Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Dana Trkovská

Geometrická zobrazení

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Václav Kubát, CSc.

Studijní program: Fyzika, učitelství matematiky a fyziky pro střední školy

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu práce, RNDr. Václavu Kubátovi, CSc., za cenné rady a připomínky a za vstřícnost při konzultacích.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 10. 4. 2006 Dana Trkovská

Obsah

Název práce: Geometrická zobrazení
Autor: Dana Trkovská
Katedra (ústav): Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Václav Kubát, CSc.
e-mail vedoucího: kubat@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato diplomová práce je věnována geometrickým zobrazením a její text je tématicky určen studentům třetího ročníku učitelství matematiky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze jako studijní materiál. Lze ho ale použít také jako doplňkový materiál při vedení středoškolského semináře. Vychází z přednášek a cvičení předmětu Geometrie II.

S pojmem zobrazení se studenti seznamují již při výuce na základní a střední škole, proto je nejprve uveden přehled základních poznatků o geometrických zobrazeních v současných učebnicích matematiky.

Další část práce obsahuje teoretické poznatky o geometrických zobrazeních ve formě definic a vět včetně jejich důkazů. Velká část je věnována vlastnostem afinních zobrazení, speciálně pak zobrazením shodným a podobným. V závěru je probrána kruhová inverze, jakožto příklad zobrazení, které není afinní. Celý text je pro větší názornost doplněn řadou obrázků. Na teoretickou část navazuje sbírka příkladů, u kterých je uvedeno jejich řešení.

Klíčová slova: afinní zobrazení, samodružné body, samodružné směry, kruhová inverze

Title: Mappings in geometry
Author: Dana Trkovská
Department: Department of Mathematics Education
Supervisor: RNDr. Václav Kubát, CSc.
Supervisor’s e-mail address: kubat@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This diploma dissertation is dedicated to applications of geometrical mappings. It is intended as a tuitional material specially for students of the third year of the mathematics teachers programm at Mathematical and Physical faculty of Charles University in Prague. The text can be used as a supplementary material for a seminar at secondary school as well. It is based on lectures of the course Geometry II.

Students are familiar with the term mapping already during the lessons at elementary and secondary schools. Therefore in the diploma dissertation we at first give only a summary of basic knowledge about mappings in geometry, in the language of mathematics textbooks.

Next part of this thesis includes theoretical knowledge about mappings in geometry in the form of definitions and propositions together with their proofs. A great part is dedicated to characterization of affine mappings, specially isometries and similarities. At the end circular inversion is explained as an example of a mapping that is not affine. For better imagination the whole text is complemented with a number of figures. Theoretical part is followed by a collection of exercises. Of course, solutions of all exercises are given.

Keywords: affine mapping, fixed points, invariant directions, circular inversion

Úvod

Tématem této diplomové práce jsou geometrická zobrazení.

Text představuje studijní materiál, který by mohl být určen např. studentům třetího ročníku učitelství matematiky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Vychází z přednášek a cvičení předmětu Geometrie II vedených RNDr. Václavem Kubátem, CSc. Text by ale bylo možno použít i jako doplňkový materiál při vedení středoškolského semináře.

S pojmem zobrazení se studenti setkávají v geometrii již při výuce na základní a střední škole, proto jsou v první kapitole uvedeny základní poznatky o geometrických zobrazeních v současných učebnicích matematiky. Definice uvedené v této kapitole jsou citace z příslušných učebnic.

Druhá kapitola obsahuje zpracované teoretické poznatky o geometrických zobrazeních, se kterými se studenti seznamují v předmětu Geometrie II. Jsou zde uvedeny příslušné definice a věty včetně jejich důkazů. První dvě podkapitoly, Dělicí poměr a Lineární kombinace bodů, jsou přípravné a jejich zvládnutí je pro pochopení dalšího textu podstatné.

V dalších podkapitolách jsou probrány základní vlastnosti afinních zobrazení, speciální pozornost je pak věnována shodným a podobným zobrazením v eukleidovských prostorech. Poslední podkapitola je věnována kruhové inverzi, jakožto příkladu zobrazení, které není afinní.

Celý text je pro větší názornost doplněn řadou obrázků, autorka se snažila průběžně ukazovat na souvislosti mezi středoškolským a vysokoškolským učivem.

Třetí kapitola představuje sbírku příkladů k přednášce Geometrie II.

Všeobecně lze říci, že příkladů k příslušné teorii, které by poskytovaly náměty nad rámec učiva střední školy, není mnoho. Hlavně však se doposud „nevyskytovaly pohromadě“, bylo třeba je vyhledávat v různých zdrojích. Autorka se pokusila soustředit je do jednoho textu, sjednotit u nich terminologii a samozřejmě uvést jejich řešení – tzn. zkontrolovat uvedené a spočítat neuvedené výsledky a vlastní příklady vymyslet tak, aby „hezky vycházely“.

Příklady označené [S1] a [S2] byly převzaty z učebnic Geometrie I a II kolektivu autorů v čele s M. Sekaninou. Tyto příklady byly přepočítány a na některých místech drobně upraveny. Autorem příkladů označených [VK] je vedoucí práce, RNDr. Václav Kubát, CSc. Jedná se o příklady, které byly v minulých letech zadávány mj. při písemné zkoušce z Geometrie II. U těchto příkladů autorka spočítala a zveřejnila výsledky. Příklady označené [DT] vytvořila sama autorka.

K dobrému pochopení tohoto studijního materiálu je nutná znalost základních pojmů zavedených v přednášce Geometrie I. Jedná se zejména o pojmy afinní a eukleidovský prostor, zaměření afinního prostoru, lineární soustava souřadnic, nadrovina.

Sbírka příkladů předpokládá znalosti z analytické geometrie v rozsahu střední školy a znalosti početních technik předmětu Geometrie I.

1. Přehled učiva o geometrických zobrazeních v učebnicích matematiky pro základní a střední školy

1.1 Učebnice pro základní školy

S pojmem zobrazení se žáci základních škol resp. nižších tříd víceletých gymnázií poprvé seznamují při výuce v 6. ročníku resp. v primě. Učebnice [1] zavádí zobrazení z množiny A do množiny B jako předpis, podle kterého je každému prvku množiny A přiřazen nejvýše jeden prvek množiny B. V učebnici [2] je definováno geometrické zobrazení v rovině, které přiřazuje bodům této roviny jiné, popř. tytéž body téže roviny, a to podle daného předpisu. Speciálně se rozlišují dva typy zobrazení – shodnost a podobnost. Obě uvedená zobrazení se na této úrovni zkoumají především v rovině.

Motivačním příkladem je v [1], [3], [6], [11] a [12] zavedení pojmu *shodných útvarů*, jakožto útvarů, které se po přemístění kryjí a mají tedy stejný tvar a velikost. Tento pojem je ilustrován na případu shodných úseček, které mají stejnou délku, a shodných trojúhelníků, které mají stejné délky odpovídajících si stran a stejné velikosti odpovídajících si vnitřních úhlů.

Shodné zobrazení (stručněji shodnost) je v [1] následně definováno jako zobrazení, které každým dvěma bodům A, B přiřazuje body A', B' tak, že $|A'B'| = |AB|$.

V učebnici [2] je zvolen opačný postup. Nejprve je výše uvedeným způsobem definováno shodné zobrazení a následně jsou za shodné prohlášeny ty útvary, které si v daném shodném zobrazení odpovídají.

Uvedené učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia také zavádějí pojem *samodružný bod* pro bod, který při daném zobrazení splývá se svým obrazem.

Jako speciální případy shodných zobrazení bývají (v uvedeném pořadí) probírány: osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí a otočení. Přitom posunutí a otočení jsou zařazeny pouze v učebnicích [1], [11] a jako rozšiřující učivo v učebnicích [4], [9]. Učebnice [1] a [3] zavádějí navíc ještě rovinovou souměrnost (zrcadlení). V následujícím odstavci jsou uvedeny nejběžnější způsoby definic použité např. v [1].

Osová souměrnost se nazývá zobrazení určené přímkou o, ve kterém
1. každému bodu $X \in o$ je přiřazen bod $X' = X$,
2. každému bodu $X \notin o$ je přiřazen bod X' takový, že přímka XX' je kolmá k přímce o a průsečík přímek XX' a o je střed úsečky XX'.

Středová souměrnost se nazývá zobrazení určené bodem S, ve kterém
1. obrazem bodu S je opět bod S,
2. každému bodu $X \neq S$ je přiřazen bod X' takový, že bod S je středem úsečky XX'.

Posunutí se nazývá zobrazení určené orientovanou úsečkou PP', ve kterém je každému bodu X přiřazen bod X' takový, že orientované úsečky PP' a XX' jsou shodné, rovnoběžné a shodně orientované.

Otočení se nazývá zobrazení určené bodem S a orientovaným úhlem α, ve kterém
1. obrazem bodu S je opět bod S,
2. obrazem libovolného bodu $X \neq S$ je takový bod X', že $|X'S| = |XS|$ a orientované úhly α a XSX' jsou shodné a shodně orientované.

Rovinová souměrnost se nazývá zobrazení určené rovinou ω, ve kterém
1. každému bodu $X \in \omega$ je přiřazen bod $X' = X$,
2. každému bodu $X \notin \omega$ je přiřazen bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k rovině ω a průsečík přímky XX' s rovinou ω je střed úsečky XX'.

Učebnice [12] a [13] pro víceletá gymnázia definují osovou a středovou souměrnost obdobným způsobem jako učebnice [1], pouze je osová souměrnost více prezentována jako „překlopení" roviny podél dané přímky a středová souměrnost jako otočení roviny kolem daného bodu o 180°. Trochu jiným způsobem ale přistupuje učebnice [13] k definici posunutí:

Posunutí v rovině, které přemísťuje daný bod P do daného bodu Q, je určeno orientovanou úsečkou PQ. Pro obraz Y libovolného bodu X roviny platí:
1. Pokud bod X neleží na přímce PQ, pak je bod Y vrcholem rovnoběžníku $PXYQ$.
2. Pokud bod X leží na přímce PQ, leží na ní i bod Y, a to tak, že $|XY| = |PQ|$ a jedna z polopřímek PQ, XY je podmnožinou druhé.

V ostatních učebnicích (např. [3], [4], [6], [7], [9], [11]) se od těchto způsobů definic upouští a jednotlivá zobrazení jsou zaváděna na konkrétních příkladech ilustrujících postup při konstrukci obrazů.

Ve všech učebnicích je speciální pozornost věnována konstrukcím obrazů různých geometrických útvarů v daných zobrazeních, v případě osové a středové souměrnosti se zkoumají také osově a středově souměrné útvary.

V učebnici [1] je středově souměrný útvar podle bodu S charakterizován jako útvar, který se ve středové souměrnosti se středem S zobrazí sám na sebe. Útvar osově souměrný podle přímky o je takový útvar, který se v osové souměrnosti s osou o zobrazí sám na sebe.

Učebnice [12] nazývá středově souměrným útvarem takový útvar, pro který existuje bod S mající tu vlastnost, že při otočení o 180° kolem bodu S přejde daný útvar sám v sebe.

Učebnice [4], [9] a [12] zavádějí také pojmy *přímo shodné* a *nepřímo shodné* útvary následujícím způsobem na základě představ o přemísťování útvarů tak, aby se kryly:

O dvou shodných útvarech budeme říkat, že jsou přímo shodné, když je při přemísťování v rovině (např. pomocí průsvitky) pouze posunujeme a otáčíme. Nepřímo shodné útvary při přemísťování posunujeme, otáčíme a jeden z nich musíme převrátit v prostoru.

Učebnice [9] navíc zdůrazňuje, že dva útvary mohou být současně přímo i nepřímo shodné. Jako příklad uvádí útvary osově souměrné.

Učebnice [2] rozlišuje přímo shodné útvary na základě shodné orientace postupu mezi vzory a odpovídajícími obrazy buď ve směru, nebo proti směru pohybu hodinových ručiček.

S podobným zobrazením bývají žáci seznamováni při výuce v 9. ročníku resp. v kvartě. Také podobné zobrazení je v [1], [8], [11] a [14] nejprve ilustrováno na případu *podobných útvarů*, jakožto útvarů, které mají stejný poměr vzdáleností odpovídajících si bodů. Jako příklad jsou uváděny podobné trojúhelníky, které mají stejné poměry délek odpovídajících si stran a stejné velikosti odpovídajících si úhlů.

V učebnici [5] jsou dva geometrické útvary označeny jako podobné, pokud je možné jeden z nich zobrazit pomocí čtvercové sítě tak, že získáme dvojici shodných útvarů. Dále je ukázáno, že dva podobné útvary mají stejný poměr délek všech dvojic odpovídajících si úseček.

Podobné zobrazení (stručněji podobnost) je v [1] následně definováno jako zobrazení, které každým dvěma bodům A, B přiřazuje body A', B' tak, že $|A'B'| = k\,|AB|$, kde kladné číslo k (tzv. poměr podobnosti) je pro všechny dvojice bodů stejné. Přitom shodnost je chápána jako zvláštní případ podobnosti pro $k = 1$.

Učebnice [2] opět volí opačný postup. Nejprve je výše uvedeným způsobem definováno podobné zobrazení a následně jsou za podobné prohlášeny ty útvary, které si v daném podobném zobrazení odpovídají.

Učebnice [14] také v analogii s přímou a nepřímou shodností zavádí pojmy *přímá a nepřímá podobnost*. Pro rozhodování o přímé či nepřímé podobnosti formuluje tzv. „pravidlo směru šipek“, které ilustruje na příkladu dvou podobných trojúhelníků následujícím způsobem:

Zvolíme-li pořadí vrcholů jednoho z trojúhelníků šipkami a šipky udávající pořadí jejich odpovídajících obrazů jsou orientovány stejným směrem, jedná se o přímou podobnost.

Speciální pozornost je věnována zjišťování, zda jsou nějaké geometrické útvary podobné. Nejčastějším typem úloh, které využívají podobnosti trojúhelníků, je na této úrovni dělení úseček na daný počet shodných dílů nebo dělení úseček v daném poměru. Dále se objevuje využití podobnosti v praxi, např. při zjišťování výšky věže na základě znalosti délky jejího stínu nebo při určování vzdálenosti dvou míst v terénu, mezi nimiž je překážka znemožňující přímé měření. Podobnost je využívána také při práci s měřítkem.

Učebnice [1], [5] a [10] uvádějí jako rozšiřující učivo na závěr kapitoly o podobnosti také stejnolehlost jako speciální případ podobného zobrazení. V následujícím odstavci je uvedena definice použitá v [1].

Stejnolehlost se nazývá zobrazení určené bodem S a číslem $k \neq 0$, ve kterém
1. obrazem bodu S je opět bod S,
2. každému bodu $X \neq S$ je přiřazen bod X' tak, že platí $|SX'| = |k| \cdot |SX|$, přitom pro $k > 0$ leží bod X' na polopřímce SX a pro $k < 0$ je bod X' bodem polopřímky opačné k polopřímce SX.

