ireducibilních triangulací dané plochy.

**Věta 1.** *Nechť graf  $G$  má  $n$  vrcholů a každá hrana leží na alespoň třech trojúhelnících. Pak  $g(G) > n^{\frac{1}{4}}/12 - 3/2$ .*

**Důsledek 1.** *Existuje konečně mnoho ireducibilních triangulací každé plochy.*

*Důkaz.* Existuje právě jedna ireducibilní triangulace sféry  $S_0$  [21]. Touto triangulací je  $K_4$  (úplný graf na 4 vrcholech). Pro jiné plochy, nechť  $T$  je ireducibilní triangulace plochy  $\Sigma$ , pak platí  $g(T) \leq g(\Sigma)$  a zároveň každá hrana  $T$  leží na alespoň třech trojcyklech. Použijeme-li Větu č.1, dostáváme  $g(\Sigma) > |V(T)|^{\frac{1}{4}}/12 - 3/2$ .

Tudíž každá triangulace plochy  $\Sigma$  má  $O(g^4(\Sigma))$  vrcholů, a proto jich existuje pouze konečně mnoho.  $\square$

Nakamoto a Ota [16] zlepšili tento odhad na lineární.

**Věta 2** (Nakamoto a Ota [16]). *Nechť  $G$  je ireducibilní triangulace uzavřené plochy rodu  $g \geq 1$ . Pak  $|V(G)| \leq 171g - 72$ .*

Joret a Wood v roce 2010 vydali článek [18], ve kterém zmenšili konstanty v odhadu na maximální počet vrcholů ireducibilní triangulace:

**Věta 3** (Joret a Wood [18]). *Každá ireducibilní triangulace plochy rodu  $g \geq 1$  má nejvýše  $25g - 12$  vrcholů.*

Dále se postupně podíváme na ireducibilní triangulace ploch malého rodu.

### 3.1.1 Rovina

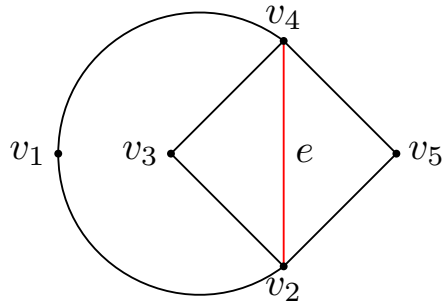
E. Steinitz [21] dokázal, že existuje jediná ireducibilní triangulace roviny. Touto triangulací je  $K_4$ . Pro úplnost si tuto větu (věta 5) dokažme. Vyjdeme přitom z následujících známých tvrzení.

**Pozorování 1.** *Každá triangulace roviny bez násobných hran je vrcholově 3-souvislá.*

**Věta 4** (Tutte [5]). *Nechť  $G$  je 3-souvislý graf různý od  $K_4$ . Pak v tomto grafu existuje hrana  $e$ , po jejíž kontrakci zůstane graf 3-souvislý.*

**Věta 5.** *Existuje právě jedna ireducibilní triangulace roviny a tou je  $K_4$ .*

*Důkaz.* Stačí ukázat, že když je  $G$  rovinná triangulace různá od  $K_4$ , pak  $G$  obsahuje hranu  $e$  ležící pouze ve dvou trojúhelnících. Podle věty 4 zvolme  $e$  tak, aby po její kontrakci zůstal  $G$  3-souvislý. Pro spor předpokládejme, že  $e$  náleží třem trojúhelníkům, ilustrováno na obrázku 3.1. Nechť  $w$  je nový vrchol vzniklý kontrakcí hrany  $e$ , pak  $\{v_1, w\}$  je řez oddělující  $v_3$  a  $v_5$  v grafu  $G/e$ . To je spor, jelikož  $G/e$  je 3-souvislý.  $\square$

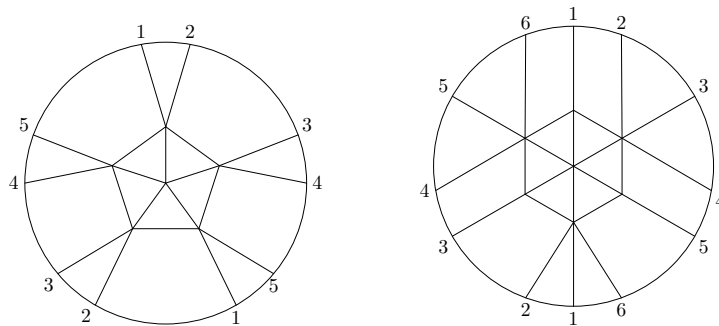


Obrázek 3.1: Kontrakce hrany  $e$ .

### 3.1.2 Projektivní rovina

Barnette [22] dokázal, že existují právě dvě ireducibilní triangulace projektivní roviny.

**Věta 6.** *Existují právě dvě ireducibilní triangulace projektivní roviny. Jednou z nich je  $K_6$  (úplný graf na 6 vrcholech) a druhou triangulace se 7 vrcholy (obrázek 3.2).*



Obrázek 3.2: Ireducibilní triangulace projektivní roviny.

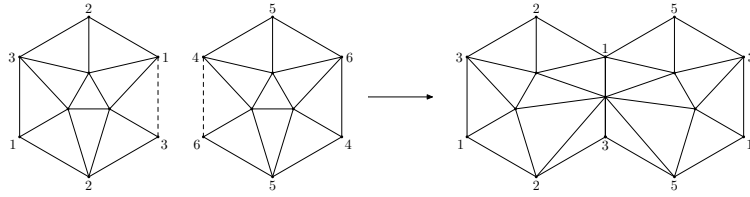
### 3.1.3 Kleinova láhev

Lawrencenko a Negami [23] charakterizovali ireducibilní triangulace Kleinovy láhve. Ukázali, že tyto triangulace lze rozdělit na dva typy: křížtkový (crosscap) a uchový (handle).

Triangulace Kleinovy láhve je *křížtkového typu*, obsahuje-li nekontrahovatelný separující trojúhelník. Ireducibilní triangulace křížtkového typu vzniknou tak, že si vezmeme dvě ireducibilní triangulace projektivní roviny, z každé z nich odebereme jednu trojúhelníkovou stěnu, spojíme je dohromady podél hranic odebíraných stěn a ztotožníme příslušné dvojice protilehlých hran na hranici. Celý proces je ilustrován na obrázku 3.3, kde spojujeme dvě  $K_6$ , které jsou nakreslitelné na projektivní rovinu.

Triangulace Kleinovy láhve je *uchového typu*, pokud obsahuje dvoustranný neseperující trojúhelník. Lawrencenko a Negami ukázali, že existuje právě 21 ireducibilních triangulací Kleinovy láhve uchového typu až na homeomorfismus. Sulanke [24] ale objevil, že ireducibilních triangulací uchového typu není 21, jak tvrdili Lawrencenko s Negamim, ale dokonce 25.





Obrázek 3.3: Tvorba grafu vnořitelného do Kleinovy láhve ze dvou  $K_6$ .

**Věta 7** (Lawrencenko, Negami [23], Sulanke). *Existuje právě 29 ireducibilních triangulací triangulací Kleinovy láhve až na homeomorfismus.*

### 3.1.4 Torus

V roce 1984 S. Lawrencenko ve své diplomové práci [7] popsal algoritmus, kterým lze vygenerovat všechny ireducibilní triangulace toru a uvádí seznam 21 ireducibilních triangulací, které získal jeho použitím.

**Věta 8** (Lawrencenko [7]). *Existuje právě 21 ireducibilních triangulací toru až na homeomorfismus.*

V kapitole 4 toto tvrzení dokážeme bez použití výpočetní techniky.

## 3.2 Kvadrangulace ploch

Opět je známo, že existuje konečně mnoho ireducibilních kvadrangulací. Nakamoto a Ota dokázali v článku [16], že i ireducibilní kvadrangulace mají omezený počet vrcholů.

**Věta 9** (Nakamoto a Ota [16]). *Nechť  $G$  je ireducibilní kvadrangulace uzavřené plochy rodu  $g > 1$ . Pak  $|V(G)| \leq 186g - 64$ .*

### 3.2.1 Rovina

Jedinou ireducibilní kvadrangulací roviny je cyklus délky 4.

### 3.2.2 Projektivní rovina

V článku [25] Nakamoto dokazuje, že existují právě dvě ireducibilní kvadrangulace projektivní roviny:  $K_{3,4}$  a  $K_4$ .

### 3.2.3 Kleinova láhev

Nakamoto [26] dokázal, že existuje právě 10 ireducibilních kvadrangulací Kleinovy láhve až na homeomorfismus.

### 3.2.4 Torus

Nakamoto [27] se zabýval i ireducibilními kvadrangulacemi toru a dokázal, že jich existuje právě 8 až na homeomorfismus.



## 4. Ireducibilní triangulace toru

Cílem této kapitoly je nalézt všechny ireducibilní triangulace toru. Začneme několika lemmaty.

**Lemma 1.** *Jestliže  $G$  je ireducibilní triangulace toru  $\Sigma$ , pak  $G$  neobsahuje separující trojúhelník.*

*Důkaz.* Představme si, že v grafu  $G$  existuje separující trojúhelník  $T$ . Nechť  $\Delta \subset \Sigma$  je disk s hranicí  $T$ . Uvědomme si, že  $\Delta$  je jednoznačně určen. Disk  $\Delta$  budeme označovat jako *vnitřek* trojúhelníku  $T$ . Vyberme si separující trojúhelník  $T$  v  $G$  s nejmenším možným vnitřkem.

Jelikož  $T$  je separující, ve vnitřku  $T$  leží hrana  $e \notin E(T)$ . Jelikož  $G$  je ireducibilní triangulace, hrana  $e$  musí ležet v separujícím nebo nekontrahovatelném trojúhelníku. Nicméně každý trojúhelník obsahující  $e$  musí být ve vnitřku  $T$ , tedy je kontrahovatelný a díky minimalitě  $T$  není separující. To je spor. □

**Důsledek 2.** *Graf  $G$  je ireducibilní triangulace toru  $\Leftrightarrow$  každá hrana  $G$  leží na nekontrahovatelném trojúhelníku.*

**Důsledek 3.** *Minimální stupeň vrcholu v ireducibilní triangulaci toru je 4.*

Následující tvrzení plyne z Eulerovy formule.

**Pozorování 2.** *Průměrný stupeň vrcholů triangulace toru je 6.*

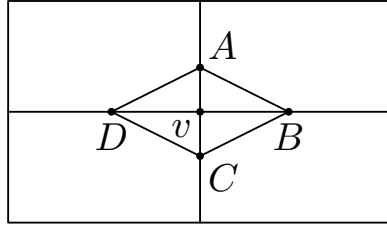
**Důsledek 4.** *Nechť  $G$  je ireducibilní triangulace. Potom  $G$  obsahuje alespoň jeden vrchol stupně 4 nebo 5 nebo všechny jeho vrcholy jsou stupně 6.*

Při hledání množiny ireducibilních triangulací se zaměříme postupně na grafy obsahující vrchol stupně 4 a 5. Nakonec se podíváme, zda může existovat triangulace se všemi vrcholy stupně 6.

### 4.1 Grafy obsahující vrchol stupně 4

Uvažujme ireducibilní triangulaci toru  $G$  obsahující vrchol  $v$  stupně 4. Nechť  $v$  je vrchol stupně 4. Hrany vycházející z tohoto vrcholu, musí ležet na nekontrahovatelných trojúhelnících. Vrcholy spojené s  $v$  hranou nazveme po řadě  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$ . Stěny incidentní s vrcholem  $v$  jsou tedy  $ABv$ ,  $BCv$ ,  $CDv$  a  $DAv$ . Nekontrahovatelný trojúhelník obsahující hranu  $Av$  je nutně  $AvC$  a obdobně hrana  $Bv$  leží na nekontrahovatelném trojúhelníku  $BvD$ . Dostáváme tedy nakreslení  $K_5$  na torus jako na obrázku 4.1.