Bod S se nazývá střed stejnolehlosti, číslo $k \neq 0$ se nazývá koeficient stejnolehlosti.

Učebnice [5] a [10] volí pro zavedení stejnolehlosti méně formální přístup, stejnolehlost je ilustrována na speciálním případu dvou stejnolehlých geometrických útvarů. Je ukázáno, že spojnice sobě odpovídajících bodů procházejí středem stejnolehlosti a sobě odpovídající přímky jsou rovnoběžné.

V učebnici [5] je navíc blíže uveden vztah mezi stejnolehlostí a podobností – poměr podobnosti je roven absolutní hodnotě koeficientu stejnolehlosti.

1.2 Učebnice pro střední školy

Středoškolské učebnice matematiky určené speciálně pro gymnázia uvádějí samostatně zobrazení v rovině a zobrazení v prostoru.

V učebnici planimetrie [15] je zobrazení v rovině definováno jako předpis, který každému bodu X roviny přiřazuje právě jeden bod X' roviny. Zavádí se pojmy samodružný bod a samodružný útvar zobrazení. Poprvé se objevuje také pojem identita – rozumí se jí zobrazení, při kterém je každý bod samodružný.

V samostatných kapitolách jsou postupně probírána shodná zobrazení, stejnolehlost a jako rozšiřující učivo také podobná zobrazení.

Shodným zobrazením v rovině se rozumí zobrazení, ve kterém je obrazem každé úsečky AB úsečka $A'B'$ s ní shodná. Analogicky s učebnicemi [4], [9] a [12] se zavádí pojmy přímá a nepřímá shodnost. Bez důkazu je uvedeno tvrzení, že každé shodné zobrazení je prosté.

Podrobněji jsou probrána následující shodná zobrazení – osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí a otočení. Definice těchto zobrazení na středoškolské úrovni zcela korespondují s definicemi uvedenými např. v [1] – viz str. č. 7.

Nově zavedeným pojmem je zobrazení inverzní k danému zobrazení. Úkolem je určit zobrazení inverzní k dané osové a středové souměrnosti, posunutí i otočení.

Dále je zdůrazňováno, že např. přímo z definice plyne, že osová souměrnost je jednoznačně určena osou souměrnosti, ale může být dána také dvojicí různých bodů X, X', jestliže každý z nich je obrazem druhého v této osové souměrnosti. Osou souměrnosti je potom osa úsečky XX'. Podobně lze zadat také středovou souměrnost.

Oproti učebnicím pro ZŠ je patrný výrazný posun v obtížnosti řešených úloh. Nastává přechod od úloh vyžadujících pouhou konstrukci osově resp. středově souměrných útvarů k úlohám vyžadujícím větší představivost a rozbor dané situace. Příkladem je třeba využití osové souměrnosti při řešení některých úloh o odrazu a o nejkratší spojnici dvou bodů lomenou čárou. Osová souměrnost je také využívána k sestrojení příčky dvou útvarů, která je k dané přímce kolmá a je touto přímkou půlena nebo ke konstrukci trojúhelníku, je-li jedním ze zadaných prvků součet nebo rozdíl jeho stran. Rovněž středová souměrnost je využívána mnohostranněji. Je ukázáno užití středové souměrnosti při důkazech různých tvrzení nebo při konstrukci příčky dvou útvarů, která je daným bodem půlena.

Také posunutí a otočení jsou definována shodně s učebnicí [1]. Pouze jsou na středoškolské úrovni precizněji zavedeny pojmy orientovaná úsečka, orientovaný úhel a smysl orientace, které byly dříve zavedeny pouze na základě představ a uvedením příkladů. Zároveň se zdůrazňuje souvislost otočení s identitou a středovou souměrností. Posunutí na středoškolské úrovni umožňuje řešit řadu konstrukčních úloh, otočení lze užít jak v konstrukčních, tak i v důkazových úlohách.

Zcela novým učivem, uvedeným v [15] pouze jako učivo rozšiřující, je skládání shodných zobrazení zavedené následujícím způsobem:

Jsou dána dvě shodná zobrazení Z_1, Z_2 a X je libovolný bod (roviny); $Z_1: X \to X'$, $Z_2: X' \to X''$. Zobrazení $Z: X \to X''$ se nazývá zobrazení složené ze zobrazení Z_1, Z_2 v tomto pořadí.

Na příkladu je ukázáno, že skládání zobrazení není obecně komutativní. Speciální pozornost je věnována skládání dvou osových souměrností s ohledem na různé vzájemné polohy os. V následujícím odstavci jsou uvedeny odvozené závěry.

Složením dvou osových souměrností, jejichž osami jsou totožné přímky, je identita.

Složením dvou osových souměrností, jejichž osami jsou přímky rovnoběžné různé, je posunutí. Jeho délka je rovna dvojnásobku vzdálenosti daných os, jeho směr je kolmý k oběma osám a je dán jejich pořadím.

Složením dvou osových souměrností, jejichž osami jsou přímky různoběžné, je otočení. Jeho středem je průsečík daných os, velikost úhlu otočení je rovna dvojnásobku velikosti úhlu os. Smysl otočení je určen pořadím os.

V učebnici [15] je také na příkladu skládání tří osových souměrností zavedeno nové shodné zobrazení, kterým je posunutá souměrnost. Bez důkazu je uvedeno, že libovolné shodné zobrazení v rovině lze složit z jedné, dvou nebo tří osových souměrností.

Také stejnolehlost je v učebnici [15] definována shodně s učebnicí [1]. Větší prostor je věnován konstrukcím obrazů různých geometrických útvarů v zadané stejnolehlosti a hledání stejnolehlosti, ve které je obrazem zadaného útvaru jiný zadaný útvar. Zdůrazňuje se souvislost stejnolehlosti a identity pro $k = 1$ a stejnolehlosti a středové souměrnosti pro $k = -1$. Samostatná kapitola je věnována stejnolehlosti kružnic a na jejím základě konstrukci společné tečny dvou kružnic.

Na středoškolské úrovni se objevuje užití stejnolehlosti v důkazových a konstrukčních úlohách. Pomocí stejnolehlosti je např. dokázáno, že jak těžnice, tak i výšky v trojúhelníku procházejí vždy jedním bodem. Stejnolehlost je využívána také v případě, že body nebo přímky potřebné pro konstrukci leží mimo nákresnu.

Zavedení podobného zobrazení v učebnici [15] se neliší od postupu použitého např. v učebnici [1]. Je zde navíc uvedena souvislost podobnosti a stejnolehlosti – stejnolehlost s koeficientem k je podobnost s poměrem podobnosti $|k|$. Bez důkazu jsou nově uvedena tvrzení, že každé podobné zobrazení je prosté a že každou podobnost v rovině lze rozložit ve stejnolehlost a shodnost.

Učebnice stereometrie [16] navazuje na učebnici planimetrie [15]. Zobrazení v rovině rozšiřuje na zobrazení v prostoru a zkoumá shodná a podobná zobrazení v prostoru.

Shodné zobrazení v prostoru definuje analogicky jako shodné zobrazení v rovině, pouze místo o bodech v rovině mluví o bodech v prostoru. Bez důkazu je uvedeno, že také v prostoru je každé shodné zobrazení prosté. Učebnice [16] zdůrazňuje, že zatímco v rovině si každou shodnost můžeme představit jako přemístění, v prostoru můžeme vhodným přemístěním ztotožnit jen přímo shodné útvary.

V samostatných kapitolách jsou blíže vyloženy rovinová souměrnost, středová a osová souměrnost, posunutí a otočení. Definice rovinové souměrnosti odpovídá definici použité v [1], ostatní výše jmenovaná zobrazení jsou definována obdobným způsobem jako v rovině.

Dále je v učebnici [16] zmíněno, že rovinová souměrnost je nepřímá shodnost, která má obdobný význam jako osová souměrnost v rovině. Všechna shodná zobrazení v prostoru se dají složit z konečného počtu rovinových souměrností.

Jako rozšiřující učivo je v [16] zařazeno skládání shodných zobrazení v prostoru. Podrobněji je probráno skládání dvou rovinových souměrností s ohledem na různé vzájemné polohy obou rovin souměrnosti. V následujícím odstavci jsou uvedeny odvozené závěry.

Složením dvou rovinových souměrností, jejichž roviny souměrnosti splývají, je identita.

Zobrazení složené ze dvou rovinových souměrností s rovinami souměrnosti rovnoběžnými různými je posunutí v prostoru. Jeho délka je rovna dvojnásobku vzdálenosti daných rovin souměrnosti, jeho směr je kolmý k oběma rovinám souměrnosti a je dán jejich pořadím.

Zobrazení složené ze dvou rovinových souměrností s různoběžnými rovinami souměrnosti je otočení kolem přímky v prostoru. Osou otočení je průsečnice daných rovin souměrnosti, velikost úhlu otočení je rovna dvojnásobku odchylky rovin souměrnosti, smysl otočení je určen pořadím rovin souměrnosti.

Bez důkazu je dále uvedeno, že každé shodné zobrazení v prostoru se dá složit z jedné, dvou, tří nebo čtyř rovinových souměrností. Jako příklad je uveden další typ shodného zobrazení v prostoru – posunuté otočení, které vznikne složením otočení kolem osy a posunutí ve směru osy otočení, tj. složením čtyř rovinových souměrností.

Také podobné zobrazení v prostoru definuje učebnice [16] stejným způsobem jako učebnice [15] v rovině. Jako základní podobné zobrazení je opět uvedena stejnolehlost. Bez důkazu je také uvedeno, že každé podobné zobrazení v prostoru vznikne složením stejnolehlosti a nějakého shodného zobrazení.

2. Geometrická zobrazení – učební text

2.1 Dělicí poměr

Uvažujme afinní přímku $\boldsymbol{A}_1$ se zaměřením $\boldsymbol{V}_1$. Zvolme na přímce tři body A, B, C tak, aby $A \neq B$ a $B \neq C$ (uvědomte si, že odtud nevyplývá $A \neq C$). Ve $\boldsymbol{V}_1$ zvolme jako generátor nenulový vektor $\boldsymbol{u}$. Potom můžeme psát $C - A = x\,\boldsymbol{u}$, $C - B = y\,\boldsymbol{u}$.

Díky předpokladu $B \neq C$ je $y \neq 0$. Lze tedy utvořit zlomek $\dfrac{x}{y}$ a nazvat ho dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B.

Definice 1: Dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B nazveme číslo $(C;\, A,\, B) = \dfrac{x}{y}$.

Je vidět, že v případě, že by bylo $A = B$, byl by dělicí poměr každého bodu C přímky $\boldsymbol{A}_1$ (různého od bodu B) roven jedné. Proto jsme dělicí poměr definovali jen pro případ, že $A \neq B$.

Ověřme nyní, že uvedená definice dělicího poměru je opravdu korektní, tj. číslo $\dfrac{x}{y}$ závisí skutečně pouze na bodech A, B, C a nezávisí na volbě reprezentanta $\boldsymbol{u}$. Zvolme tedy jiný nenulový vektor $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_1$. Vektor $\boldsymbol{u}$ zřejmě bude jistým násobkem vektoru $\boldsymbol{v}$, tj. $\boldsymbol{u} = k\,\boldsymbol{v}$, $k \neq 0$. Potom lze psát $C - A = x\,\boldsymbol{u} = x\,(k\,\boldsymbol{v}) = (x\,k)\,\boldsymbol{v}$, $C - B = y\,\boldsymbol{u} = y\,(k\,\boldsymbol{v}) = (y\,k)\,\boldsymbol{v}$, a tedy

$$(C; A, B) = \frac{x\,k}{y\,k} = \frac{x}{y}.$$

Ukažme si ještě jedno jednoduché vyjádření dělicího poměru. Kdybychom za vektor $\boldsymbol{u}$ zvolili přímo vektor $C - B$, tj. $\boldsymbol{u} = C - B$, pak by bylo $y = 1$ a $(C;\, A,\, B) = x$. Dělicí poměr x bodu C vzhledem k bodům A, B by byl určen rovností $C - A = x\,(C - B)$ a vyjadřoval by, jakým násobkem vektoru $C - B$ je vektor $C - A$.

Uvědomte si ale, že zápis

$$(C; A, B) = \frac{C - A}{C - B}$$

nemá smysl. Podíl dvou vektorů vůbec není definován.

Zvolme nyní na přímce $\boldsymbol{A}_1$ lineární soustavu souřadnic (LSS) danou repérem $\langle P,\, \boldsymbol{u}\rangle$. Označme příslušné souřadnice bodů $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$. Potom $A = P + a\,\boldsymbol{u}$, $B = P + b\,\boldsymbol{u}$, $C = P + c\,\boldsymbol{u}$, $C - A = (c - a)\,\boldsymbol{u}$, $C - B = (c - b)\,\boldsymbol{u}$, a tedy

$$(C; A, B) = \frac{c - a}{c - b} \quad (\text{díky } C \neq B \text{ je } c - b \neq 0).$$

Tento podíl jakožto poměr dvou reálných čísel již definovaný je.

Dělicí poměr můžeme stejným způsobem definovat také pro body jednorozměrného podprostoru $\boldsymbol{A'_1}$ afinního prostoru $\boldsymbol{A_n}$. Výše uvedený vztah potom platí i pro dělicí poměr tří bodů na přímce v prostoru $\boldsymbol{A_n}$. Dokažme si jeho platnost v následující větě.

Věta 1: Nechť $\boldsymbol{A_n}$ je afinní prostor, $\boldsymbol{A'_1} = \{Q, \boldsymbol{v}\}$ je přímka v $\boldsymbol{A_n}$, A, B, C jsou body přímky $\boldsymbol{A'_1}$, přičemž $A \neq B$ a $B \neq C$. Nechť ve zvolené LSS je $Q = [q_1, \dots , q_n]$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots , v_n)$. Jsou-li $A = [a_1, \dots , a_n]$, $B = [b_1, \dots , b_n]$, $C = [c_1, \dots , c_n]$, potom

$$(C; A, B) = \frac{c_j - a_j}{c_j - b_j} \quad \text{pro každé } j, \text{pro které } v_j \neq 0.$$

***Důkaz*:** Body A, B, C můžeme ve zvolené LSS obecně zapsat jako
$A = Q + \alpha\, \boldsymbol{v}$, $B = Q + \beta\, \boldsymbol{v}$, $C = Q + \gamma\, \boldsymbol{v}$.
Potom $C - A = (\gamma - \alpha)\, \boldsymbol{v}$,
$C - B = (\gamma - \beta)\, \boldsymbol{v}$,

$$(C; A, B) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} \ .$$

Vztahy $A = Q + \alpha\, \boldsymbol{v}$, $B = Q + \beta\, \boldsymbol{v}$, $C = Q + \gamma\, \boldsymbol{v}$ můžeme ve zvolené LSS rozepsat v souřadnicích jako $a_j = q_j + \alpha\, v_j$, $b_j = q_j + \beta\, v_j$, $c_j = q_j + \gamma\, v_j$ pro každé $j = 1, \dots , n$. Je-li $v_j \neq 0$, můžeme vyjádřit

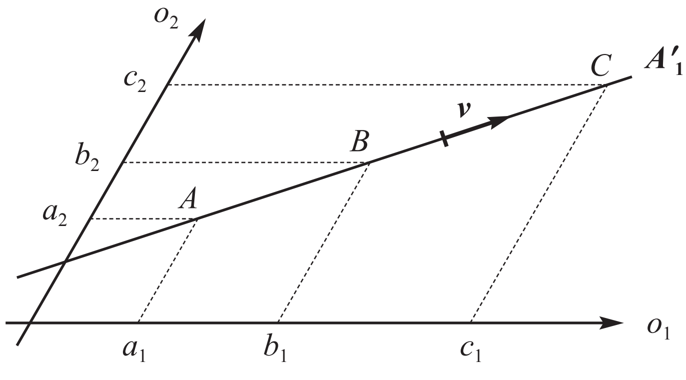
$$\alpha = \frac{a_j - q_j}{v_j}, \quad \beta = \frac{b_j - q_j}{v_j}, \quad \gamma = \frac{c_j - q_j}{v_j}.$$

Dosazením do vztahu pro dělicí poměr $(C; A, B)$ získáme rovnost

$$(C; A, B) = \frac{c_j - q_j - (a_j - q_j)}{c_j - q_j - (b_j - q_j)} = \frac{c_j - a_j}{c_j - b_j}.$$

Ilustrujme uvedenou větu na příkladu přímky $\boldsymbol{A'_1}$ v afinní rovině $\boldsymbol{A_2}$ (viz obr. č. 1).

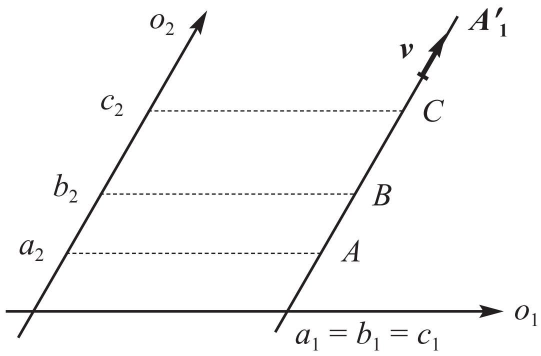
Nechť A, B, C jsou body na přímce splňující $A \neq B$ a $B \neq C$. Zvolme v $\boldsymbol{A_2}$ kosoúhlou LSS určenou osami o_1, o_2 a promítněme postupně do obou těchto os body A, B, C vždy rovnoběžně s druhou osou. Označme získané souřadnice bodů $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$.



Obrázek č. 1

Věta 1 potom říká, že dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B je roven dělicímu poměru průmětů těchto bodů do obou os.

Generátor $\boldsymbol{v}$ přímky $\boldsymbol{A'_1}$ měl ve výše uvedeném případě ve zvolené LSS obě souřadnice nenulové: $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$. Kdyby například první souřadnice vektoru $\boldsymbol{v}$ byla nulová, tj. $v_1 = 0$, $v_2 \neq 0$ (viz obr. č. 2), pak by průměty bodů do osy o_1 splynuly a dělicí poměr by pro ně nebyl definován.



Obrázek č. 2

Věta 1 také jinými slovy říká, že při rovnoběžném promítání z jedné přímky na druhou se dělicí poměr zachovává. (Při středovém promítání z přímky na jinou přímku se dělicí poměr obecně nezachovává – zachovává se pouze v případě dvou rovnoběžných přímek.)

Věta 2: Nechť jsou v afinním prostoru $\boldsymbol{A_n}$ dány body A, B, $A \neq B$.
Potom zobrazení, které každému bodu C přímky $\{A, B\}$ různému od B přiřadí dělicí poměr $(C; A, B)$, je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\{A, B\} - \{B\}$ na množinu $\boldsymbol{R} - \{1\}$.

***Důkaz*:** Na přímce $p = \{A, B\}$ zvolme LSS. Získáme tak vzájemně jednoznačné zobrazení $p \to \boldsymbol{R}$, které každému bodu přímky p přiřadí jeho souřadnici. V uvedeném zobrazení nechť platí $A \to [a]$, $B \to [b]$, $C \to [c]$.

Vytvořme nyní zobrazení, které každému bodu $C \in \{A, B\}$, $C \neq B$, přiřadí dělicí poměr $(C; A, B)$, tj. zobrazení

$$C \to d = \frac{c-a}{c-b}.$$

Získáme tak lineární lomenou funkci

$$d\,(c) = \frac{c-a}{c-b} = 1 + \frac{b-a}{c-b}\text{, jejímž grafem je hyperbola (nakreslete).}$$

Tato funkce představuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\boldsymbol{R} - \{b\}$ na množinu $\boldsymbol{R} - \{1\}$. Tím je důkaz proveden.

Nyní budeme zkoumat, jak se dělicí poměr tří bodů změní, pokud zaměníme jejich pořadí. Uvažujme tři po dvou různé body A, B, C afinní přímky $\boldsymbol{A}_1$ (tj. $A \neq B$, $B \neq C$, $C \neq A$). Nechť platí $(C; A, B) = d$. Naším úkolem je určit, čemu jsou pak rovny dělicí poměry $(C; B, A)$, $(A; B, C)$, $(A; C, B)$, $(B; A, C)$ a $(B; C, A)$.

Zvolme na přímce LSS, ve které $A = [a]$, $B = [b]$ a $C = [c]$. Potom $d = \dfrac{c-a}{c-b}$.

Odtud dostáváme, že $(C; B, A) = \dfrac{c-b}{c-a} = \dfrac{1}{d}$.

Vidíme, že transpozice bodů na druhém a třetím místě se projeví převrácenou hodnotou dělicího poměru.

Pomocí algebraických úprav vyjádříme také zbývající dělicí poměry:

$$(A; B, C) = \frac{a-b}{a-c} = \frac{b-a}{c-a} = \frac{c-a-(c-b)}{c-a} = \frac{c-a}{c-a} - \frac{c-b}{c-a} = 1 - \frac{1}{d} = \frac{d-1}{d},$$

$$(B; A, C) = \frac{b-a}{b-c} = \frac{a-b}{c-b} = \frac{c-b-(c-a)}{c-b} = \frac{c-b}{c-b} - \frac{c-a}{c-b} = 1-d.$$

Z výše uvedeného potom plyne, že

$$(A; C, B) = \frac{d}{d-1},$$

$$(B; C, A) = \frac{1}{1-d}.$$

Věta 3: Je-li S střed úsečky AB, pak $(S; A, B) = -1$.

***Důkaz*:** Střed S úsečky AB je definován vztahem $S = A + \dfrac{1}{2}(B - A)$.

Označme $(S; A, B) = d$. Potom pro dělicí poměr d platí $S - A = d\,(S - B)$.
Protože střed S úsečky AB je totožný se středem úsečky BA, je také

$$S = B + \frac{1}{2}(A - B).$$

Z prvního vztahu pro střed úsečky vyjádříme $S - A = \dfrac{1}{2}(B - A)$,

druhý vztah obdobně přepíšeme jako $S - B = \dfrac{1}{2}(A - B)$.

Dosazením obou výrazů do vztahu pro dělicí poměr získáme rovnost

$$\frac{1}{2}(B - A) = d \cdot \frac{1}{2}(A - B), \text{ odkud } d = -1.$$

Zároveň také platí, že $(S; B, A) = -1$ (porovnejte s předchozím odstavcem).

Lemma 1: Nechť jsou dány body B, C, D, E v afinním prostoru $\boldsymbol{A_n}$.
Potom $B - C = D - E$ právě tehdy, když $S_{CD} = S_{BE}$.

***Důkaz*:** Věta má charakter ekvivalence, je proto třeba dokázat dvě implikace.

(1) Předpokládejme, že $B - C = D - E$. Postupnými úpravami dostaneme

$$S_{CD} = C + \frac{1}{2}(D - C) = [B + (E - D)] + \frac{1}{2}\{D - [B + (E - D)]\} =$$

$$= B + (E - D) + \frac{1}{2}[(D - B) - (E - D)] = B + (E - D) + \frac{1}{2}(D - B) - \frac{1}{2}(E - D) =$$

$$= B + \frac{1}{2}(E - D) + \frac{1}{2}(D - B) = B + \frac{1}{2}(E - B) = S_{BE}\ .$$

(2) Předpokládejme, že platí rovnost $S_{CD} = S_{BE}$. Postupnými úpravami dostaneme

$$C + \frac{1}{2}(D - C) = B + \frac{1}{2}(E - B), \quad \Big/ + \frac{1}{2}(B - D)$$

$$C + \frac{1}{2}(D - C) + \frac{1}{2}(B - D) = B + \frac{1}{2}(E - B) + \frac{1}{2}(B - D),$$

$$C + \frac{1}{2}(B - C) = B + \frac{1}{2}(E - D),$$

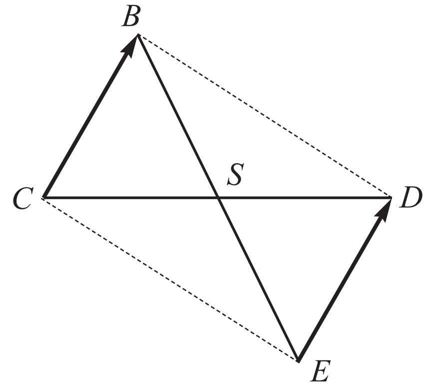
$$(C - B) + \frac{1}{2}(B - C) = \frac{1}{2}(E - D),$$

$$-(B - C) + \frac{1}{2}(B - C) = \frac{1}{2}(E - D),$$

$$-\frac{1}{2}(B - C) = -\frac{1}{2}(D - E),$$

$$B - C = D - E\,.$$

Uvedené lemma v podstatě (v terminologii střední školy) říká, že dvě orientované úsečky ***CB*** a ***ED*** určují stejný vektor právě tehdy, když mají úsečky CD a BE stejný střed S. Lze ho vyjádřit také tvrzením, že v rovnoběžníku se úhlopříčky navzájem půlí (viz obr. č. 3).



Obrázek č. 3

2.2 Lineární kombinace bodů

Ze střední školy víte, že střed S úsečky AB v afinním prostoru $\boldsymbol{A}_n$ můžeme vyjádřit ve tvaru $S = A + \frac{1}{2}(B - A)$. Zvolme LSS, ve které $A = [a_1, \dots , a_n]$, $B = [b_1, \dots , b_n]$, $S = [s_1, \dots , s_n]$. Potom pro souřadnice uvedených bodů platí $s_i = a_i + \frac{1}{2}(b_i - a_i) = \frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}b_i$, kde $i = 1, \dots, n$. Nabízí se tedy používat pro střed S také zápis $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, který ale zatím nemá smysl.

Než přistoupíme k definici lineární kombinace bodů, je třeba dokázat dvě věty, které podpoří oprávněnost zmíněné definice.

Věta 4: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor, $B_1, \dots , B_k \in \boldsymbol{A}$, $\beta_1, \dots , \beta_k \in \boldsymbol{R}$.
Nechť $C, D \in \boldsymbol{A}$ jsou dva libovolné body.
Je-li $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0$ a označíme-li $\boldsymbol{u_C} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(B_i - C)$ a $\boldsymbol{u_D} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(B_i - D)$,
pak $\boldsymbol{u_C} = \boldsymbol{u_D}$.

***Důkaz*:** Abychom dokázali rovnost dvou vektorů $\boldsymbol{u_C}$ a $\boldsymbol{u_D}$, stačí ukázat, že $\boldsymbol{u_C} - \boldsymbol{u_D} = \boldsymbol{o}$.

Zřejmě $\boldsymbol{u_C} - \boldsymbol{u_D} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(B_i - C) - \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(B_i - D) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(B_i - C) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(D - B_i) =$

$$= \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,[(B_i - C) + (D - B_i)] = \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i\right)(D - C) = 0 \cdot (D - C) = \boldsymbol{o}.$$

Věta 5: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor, $B_1, \dots , B_k \in \boldsymbol{A}$, $\beta_1, \dots , \beta_k \in \boldsymbol{R}$.
Nechť $C, D \in \boldsymbol{A}$ jsou dva libovolné body.
Je-li $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$ a označíme-li $X_C = C + \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(B_i - C)$ a $X_D = D + \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(B_i - D)$,
pak $X_C = X_D$.

***Důkaz*:** Abychom dokázali rovnost dvou bodů X_C a X_D, také stačí ukázat, že $X_C - X_D = \boldsymbol{o}$.

Zřejmě $X_C - X_D = \left(C + \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(B_i - C)\right) - \left(D + \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(B_i - D)\right) =$

$$= (C - D) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(B_i - C) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,(D - B_i).$$

Dále platí $X_C - X_D = (C-D) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, [(B_i - C) + (D - B_i)] =$

$$= (C-D) + \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \right) (D-C) = (C-D) + (D-C) = \boldsymbol{o}.$$

Tím je důkaz proveden.

Obě uvedené věty lze také snadno dokázat ve zvolených souřadnicích. Ukažme si postup v případě věty 5. Pro *j*-tou souřadnici bodu X_C platí

$$x_{Cj} = c_j + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, (b_{ij} - c_j) = c_j + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, b_{ij} - \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \right) c_j = c_j + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, b_{ij} - c_j = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, b_{ij}.$$

Vidíme, že při úpravě bodu X_C v souřadnicích bod C „vypadne“. Bod X_C tedy nezávisí na volbě bodu C, bod C můžeme nahradit jiným bodem D. Proto $X_C = X_D$.

Nyní již můžeme vyslovit slíbenou definici lineární kombinace bodů.

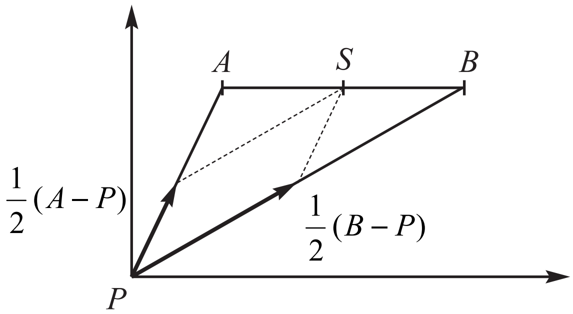
Definice 2: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor, $B_1, \ldots, B_k \in \boldsymbol{A}$, $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \boldsymbol{R}$.
Nechť $P \in \boldsymbol{A}$ je libovolný bod.
Lineární kombinaci bodů $B_1, \ldots, B_k$ s koeficienty $\beta_1, \ldots, \beta_k$ budeme značit symbolem $\sum_{i=1}^{k} \beta_i B_i$, nebo $\beta_1 B_1 + \ldots + \beta_k B_k$, kterým budeme rozumět

1. vektor $\sum_{i=1}^{k} \beta_i \, (B_i - P)$, pokud $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0$,
2. bod $P + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, (B_i - P)$, pokud $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$.