Toto nakreslení má jedinou netrojúhelníkovou stěnu  $f = ABDACDBC$  délky 8. Zbývá tedy určit část  $G$  nakreslenou uvnitř této stěny. Každý z vrcholů se na stěně  $f$  vyskytuje dvakrát, tyto výskyty budeme odlišovat indexy 1 a 2. Je-li uvnitř stěny  $f$  nakreslena hrana  $e$ , která není incidentní s žádným z vrcholů  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , pak nekontrahovatelný trojúhelník procházející  $e$  musí obsahovat oba výskyty nějakého vrcholu  $X \in \{A, B, C, D\}$ . V této situaci budeme říkat, že  $e$  je *vnitřní* hrana a  $X$  se o ni *stará*.



Obrázek 4.1:  $K_5$ .

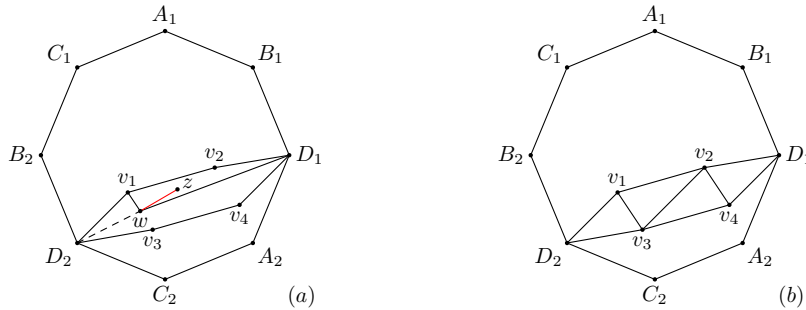
### 4.1.1 Šestiúhelník

Uvažujme nyní případ, že  $G$  obsahuje dvě disjunktní vnitřní hrany, o které se stará stejný vnitřní vrchol.

**Lemma 2.** *Nechť  $G$  obsahuje dvě disjunktní hrany  $v_1v_2$  a  $v_3v_4$ , o které se stará stejný vrchol, bez újmy na obecnosti  $D$ . Pak uvnitř šestiúhelníku  $D_1v_4v_3D_2v_1v_2$  nemůže existovat žádný vrchol.*

*Důkaz.* Představme si, že uvnitř šestiúhelníku  $D_1v_4v_3D_2v_1v_2$  existuje vrchol  $w$  (obrázek 4.2(a)). Bez újmy na obecnosti je  $w$  soused  $v_1$ . Hrana  $v_1w$  leží na nekotrakovatelném trojúhelníku  $D_2v_1wD_1$ . Protože  $G$  nemá násobné hrany,  $w$  není spojen s  $D_2$  a  $v_1$  nesousedí s  $D_1$ . Proto  $w$  má souseda  $z$  uvnitř 4-cyklu  $v_1wD_1v_2$  ( $z$  může být rovno  $v_2$ ). Pak ale hrana  $wz$  neleží na nekotrakovatelném trojúhelníku, což je spor.

□



Obrázek 4.2: Vrchol  $w$  uvnitř šestiúhelníku  $D_1v_4v_3D_2v_1v_2$  a možné vytriangulování šestiúhelníku  $D_1v_4v_3D_2v_1v_2$ .

Uvažujme nyní šestiúhelník  $D_1v_4v_3D_2v_1v_2$ , kde  $v_1v_2$  a  $v_3v_4$  jsou vnitřní hrany.

Protože uvnitř toho šestiúhelníku neexistuje žádný vrchol, musí být vytriangulován pouze přidáváním hran.

Nemohou existovat hrany  $D_2v_2$ ,  $D_2v_4$  (resp.  $D_1v_1$ ,  $D_1v_3$ ), neboť bychom dostali násobné hrany. Z toho vyplývá, že musí existovat hrany  $v_1v_3$  a  $v_2v_4$ . Poslední hrana bude buď  $v_1v_4$  nebo  $v_2v_3$ . Budeme uvažovat, že graf obsahuje hranu  $v_2v_3$  (na obrázku 4.2(b)), druhý případ je izomorfní.

Využijeme-li podobný argument jako v lemmatu 2, pak získáme, že uvnitř šestiúhelníku  $D_1A_2C_2D_2v_3v_4$  neexistuje žádný další vrchol. Vrcholy  $v_3$ ,  $D_1$  a  $v_4$ ,  $D_2$  nemohou být spojeny hranou, tudíž musí existovat hrana  $v_3C_2$  a  $v_4A_2$ . Vytriangulování čtyřúhelníku  $C_2A_2v_4v_3$  zatím odložíme.

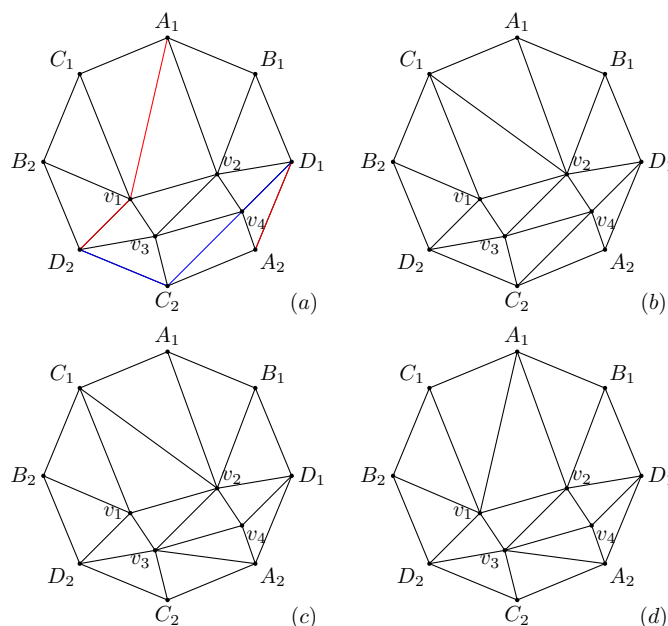
Jediný možný nekontrahovatelný trojúhelník obsahující  $A_2v_4$  je  $A_2v_4v_2A_1$ . O hranu  $v_1v_3$  se stará buď  $A$  nebo  $C$ . Je-li  $v_1A_1$  hrana, pak jediný nekontrahovatelný trojúhelník obsahující hranu  $C_2v_3$ , je  $C_2v_3v_1C_1$ . Proto i v tomto případě je  $v_1$  spojeno s  $C_1$  a  $v_1C_1$ ,  $v_2A_1$  jsou hrany.

Nechť existuje vrchol  $w_1$  uvnitř stěny  $D_2v_1C_1B_2$ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $w_1$  je soused  $v_1$ . O hranu  $w_1v_1$  se ale nikdo nemůže starat, což je spor. Proto uvnitř stěny  $D_2v_1C_1B_2$  neexistuje žádný vrchol. Obdobně neexistuje žádný vrchol uvnitř stěn  $A_1B_1D_1v_2$  a  $A_1v_2v_1C_1$ .

Mezi vrcholy  $C$  a  $D$  už existuje hrana, tudíž nemůže existovat hrana  $C_1D_2$ , protože bychom měli násobnou hranu. Totéž platí pro vrcholy  $A$  a  $D$ . Musí tedy existovat hrany  $B_2v_1$  a  $v_2B_1$ .

Zbývá vyřešit, jak bude vypadat vytriangulování čtyřúhelníků  $A_1v_2v_1C_1$  a  $C_2A_2v_4v_3$ . Existují dohromady 4 varianty. Zde stojí za zmínku možnost, kdy  $v_1A_1$  a  $C_2v_4$  jsou hrany. Tyto hrany leží na nekontrahovatelných trojúhelnících, jejichž jedna hrana je zároveň stranou osmiúhelníku  $A_1B_1D_1A_2C_2D_2B_2C_1$ . Na obrázku 4.3 je jeden takový trojúhelník zvýrazněn červeně a druhý modře. Obrázek 4.3 obsahuje všechny 4 triangulace, které lze takto vygenerovat.

Ze symetrie jsme tak našli všechny ireducibilní triangulace (až na izomorfismus), které obsahují dvě disjunktní vnitřní hrany, o které se stará stejný vrchol. Proto ve zbytku této sekce předpokládáme, že o disjunktní vnitřní hrany se starají různé vnitřní vrcholy.

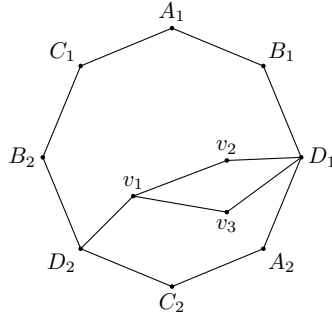


Obrázek 4.3: 4 ireducibilní triangulace toru obsahující šestiúhelník  $D_1v_4v_3D_2v_1v_2$ .

### 4.1.2 Čtyřúhelník

Uvažujme nyní případ, že  $G$  obsahuje vnitřní hrany  $v_1v_2$  a  $v_1v_3$ , o které se stará stejný vrchol (viz. obrázek 4.4). Bez újmy na obecnosti  $D$ .

Uvnitř čtyřúhelníku neleží žádný vrchol. Kdyby uvnitř čtyřúhelníku  $D_1v_2v_1v_3$  ležel nějaký vrchol  $w$ , pak  $w$  je bez újmy na obecnosti spojen s  $v_2$  nebo  $v_3$ .

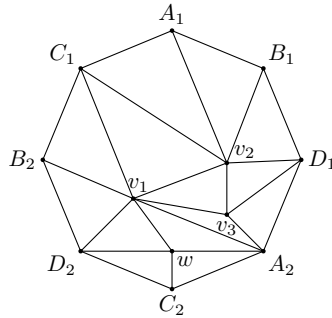


Obrázek 4.4: Hrany  $v_1v_2$  a  $v_1v_3$ , o něž se stará vrchol  $D$ .

Pak by se ale nikdo nemohl starat o hrany  $wv_2$  či  $wv_3$ , jelikož  $D_2$  nesousedí ani s  $v_2$  ani s  $v_3$ . Proto uvnitř  $D_1v_2v_1v_3$  neleží žádný vrchol. Jedinou možností, jak vytriangulovat čtyřúhelník  $D_1v_2v_1v_3$ , je spojit hranou vrcholy  $v_2$  a  $v_3$  (hrana  $v_1D_1$  by byla násobnou hranou).

**Tvrzení 1.** *Leží-li uvnitř šestiúhelníku  $D_2C_2A_2D_1v_3v_1$  vrchol  $w$ , pak  $G$  je graf nakreslený na obrázku 4.5.*

*Důkaz.* Kdyby  $w$  sousedil s nějakým dalším vrcholem uvnitř  $D_2C_2A_2D_1v_3v_1$  nebo s  $v_3$ , pak by  $G$  obsahoval dvě disjunktní hrany, o které se stará  $D$ , což jsme již rozebrali. Protože  $w$  má stupeň alespoň 4 a nesousedí zároveň s  $D_1$  a  $D_2$ , musí sousedit s  $v_1$ ,  $C_2$  a  $A_2$ . O hranu  $v_2v_3$  se tedy musí starat  $A$ , a proto  $A_2$  sousedí s  $v_3$ .  $A$  se nemůže zároveň starat o hranu  $v_1w$ , proto se o ni stará  $C$  a  $v_1$  sousedí s  $C_1$ . Vrchol  $v_1$  nemůže sousedit s  $C_2$ , proto  $D_2$  sousedí s  $w$ . Jelikož  $w$  nesousedí s  $v_3$ ,  $v_1$  sousedí s  $A_2$ . Nahlédneme, že čtyřúhelník  $C_1v_1v_2A_1$  neobsahuje žádný vrchol. Jelikož  $v_1$  sousedí s  $A_2$ , nemůže sousedit s  $A_1$ , a proto  $C_1v_2$  je hrana. Obdobně  $v_1B_1$  a  $v_2B_2$  jsou hrany.  $\square$



Obrázek 4.5: Ireducibilní triangulace s vrcholem  $w$  uvnitř  $D_2C_2A_2D_1v_3v_1$ .