V jiných případech lineární kombinaci nedefinujeme.

Vraťme se ještě ke zmíněnému středu S úsečky AB, který již můžeme zapsat symbolem $S = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$. Součet koeficientů této lineární kombinace je roven jedné, podle definice 2 se tedy správně jedná o bod. Je-li bod P počátkem LSS zvolené v afinní rovině $\boldsymbol{A}_2$, můžeme střed S úsečky AB rozepsat ve tvaru $S = P + \frac{1}{2}(A-P) + \frac{1}{2}(B-P)$ (viz obr. č. 4).

Je zřejmé, že bod S nezávisí na volbě LSS, a tedy ani na volbě bodu P. Z pohledu lineární kombinace je bod P pouze pomocným bodem, jehož volba nám umožní zadaný vektor resp. bod zakreslit. Za pomocný bod můžeme třeba zvolit i přímo bod A. Potom
$S = A + \frac{1}{2}(A-A) + \frac{1}{2}(B-A) = A + \frac{1}{2}(B-A)$, což je známé vyjádření pro střed S úsečky AB.



Obrázek č. 4

Můžete si také všimnout, že zápis $\boldsymbol{u} = A - B$ (pro body A, B afinního prostoru $\boldsymbol{A}$ a vektor $\boldsymbol{u}$ z jeho zaměření $\boldsymbol{V}$) má nyní význam také jako lineární kombinace bodů. Součet jejích koeficientů je roven nule, jedná se tedy správně o vektor, který bychom podle definice 2 (při volbě $P = B$) vyjádřili právě předpisem $\boldsymbol{u} = (A - B) - (B - B) = (A - B) - \boldsymbol{o} = A - B$.

Následující věta nám ukáže, jak lze zadanou lineární kombinaci vyjádřit ve zvolených souřadnicích.

Věta 6: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor dimenze n, $B_1, \dots, B_k \in \boldsymbol{A}$, $\beta_1, \dots, \beta_k \in \boldsymbol{R}$.
Nechť ve zvolené LSS platí $B_i = [b_{i1}, \dots, b_{in}]$, $i = 1, \dots, k$.

Je-li $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0$ a $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i B_i$, potom $\boldsymbol{u} = \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i\, b_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{k} \beta_i\, b_{in} \right)$.

Je-li $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$ a $X = \sum_{i=1}^{k} \beta_i B_i$, potom $X = \left[\sum_{i=1}^{k} \beta_i\, b_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{k} \beta_i\, b_{in} \right]$.

***Důkaz*:** Obě lineární kombinace můžeme určit pomocí počátku $P = [0, \dots, 0]$ zvolené LSS.
Pro vektor $\boldsymbol{u} = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \dots + \beta_k B_k$ potom platí

$$\boldsymbol{u} = \beta_1(B_1 - P) + \beta_2(B_2 - P) + \dots + \beta_k(B_k - P).$$

Jeho j-tá souřadnice je rovna

$$u_j = \beta_1(b_{1j} - p_j) + \beta_2(b_{2j} - p_j) + \dots + \beta_k(b_{kj} - p_j) = \beta_1 b_{1j} + \beta_2 b_{2j} + \dots + \beta_k b_{kj},$$

neboť $p_j = 0$ pro každé $j = 1, \dots, n$.

Podobně bod $X = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \dots + \beta_k B_k$ můžeme zapsat jako

$$X = P + \beta_1(B_1 - P) + \beta_2(B_2 - P) + \dots + \beta_k(B_k - P).$$

Jeho j-tá souřadnice je rovna

$$x_j = p_j + \beta_1(b_{1j} - p_j) + \beta_2(b_{2j} - p_j) + \dots + \beta_k(b_{kj} - p_j) = \beta_1 b_{1j} + \beta_2 b_{2j} + \dots + \beta_k b_{kj},$$

neboť $p_j = 0$ pro každé $j = 1, \dots, n$.

Dále se budeme zabývat lineární nezávislostí bodů. Tento pojem nejprve nadefinujeme a poté vyslovíme a dokážeme ekvivalentní podmínky pro lineárně závislé a nezávislé body.

Definice 3: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor, $B_1, \ldots, B_k \in \boldsymbol{A}$, $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \boldsymbol{R}$.
Skupina bodů $B_1, \ldots, B_k$ se nazývá lineárně nezávislá, jestliže platí:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i B_i = \boldsymbol{o} \ \wedge \ \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0\right) \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0.$$

Není-li skupina bodů $B_1, \ldots, B_k$ lineárně nezávislá, říkáme, že je lineárně závislá.

Podmínka $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0$ zaručuje, že uvedená lineární kombinace představuje vektor.

Je zřejmé, že lineární nezávislost skupiny bodů nezávisí na tom, v jakém pořadí body uvedeme. Pojmy lineární závislost a nezávislost se vždy týkají skupiny bodů, nikoliv jednotlivých bodů. Pro jednoduchost vyjadřování ale budeme v dalším textu hovořit o lineárně závislých a nezávislých bodech.

Definice 3 tak říká, že pouze triviální lineární kombinace lineárně nezávislých bodů je rovna nulovému vektoru. Definice lineárně nezávislých bodů je tedy zcela analogická definici lineárně nezávislých vektorů.

Věta 7: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor. Body $B_1, \ldots, B_k \in \boldsymbol{A}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé vektory $B_2 - B_1, B_3 - B_1, \ldots, B_k - B_1$.

***Důkaz*:** (1) Předpokládejme nejprve, že body $B_1, \ldots, B_k$ jsou lineárně nezávislé.
Uvažujme lineární kombinaci vektorů

$$\beta_2 (B_2 - B_1) + \beta_3 (B_3 - B_1) + \ldots + \beta_k (B_k - B_1),$$

o které předpokládejme, že je rovna nulovému vektoru $\boldsymbol{o}$, tj.

$$\beta_2 (B_2 - B_1) + \beta_3 (B_3 - B_1) + \ldots + \beta_k (B_k - B_1) = \boldsymbol{o}.$$

Chceme dokázat, že v tomto případě jsou všechny koeficienty uvedené lineární kombinace rovny nule.

Výše uvedená rovnost zůstane zachována, pokud k její levé straně přičteme vektor $\beta (B_1 - B_1)$, kde $\beta \in \boldsymbol{R}$. Platí tedy

$$\beta (B_1 - B_1) + \beta_2 (B_2 - B_1) + \ldots + \beta_k (B_k - B_1) = \boldsymbol{o} \text{ pro každé } \beta \in \boldsymbol{R}.$$

Zvolme $\beta \in \boldsymbol{R}$ tak, aby $\beta + \beta_2 + \ldots + \beta_k = 0$, tj. položme $\beta = -\beta_2 - \ldots - \beta_k$.

Získáme tak lineární kombinaci bodů $\beta B_1 + \beta_2 B_2 + \ldots + \beta_k B_k = \boldsymbol{o}$.

Z předpokladu, že body $B_1, \ldots, B_k$ jsou lineárně nezávislé, pak plyne jednak $\beta = 0$, jednak námi požadovaná rovnost $\beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_k = 0$.

Vektory $B_2 - B_1, B_3 - B_1, \ldots, B_k - B_1$ jsou tedy lineárně nezávislé.

(2) Předpokládejme nyní, že vektory $B_2 - B_1$, $B_3 - B_1$, ... , $B_k - B_1$ jsou lineárně nezávislé. Nechť platí

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i B_i = \boldsymbol{o} \ \wedge \ \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0.$$

Chceme dokázat, že potom $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0$.

Výše uvedenou lineární kombinaci bodů můžeme pomocí libovolného bodu $P \in \boldsymbol{A}$ přepsat jako $\beta_1 (B_1 - P) + \beta_2 (B_2 - P) + ... + \beta_k (B_k - P) = \boldsymbol{o}$.

Zvolíme-li $P = B_1$, získáme rovnost

$$\beta_1 (B_1 - B_1) + \beta_2 (B_2 - B_1) + ... + \beta_k (B_k - B_1) = \boldsymbol{o}, \text{ tj.}$$
$$\beta_2 (B_2 - B_1) + ... + \beta_k (B_k - B_1) = \boldsymbol{o}.$$

Z předpokladu, že vektory $B_2 - B_1$, $B_3 - B_1$, ... , $B_k - B_1$ jsou lineárně nezávislé, plyne $\beta_2 = ... = \beta_k = 0$. Zbývající rovnost $\beta_1 = 0$ pak plyne z podmínky $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0$.

Body B_1, ... , B_k jsou tedy lineárně nezávislé.

Jak známo, dva lineárně nezávislé vektory určují rovinu (dimenze 2), tři lineárně nezávislé vektory určují prostor dimenze 3 atd. Ve větě 7 vystupuje $k - 1$ lineárně nezávislých vektorů, které určují prostor dimenze $k - 1$. Věta 7 tak vlastně říká, že body B_1, ... , $B_k \in \boldsymbol{A}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když určují podprostor dimenze $k - 1$, neboli nadrovinu prostoru $\boldsymbol{A}_k$.

Věta 8: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor. Body B_1, ... , $B_k \in \boldsymbol{A}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když je alespoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.

***Důkaz*:** (1) Nechť jsou body B_1, ... , B_k lineárně závislé.

Potom existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru $\boldsymbol{o}$, tj. $\exists\ \beta_1, ... , \beta_k \in \boldsymbol{R}$, pro která platí

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0 \ \wedge \ \sum_{i=1}^{k} \beta_i^{\,2} \neq 0 \ \wedge \ \sum_{i=1}^{k} \beta_i B_i = \boldsymbol{o}.$$

První podmínku je třeba splnit, abychom mohli definovat lineární kombinaci bodů, jejímž výsledkem je vektor, druhá podmínka vyjadřuje, že alespoň jedno z čísel β_1, ... , β_k je nenulové.

Nechť je např. $\beta_1 \neq 0$. Rozepišme uvedenou lineární kombinaci pomocí bodu $P \in \boldsymbol{A}$. Platí

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i B_i = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \ ... \ + \beta_k B_k =$$
$$= \beta_1 (B_1 - P) + \beta_2 (B_2 - P) + \ ... \ + \beta_k (B_k - P) = \boldsymbol{o}.$$

Díky $\beta_1 \neq 0$ můžeme poslední rovnost číslem β_1 vydělit. Postupně dostaneme

$$(B_1 - P) + \frac{\beta_2}{\beta_1}(B_2 - P) + \ \dots\ + \frac{\beta_k}{\beta_1}(B_k - P) = \boldsymbol{o},$$

$$B_1 - P = -\frac{\beta_2}{\beta_1}(B_2 - P) - \ \dots\ - \frac{\beta_k}{\beta_1}(B_k - P),$$

$$B_1 = P - \frac{\beta_2}{\beta_1}(B_2 - P) - \ \dots\ - \frac{\beta_k}{\beta_1}(B_k - P),$$

$$B_1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1}B_2 - \ \dots\ - \frac{\beta_k}{\beta_1}B_k.$$

Tento zápis bodu B_1 má smysl, neboť díky podmínce $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0$ je součet koeficientů uvedené lineární kombinace roven jedné a jedná se tedy o bod. Již zmíněný zápis vyjadřuje, že bod B_1 je lineární kombinací ostatních bodů.

(2) Nechť je např. bod B_1 lineární kombinací ostatních bodů, tj. $B_1 = \beta_2 B_2 + \dots + \beta_k B_k$ za předpokladu $\beta_2 + \dots + \beta_k = 1$. Tuto lineární kombinaci za pomoci zvoleného bodu $P \in \boldsymbol{A}$ přepíšeme postupně do tvaru

$$B_1 = P + \beta_2(B_2 - P) + \dots + \beta_k(B_k - P),$$
$$B_1 - P = \beta_2(B_2 - P) + \dots + \beta_k(B_k - P),$$
$$(B_1 - P) - \beta_2(B_2 - P) - \dots - \beta_k(B_k - P) = \boldsymbol{o},$$
$$B_1 - \beta_2 B_2 - \dots - \beta_k B_k = \boldsymbol{o}.$$

Tato lineární kombinace má opět smysl, neboť součet jejích koeficientů
$1 - \beta_2 - \dots - \beta_k = 0$. Dostali jsme tedy lineární kombinaci bodů $B_1, \dots, B_k$, která je netriviální (koeficient u bodu B_1 je roven jedné) a je rovna nulovému vektoru $\boldsymbol{o}$. Body $B_1, \dots, B_k$ jsou tedy lineárně závislé.

Je užitečné si uvědomit, že vztah pro bod B_1 odvozený v první části důkazu věty 8 bychom „mohli získat“ také přímou úpravou vztahu $\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \dots + \beta_k B_k = \boldsymbol{o}$. Postup

$$\beta_1 B_1 = -\beta_2 B_2 - \ \dots\ - \beta_k B_k \quad /: \beta_1$$

$$B_1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1}B_2 - \ \dots\ - \frac{\beta_k}{\beta_1}B_k$$

ale není při práci s body matematicky korektní.

Sami si promyslete, zda lze ve druhé části důkazu použít přímý postup

$$B_1 = \beta_2 B_2 + \dots + \beta_k B_k,$$
$$B_1 - \beta_2 B_2 - \dots - \beta_k B_k = \boldsymbol{o}.$$

Věta 9: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor, $B_0, \dots, B_k \in \boldsymbol{A}$.
Je-li $\boldsymbol{A'}$ podprostor prostoru $\boldsymbol{A}$ určený body $B_0, \dots, B_k$, potom

$$\boldsymbol{A'} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \beta_i B_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{k} \beta_i = 1 \right\}.$$

Uvedenou větu lze jinými slovy vyjádřit také tak, že bod $X \in \boldsymbol{A'}$ právě tehdy, když existují čísla $\beta_0, \dots, \beta_k \in \boldsymbol{R}$, $\beta_0 + \dots + \beta_k = 1$, tak, že $X = \beta_0 B_0 + \dots + \beta_k B_k$.