Můžeme předpokládat, že uvnitř šestiúhelníku  $D_2C_2A_2D_1v_3v_1$  neleží žádný vrchol. Jelikož  $D_2$  nesousedí s  $v_3$  a  $D_1$  nesousedí s  $v_1$ ,  $v_1$  je spojeno hranou s  $C_2$  a  $v_3$  s  $A_2$ . O hranu  $v_2v_3$  se stará  $A$  nebo  $C$ . Kdyby  $A_1v_2$  nebyla hranou, pak  $C_1v_2$  a  $C_2v_3$  musí být hrany a hrana  $A_2v_3$  by neležela na žádném nekontrahovatelném trojúhelníku. Proto  $v_2$  sousedí s  $A_1$ .

Protože  $v_1$  sousedí s  $C_2$ ,  $v_1C_1$  není hrana, a proto uvnitř šestiúhelníku  $A_1C_1B_2D_2v_1v_2$  existuje cesta spojující  $\{B_2, D_1\}$  s  $\{A_1, v_2\}$ . Tato cesta má délku nejvýše 2, protože o její vnitřní hrany by se neměl kdo starat.

- Uvažujme nejprve případ, že nejkratší taková cesta má délku 2. Její vnitřní vrchol si označíme  $w'$ . Kdyby  $w'$  sousedil s  $D_2$  a  $v_2$ , pak by  $G$  obsahovalo disjunkttní vnitřní hrany  $w'v_2$  a  $v_1v_3$ , o které se stará  $D$ , což jsme již rozebrali. Kdyby  $w'$  sousedilo s  $D_2$  a  $A_1$ , pak nahlédneme, že uvnitř pěticyklu  $D_2w'A_1v_2v_1$  neleží žádný vrchol. Jelikož  $v_2$  nesousedí s  $D_2$  ani s  $w'$ ,  $A_1v_1$  musí být hrana. Pak hrana sousedící s  $B_1$  nemůže ležet v žádném nekontrahovatelném trojúhelníku, což je spor. Proto  $w'$  sousedí s  $B_2$ . Obdobně nahlédneme, že  $D_2$  nemůže sousedit ani s žádným jiným vrcholem uvnitř šesticyklu  $A_1C_1B_2D_2v_1v_2$ , proto  $v_1$  sousedí s  $B_2$ .

Nyní nastávají dvě možnosti:

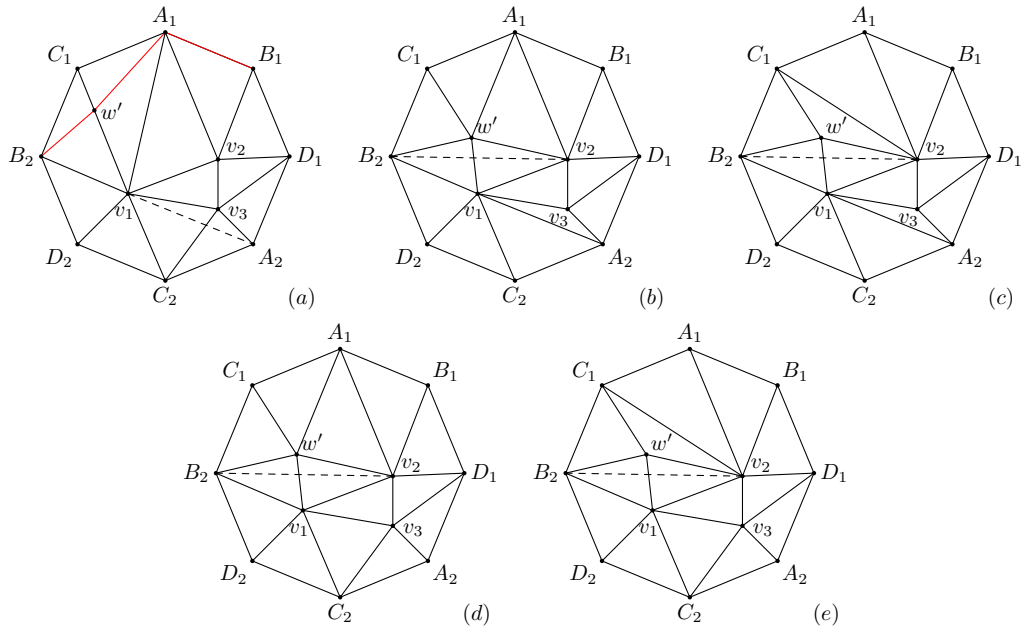
- Vrchol  $w'$  není spojen hranou s  $v_2$ , a proto je spojen s  $A_1$ . Můžeme také předpokládat, že ani žádný jiný soused  $B_2$  uvnitř  $B_2w'A_1v_2v_1$  nesousedí s  $A_1$  ani  $v_2$ . Kdyby uvnitř  $B_2w'A_1v_2v_1$  ležel nějaký vrchol  $w''$  a jelikož  $w''$  má stupeň alespoň 4, plynulo by tedy, že  $w''$  nesousedí s  $B_2$  a sousedí s  $w'$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  a  $A_1$ . Pak se o hranu  $w'w''$  nikdo nestará, což je spor. Proto uvnitř  $B_2w'A_1v_2v_1$  neleží žádný vrchol.

Protože vrchol  $w'$  není spojen s  $v_2$ , pak musí existovat hrana, která je odděluje – jediná možná hrana je  $v_1A_1$ . Z existence této hrany plyne, že nemůže existovat hrana  $v_1A_2$ , protože bychom měli násobnou hranu. Tudíž existuje hrana  $v_3C_2$ .

Ve čtyřúhelníku  $A_1v_1B_2C_1$  neleží žádný vrchol kromě  $w'$ , neboť hrana je spojující by nemohla ležet na žádném nekontrahovatelném trojúhelníku. Vrchol  $w'$  má právě 4 možné sousedy  $A_1$ ,  $v_1$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ . Díky tomu, že každý vrchol ireducibilní triangulace má stupeň alespoň 4, spojíme  $w'$  se těmito sousedy. Za zmínku stojí hrany  $B_2w'$  a  $w'A_1$ , protože tyto hrany leží na nekontrahovatelném trojúhelníku  $B_2w'A_1B_1$  (na obrázku 4.6(a) vyznačeno červeně). Ve čtyřúhelníku  $A_1B_1D_1v_2$  neleží žádný vrchol, proto  $v_2B_1$  je hrana. Tím dostáváme triangulaci na obrázku 4.6(a).

- Vrchol  $w'$  je spojen s  $v_2$  hranou. Jelikož o disjunkttní hrany  $v_3v_1$  a  $w'v_2$  se nestará  $D$ , o hranu  $w'v_2$  se musí starat  $B$ . Proto  $v_2$  sousedí s  $B_1$ . Uvnitř čtyřúhelníku  $B_2v_1v_2w'$  neexistuje žádný další vrchol. Tudíž jsou spojeny hranou vrcholy  $w'$  a  $v_1$ . Obdobně uvnitř  $B_2C_1A_1v_2w'$  neleží žádný vrchol. Proto  $w'$  je spojeno s  $C_1$ . Nyní zbývá doplnit hrany do čtyřúhelníků  $C_2A_2v_3v_1$  a  $C_1A_1v_2w'$ . To lze udělat 4 způsoby:  $v_1A_2$ ,  $w'A_1$  nebo  $v_1A_2$ ,  $v_2C_1$  nebo  $v_3C_2$ ,  $w'A_1$  nebo  $v_3C_2$ ,  $v_2C_1$ . Možnosti obsahující dvojice hran  $v_1A_2$ ,  $v_2C_1$  a  $v_3C_2$ ,  $v_2C_1$  vyloučíme, protože se o dvě disjunkttní hrany stará jeden vrchol. Výsledné triangulace jsou na obrázcích 4.6 (b) a (c).

- Nyní rozeberme případ, kdy cesta mezi  $\{B_2, D_2\}$  a  $\{A_1, v_2\}$  má délku 1. Jedinou možností je hrana  $B_2v_2$ . Nahlédneme, že ve čtyřúhelníku  $B_2D_2v_1v_2$  neleží žádný vrchol. Protože  $D_2v_2$  by vytvořilo násobnou hranu,  $B_2$  sousedí s  $v_1$ . Kvůli hraně  $B_2v_2$  neexistuje hrana  $v_2B_1$ . Z této informace plyne existence vrcholu uvnitř čtyřúhelníku  $A_1v_2D_1B_1$ , označme si ho  $v'$ . Uvnitř čtyřúhelníku  $A_1v_2D_1B_1$  nemůže být hrana disjunkttní s jeho vrcholy, pro-

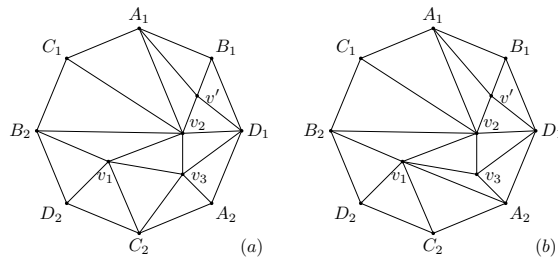


Obrázek 4.6: 5 ireducibilních triangulací s vrcholem  $w'$ .

tože by se o ni neměl kdo starat, proto je  $v'$  spojeno se všemi vrcholy tohoto čtyřúhelníka.

Uvnitř čtyřúhelníku  $B_2v_2A_1C_1$  není žádný vrchol, proto  $C_1v_2$  je hrana.

Jako poslední budeme triangulovat čtyřúhelník  $C_2A_2v_3v_1$ . Zde existují 2 možnosti: buď existuje hrana  $v_1A_2$  nebo  $v_2C_2$ . Tyto 2 ireducibilní triangulace lze nalézt na obrázku 4.7(a),(b).



Obrázek 4.7: 2 ireducibilní triangulace s vrcholem  $v'$ .

### 4.1.3 2 disjunktní hrany

Dále rozebereme případ, že  $G$  obsahuje dvě disjunktní vnitřní hrany  $v_1v_2$  a  $v_3v_4$ . Příklad, kdy se o ně stará stejný vrchol, jsme již rozebrali, proto můžeme předpokládat, že o  $v_1v_2$  se stará  $B$  a o  $v_3v_4$  se stará  $D$ . Můžeme také předpokládat, že  $B$  a  $D$  se nestarají o žádné další hrany, jelikož tyto případy jsme už rozebrali.

Šestiúhelníky  $D_2C_2A_2D_1v_4v_3$  a  $B_1A_1C_1B_2v_1v_2$  neobsahují žádné další vnitřní vrcholy, protože takový vrchol by sousedil s vnitřní hranou (má stupeň alespoň



4 a všichni jeho sousedé nemohou být na hranici osmiúhelníku, protože by byl spojen se dvěma výskyty stejného vrcholu), o kterou se nemá kdo starat.

Vrcholy  $D_1$  a  $D_2$  nemohou být spojeny s žádným dalším vrcholem v šestiúhelníku  $D_2C_2A_2D_1v_4v_3$ , proto  $v_3C_2$  a  $v_4A_2$  jsou hrany. Obdobně  $C_1v_1$  a  $A_1v_2$  jsou hrany.

Rozdělíme si úlohu na dva případy podle existence hran  $v_1v_3$  a  $v_2v_4$ :

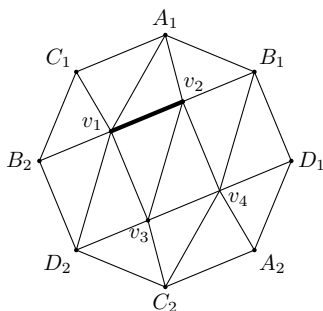
- Existují hrany  $v_1v_3$  a  $v_2v_4$ . Do každého ze zbývajících pěti nevytriangulovaných čtyřúhelníků potřebujeme doplnit právě jednu hranu. Začneme čtyřúhelníkem  $C_2A_2v_4v_3$ .

Ze symetrie můžeme předpokládat, že  $C_2v_4$  je hrana. Z toho plyne, že nemůže existovat hrana  $v_2C_1$ , protože bychom dostali již rozebraný případ ( $C$  by se staralo o dvě disjunktní hrany). Tudíž vrcholy  $v_1$  a  $A_1$  jsou spojeny hranou.

Dále můžeme předpokládat, že neexistuje ani hrana  $v_1v_4$  (jinak by se  $C$  se staralo o hrany  $v_1v_3$  a  $v_1v_4$ ). Z toho plyne, že vrcholy  $v_3$  a  $v_2$  spojuje hrana.

Obdobně z existence hrany  $v_3v_2$  plyne existence hran  $D_2v_1$  a  $v_4B_1$ .

Tuto triangulaci nemůžeme zahrnout mezi výsledky, neboť se o hranu  $v_2v_3$  nemá kdo starat, tudíž neleží na nekontraovatelném trojúhelníku (obrázek 4.8).



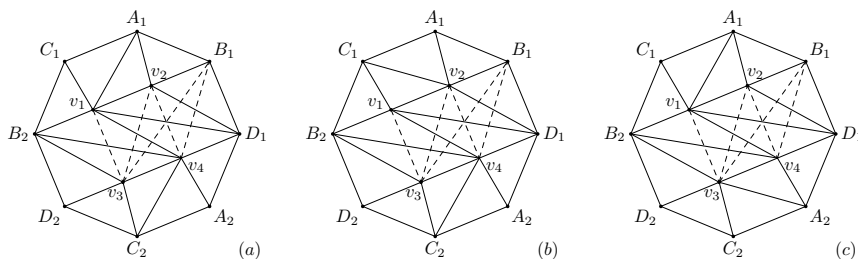
Obrázek 4.8: Triangulace s hranou, o kterou se nám kdo starat.

- Alespoň jedna hrana z dvojice  $v_1v_3$  a  $v_2v_4$  neexistuje, bez újmy na obecnosti  $v_2v_4$ . Uvnitř osmiúhelníku  $B_2v_1v_2B_1D_1v_4v_3D_2$  neleží žádný vrchol, jelikož o vnitřní hranu s ním sousedící by se neměl kdo starat. Kvůli násobnosti nemůžeme mít hrany  $v_1B_1$ ,  $v_2B_2$ ,  $v_3D_1$  a  $v_4D_2$ . Buď z  $B_2$  nebo  $D_2$  musí vycházet hrana, nechť je to ze symetrie  $B_2$ . Možní sousedé  $B_2$  jsou  $v_3$  a  $v_4$ . Je-li  $B_2$  spojen s  $v_4$ , pak je také spojen s  $v_3$ , protože  $D_2$  nesousedí s  $v_4$ . Tedy každopádně  $B_2$  je spojeno s  $v_3$ .

Protože  $B_2$  je spojen hranou s  $v_3$ , pak z  $v_3$  nemůže vést hrana do  $v_2$  ( $B$  by se staralo o dvě hrany) a  $B_1$  a z  $v_4$  do  $B_1$ . Vrchol  $B_1$  nemůže být spojen s žádným dalším vrcholem, tudíž musí být oddělen hranou od ostatních vrcholů. Z toho plyne hrana  $D_1v_2$ .

Vrchol  $v_2$  nesousedí s  $B_2$ ,  $v_3$  ani  $v_4$ , proto  $D_1v_1$  je hrana. Vrchol  $D_1$  nesousedí s  $B_2$  ani s  $v_3$ , proto  $v_1v_4$  je hrana. Protože  $D$  se nestará zároveň o  $v_3v_4$  a  $v_1v_3$ , nahlédneme, že  $v_1v_3$  není hrana, a proto  $v_2$  sousedí s  $v_4$ .

O hranu  $v_1v_4$  se musí starat  $A$  nebo  $C$ , proto zbývající dva čtyřúhelníky můžeme vytriangulovat třemi způsoby (obrázek 4.9).



Obrázek 4.9: Triangulace, ve kterých neexistuje hrana  $v_2v_4$ .

Rozebrali jsme již všechny případy, kdy graf obsahuje dvě disjunktní vnitřní hrany. Podgraf indukovaný vnitřními vrcholy je tedy trojúhelník nebo hvězda (musí být souvislý, jelikož žádné dva vrcholy osmiúhelníku nejsou spojeny hranou).

Nechť vnitřní vrcholy indukují trojúhelník  $v_1v_2v_3$ . Všechny další hrany musí vést mezi trojúhelníkem a hranicí osmiúhelníku a dohromady jich je 11. Žádný vrchol nemůže mít 5 sousedů na hranici, jelikož tím by vznikla násobná hrana. Proto dva z vrcholů trojúhelníku  $v_1v_2v_3$  mají 4 sousedy na hranici osmiúhelníku. Bez újmy na obecnosti  $v_1$  sousedí  $C_2$ ,  $A_2$ ,  $D_1$  a  $B_1$ . Vrchol  $v_2$  sousedí s  $B_1$  a  $v_3$  sousedí s  $C_2$ . Vrchol  $v_3$  nemůže mít 4 sousedy na hranici, protože by si sousedil i s  $C_1$ . Totéž platí i pro vrchol  $v_2$ , což je spor.

Obdobně vyloučíme případ, kdy  $G$  obsahuje nanejvýš dva vnitřní vrcholy.

#### 4.1.4 Hvězdy

**Lemma 3.** *Hvězda uvnitř osmiúhelníku  $A_1B_1D_1A_2C_2D_2B_2C_1$  může mít maximálně 4 cípy (4 okrajové + 1 centrální vrchol).*

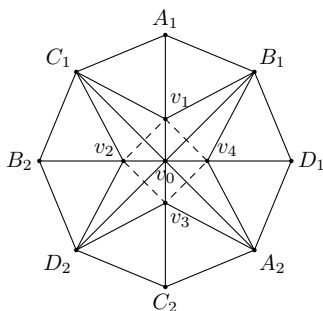
*Důkaz.* Představme si, že máme hvězdu s  $k$  vrcholy. Každý z okrajových vrcholů není spojen hranou s žádným jiným okrajovým vrcholem, tudíž z centrálního vrcholu musí vést dohromady alespoň  $k$  hran, které po dvou oddělují okrajové vrcholy. Tyto vrcholy musí být navzájem různé (nemohou mezi nimi být dva výskyty stejného vrcholu), proto  $k \leq 4$ . □

Nyní si postupně rozeberu případy, kdy má hvězda 5, 4 a 3 vrcholy.

1. Mějme hvězdu s 5 vrcholy. Centrální vrchol si nazvěme  $v_0$ , ostatní vrcholy po řadě  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  a  $v_4$ . Vrchol  $v_0$  má 4 sousedy na hranici oddělující  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  a  $v_4$ . Bez újmy na obecnosti jsou to vrcholy  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $D_1$  a  $C_1$ . Každý z vrcholů  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  a  $v_4$  musí být spojen se všemi vrcholy čtyřúhelníku, uvnitř kterého leží. Tím dostáváme triangulaci na obrázku 4.10(a).
2. Budeme uvažovat hvězdu se 4 vrcholy, pojmenujme si je  $v_0$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  a  $v_3$ . Opět  $v_0$  má alespoň 3 na hranici oddělující vrcholy  $v_1$ ,  $v_2$  a  $v_3$ . Bez újmy na obecnosti jsou tyto sousedé výskyty vrcholů  $A$ ,  $B$  a  $C$ . Jelikož  $G$  neobsahuje separující trojúhelníky, mezi těmito sousedy  $v_0$  není zároveň  $A_1$  a  $C_1$ , ani

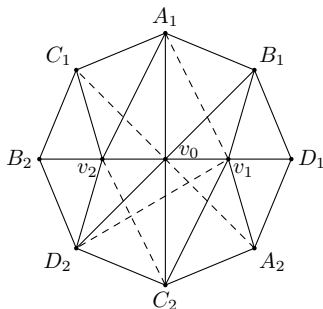
zároveň  $A_2$  a  $C_2$ . Ze symetrie můžeme předpokládat, že  $v_0$  sousedí s  $A_1$ ,  $C_2$  a  $B_2$ .

Vrcholy  $v_1$  a  $v_2$ , které leží uvnitř čtyřcyklů  $A_1v_0B_2C_1$  a  $B_2v_0C_2D_2$ , musí sousedit se všemi vrcholy těchto čtyřcyklů. Jelikož  $v_0$  nesousedí s  $B_1$ , o hranu  $v_0v_2$  se musí starat  $D$ , a tudíž  $v_0D_1$  je hrana. Jeden z čtyřcyklů  $v_0D_1B_1A_1$  nebo  $D_1A_2C_2v_0$  neobsahuje žádný vrchol a nelze ho vytriangulovat ( $v_0$  nesousedí s  $B_1$  ani  $A_2$ ). Proto žádná triangulace s hvězdou se 4 vrcholy neexistuje.



Obrázek 4.10: Hvězdy s 5 vrcholy.

- Mějme hvězdu se 3 vrcholy (na obrázku 4.11(a)), označme si je  $v_0$  (centrální vrchol),  $v_1$  a  $v_2$  (okrajové vrcholy). Mezi touto hvězdou a hranicí osmiúhelníku vede 12 hran. A jelikož každý vrchol má nanejvýš 4 sousedy na hranici, dostáváme, že  $v_0$ ,  $v_1$  i  $v_2$  mají právě 4 sousedy na hranici. Sousedí  $v_1$  jsou, bez újmy na obecnosti  $B_1$ ,  $D_1$ ,  $A_2$  a  $C_2$ . Jediná možnost pro sousedy  $v_2$  je potom  $A_1$ ,  $C_1$ ,  $B_2$  a  $D_2$ . Tím dostáváme graf na obrázku 4.11.



Obrázek 4.11: Hvězdy s 3 vrcholy.

Tímto jsme vygenerovali všechny ireducibilní triangulace toru, které mají alespoň jeden vrchol stupně 4.

## 4.2 Grafy minimálního stupně 5

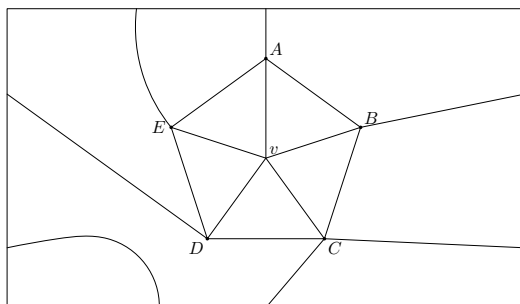
Uvažujme nyní ireducibilní triangulaci, která nemá žádný vrchol stupně 4, ale obsahuje vrchol  $v$  stupně 5.