***Důkaz*:** Je-li podprostor $\boldsymbol{A'}$ prostoru $\boldsymbol{A}$ určený body $B_0, \dots, B_k$, obsahuje jeho zaměření $\boldsymbol{V'}$ vektory $B_1 - B_0, \dots, B_k - B_0$.
Uvažujme bod $X = \beta_0 B_0 + \dots + \beta_k B_k$, který lze podle definice 5 (při volbě $P = B_0$) zapsat jako $X = B_0 + \beta_0 (B_0 - B_0) + \beta_1 (B_1 - B_0) + \dots + \beta_k (B_k - B_0) =$

$$= B_0 + \beta_1 (B_1 - B_0) + \dots + \beta_k (B_k - B_0).$$

Protože bod $B_0 \in \boldsymbol{A'}$ a vektory $\beta_1 (B_1 - B_0), \dots, \beta_k (B_k - B_0) \in \boldsymbol{V'}$, je $X \in \boldsymbol{A'}$.

Naopak, jestliže $X \in \boldsymbol{A'}$, lze ho zapsat jako vhodnou lineární kombinaci bodů $B_0, \dots, B_k$. Stačí v prostoru $\boldsymbol{A'}$ zvolit jako „repér" $\{B_0, B_1 - B_0, \dots, B_k - B_0\}$.

Jsou-li vektory $B_1 - B_0, \dots, B_k - B_0$ lineárně nezávislé, tvoří bázi zaměření $\boldsymbol{V'}$. Dimenze prostoru $\boldsymbol{A'}$ je pak rovna k a bod B_0 a vektory $B_1 - B_0, \dots, B_k - B_0$ opravdu tvoří repér $\langle B_0, B_1 - B_0, \dots, B_k - B_0 \rangle$, prostoru $\boldsymbol{A'}$.

Pokud nejsou vektory $B_1 - B_0, \dots, B_k - B_0$ lineárně nezávislé, nelze o repéru v pravém slova smyslu hovořit. V tomto případě vektory $B_1 - B_0, \dots, B_k - B_0$ netvoří bázi zaměření $\boldsymbol{V'}$, jedná se pouze o množinu generátorů.

2.3 Afinní zobrazení

V první kapitole jsme viděli, že při rovnoběžném promítání z jedné přímky na druhou se zachovává dělicí poměr. Také při středovém promítání z přímky na přímku s ní rovnoběžnou se dělicí poměr zachovává. Taková zobrazení, která dělicí poměr bodů zachovávají, nazýváme afinní.

Definice 4: Nechť $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}'$ jsou afinní prostory.
Zobrazení $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ se nazývá afinní, jestliže je splněna následující podmínka:
jsou-li $B, C, D \in \boldsymbol{A}$ tři po dvou různé, kolineární body, potom buďto
a) $f(B) = f(C) = f(D)$, nebo
b) $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ jsou po dvou různé, kolineární a jejich dělicí poměr se rovná dělicímu poměru jejich vzorů, tj. platí $(f(B); f(C), f(D)) = (B; C, D)$.

Věta 10: Nechť $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}'$ jsou afinní prostory.
Zobrazení $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ je afinní právě tehdy, když pro každé tři body $B, C, D \in \boldsymbol{A}$ platí: jestliže existuje $\lambda \in \boldsymbol{R}$ tak, že $D - B = \lambda\,(C - B)$, potom
$$f(D) - f(B) = \lambda\,(f(C) - f(B)).$$

***Důkaz*:** Věta má charakter ekvivalence, je proto třeba dokázat dvě implikace.

(1) Nechť je zobrazení f afinní.
Zvolme $B, C, D \in \boldsymbol{A}$ tak, že platí $D - B = \lambda\,(C - B)$ pro jisté $\lambda \in \boldsymbol{R}$.
Body B, C, D jsou tedy kolineární, předpokládejme, že jsou navíc po dvou různé.

Je-li $f(B) = f(C) = f(D)$, potom $f(D) - f(B) = \boldsymbol{o}$, $f(C) - f(B) = \boldsymbol{o}$ a rovnost $f(D) - f(B) = \lambda\,(f(C) - f(B))$ platí.

Jsou-li $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ po dvou různé, kolineární a pro dělicí poměry platí $(f(B); f(C), f(D)) = (B; C, D)$, potom z předpokladu, že $D - B = \lambda\,(C - B)$ (neboli $B - D = \lambda\,(B - C)$) plyne rovnost $(B; C, D) = 1/\lambda$, a tedy také $(f(B); f(C), f(D)) = 1/\lambda$. Poslední vztah lze přepsat ve tvaru $f(B) - f(C) = 1/\lambda\,(f(B) - f(D))$, neboli $\lambda\,(f(C) - f(B)) = f(D) - f(B)$.

Sami ověřte, že nejsou-li body B, C, D navzájem různé (což jsme v důkazu zatím neuvažovali), je implikace $D - B = \lambda\,(C - B) \Rightarrow f(D) - f(B) = \lambda\,(f(C) - f(B))$ splněna pro každé (nejen afinní) zobrazení f.

(2) Nechť platí uvedená podmínka.
Zvolme tři po dvou různé, kolineární body $B, C, D \in \boldsymbol{A}$.
Potom zřejmě existuje $\lambda \in \boldsymbol{R}$ tak, že $B - D = \lambda\,(B - C)$.
Podle výše uvedené podmínky je $f(B) - f(D) = \lambda\,(f(B) - f(C))$.
Obě rovnosti lze podle definice dělicího poměru přepsat ve tvaru $(B; D, C) = \lambda$ a $(f(B); f(D), f(C)) = \lambda$.

Odtud $(B; D, C) = (f(B); f(D), f(C))$. Zobrazení f je tedy afinní.

Věta 11: Nechť $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A'}$ jsou afinní prostory.
Obrazem přímky p při afinním zobrazení $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A'}$ je buďto přímka, nebo jednoprvková množina.

***Důkaz*:** Obraz přímky p při (afinním) zobrazení f získáme jako množinu obrazů všech jejích bodů, tj. $f(p) = \{f(X), X \in p\}$. Přímka p je jednoznačně určena dvěma různými body, nechť $p = \{B, C\}$, $B \neq C$. Mohou nastat dvě možnosti:

a) $f(B) = f(C)$, tj. obrazy bodů B a C splývají

Zvolme libovolný bod $X \in p$, $X \neq B$, $X \neq C$. Body B, C, X jsou tedy po dvou různé, kolineární a přímo z definice afinního zobrazení plyne $f(B) = f(C) = f(X)$. Všechny body přímky p se v tomto případě zobrazí do jednoho bodu.

b) $f(B) \neq f(C)$, tj. body B a C se zobrazí do různých bodů

Protože poloha libovolného bodu $X \in p$, $X \neq B$, $X \neq C$, je jednoznačně určena hodnotou dělicího poměru $(X; B, C)$ a afinní zobrazení dělicí poměr zachovává, leží bod $f(X)$ na přímce $\{f(B), f(C)\}$ a jeho poloha je jednoznačně určena hodnotou dělicího poměru $(f(X); f(B), f(C)) = (X; B, C)$. Je-li bod X např. středem úsečky BC, je bod $f(X)$ středem úsečky $f(B) f(C)$ apod.

Pokud naopak na přímce $\{f(B), f(C)\}$ zvolíme libovolný bod Y, pak je obrazem toho bodu X přímky $\{B, C\}$, pro který platí, že $(X; B, C) = (Y; f(B), f(C))$.

Toto přiřazení mezi body přímek $\{B, C\}$ a $\{f(B), f(C)\}$ je vzájemně jednoznačné. Obrazy všech bodů přímky p vytvoří v tomto případě opět přímku.

Věta 12: Nechť $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{V})$ a $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{V'})$ jsou afinní prostory. Nechť $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A'}$ je afinní zobrazení.
Potom existuje právě jeden homomorfismus $\varphi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$, pro který platí
$\varphi(X - Y) = f(X) - f(Y)$ pro každé $X, Y \in \boldsymbol{A}$.

***Důkaz*:** Zvolme vektor $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Potom existují body $B, C \in \boldsymbol{A}$ tak, že $\boldsymbol{v} = B - C$.
Definujme zobrazení $\varphi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$ předpisem $\varphi(\boldsymbol{v}) = f(B) - f(C)$.

Protože ale existuje více takových uspořádaných dvojic bodů $B, C \in \boldsymbol{A}$, jejichž rozdíl je roven vektoru $\boldsymbol{v}$, je třeba ověřit, že rozdíl jejich obrazů je pořád stejný.

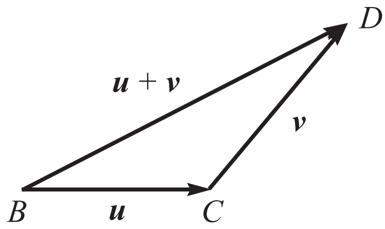
Kdybychom vektor $\boldsymbol{v}$ určili pomocí jiných bodů $D, E \in \boldsymbol{A}$, tj. kdyby také $\boldsymbol{v} = D - E$, pak by z rovnosti $B - C = D - E$ podle lemmatu 1 plynulo, že $S_{CD} = S_{BE}$.
Protože afinní zobrazení f zachovává dělicí poměr, zobrazí se střed úsečky CD na střed úsečky $f(C) f(D)$ a střed úsečky BE na střed úsečky $f(B) f(E)$. Platí tedy $S_{f(C) f(D)} = S_{f(B) f(E)}$, odkud opět podle lemmatu 1 plyne, že $f(B) - f(C) = f(D) - f(E)$.
Jsou-li tedy (ve středoškolské terminologii) dvě uspořádané dvojice bodů B, C a D, E „umístěním téhož vektoru $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$“ a je-li $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A'}$ afinní zobrazení, jsou také uspořádané dvojice $f(B)$, $f(C)$ a $f(D)$, $f(E)$ umístěním téhož vektoru ze zaměření $\boldsymbol{V'}$.
Tím jsme ověřili, že zobrazení $\varphi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$ je předpisem $\varphi(X - Y) = f(X) - f(Y)$ pro každé $X, Y \in \boldsymbol{A}$ definováno korektně.

Zbývá dokázat, že se jedná o homomorfismus a že existuje právě jeden.

Abychom dokázali, že φ je homomorfismus, je třeba ověřit dvě vlastnosti:

1) $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$: $\varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u}) + \varphi(\boldsymbol{v})$,
2) $\forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}, \forall\, \lambda \in \boldsymbol{R}$: $\varphi(\lambda\, \boldsymbol{u}) = \lambda\, \varphi(\boldsymbol{u})$.

ad 1) Uvažujme dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, pro které můžeme zvolit jejich umístění tak, že $\boldsymbol{u} = C - B$ a $\boldsymbol{v} = D - C$. Potom je $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (C - B) + (D - C) = D - B$ (viz obr. č. 5).



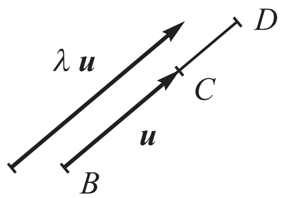
Obrázek č. 5

Odtud $\varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \varphi(D - B) = f(D) - f(B) = (f(C)... $

$$\varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \varphi(D - B) = f(D) - f(B) = (f(D) - f(C)) + (f(C) - f(B)) = \varphi(D - C) + \varphi(C - B) = \varphi(\boldsymbol{v}) + \varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u}) + \varphi(\boldsymbol{v}),$$

neboť sčítání vektorů ve $\boldsymbol{V'}$ je komutativní.

ad 2) Zvolme vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ a předpokládejme, že $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ (bez tohoto předpokladu by byl důkaz triviální). Dále zvolme $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Potom můžeme pro vektory $\boldsymbol{u}$ a $\lambda\, \boldsymbol{u}$ zvolit body $B, C, D \in \boldsymbol{A}$ tak, že $\boldsymbol{u} = C - B$ a $\lambda\, \boldsymbol{u} = D - B$ (viz obr. č. 6).



Obrázek č. 6

Body B, C, D tedy leží na jedné přímce a platí $D - B = \lambda\,(C - B)$. Odtud podle věty 10 plyne rovnost $f(D) - f(B) = \lambda\,(f(C) - f(B))$. Potom je
$\varphi(\lambda\, \boldsymbol{u}) = \varphi(D - B) = f(D) - f(B) = \lambda\,(f(C) - f(B)) = \lambda\, \varphi(C - B) = \lambda\, \varphi(\boldsymbol{u})$.

Sami nakonec sporem dokažte jednoznačnost.

Věta 12 říká, že homomorfismus $\varphi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$ je jednoznačně určen daným afinním zobrazením $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A'}$, je s ním asociovaný. Odtud také vyplývá jeho název.

Definice 5: Nechť $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{V})$ a $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{V'})$ jsou afinní prostory. Nechť $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A'}$ je afinní zobrazení. Homomorfismus $\varphi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$, pro který platí $\varphi(X - Y) = f(X) - f(Y)$ pro každé $X, Y \in \boldsymbol{A}$, se nazývá homomorfismus asociovaný s afinním zobrazením f.

Nabízí se otázka, jestli také naopak k libovolně zvolenému homomorfismu $\varphi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$ existuje právě jedno afinní zobrazení $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A'}$ tak, aby zvolený homomorfismus φ byl jeho asociovaným homomorfismem. V následující větě si dokážeme, že tomu tak není. Afinní zobrazení je ale jednoznačně určeno svým asociovaným homomorfismem a obrazem jednoho bodu.

Věta 13: Nechť jsou dány afinní prostory $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{V})$ a $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{V'})$. Nechť je dán homomorfismus $\varphi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$ a nechť je zvolena dvojice bodů $B \in \boldsymbol{A}$ a $B' \in \boldsymbol{A'}$.
Potom existuje právě jedno afinní zobrazení $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A'}$ takové, že jeho asociovaným homomorfismem je daný homomorfismus φ a platí $f(B) = B'$.

***Důkaz*:** Existenci afinního zobrazení f dokážeme tak, že sestrojíme zobrazení f mající požadované vlastnosti a ověříme, že je afinní.

Zvolme $X \in \boldsymbol{A}$ a definujme zobrazení $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A'}$ předpisem $f(X) = B' + \varphi(X - B)$.

Nyní dokážeme následující vlastnosti:

a) $f(B) = B'$,
b) φ splňuje základní vlastnost homomorfismu asociovaného zobrazení f,
c) zobrazení f je afinní.

ad a) $f(B) = B' + \varphi(B - B) = B' + \varphi(\boldsymbol{o}) = B' + \boldsymbol{o} = B'$

ad b) Je třeba ověřit, že pro každé $X, Y \in \boldsymbol{A}$ je $f(X) - f(Y) = \varphi(X - Y)$.
Zřejmě
$$f(X) - f(Y) = [B' + \varphi(X - B)] - [B' + \varphi(Y - B)] =$$
$$= (B' - B') + \varphi(X - B) - \varphi(Y - B) =$$
$$= \varphi(X - B) + \varphi(B - Y) = \varphi((X - B) + (B - Y)) = \varphi(X - Y).$$

ad c) Podle věty 10 stačí dokázat, že z rovnosti $Z - X = \lambda(Z - Y)$ plyne také rovnost $f(Z) - f(X) = \lambda(f(Z) - f(Y))$, kde $X, Y, Z \in \boldsymbol{A}$.
Zvolme tedy tři body X, Y, Z na přímce tak, že platí $Z - X = \lambda(Z - Y)$.
Potom $f(Z) - f(X) = \varphi(Z - X) = \varphi(\lambda(Z - Y)) = \lambda\,\varphi(Z - Y) = \lambda(f(Z) - f(Y))$.