Tento vrchol musí být spojen s pěti vrcholy, označme si je  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  a  $E$ . Vrchol  $v$  nemá žádné další sousedy, tudíž existují hrany  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  a  $EA$ .

Každá hrana grafu leží na nekontrahovatelném trojúhelníku. Bez újmy na obecnosti hrana  $vA$  (resp.  $vC$ ) leží na nekontrahovatelném trojúhelníku  $AvC$  a hrana  $vB$  (resp.  $vD$ ) leží na nekontrahovatelném trojúhelníku  $BvD$ . Hrana  $vE$  může ležet na právě dvou nekontrahovatelných trojúhelnících –  $EvC$  a  $EvB$ .

### 4.2.1 Nekontraovatelný trojúhelník $EvC$

Hrana  $Ev$  leží na nekontrahovatelném trojúhelníku  $EvC$ . Existuje právě jedno možné nakreslení (na obrázku 4.12). Dostali jsme torus rozdělený na 2 části, jehož jednou částí je pětiúhelník  $ABDEC$  a druhou šestiúhelník  $BDC_2AEC_1$ .



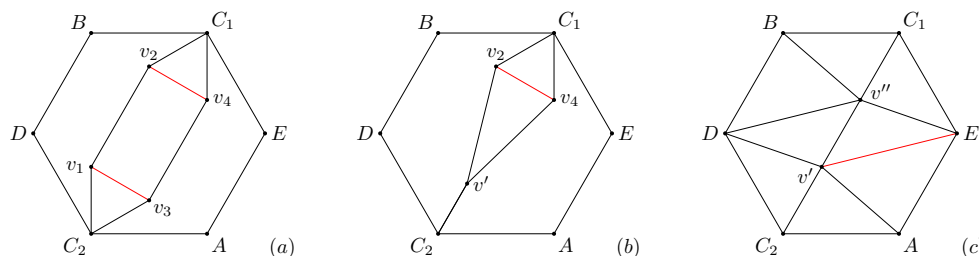
Obrázek 4.12: Vrchol stupně 5, hrana  $EC$ .

Budeme řešit, jak vypadá triangulace pětiúhelníku  $ABDEC$  a šestiúhelníku  $BDC_2AEC_1$ .

Pětiúhelník  $ABDEC$  obsahuje každé písmeno právě jednou, tudíž nemůžeme mít uvnitř žádnou hranu, protože by se o ni neměl kdo starat. Pěticyklus  $ABDEC$  může mít nanejvýš jednu chordu ( $AD$  nebo  $BE$ ), jinak by vznikly násobné hrany. Proto uvnitř něj leží právě jeden vrchol a jelikož má stupeň alespoň 5, je spojen se všemi vrcholy pětiúhelníku (obrázek 4.14(c)).

Uvažujme nyní šestiúhelník  $BDC_2AEC_1$ . Každou hranu uvnitř tohoto šestiúhelníku se musí starat  $C$ , neboť  $C$  je jediný vrchol, který je v šestiúhelníku  $BDC_2AEC_1$  zastoupen dvakrát. Kdyby se  $C$  staralo o dvě hrany, pak uvnitř vzniklého šestiúhelníku či čtyřúhelníku leží další hrana, o kterou se  $C$  starat nemůže, což je spor (obrázek 4.13(a), (b)).

Z toho plyne, že uvnitř šestiúhelníku je maximálně jedna hrana.



Obrázek 4.13: Triangulace šestiúhelníku  $BDC_2AEC_1$

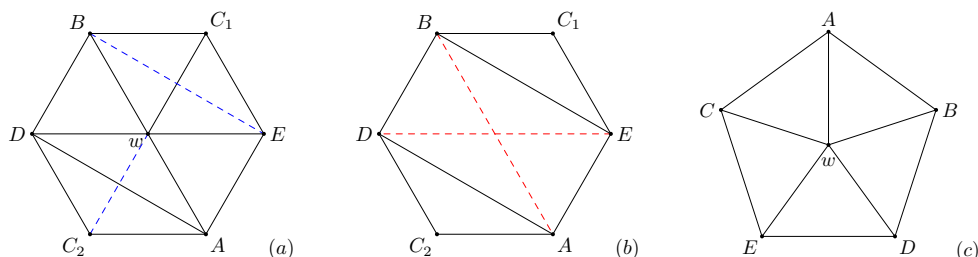
Nechť uvnitř šestiúhelníka leží hrana  $v'$  a  $v''$ .

Vrcholy  $C_1$  a  $C_2$  nemohou být spojeny s žádným dalším vrcholem, a proto jsou odděleny hranami  $Bv''$ ,  $Ev''$  (pro vrchol  $C_1$ ) a  $Av'$ ,  $Dv'$  (pro vrchol  $C_2$ ). Bez újmy na obecnosti  $D$  sousedí s  $v''$  a jelikož  $v'$  má stupeň alespoň 5, proto

je spojen hranou s  $E$ . Pak ale hrana  $Bv''$  neleží na žádném nekontrahovatelném trojúhelníku. Tudíž tato varianta nepřipadá v úvahu, a proto šestiúhelník nemůže obsahovat dva vnitřní vrcholy (obrázek 4.13(c)).

Jelikož šestiúhelník může mít nanejvýš dvě chordy ( $AD$ ,  $BE$ , obrázek 4.14(b)), musí uvnitř něj ležet jeden vrchol, označme si ho  $w$ .

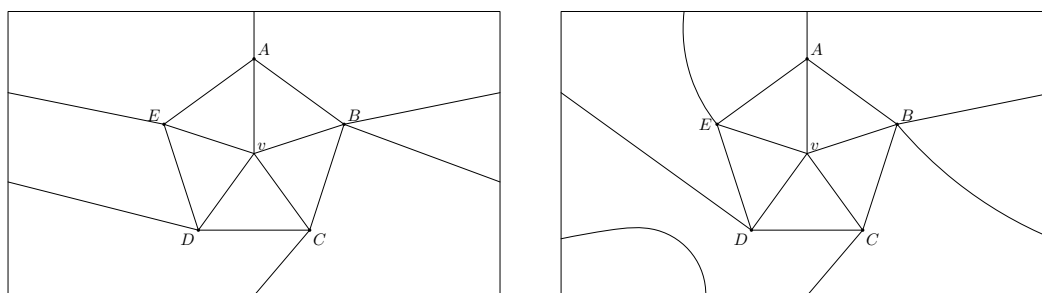
Tento vrchol má stupeň alespoň 5 a může být spojen s pouze jedním z vrcholů  $C_1$ ,  $C_2$ . Nechť je spojen s  $C_1$  (druhá varianta je izomorfní na obrázku 4.14(a) vyznačeno modře). Vrchol  $w$  je také spojen se zbývajícími vrcholy  $D$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $E$ . Čtyřúhelník  $DwAC_2$  je vytriangulován hranou  $AD$ . Dostáváme jedinou možnou triangulaci šestiúhelníku  $BDC_2AEC_1$  (obrázek 4.14(a)).



Obrázek 4.14: Šestiúhelník bez vnitřního vrcholu a s jedním vrcholem. Pětiúhelník s jedním vnitřním vrcholem.

## 4.2.2 Nekontrahovatelný trojúhelník $EvB$

Pokud bude hrana  $Ev$  ležet na nekontrahovatelném trojúhelníku  $EvB$ , pak existují dvě možnosti nakreslení (obrázek 4.15). Jedna z těchto možností rozdělí torus na stěnu ve tvaru trojúhelníku ( $BED$ ) a osmiúhelníku ( $ABEACDBC$ ). Druhé možné nakreslení obsahuje oblast ve tvaru pětiúhelníku ( $BEACD$ ) a šestiúhelníku ( $BEDBAC$ ). Tento případ je izomorfní případu, kdy  $Ev$  leží na nekontrahovatelném trojúhelníku  $EvC$  ( $A \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow C$ ,  $C \rightarrow D$ ,  $D \rightarrow E$ ,  $E \rightarrow A$ ).



Obrázek 4.15: Vrchol stupně 5, hrana  $EB$ .

Dále se budeme zabývat možnými triangulacemi osmiúhelníku  $ABEACDBC$  (resp.  $A_1B_1EA_2C_2DB_2C_1$ ).

### Dvě disjunktní hrany

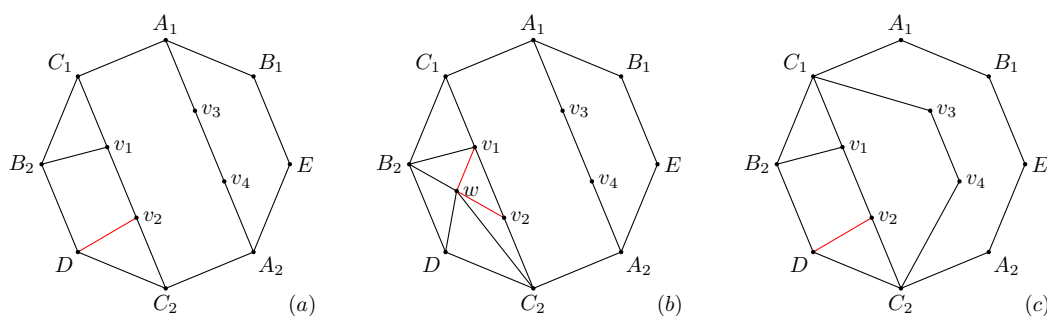
Představme si, že uvnitř osmiúhelníku máme dvě disjunktní hrany  $v_1v_2$  a  $v_3v_4$  (obrázek 4.16) takové, že o  $v_1v_2$  se stará  $C$ . O hranu  $v_3v_4$  se může starat  $A$  nebo  $C$  (obrázek 4.16 (a) a (c)).

Podíváme se na to, jak můžeme vytriangulovat šestiúhelník  $C_1v_1v_2C_2DB_2$ . Pokud by v tomto šestiúhelníku neexistoval žádný další vrchol, pak bychom museli oddělit vrcholy  $C_1$  a  $C_2$  hranami  $v_1B_2$  a  $v_2D$ , protože je nemůžeme s žádným dalším vrcholem spojit. Pak hrana  $Dv_2$  nemůže ležet na žádném nekontrahovatelném trojúhelníku, protože vrchol  $v_2$  nelze spojit s žádným vrcholem osmiúhelníku tak, abychom se dostali hranou zpět do vrcholu  $D$ , protože  $v_2C_1$  by byla násobná hrana,  $v_2B_2$  by tvořilo stěnový trojúhelník a  $D$  nesousedí s  $A$  (viz. obrázek 4.16(a)).

Proto v šestiúhelníku  $C_1v_1v_2C_2DB_2$  existuje vrchol  $w$ . Nahlédněme, že uvnitř šestiúhelníku  $C_1v_1v_2C_2DB_2$  neleží žádná hrana s ním disjunktní. Vrchol  $w$  má stupeň alespoň 5 a sousedí nanejvýš s jedním z  $C_1$  a  $C_2$ , proto sousedí s  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $B_2$  a  $D$ . Jelikož by hrana  $Dv_2$  nemohla ležet na nekontrahovatelném trojúhelníku,  $w$  sousedí s  $C_2$  a  $B_2$  sousedí s  $v_1$ . Nicméně hrana  $wv_2$  nemůže ležet na žádném nekontrahovatelném trojúhelníku.

Ze symetrie také vyloučíme případ, že uvnitř osmiúhelníku existují dvě disjunktní hrany takové, že alespoň o jednu se stará  $A$ .