Sami nakonec sporem dokažte jednoznačnost.

Afinní zobrazení můžeme jednoznačně určit také pomocí obrazů vhodného počtu lineárně nezávislých bodů.

Věta 14: Nechť $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{V})$ a $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{V'})$ jsou afinní prostory, nechť $\dim \boldsymbol{A} = n$.
Jsou-li $P_0, P_1, \dots, P_n$ lineárně nezávislé body prostoru $\boldsymbol{A}$ a $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ jsou libovolně zvolené body prostoru $\boldsymbol{A'}$, pak existuje právě jedno afinní zobrazení $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A'}$, pro které platí $f(P_i) = P'_i$ pro každé $i = 0, 1, \dots, n$.

***Důkaz*:** Nechť jsou v afinním prostoru $\boldsymbol{A}$ dány lineárně nezávislé body $P_0, P_1, \dots, P_n$.

Podle věty 7 jsou tedy vektory $\boldsymbol{u_1} = P_1 - P_0, \dots, \boldsymbol{u_n} = P_n - P_0$ lineárně nezávislé. Protože jich je právě n, tvoří bázi zaměření $\boldsymbol{V}$ prostoru $\boldsymbol{A}$.

Zvolme v prostoru $\boldsymbol{A'}$ libovolné body $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ a označme $\boldsymbol{u'_i} = P'_i - P'_0$ pro $i = 1, \dots, n$.

Z lineární algebry víme, že existuje právě jeden homomorfismus $\varphi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$, pro který platí $\varphi(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{u'}_i = P'_i - P'_0$ pro $i = 1, \dots , n$.

Afinní zobrazení f definujme podle věty 13 předpisem $f(X) = P'_0 + \varphi(X - P_0)$, kde $f(P_0) = P'_0$. Potom $f(P_i) = P'_0 + \varphi(P_i - P_0) = P'_0 + (P'_i - P'_0) = P'_i$ a požadovaná rovnost tedy platí i pro $i = 1, \dots , n$.

Podle věty 14 je tedy např. afinní zobrazení roviny $\boldsymbol{A}_2$ do prostoru $\boldsymbol{A'}$ jednoznačně určeno obrazy libovolných tří lineárně nezávislých bodů $A, B, C \in \boldsymbol{A}_2$, tj. obrazy vrcholů libovolného trojúhelníku ABC v rovině $\boldsymbol{A}_2$.

Následující věta se týká obrazu lineární kombinace bodů při afinním zobrazení a říká, že obrazem lineární kombinace bodů je „stejná" lineární kombinace obrazů těchto bodů.

Věta 15: Nechť $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A'}$ jsou afinní prostory, nechť $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A'}$ je afinní zobrazení. Nechť $B_0, \dots , B_k \in \boldsymbol{A}$ a bod $X \in \boldsymbol{A}$ lze zapsat ve tvaru $X = \beta_0 B_0 + \dots + \beta_k B_k$, kde $\beta_0, \dots , \beta_k \in \boldsymbol{R}$, $\beta_0 + \dots + \beta_k = 1$. Potom $f(X) = \beta_0 f(B_0) + \dots + \beta_k f(B_k)$.

***Důkaz*:** Libovolný bod $X \in \boldsymbol{A}$ lze zapsat jako lineární kombinaci bodů $B_0, \dots , B_k \in \boldsymbol{A}$ právě tehdy, když $\dim \boldsymbol{A} \le k$ (srovnejte viz větu 9). Rozepišme uvedenou lineární kombinaci pomocí bodu $P \in \boldsymbol{A}$. Potom $X = P + \beta_0 (B_0 - P) + \dots + \beta_k (B_k - P)$. S využitím základní vlastnosti homomorfismu φ asociovaného s afinním zobrazením f získáme

$$f(X) - f(P) = \varphi(X - P) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{k} \beta_i (B_i - P)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \beta_i\, \varphi(B_i - P) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i (f(B_i) - f(P)).$$

Odtud $f(X) = f(P) + \sum_{i=0}^{k} \beta_i (f(B_i) - f(P))$.

Bod $f(P) \in \boldsymbol{A'}$ v této lineární kombinaci vystupuje pouze v roli pomocného bodu, můžeme tedy psát

$$f(X) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i\, f(B_i).$$

Tím je důkaz proveden.

Věta 11 se zabývala obrazem přímky při afinním zobrazení. Následující věta uvádí, jak se při afinním zobrazení zobrazí dvě přímky, které jsou rovnoběžné. Postup při důkazu věty 16 lze použít také pro důkaz věty 11, na rozdíl od důkazu uvedeného u věty 11 předpokládá navíc pouze zavedení asociovaného homomorfismu.

Věta 16: Nechť p a q jsou dvě rovnoběžné přímky v afinním prostoru $\boldsymbol{A}$, nechť f je afinní zobrazení prostoru $\boldsymbol{A}$ do prostoru $\boldsymbol{A'}$.
Potom $f(p)$ a $f(q)$ jsou buďto dvě rovnoběžné přímky, nebo dva body.

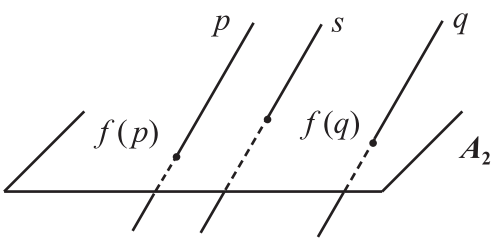
***Důkaz*:** Uvažujme dvě rovnoběžné přímky $p = \{P, \boldsymbol{u}\}$ a $q = \{Q, \boldsymbol{u}\}$, jejichž generátorem směru je stejný vektor $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$. Každý bod přímky p lze psát ve tvaru $X = P + t\,\boldsymbol{u}$, každý bod přímky q má tvar $Y = Q + s\,\boldsymbol{u}$, kde $t, s \in \boldsymbol{R}$.

Potom $f(X) = f(P) + t\,\varphi(\boldsymbol{u})$, podobně $f(Y) = f(Q) + s\,\varphi(\boldsymbol{u})$.

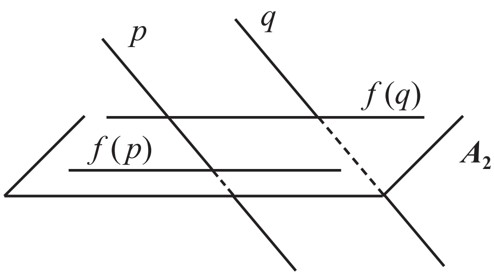
V případě, že $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o} \in \boldsymbol{V'}$, je $f(X) = f(P)$ a $f(Y) = f(Q)$. Celá přímka p se v tomto případě zobrazí do bodu $f(P)$, celá přímka q se zobrazí do bodu $f(Q)$.

Pokud $\varphi(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{o}$, je obrazem přímky p přímka určená bodem $f(P)$ a nenulovým vektorem $\varphi(\boldsymbol{u})$, přímka q se zobrazí na přímku určenou bodem $f(Q)$ a stejným nenulovým vektorem $\varphi(\boldsymbol{u})$. Přímky $f(p)$ a $f(q)$ jsou v tomto případě navzájem rovnoběžné.

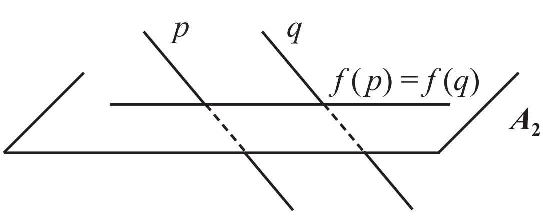
Větu 16 můžeme ilustrovat na případu rovnoběžného promítání afinního prostoru $\boldsymbol{A}_3$ do afinní roviny $\boldsymbol{A}_2$. Zvolíme-li směr promítání s rovnoběžný s přímkami p, q, zobrazí se obě přímky do bodu (viz obr. č. 7), v opačném případě se přímky p, q promítnou do rovnoběžných přímek $f(p)$, $f(q)$ (viz obr. č. 8 pro směr s kolmý k rovině $\boldsymbol{A}_2$). Ve speciálním případě, kdy směr promítání s zvolíme rovnoběžný s rovinou určenou přímkami p, q, mohou přímky $f(p)$, $f(q)$ splynout (viz obr. č. 9).



Obrázek č. 7



Obrázek č. 8



Obrázek č. 9

Věta 17: Nechť $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{V})$ a $(\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{V'})$ jsou afinní prostory.
Afinní zobrazení $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A'}$ je injektivní resp. surjektivní právě tehdy, když je injektivní resp. surjektivní jeho asociovaný homomorfismus $\varphi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$.

***Důkaz*:** Věta má charakter ekvivalence a její tvrzení se týká dvou vlastností afinního zobrazení a jeho asociovaného homomorfismu, je proto třeba dokázat čtyři implikace.

Připomeňme, že injektivní zobrazení znamená prosté, surjektivní zobrazení je zobrazení na.

(1) Nechť zobrazení f není injektivní.
Potom existují dva různé body $X, Y \in \boldsymbol{A}$ $(X \neq Y)$, pro které je $f(X) = f(Y)$.
Odtud $\varphi(X - Y) = f(X) - f(Y) = \boldsymbol{o}$. Protože homomorfismus φ zobrazuje nenulový vektor $X - Y$ na vektor nulový, není homomorfismus φ injektivní.

(2) Nechť homomorfismus φ není injektivní.
Potom existuje nenulový vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$, pro který $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$.
Zvolme body $C, D \in \boldsymbol{A}$ $(C \neq D)$ tak, že $\boldsymbol{u} = C - D$.
Potom $\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(C - D) = f(C) - f(D)$. Protože $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$, plyne odtud rovnost $f(C) = f(D)$. Zobrazení f tedy není injektivní.

(3) Nechť je zobrazení f surjektivní.
Zvolme libovolný vektor $\boldsymbol{v'} \in \boldsymbol{V'}$ a body $X, Y \in \boldsymbol{A'}$ tak, že $\boldsymbol{v'} = X - Y$.
Protože je zobrazení f surjektivní, existují k bodům X, Y body $C, D \in \boldsymbol{A}$ tak, že $f(C) = X$ a $f(D) = Y$.
Potom $\varphi(C - D) = f(C) - f(D) = X - Y = \boldsymbol{v'}$. K vektoru $\boldsymbol{v'} \in \boldsymbol{V'}$ jsme našli jeho vzor, vektor $\boldsymbol{v} = C - D \in \boldsymbol{V}$.
Tím jsme dokázali, že homomorfismus φ je surjektivní.

(4) Nechť je homomorfismus φ surjektivní.
Zvolme libovolný bod $Y \in \boldsymbol{A'}$. Dále zvolme bod $C \in \boldsymbol{A}$ a označme jeho obraz $f(C) = X \in \boldsymbol{A'}$. Body $X, Y \in \boldsymbol{A'}$ určují vektor $\boldsymbol{v'} = Y - X \in \boldsymbol{V'}$.
Díky předpokladu, že homomorfismus φ je surjektivní, existuje vektor $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v'} = Y - X$.
Umístěme vektor $\boldsymbol{v}$ v prostoru $\boldsymbol{V}$ tak, že $\boldsymbol{v} = D - C$ pro vhodný bod $D \in \boldsymbol{A}$.
Odtud $\varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(D - C) = f(D) - f(C)$.
Porovnáním se vztahy $\varphi(\boldsymbol{v}) = Y - X$ a $X = f(C)$, získáme $Y = f(D)$. Bod $D \in \boldsymbol{A}$ je tedy vzorem zvoleného bodu $Y \in \boldsymbol{A'}$. Proto je zobrazení f surjektivní.

Následující věta nám ukáže, jak lze výpočtem získat souřadnice obrazů bodů při daném afinním zobrazení.

Věta 18: Nechť $\boldsymbol{A_n}$ a $\boldsymbol{A'_m}$ jsou afinní prostory se zvolenými LSS. Nechť $f : \boldsymbol{A_n} \to \boldsymbol{A'_m}$ je afinní zobrazení. Potom existuje matice $A = (a_{ji})$ typu (m, n) a čísla $b_1, \dots, b_m$ tak, že označíme-li souřadnice libovolného bodu $X \in \boldsymbol{A_n}$ jako $X = [x_1, \dots, x_n]$ a souřadnice jeho obrazu $f(X) = X' \in \boldsymbol{A'_m}$ jako $X' = [x'_1, \dots, x'_m]$, platí

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j, \text{ kde } j = 1, \dots, m.$$

***Důkaz*:** Uvažujme LSS v afinním prostoru $\boldsymbol{A}_n$ danou repérem $\langle P, \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n \rangle$, a v prostoru $\boldsymbol{A}'_m$ určenou repérem $\langle Q, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m \rangle$.

Zvolíme-li libovolný bod $X = [x_1, \dots, x_n] \in \boldsymbol{A}_n$, pak ho lze zapsat ve tvaru

$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i \, \boldsymbol{e}_i$$

a jeho obraz $f(X) = X' = [x'_1, \dots, x'_m] \in \boldsymbol{A}'_m$ můžeme zapsat ve tvaru

$$X' = Q + \sum_{j=1}^{m} x'_j \, \boldsymbol{v}_j \, .$$

Potom platí

$$X' = f(X) = f(P) + \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \, \boldsymbol{e}_i \right),$$

kde φ je homomorfismus asociovaný s afinním zobrazením f.

Označme souřadnice bodu $f(P)$ v prostoru $\boldsymbol{A}'_m$ jako $f(P) = [b_1, \dots, b_m]$. Odtud máme

$$X' = \left[Q + \sum_{j=1}^{m} b_j \, \boldsymbol{v}_j \right] + \sum_{i=1}^{n} x_i \, \varphi(\boldsymbol{e}_i) = Q + \sum_{j=1}^{m} b_j \, \boldsymbol{v}_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} \, \boldsymbol{v}_j \right) =$$

$$= Q + \sum_{j=1}^{m} b_j \, \boldsymbol{v}_j + \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \, x_i \right) \boldsymbol{v}_j = Q + \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \, x_i + b_j \right) \boldsymbol{v}_j \, .$$

Porovnáním posledního výrazu se vztahem $X' = Q + \sum_{j=1}^{m} x'_j \, \boldsymbol{v}_j$

získáme požadovanou rovnost.

Z uvedeného důkazu také plyne význam matice $A = (a_{ji})$ a čísel $b_1, \dots, b_m$.