Existují-li tedy dvě disjunktní vnitřní hrany  $v_1v_2$ ,  $v_3v_4$ , pak se o obě z nich musí starat  $B$ . Nahlédněme, že uvnitř šestiúhelníku  $B_2v_1v_2B_1v_4v_3$  neleží žádný vrchol a jelikož  $B_1$  a  $B_2$  nesousedí s žádným dalším vrcholem tohoto šestiúhelníku,  $v_1v_3$  a  $v_2v_4$  jsou hrany. O tyto hrany se musí starat  $A$  nebo  $C$ , což jsme již vyloučili.



Obrázek 4.16: Osmiúhelník se dvěma disjunktními hranami.

Probrali jsme všechny možnosti, kdy vnitřek osmiúhelníku obsahuje párování velikosti dva. Kdyby graf indukovaný vnitřními vrcholy nebyl souvislý, pak by osmiúhelník musel obsahovat jednu z chord  $CE$  nebo  $AD$ , která netvoří trojúhelník – bez újmy na obecnosti  $EC_1$ . Jelikož uvažovaný graf neobsahuje vrcholy stupně 4, čtyřcyklus  $C_1EB_1A_1$  pak nejde dotriangulovat. Proto vnitřní vrcholy indukují trojúhelník nebo hvězdu.

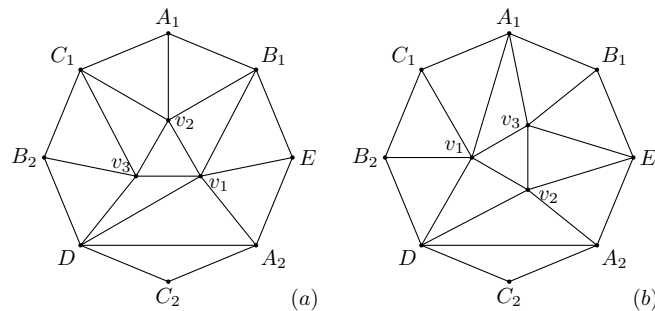
## Trojúhelník

Nechť osmiúhelník  $A_1B_1EA_2C_2DB_2C_1$  obsahuje trojúhelník složený z vrcholů  $v_1$ ,  $v_2$  a  $v_3$ . Rozlišme nyní dvě možnosti dle toho, zda osmicyklus má chordu či ne.

1. Nejprve předpokládejme, že osmiúhelník má chordu. Tato chorda musí ohraničovat trojúhelník, jinak bychom jeden ze vzniklých cyklů nedokázali vytriangulovat. Do úvahy tedy přichází chordy  $EC_2$  a  $DA_2$ . Kvůli nakreslení můžeme použít pouze jednu z nich, bez újmy na obecnosti  $DA_2$ . Mezi trojúhelníkem  $v_1v_2v_3$  a sedmicyklem  $DA_2EB_1A_1C_1B_2$  musí vést 10 hran. Každý

vrchol trojúhelníku má stupeň alespoň 5, a proto z něj vychází alespoň 3 hrany. z toho plyne, že můžeme předpokládat, že z  $v_1$  vedou 4 hrany do sedmicyklu a z  $v_2$  a  $v_3$  vedou 3 hrany.

Sousedy  $v_1$  nemohou být vrcholy  $A_1, B_1, E, A_2$  ani  $B_2, C_1, A_1, B_1$  kvůli násobným hranám. Kdyby sousedé  $v_1$  byli  $C_1, A_1, B_1$  a  $E$ , pak sousedé  $v_2$  jsou  $E, A_2, D$  a sousedé  $v_3$  jsou  $D, B_2, C_1$  a o hranu  $v_2v_3$  se nikdo nestará. Sousedy  $v_1$  nemohou být  $C_1B_2DA_2$ , protože by se neměl kdo postarat o hranu  $v_2E$ . Totéž platí pro vrchol  $v_1$  a jeho sousedy  $E, A_2, D, B_2$  (hrana  $Cv_3$  neleží na nekontraovatelném trojúhelníku). Zbývající 2 možnosti pro sousedy  $v_1$  vedou k ireducibilním triangulacím na obrázku 4.17.

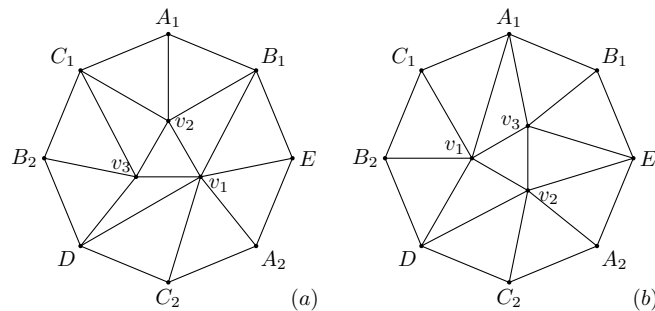


Obrázek 4.17: Vnitřní trojúhelník  $v_1v_2v_3$  a chorda  $A_2D$ .

2. Předpokládejme, že osmiúhelník nemá chordu, pak mezi trojúhelníkem  $v_1v_2v_3$  vede 11 hran, proto existují až na symetrii 2 možnosti. Z vrcholu  $v_1$  vede 5 hran a z  $v_2$  a  $v_3$  tři hrany nebo z  $v_1$  a  $v_2$  vedou 4 hrany a z  $v_3$  vedou tři hrany.

Začněme první možností. Jelikož  $v_1$  nesousedí s násobnou hranou, jeho sousedé mohou být buď vrcholy  $B_1, E, A_2, C_2, D$  nebo  $E, A_2, C_2, D, B_2$ . Ze symetrie můžeme předpokládat, že nastane první z těchto možností. Tím dostáváme graf na obrázku 4.18(a).

Uvažujme nyní případ, že  $v_1$  a  $v_2$  má 4 sousedy v osmiúhelníku. Jelikož nemáme násobné hrany, nahlédněme, že jeden z vrcholů  $v_1, v_2$  (ze symetrie můžeme předpokládat, že  $v_2$ ) sousedí s  $E, A_2, C_2, D$ . Tím dostáváme ireducibilní triangulaci na obrázku 4.18(b).



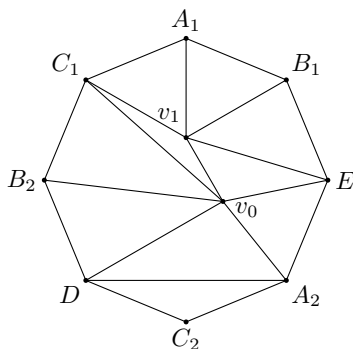
Obrázek 4.18: Vnitřní trojúhelník  $v_1v_2v_3$ .

## Hvězdy

Nechť uvnitř osmiúhelníku  $A_1B_1EA_2C_2DB_2C_1$  je hvězda s centrálním vrcholem  $v_0$  a okrajovými vrcholy  $v_1, \dots, v_k$ . Všechny vrcholy mají stupeň alespoň 5, každý z okrajových vrcholů má tedy alespoň 4 sousedy v osmiúhelníku. Z toho vyplývá, že  $k \leq 2$ . Obdobně nahlédneme, že  $k \geq 1$ , protože jinak by triangulace obsahovala násobné hrany.

1. Začneme s variantou, že  $k = 1$ . Pokud by osmiúhelník neměl chordu, pak mezi  $v_0, v_1$  a osmiúhelníkem vede 10 hran, tedy buď jeden z vrcholů  $v_0, v_1$  by měl alespoň 6 sousedů v osmiúhelníku nebo by oba měly 5 sousedů. V obou případech dostáváme násobnou hranu.

Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $D$  sousedí s  $A_2$ ,  $v_0$  má 5 sousedů a  $v_1$  má 4 sousedy na hranici osmiúhelníku. Sousedy  $v_0$  jsou  $E, A_2, D, B_2, C_1$ , jinak by triangulace obsahovala násobné hrany. Tím dostáváme graf na obrázku 4.19.



Obrázek 4.19: Hvězda se dvěma vrcholy.

2. Nechť  $k = 2$ . Vrcholy  $v_1$  a  $v_2$  mají stupeň alespoň 5, a proto mají alespoň 4 sousedy na hranici osmiúhelníku. Kdyby oba měli alespoň 5 sousedů, pak  $v_0$  by mělo stupeň nanejvýš 4. Proto můžeme předpokládat, že  $v_1$  má právě 4 sousedy na hranici.

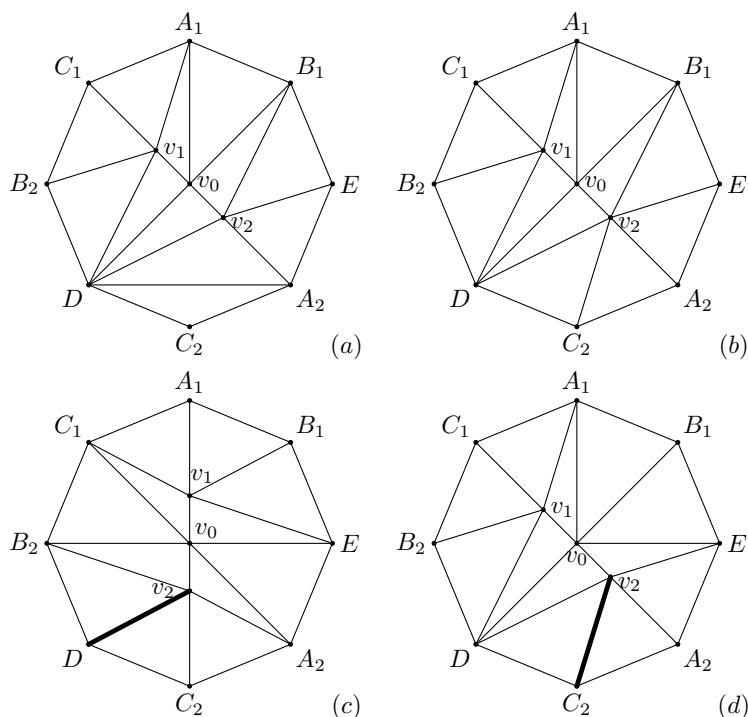
Uvažujme nejprve případ, že osmiúhelník má chordu, ze symetrie  $DA_2$ . Pak i  $v_2$  musí mít právě 4 sousedy a  $v_0$  právě 3 sousedy na hranici. S ohledem na absenci násobných hran jsou možní sousedé  $v_0$  vrcholy  $A_2, E$  a  $C_1$  nebo  $C_1, B_2$  a  $E$  nebo  $B_1, A_1$  a  $D$ . První dvě varianty jsou vyloučeny tím, že se někdo musí starat o hrany  $v_0v_1$  a  $v_0v_2$ . Třetí varianta vede k ireducibilní triangulaci na obrázku 4.20(a).

Nyní předpokládejme, že osmiúhelník nemá chordu, pak  $v_2$  má 4 nebo 5 sousedů na hranici. Má-li 5 sousedů na hranici, jsou to bez újmy na obecnosti vrcholy  $B_1, E, A_2, C_2, D$ . Vrchol  $v_0$  pak sousedí s  $B_1$  a  $D$ , proto nemůže sousedit s  $B_2$  a sousedí s  $A_1$ . Tím dostáváme triangulaci na obrázku 4.20(b).

Nakonec uvažujme případ, že  $v_2$  má 4 sousedy na hranici. Vrchol  $v_0$  má také 4 sousedy na hranici. Pokud mezi nimi nejsou 3 po sobě jdoucí, pak z absence násobných hran a symetrie můžeme předpokládat, že tyto sousedé jsou  $E, A_2$  a  $C_1, B_2$ . V tomto případě se o hranu  $Dv_2$  nemůže nikdo postarat, a proto se nejedná o ireducibilní triangulaci (obrázek 4.20(c)).



Existují-li 3 po sobě jdoucí sousedé  $v_0$ , můžeme obdobně předpokládat, že tyto sousedé jsou  $D, A_1, B_1, E$ . V tomto případě hrana  $Cv_2$  nemůže ležet na nekotrakovatelném trojúhelníku (obrázek 4.10(d)).



Obrázek 4.20: Hvězdy se 3 vrcholy.

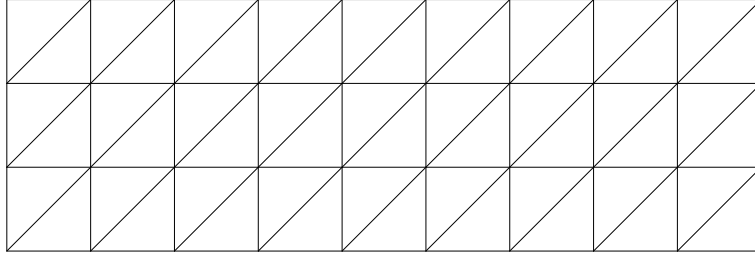
Tím jsme vygenerovali všechny ireducibilní triangulace s minimálním stupněm 5.

### 4.3 Grafy se všemi vrcholy stupně 6

Dle důsledku 4 zbývá nalézt 6-regulární ireducibilní triangulace toru.

V této sekci využijeme toho, že existuje způsob, jak jednoduše vygenerovat všechny 6-regulární triangulace toru. Altshulera [28] ukázal, že každou 6-regulární triangulaci toru lze získat následujícím postupem (pro nějakou volbu obdélníku a pootočení): Představme si, že máme nekonečnou trojúhelníkovou síť, ve které jsou všechny trojúhelníky pravoúhlé a rovnoramenné (obrázek 4.21). Z této sítě si vyřízneme obdélník a zidentifikujeme jeho svislé strany. Jeden z hraničních cyklů výsledného válce pootočíme a zidentifikujeme s druhým.

Jelikož nás zajímají pouze triangulace bez smyček a násobných hran, uvažované obdélníky musí mít alespoň 3 sloupce. Rozbor případů si rozdělíme na 3 části podle počtu řádků obdélníku (jeden, dva nebo tři řádky). Více než 3 řádky trojúhelníků nemůžeme mít, neboť by žádná svislá hrana nemohla ležet na nekotrakovatelném trojúhelníku.



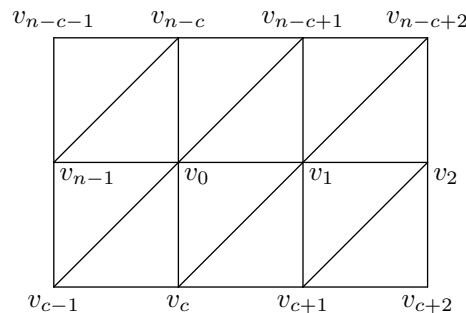
Obrázek 4.21: Trojúhelníková síť.

### 4.3.1 Obdélník s jedním řádkem trojúhelníků

Obdélník s jedním řádkem trojúhelníků může mít libovolně mnoho sloupců, jejich počet si označme  $n$ . Vrcholy na dolní straně si označme jako  $v_0, v_1 \dots v_n$  a vrcholy na horní straně si označme  $u_0, \dots, u_n$ . Po identifikaci svislých hran máme  $v_0 = v_n$  a  $u_0 = u_n$ . Po identifikaci hranic válce pak budeme mít  $v_i = u_{(i+c) \bmod n}$  pro nějaké  $0 \leq c \leq n-1$  a pro každé  $i$ . Nahlédneme, že grafy s  $n$  vrcholy a pootočeními  $o_c$  a  $o_{n+1-c}$  jsou izomorfní, tedy můžeme předpokládat, že  $2c \leq n+1$ .

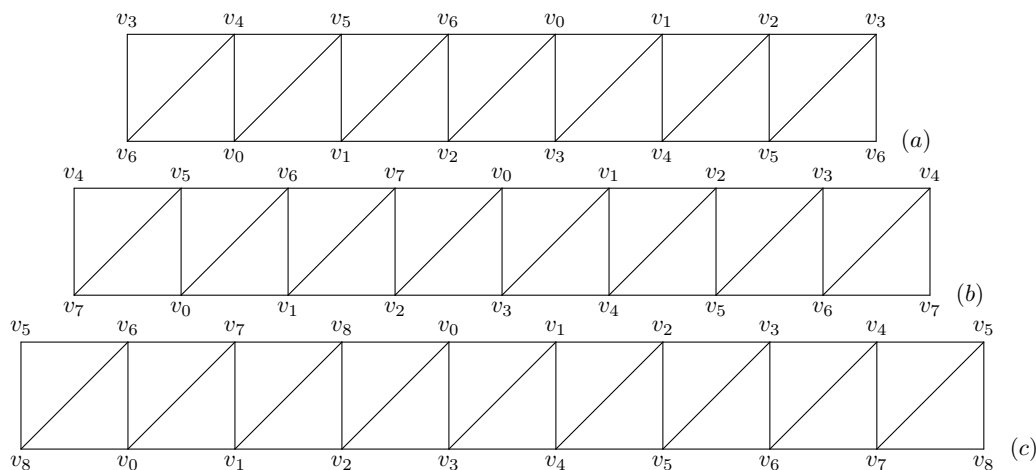
Jelikož graf neobsahuje smyčky ani násobné hrany,  $c$  nemůže být  $0, 1, 2, n-1$  a dále  $2c \neq n, 2c-1 \neq n, 2c-2 \neq n$ . Jelikož triangulace je 6-regulární, máme  $n \geq 7$ .

Potřebujeme zaručit, že každá vodorovná hrana leží na nekontrahovatelném trojúhelníku. Ze symetrie se stačí zabývat hranou  $v_0v_1$ . Vrchol  $v_0$  sousedí s  $v_1, v_{n-c+1}, v_{n-c}, v_{n-1}, v_{c-1}$  a  $v_c$ . Vrchol  $v_1$  sousedí s  $v_0, v_c, v_{c+1}, v_2, v_{n-c+2}$  a  $v_{n-c+1}$  (obrázek 4.22), kde všechny indexy jsou počítány modulo  $n$ . Možné nekontrahovatelné trojúhelníky obsahující  $v_0v_1$  jsou  $v_{n-c}v_0v_1v_2, v_{n-c}v_0v_1v_{c+1}, v_{n-1}v_0v_1v_{n-c+2}, v_{n-1}v_0v_1v_{c+1}, v_{c-1}v_0v_1v_{n-c+2}$  nebo  $v_{c-1}v_0v_1v_2$ . Ve všech těchto případech musí být hodnoty  $n$  a  $c$  takové, že indexy krajních vrcholů cest jsou si rovny modulo  $n$ . Po vyloučení případů, kdy by vznikly smyčky nebo násobné hrany, zbývají možnosti  $c = n-2, c = 3, 2c+1 \equiv 0 \pmod{n}$  nebo  $2c-3 \equiv 0 \pmod{n}$ . Případ  $c = n-2$  je vyloučen, jelikož předpokládáme, že  $2c \leq n+1$ . Stejně tak je vyloučen případ  $2c-3 \equiv 0 \pmod{n}$ . Rozeberme zbylé dva případy.



Obrázek 4.22: Sousedé vrcholu  $v_1$ .

1. Nechť  $c = 3$ . Hrana  $v_0v_{n-3}$  musí být součástí nekontrahovatelného trojúhelníku, a proto množiny  $\{v_{n-6}, v_{n-5}, v_{n-4}\}$  (sousedé  $v_{n-3}$ ) a  $\{v_1, v_2, v_3\}$  (sousedé  $v_0$ ) se musí protínat. Tudíž  $n \leq 9$ . Na obrázku 4.23 jsou všechny 3 výsledné ireducibilní triangulace.

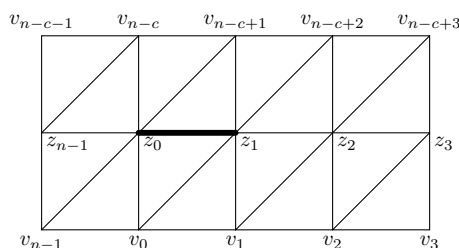


Obrázek 4.23: Příklad  $c = 3$ ,  $n = 7$ ,  $n = 8$  a  $n = 9$ .

2. Necht'  $2c + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ , resp.  $2c + 1 = n$  (varianta s  $2n$  nepripadá kvůli paritě v úvahu). Pak hrana  $v_0v_{(n+3)/2}$  musí být součástí nekontrahovatelného trojúhelníku, a proto množiny  $\{v_{n+2}, v_{n+3}, v_{(n+5)/2}\}$  (sousedé  $v_{(n+3)/2}$ ) a  $\{v_{n-1}, v_{(n-3)/2}, v_{(n-1)/2}\}$  (sousedé  $v_0$ ) se musí protínat. Jelikož  $n$  je liché a větší nebo rovno 7, toto nastane pro  $n = 7$ . Pak ale  $c = 3$ , což jsme již rozebrali.

### 4.3.2 Obdélník se dvěma řádky trojúhelníků

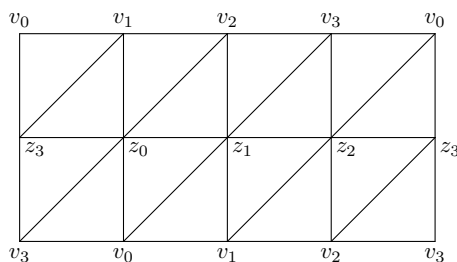
Obdélník se dvěma řádky trojúhelníků (obrázek 4.24) může mít libovolně mnoho sloupců, jejich počet si označme  $n$  ( $n \geq 3$ ). Vrcholy na dolní straně si označme jako  $v_0, v_1 \dots v_n$  a vrcholy na horní straně si označme  $u_0, \dots, u_n$ . Po identifikaci svislých hran máme  $v_0 = v_n$  a  $u_0 = u_n$ . Po identifikaci hranic válce pak budeme mít  $v_i = u_{(i+c) \bmod n}$  pro nějaké  $0 \leq c \leq n - 1$  a pro každé  $i$ . Prostřední řadu vrcholů si označme  $z_0, \dots, z_{n-1}$ .



Obrázek 4.24: Obdélník se dvěma řádky trojúhelníků.

Vybereme si libovolnou vodorovnou hranu, bez újmy na obecnosti  $z_0z_1$ . Tato hrana musí ležet na nějakém nekontrahovatelném trojúhelníku, a proto potřebujeme další dvě hrany, které vedou na dolní a horní stranu obdélníku. Ze symetrie můžeme předpokládat, že  $z_1$  je spojen hranou s horní stranou a  $z_0$  s dolní stranou obdélníku. Proto  $\{v_0, v_{n-1}\}$  (sousedé  $z_0$ ) a  $\{v_{n-c+1}, v_{n-c+2}\}$  (sousedé  $z_1$ ) se protínají. Z toho plyne  $1 \leq c \leq 3$ . V případě, že  $c = 1$  nebo  $c = 2$  dostáváme násobné hrany, proto  $c = 3$ . Musí existovat nekontrahovatelný trojúhelník obsahující hranu  $z_0v_0$ , proto  $\{v_{n-3}, v_{n-2}, z_{n-1}\}$  (sousedé  $z_0$ ) a  $\{z_2, z_3, v_1\}$  (sousedé  $v_0$ )

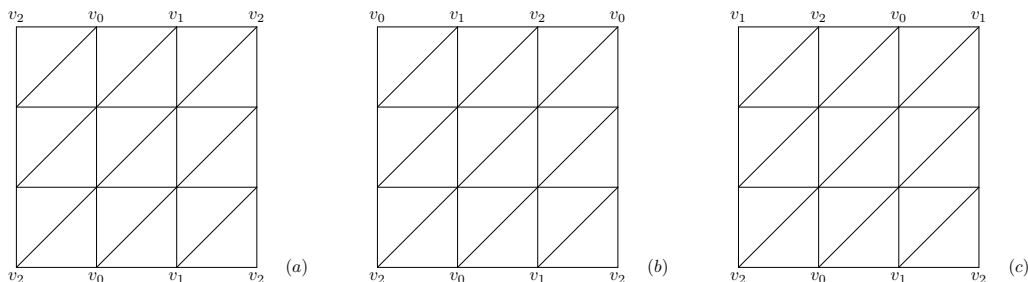
se protínají. Proto  $n = 3$  nebo  $n = 4$ . V případě  $n = 3$  dostaneme násobné hrany. Triangulaci pro případ  $n = 4$  nalezneme na obrázku 4.25.