Matice $A = (a_{ji})$ je maticí homomorfismu φ vzhledem k bázím $\langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ a $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m \rangle$, čísla $b_1, \dots, b_m$ představují souřadnice obrazu počátku LSS prostoru $\boldsymbol{A}_n$.

Definice 6: Nechť $\boldsymbol{A}_n$ a $\boldsymbol{A}'_m$ jsou afinní prostory se zvolenými LSS. Nechť $f : \boldsymbol{A}_n \to \boldsymbol{A}'_m$ je afinní zobrazení. Má-li nezávisle proměnný bod $X \in \boldsymbol{A}_n$ souřadnice $X = [x_1, \dots, x_n]$ a jeho obraz $f(X) = X' \in \boldsymbol{A}'_m$ má souřadnice $X' = [x'_1, \dots, x'_m]$, pak systém „předpisů“

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \, x_i + b_j \, , \text{kde } j = 1, \dots, m,$$

nazýváme analytické vyjádření daného afinního zobrazení f vzhledem ke zvoleným LSS.

Věta 19: Nechť $\boldsymbol{A_n}$ a $\boldsymbol{A'_m}$ jsou afinní prostory se zvolenými LSS. Nechť jsou dána reálná čísla a_{ji}, b_j, kde $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, m$. Přiřadíme-li každému bodu $X = [x_1, \dots, x_n] \in \boldsymbol{A_n}$ bod $X' = [x'_1, \dots, x'_m] \in \boldsymbol{A'_m}$ tak, že platí

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j \ \text{pro každé}\ j = 1, \dots, m,$$

získáme zobrazení $f: \boldsymbol{A_n} \to \boldsymbol{A'_m}$, které je afinní.

***Důkaz*:** Je třeba dokázat, že uvažované zobrazení f je afinní. K tomu využijeme větu 10. Uvažujme body $X = [x_1, \dots, x_n]$, $Y = [y_1, \dots, y_n]$, $Z = [z_1, \dots, z_n] \in \boldsymbol{A_n}$, pro které platí $Z - X = \lambda\, (Z - Y)$. Ve zvolených souřadnicích tento vztah můžeme přepsat ve tvaru $z_i - x_i = \lambda\, (z_i - y_i)$, kde $i = 1, \dots, n$. Podle předpokladu věty platí vztahy

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j,\ \ y'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, y_i + b_j,\ \ z'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, z_i + b_j \ \text{pro každé}\ j = 1, \dots, m.$$

Potom máme

$$z'_j - x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, (z_i - x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, \lambda\, (z_i - y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, (z_i - y_i) = \lambda\, (z'_j - y'_j).$$

Rovnost $z'_j - x'_j = \lambda\, (z'_j - y'_j)$ pro každé $j = 1, \dots, m$ můžeme nazpět přepsat ve tvaru $Z' - X' = \lambda\, (Z' - Y')$. Tím je dokázáno, že zobrazení f je afinní.

Věty 18 a 19 souhrnně říkají, že afinní zobrazení je při zvolených LSS jednoznačně určeno svým analytickým vyjádřením. Každé afinní zobrazení $f: \boldsymbol{A_n} \to \boldsymbol{A'_m}$ je vzhledem k daným LSS určeno systémem rovnic

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j,\ j = 1, \dots, m$$

a naopak, uvedeným systémem rovnic je vždy dáno afinní zobrazení $f: \boldsymbol{A_n} \to \boldsymbol{A'_m}$.

2.4 Samodružné body a směry afinního zobrazení

Při zobrazení afinního prostoru $\boldsymbol{A}$ do sebe má smysl zkoumat, které body a směry se zobrazí samy na sebe, neboli které body a směry jsou samodružné. V této kapitole oba pojmy nejprve nadefinujeme a poté se budeme zabývat jejich vlastnostmi.

Definice 8: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor.
Bod $X \in \boldsymbol{A}$ budeme nazývat samodružným bodem afinního zobrazení $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, jestliže $f(X) = X$.

Věta 20: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor.
Množina všech samodružných bodů afinního zobrazení $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ je buďto prázdná, nebo je podprostorem prostoru $\boldsymbol{A}$.

Množina všech samodružných bodů může být prázdná, příkladem je posunutí o nenulový vektor. Středová souměrnost má jediný samodružný bod (střed souměrnosti), ovšem bod považujeme za podprostor (s triviálním zaměřením).

***Důkaz*:** Má-li afinní zobrazení f dva různé samodružné body $B = f(B)$, $C = f(C)$, je samodružný také každý bod X přímky BC, neboť bod X má vůči bodům B, C určitý dělicí poměr $(X;\, B, C)$ a afinní zobrazení dělicí poměr zachovává. Proto podle definice 4 je $(f(X);\, f(B), f(C)) = (X;\, B, C)$. Díky tomu, že $B = f(B)$ a $C = f(C)$, je tedy také $X = f(X)$.

Obecně: nechť množina všech samodružných bodů afinního zobrazení f není prázdná. Označme $B_0, \dots , B_k$ maximální možnou skupinu lineárně nezávislých bodů takových, že každý z nich je při zobrazení f samodružný.
Uvažujme bod X, který leží v podprostoru $\boldsymbol{A'_k}$ prostoru $\boldsymbol{A}$ určeném body $B_0, \dots , B_k$.
Podle věty 9 je bod X jejich lineární kombinací:

$$X = \beta_0 B_0 + \dots + \beta_k B_k, \text{ kde } \beta_0, \dots , \beta_k \in \boldsymbol{R},\ \beta_0 + \dots + \beta_k = 1.$$

Potom podle věty 15 je $f(X) = \beta_0 f(B_0) + \dots + \beta_k f(B_k)$.
Protože každý z bodů $B_0, \dots , B_k$ je samodružný, je $f(B_0) = B_0, \dots , f(B_k) = B_k$, a proto také $f(X) = X$. Množina všech samodružných bodů tedy v tomto případě tvoří podprostor prostoru $\boldsymbol{A}$ dimenze k.

Větu 20 můžeme také snadno dokázat algebraicky. Níže uvedený důkaz zároveň ilustruje obecný postup při výpočtu samodružných bodů.

Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor dimenze n. V prostoru $\boldsymbol{A}$ zvolme LSS. Pro nezávisle proměnný bod X a jeho obraz X' budeme používat značení $X = [x_1, \dots , x_n]$, $f(X) = X' = [x'_1, \dots , x'_n]$. sAnalytické vyjádření afinního zobrazení $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ má pak tvar

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j, \text{ kde } j = 1, \dots , n.$$

Bod $X \in \boldsymbol{A}$ je při zobrazení f samodružný, jestliže $f(X) = X$. Jak známo, bod a jeho obraz splývají právě tehdy, když mají oba ve zvolené LSS stejné souřadnice. Musí být tedy splněna podmínka

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j, \text{ kde } j = 1, \dots, n,$$

která má po úpravě charakter homogenní soustavy n lineárních rovnic pro n neznámých $x_1, \dots, x_n$:

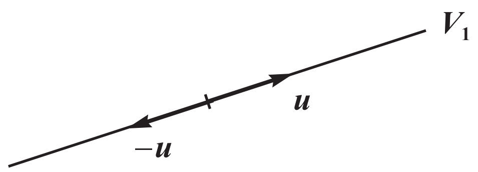
$$\begin{aligned}
&(a_{11} - 1)\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n + b_1 = 0,\\
&a_{21}\, x_1 + (a_{22} - 1)\, x_2 + \dots + a_{2n}\, x_n + b_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \dots + (a_{nn} - 1)\, x_n + b_n = 0.
\end{aligned}$$

Podle Frobeniovy věty je množina všech řešení této soustavy rovnic buď prázdná, nebo, pokud je hodnost h matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, je podprostorem dimenze $k = n - h$.

Geometricky to znamená, že množina všech samodružných bodů afinního zobrazení f je buď prázdná, nebo tvoří podprostor prostoru $\boldsymbol{A}$ dimenze k. Pro $k = 0$ se jedná o bod, pro $k = 1$ se jedná o přímku, pro $k = 2$ rovinu atd. Splyne-li podprostor samodružných bodů afinního zobrazení f s celým prostorem $\boldsymbol{A}$, je f identitou.

Definice 9: Je-li $\boldsymbol{V}$ vektorový prostor, pak každý jeho jednodimenzionální podprostor $\boldsymbol{V}_1$ nazýváme směrem ve $\boldsymbol{V}$.

Každý nenulový vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ určuje jednoznačně právě jeden směr. Dva nenulové vektory určují stejný směr právě tehdy, když jsou lineárně závislé, tj. když je jeden násobkem druhého. Např. vektory $\boldsymbol{u}$ a $-\boldsymbol{u}$ určují stejný směr $\boldsymbol{V}_1$ (viz obr. č. 10).



Obrázek č. 10

Definice 10: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor se zaměřením $\boldsymbol{V}$.
Je-li $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ afinní zobrazení a $\varphi: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ jeho asociovaný homomorfismus, pak směr $\boldsymbol{V}_1 \subset\subset \boldsymbol{V}$ budeme nazývat samodružným směrem afinního zobrazení f, pokud $\varphi(\boldsymbol{V}_1) = \boldsymbol{V}_1$.

Definice 10 tedy říká, že směr je při afinním zobrazení prostoru do sebe samodružný, jestliže se zobrazí sám na sebe při asociovaném homomorfismu. Přitom obrazem směru $\boldsymbol{V}_1$ rozumíme množinu $\varphi(\boldsymbol{V}_1) = \{\varphi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_1\}$.

O samodružném směru má opět smysl mluvit jen v případě homomorfismu vektorového prostoru do sebe, tedy v případě, že φ je endomorfismus.

Věta 21: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor se zaměřením $\boldsymbol{V}$.
Nechť $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ je afinní zobrazení a $\varphi: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ jeho asociovaný homomorfismus.
Je-li směr $\boldsymbol{V}_1 \subset\subset \boldsymbol{V}$ generován nenulovým vektorem $\boldsymbol{u}$, pak $\boldsymbol{V}_1$ je samodružným směrem afinního zobrazení f právě tehdy, když existuje $\lambda \neq 0$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\, \boldsymbol{u}$.

Věta 21 jinými slovy říká, že vektor $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ generuje samodružný směr afinního zobrazení f právě tehdy, když to je vlastní vektor asociovaného homomorfismu φ příslušný nenulovému vlastnímu číslu λ.

Důkaz: (1) Nechť je vektorový podprostor $\boldsymbol{V}_1$ generovaný vektorem $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ samodružným směrem, tj. platí $\varphi(\boldsymbol{V}_1) = \boldsymbol{V}_1$.
Směr $\boldsymbol{V}_1$ je pak sestaven z násobků vektoru $\boldsymbol{u}$, neboli $\boldsymbol{V}_1 = \{\alpha\, \boldsymbol{u},\ \alpha \in \boldsymbol{R}\}$.
Platí $\varphi(\boldsymbol{V}_1) = \{\varphi(\alpha\, \boldsymbol{u}),\ \alpha \in \boldsymbol{R}\} = \{\alpha\, \varphi(\boldsymbol{u}),\ \alpha \in \boldsymbol{R}\}$, neboť φ je homomorfismus.
Protože $\varphi(\boldsymbol{V}_1) = \boldsymbol{V}_1$, musí každý vektor z $\varphi(\boldsymbol{V}_1)$ ležet ve $\boldsymbol{V}_1$. Zvolme $\alpha = 1$. Potom vektor $\alpha\, \varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{V}_1$. To znamená, že existuje $\lambda \in \boldsymbol{R}$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\, \boldsymbol{u}$.
Zbývá dokázat, že $\lambda \neq 0$. Kdyby $\lambda = 0$, pak by bylo $\varphi(\boldsymbol{u}) = 0 . \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, a tedy by bylo $\varphi(\boldsymbol{V}_1) = \{\boldsymbol{o}\}$. Protože ale podprostor obsahující pouze nulový vektor není jednodimenzionálním podprostorem, musí být $\lambda \neq 0$.

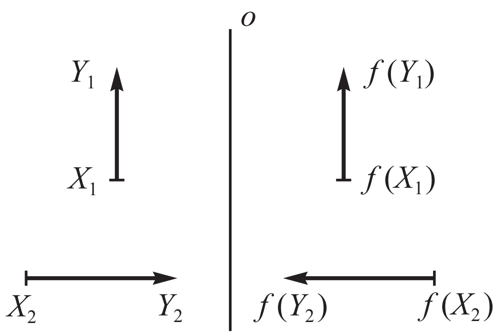
(2) Nechť existuje $\lambda \neq 0$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\, \boldsymbol{u}$ pro $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$.
Je-li vektor $\boldsymbol{u}$ generátorem směru $\boldsymbol{V}_1$, pak $\boldsymbol{V}_1 = \{\alpha\, \boldsymbol{u},\ \alpha \in \boldsymbol{R}\}$.
Platí $\varphi(\boldsymbol{V}_1) = \{\varphi(\alpha\, \boldsymbol{u}),\ \alpha \in \boldsymbol{R}\} = \{\alpha\, \varphi(\boldsymbol{u}),\ \alpha \in \boldsymbol{R}\} = \{\alpha\, (\lambda\, \boldsymbol{u}),\ \alpha \in \boldsymbol{R}\} =$
$= \{(\alpha\, \lambda)\, \boldsymbol{u},\ \alpha \in \boldsymbol{R}\}$.
Poslední rovnost plyne z definice vektorového prostoru.
Protože součin $\alpha\, \lambda$ proběhne celé $\boldsymbol{R}$, je $\varphi(\boldsymbol{V}_1) = \boldsymbol{V}_1$. Směr $\boldsymbol{V}_1$ je tedy samodružný.

Uvažujme přímku p, která je v afinním prostoru $\boldsymbol{A}$ určená bodem P a nenulovým směrovým vektorem $\boldsymbol{u}$. Nechť f je afinní zobrazení prostoru $\boldsymbol{A}$ do sebe a φ jeho asociovaný homomofismus. Je-li směr přímky p při zobrazení f samodružný, je $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\, \boldsymbol{u}$, kde $\lambda \neq 0$. Přímka p se tedy zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou.

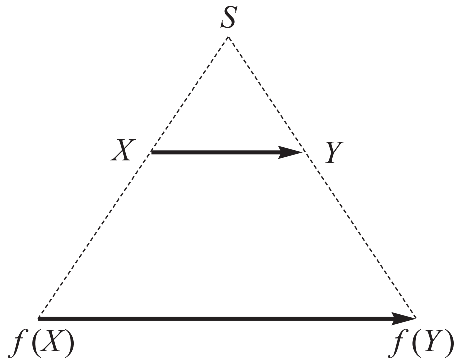
Jsou-li v afinní rovině dány dva různé body X, Y, které určují vektor $\boldsymbol{u} = Y - X$, pak vektor $\boldsymbol{u}$ generuje samodružný směr právě tehdy, když $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\, \boldsymbol{u}$, tj. $f(Y) - f(X) = \lambda\, (Y - X)$ pro $\lambda \neq 0$, neboli právě když $f(X) f(Y)$ je opět úsečka a úsečky XY a $f(X) f(Y)$ jsou rovnoběžné.