Obrázek 4.25:  $n = 4$  (8 vrcholů) a  $c = 3$ .

### 4.3.3 Obdélník se třemi řádky trojúhelníků

Obdélník se třemi řádky musí mít jen 3 sloupce, protože by jinak žádná vodorovná hrana nemohla ležet na nekontrahovatelném trojúhelníku. Vrcholy na dolní straně obdélníku si označme  $v_0, v_1, v_2, v_3$ , vrcholy na horní straně si označme  $u_0, u_1, u_2, u_3$ . Při identifikaci svislých hran platí  $v_0 = v_3$  a  $u_0 = u_3$ . Existují přesně 3 způsoby, jak můžeme zidentifikovat hranice válce:  $v_0 = u_0$ ,  $v_0 = u_1$  a  $v_0 = u_2$ . Všechny tři možnosti vedou k ireducibilním triangulacím na obrázku 4.26.



Obrázek 4.26: 3 řádky a 3 sloupce.

## 4.4 Izomorfismy

V této podkapitole se budeme zabývat sumarizací výsledků hledání ireducibilních triangulací. Projdeme všechny grafy a u každého si určíme skóre. Grafy si rozdělíme do skupin podle skóre a v rámci skupin je otestujeme, zda nejsou izomorfní. Pokud je daná skupina izomorfní, pak si vybereme jako reprezentanta libovolný z grafů ve skupině a zahrneme ho do výsledků. Skupina velikosti 1 je automaticky zahrnuta do výsledků. Testování na izomorfismus provádíme s pomocí programu Sage.

Po odstranění izomorfních grafů provedeme porovnání s grafy v Lawrencenkově práci [7]. Ve třetím sloupci uvádíme označení grafu v jeho článku.

### 4.4.1 Grafy obsahující stupeň 4

Grafy, které mají stejné skóre jsou 4.9(b) a 4.9(c); 4.5, 4.7(b) a 4.9(a); 4.6(a) a 4.7(a); 4.3(c), 4.6(b) a 4.6(d). Izomorfní grafy jsou v tabulce přeškrtnuty.

Zjistili jsme, že existuje celkem 11 neizomorfních ireducibilních triangulací toru obsahujících vrchol stupně 4.

graf	skóre	index
4.10	(8, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 4)	$T_{21}$
4.9(b)	(8, 8, 8, 6, 6, 5, 5, 4, 4)	$T_{20}$
4.9(e)	<del>(8, 8, 8, 6, 6, 5, 5, 4, 4)</del>	
4.5	(8, 8, 7, 7, 6, 6, 4, 4, 4)	$T_{19}$
4.7(b)	<del>(8, 8, 7, 7, 6, 6, 4, 4, 4)</del>	
4.9(a)	<del>(8, 8, 7, 7, 6, 6, 4, 4, 4)</del>	
4.3(b)	(8, 8, 7, 6, 6, 5, 5, 5, 4)	$T_{17}$
4.3(d)	(8, 8, 6, 6, 6, 6, 6, 4, 4)	$T_{16}$
4.6(a)	(8, 7, 7, 7, 7, 5, 5, 4, 4)	$T_{18}$
4.7(a)	<del>(8, 7, 7, 7, 7, 5, 5, 4, 4)</del>	
4.3(c)	(8, 7, 7, 7, 6, 6, 5, 4, 4)	$T_{14}$
4.6(b)	<del>(8, 7, 7, 7, 6, 6, 5, 4, 4)</del>	
4.6(e)	<del>(8, 7, 7, 7, 6, 6, 5, 4, 4)</del>	
4.3(a)	(8, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 4)	$T_{15}$
4.6(c)	(7, 7, 7, 7, 7, 7, 4, 4, 4)	$T_{12}$
4.6(d)	(7, 7, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4)	$T_{13}$
4.11	(7, 7, 7, 7, 6, 5, 5, 4)	$T_5$

#### 4.4.2 Grafy minimálního stupně 5

Stejné skóre měly grafy 4.17(a), 4.17(b), 4.18(a) a 4.20(b).

Grafy 4.17(a), 4.17(b) a 4.18(a) jsou izomorfní. Do výsledku zahrneme graf 4.17(a). Zjistili jsme, že existuje právě 6 neizomorfních ireducibilních triangulací toru, které mají všechny vrcholy stupně alespoň 5.

graf	skóre	index
4.20(a)	(8, 8, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)	$T_8$
4.17(a)	(8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 5, 5)	$T_9$
4.17(b)	<del>(8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 5, 5)</del>	
4.18(a)	<del>(8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 5, 5)</del>	
4.20(b)	(8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 5, 5)	$T_{10}$
4.14(a)+(c)	(7, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 5)	$T_4$
4.18(b)	(7, 7, 6, 6, 6, 6, 6, 5, 5)	$T_{11}$
4.19	(7, 7, 6, 6, 6, 6, 5, 5)	$T_3$

#### 4.4.3 Grafy, jejichž všechny vrcholy mají stupeň 6

Našli jsme celkem 6 grafů se všemi stupni 6. Při testování na izomorfismus jsme zjistili, že grafy 4.23(c), 4.26(b), 4.26(c) jsou izomorfní. Grafy 4.23(b) a 4.25 jsou také izomorfní. Celkem existují 4 neizomorfní grafy, jejichž všechny vrcholy jsou stupně 6.

graf	počet vrcholů	indexy
4.23(a)	7	$T_1$
4.23(b)	8	$T_2$
4.25	8	
4.26(a)	9	$T_7$
4.23(c)	9	$T_6$
4.26(b)	9	
4.26(e)	9	

## 4.5 Závěr

Dokázali jsme, že existuje právě 21 ireducibilních triangulací toru. Ztotžňujeme se s Lawrencenkovými výsledky. Z těchto ireducibilních triangulací 11 obsahuje vrchol stupně 4, 6 triangulací má minimální stupeň vrcholů 5 a 4 triangulace, jejichž všechny vrcholy mají stupeň 6.

# Seznam použité literatury

- [1] MCKAY, Brendan D., WORMALD, Nicholas C.. Uniform Generation of Random Regular Graphs of Moderate Degree. *Journal of Algorithms* 11, 1990, pp. 52-67.
- [2] WORMALD, Nicholas C.. Generating random regular graphs, *Journal of Algorithms* 5, 1984, pp. 247-280.
- [3] SINCLAIR, A., JERRUM, M.. *Approximate Counting, Uniform Generation and Rapidly Mixing Markov Chains*. Internal report CSR-241-87, Department of Computer Science, University of Edinburgh, 1987.
- [4] BOLLOBÁS, Béla. *Random Graphs*. Academic Press, London, 1985.
- [5] TUTTE, Willian Thomas. A theory of 3-connected graphs. *Indagationes Mathematicae*, 1961, vol. 23, pp. 441-455.
- [6] Kotzig, A. Regularly connected trivalent graphs without non-trivial cuts of cardinality 3. *Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian. Math.* 21, 1968, pp. 1-14.
- [7] LAWRENCENKO, Serge. *Irreducible Triangulations of the Torus*. Graduate thesis. Moscow State University, 1984.
- [8] BRINKMANN, Gunnar, MCKAY, Brendan D.. *Fast generation of planar graphs*. Research supported in part by the Australian National University and Australian Research Council.
- [9] MANCA, Paolo. Generating All Planar Graphs Regular of Degree Four. *Journal of Graph Theory*, Vol. 3, 1979, pp. 357-364.
- [10] LEHEL, Jenő. Generating All 4-Regular Planar Graphs from the Graph of the Octahedron, *Journal of Graph Theory*, Vol.5, 1981, pp.324-426.
- [11] BARNETTE, David. On generating planar graphs. *Discrete Mathematics* 7, 1974, pp.199-208.
- [12] BROERSMA, H.J, DUIJVESTIJN, A.J.W., GÖBEL, F.. Generating All 3-Connecter 4-Regular Planar Graphs from the Octahedron Graph. *Journal of Graph Theory*, Vol.17, 1993, issue 5, pp. 613-620.
- [13] BOLLOBÁS, Béla. *Modern Graph Theory*. New York: Springer-Verlag, 1998. ISBN 0-387-98488-7.
- [14] DIESTEL, Reinhard. *Graph Theory*. New York: Springer-Verlag, 2000. ISBN 0-387-98976-5.
- [15] MATOUŠEK, Jiří, NEŠETŘIL, Jaroslav. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Praha: Nakladatelství Karolinum, 2007. ISBN 978-80-246-1411-3.
- [16] NAKAMOTO, Atsuhiko , OTA, Katsuhiko. Note on irreducible triangulations of surfaces. *Journal of the Graph Theory*, 1995, Vol.20, issue 2, pp. 227-233.

- [17] GAO, Zhicheng, RICHMOND, Bruce, THOMASSEN, Carsten. *Irreducible Triangulations and Triangular Embeddings on a Surface*. Research Report CORR 91-07. University of Waterloo, 1991.
- [18] JORET, Gwenaël, WOOD, David R.. Irreducible triangulations are small. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 100, 2010, issue 5, pp. 446-455.
- [19] MILLER., Gary L.. An Additivity Theorem for the Genus of a Graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 43, issue 1, pp. 25–47
- [20] ARCHDEACON, Dan. The Nonorientable Genus is Additive, *Journal of Graph Theory*, Vol.10, 1986, issue 3, pp. 363-383
- [21] STEINITZ, Ernst, RADEMACHER, Hans. *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*. Berlin: Springer, 1934.
- [22] BARNETTE, David. Generating the Triangulations of the Projective Plane. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 1982, Vol. 33, issue 3, pp. 222-230.
- [23] LAWRENCENKO, Serge, NEGAMI, Seiya. Irreducible Triangulations of the Klein Bottle. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 1995, Vol. 70, issue 3, pp. 265-291.
- [24] SULANKE, Thom. Note on the irreducible triangulations of the Klein bottle. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 2006, Vol. 96, issue 6, pp. 964-972.
- [25] NAKAMOTO, Atsuhiko, NEGAMI, Seiya. Diagonal transformations of graphs on closed surfaces. *Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ.*, Sec. I 40, 1993, pp. 71-97.
- [26] NAKAMOTO, Atsuhiko. Irreducible quadrangulations of the Klein bottle. *Yokohama Mathematical Journal*, Vol.43, 1995, pp. 125-139.
- [27] NAKAMOTO, Atsuhiko. Irreducible quadrangulations of the Torus. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 67, 1996, pp. 183-201.
- [28] ALTSHULER, Amos. Construction and enumeration of regular maps on the torus. *Discrete mathematics* 4, 1973, issue 3, pp. 201-217.