Můžete si promyslet, že např. osová souměrnost v rovině bude mít právě dva samodružné směry – směr osy o souměrnosti (vlastní číslo $\lambda = 1$) a směr k němu kolmý (vlastní číslo $\lambda = -1$) (viz obr. č. 11).

Na druhou stranu např. stejnolehlost se středem S (a libovolným koeficientem $k \neq 0$) bude mít všechny směry samodružné, neboť každou úsečku zobrazí na úsečku s ní rovnoběžnou (viz obr. č. 12 pro koeficient $k = 2$). Vlastní číslo stejnolehlosti pak bude jednotné a bude rovno právě koeficientu k.



Obrázek č. 11



Obrázek č. 12

Na závěr této kapitoly uveďme obecný postup při výpočtu samodružných směrů.

Nechť $\boldsymbol{A_n}$ je afinní prostor dimenze n se zaměřením $\boldsymbol{V_n}$, f je afinní zobrazení prostoru $\boldsymbol{A_n}$ do sebe a φ jeho asociovaný homomorfismus. Chceme najít generátor $\boldsymbol{u}$ samodružného směru $\boldsymbol{V}_1$, pro který platí: 1. $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$,

2. $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\, \boldsymbol{u}$ pro vhodné nenulové $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

V prostoru $\boldsymbol{A_n}$ zvolme LSS pomocí báze +$\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$, zaměření $\boldsymbol{V_n}$.

Pro vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ pak platí $\boldsymbol{u} = u_1\, \boldsymbol{e}_1 + \dots + u_n\, \boldsymbol{e}_n$ a $\varphi(\boldsymbol{u}) = u_1\, \varphi(\boldsymbol{e}_1) + \dots + u_n\, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$, neboť φ je homomorfismus. Zároveň má být $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\, \boldsymbol{u} = (\lambda\, u_1)\, \boldsymbol{e}_1 + \dots + (\lambda\, u_n)\, \boldsymbol{e}_n$.

Abychom oba vztahy pro $\varphi(\boldsymbol{u})$ mohli porovnat, je třeba, aby byly vyjádřeny vzhledem ke stejné bázi. O vektorech $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ ani nevíme, zda vůbec bázi tvoří.

Je-li $A = (a_{ji})$ matice homomorfismu φ vzhledem k bázi $\boldsymbol{e}_j$, můžeme psát

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, \boldsymbol{e}_j \quad \text{pro } i = 1, \dots, n.$$

Porovnáním vztahu $\varphi(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} u_i\, \varphi(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, \boldsymbol{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, u_i \right) \boldsymbol{e}_j$ se vztahem $\varphi(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda\, u_j)\, \boldsymbol{e}_j$ získáme pro vektor $\boldsymbol{u}$ podmínku $\lambda\, u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, u_i$, kde $j = 1, \dots, n$.

Tato podmínka má po úpravě charakter homogenní soustavy n lineárních rovnic pro $(n + 1)$ neznámých. Kromě souřadnic $u_1, \dots, u_n$ vektoru $\boldsymbol{u}$ ještě neznáme také koeficient λ, který v této soustavě vystupuje v roli parametru.

Upravená a rozepsaná soustava rovnic má následující tvar:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda)\, u_1 + a_{12}\, u_2 + \dots + a_{1n}\, u_n = 0, \\ &a_{21}\, u_1 + (a_{22} - \lambda)\, u_2 + \dots + a_{2n}\, u_n = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{n1}\, u_1 + a_{n2}\, u_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\, u_n = 0. \end{aligned}$$

Můžeme ji zapsat také v maticovém tvaru $(A - \lambda\, I)\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, kde I je jednotková matice řádu n.

Uvažovaná homogenní soustava rovnic má pro libovolné λ triviální řešení $u_1 = ... = u_n = 0$. Nás ale zajímají pouze netriviální řešení (požadujeme $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$), tj. řešení, v nichž je alespoň jedno z čísel $u_1, ... , u_n$ nenulové. Hledáme tedy takové $\lambda \neq 0$, aby výše uvedená soustava rovnic měla netriviální řešení.

Z lineární algebry víte, že homogenní soustava n lineárních rovnic o n neznámých má netriviální řešení právě tehdy, když se determinant matice soustavy rovná nule (matice soustavy musí mít lineárně závislé řádky, musí být singulární). Nemůžeme tedy zvolit číslo λ libovolně, ale musíme ho zvolit tak, aby $\det(A - \lambda I) = 0$. Tato rovnice n-tého stupně pro neznámou λ se nazývá charakteristická rovnice.

Pokud uvedenou rovnici vyřešíme, získáme obecně n kořenů $\lambda_1, ... , \lambda_n$. Uvědomte si, že ačkoliv má charakteristická rovnice reálné koeficienty, může mít také komplexní řešení. Pro další výpočet budeme uvažovat pouze taková čísla λ, která jsou reálná a nenulová. Postupně jedno po druhém dosadíme do soustavy $(A - \lambda I)\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ a najdeme odpovídající řešení $\boldsymbol{u} = (u_1, ... , u_n)$.

Vyřešit charakteristickou rovnici nemusí být v případě, kdy je její stupeň $n > 2$, jednoduché. Často nám pomůže, když dovedeme na základě zadání „uhodnout“ možné hodnoty některých kořenů $\lambda_1, ... , \lambda_n$.

Je užitečné si při řešení příkladů všimnout, že v případě, kdy vlastní číslo λ je m-násobným kořenem charakteristické rovnice, tvoří jemu odpovídající vlastní vektory m-rozměrný podprostor daného vektorového prostoru. Každý nenulový vektor uvedeného podprostoru pak určuje samodružný směr daného afinního zobrazení.

2.5 Základní afinity

Zatím jsme se zabývali jen takovými vlastnostmi afinních zobrazení, které se týkaly obecně všech afinních zobrazení. V této kapitole budeme zkoumat pouze ta afinní zobrazení prostoru na sebe, která jsou vzájemně jednoznačná. Taková zobrazení nazýváme afinitami.

Definice 11: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor.
Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ se nazývá afinita prostoru $\boldsymbol{A}$.

Připomeňme, že vzájemně jednoznačné je takové zobrazení, které je současně prosté i na. Je-li tedy $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ vzájemně jednoznačné zobrazení, je podle věty 17 také jeho asociovaný homomorfismus $\varphi: \boldsymbol{V}(\boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})$ vzájemně jednoznačné zobrazení. To znamená, že asociovaný homomorfismus každé afinity je vždy automorfismem.

Věta 22: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor.
Všechny afinity prostoru $\boldsymbol{A}$ tvoří grupu vzhledem ke skládání.

Jak víte z lineární algebry, grupou rozumíme množinu s binární operací, která je asociativní, má neutrální prvek a ke každému prvku v dané množině existuje prvek inverzní.

***Důkaz*:** Nechť f a g jsou dvě afinity prostoru $\boldsymbol{A}$, tj. f a g jsou vzájemně jednoznačná afinní zobrazení prostoru $\boldsymbol{A}$. Podle definice afinního zobrazení tedy obě afinity zachovávají dělicí poměr.

Je zřejmé, že složené zobrazení $f \circ g$ bude také zachovávat dělicí poměr a bude vzájemně jednoznačné, tj. $f \circ g$ bude také afinita.

Dále víme, že skládání libovolných tří zobrazení je asociativní, proto speciálně skládání tří afinit prostoru $\boldsymbol{A}$ je asociativní.

Neutrálním prvkem vzhledem ke skládání je identita, která je sama afinitou, neboť zachovává dělicí poměr a je zřejmě vzájemně jednoznačným zobrazením.

Zbývá prozkoumat, zda inverzním zobrazením k afinitě f prostoru $\boldsymbol{A}$ je opět afinita prostoru $\boldsymbol{A}$. Ke každému vzájemně jednoznačnému zobrazení f můžeme vytvořit inverzní zobrazení f^{-1}, které bude také vzájemně jednoznačné. Zatím ale nevíme, jestli je také afinní.

Uvažujme tedy vzájemně jednoznačné afinní zobrazení $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$.
Zvolme tři po dvou různé, kolineární body $X, Y, Z \in \boldsymbol{A}$. Protože zobrazení f je vzájemně jednoznačné, existují body $B, C \in \boldsymbol{A}$, pro které $f(B) = X$ a $f(C) = Y$.
Pro inverzní zobrazení $f^{-1}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ potom platí $f^{-1}(X) = B$ a $f^{-1}(Y) = C$.

Zvolme nyní bod $D \in \boldsymbol{A}$ tak, aby body B, C, D byly kolineární a aby platilo, že $(D; B, C) = (Z; X, Y)$. Protože afinní zobrazení f dělicí poměr zachovává, musí být $f(D) = Z$. Pro inverzní zobrazení f^{-1} pak platí $f^{-1}(Z) = D$.

Body $f^{-1}(X)$, $f^{-1}(Y)$, $f^{-1}(Z)$ jsou tedy po dvou různé, kolineární a platí pro ně, že $(f^{-1}(Z); f^{-1}(X), f^{-1}(Y)) = (Z; X, Y)$.
Tato rovnost vyjadřuje, že zobrazení f^{-1} zachovává dělicí poměr, tj. f^{-1} je afinní.

Důkaz, že inverzní zobrazení k afinnímu zobrazení je opět afinní, lze také snadno provést pomocí LSS. Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor dimenze n a f je afinní zobrazení prostoru $\boldsymbol{A}$ do sebe, které má vzhledem ke zvolené LSS analytické vyjádření

$$f : x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j, \text{ kde } j = 1, \dots, n.$$

V maticovém zápisu lze psát $f : x' = A\,x + b$, kde matice $A = (a_{ji})$, ostatní veličiny x', x a b uvažujeme jako sloupcové vektory. Chceme-li získat předpis pro inverzní zobrazení f^{-1}, musíme pomocí „souřadnic“ x' vyjádřit „souřadnice“ x. Postupně získáme

$$\begin{aligned} A\,x &= x' - b, \\ A^{-1} A\,x &= A^{-1}(x' - b), \\ x &= A^{-1}(x' - b), \\ x &= A^{-1}x' - A^{-1}b, \\ x &= A^{-1}x' + c, \end{aligned}$$

kde A^{-1} je matice inverzní k matici A, c jsme označili součin $-A^{-1}b$.

Analytické vyjádření inverzního zobrazení f^{-1} má tedy „stejný“ tvar jako analytické vyjádření afinního zobrazení f. Podle věty 19 je proto zobrazení f^{-1} afinní.

V předchozí kapitole jsme ve větě 20 uvedli, že množina všech samodružných bodů afinního zobrazení prostoru $\boldsymbol{A}$ do sebe je buďto prázdná, nebo tvoří podprostor prostoru $\boldsymbol{A}$. Je-li tímto podprostorem celý prostor $\boldsymbol{A}$, je příslušné afinní zobrazení identitou prostoru $\boldsymbol{A}$.

Další důležitý případ nastane, je-li množinou všech samodružných bodů nějaká nadrovina prostoru $\boldsymbol{A}$. Takové afinní zobrazení, které je navíc ještě vzájemně jednoznačné, nazýváme základní afinitou.

Definice 12: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor.
Afinitu prostoru $\boldsymbol{A}$ budeme nazývat základní, pokud množina všech jejích samodružných bodů je nadrovinou prostoru $\boldsymbol{A}$.

Základní afinitou je např. symetrie podle libovolné nadroviny v prostoru $\boldsymbol{E}_n$, neboť zmíněná nadrovina je právě množinou všech samodružných bodů. Konkrétně je základní afinitou např. symetrie podle přímky v prostoru $\boldsymbol{E}_2$ nebo symetrie podle roviny v prostoru $\boldsymbol{E}_3$. Naopak, např. symetrie podle přímky v prostoru $\boldsymbol{E}_3$ není základní afinitou.

Ještě poznamenejme, že v případě afinní roviny $\boldsymbol{A}_2$ říkáme základním afinitám osové afinity, přímka samodružných bodů je osou dané osové afinity.

Věta 22 uváděla, že všechny afinity daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání. Není těžké dokázat, že pouze základní afinity grupu netvoří. Složením dvou základních afinit není vždy základní afinita. Např. složením symetrií podle dvou různých rovnoběžných přímek v rovině je posunutí, které nemá žádné samodružné body. Nejedná se tedy o základní afinitu.

Následující věta říká, že každá základní afinita prostoru $\boldsymbol{A}$ je jednoznačně určena množinou svých samodružných bodů (tj. nadrovinou prostoru $\boldsymbol{A}$) a obrazem jednoho bodu, který není samodružný.

Věta 23: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor dimenze n a ρ je nadrovina prostoru $\boldsymbol{A}$.
Nechť jsou dále dány body $B_0, B'_0 \in \boldsymbol{A} - \rho$, přičemž $B'_0 \neq B_0$.
Potom existuje právě jedna základní afinita f prostoru $\boldsymbol{A}$, pro kterou platí:

1. $\{X \in \boldsymbol{A};\, f(X) = X\} = \rho$,
2. $f(B_0) = B'_0$.

***Důkaz*:** Zvolme v nadrovině ρ lineárně nezávislé body $B_1, \dots, B_n$.
Potom podle věty 14 existuje právě jedno afinní zobrazení f prostoru $\boldsymbol{A}$ na sebe, pro které platí $f(B_0) = B'_0$, $f(B_1) = B_1, \dots, f(B_n) = B_n$.
Body $B_1, \dots, B_n \in \rho$ jsou tedy při zobrazení f samodružné.
Zvolme libovolný bod $X \in \rho$, který lze podle věty 9 zapsat jako lineární kombinaci bodů $B_1, \dots, B_n$, tj. $X = \beta_1 B_1 + \dots + \beta_n B_n$.
Potom podle věty 15 je $f(X) = \beta_1\, f(B_1) + \dots + \beta_n\, f(B_n) = \beta_1 B_1 + \dots + \beta_n B_n$.
Platí tedy $f(X) = X$, neboli bod X je také samodružným bodem při zobrazení f.
Tím jsme dokázali, že nadrovina ρ je tvořena pouze samodružnými body zobrazení f. Podle věty 20 je množina všech samodružných bodů buď prázdná, nebo je podprostorem prostoru $\boldsymbol{A}$. V tomto případě samodružné body nemohou tvořit celý prostor $\boldsymbol{A}$, neboť bod $B_0 \in \boldsymbol{A} - \rho$ není samodružný. Nadrovina ρ je tedy množinou všech samodružných bodů zobrazení f, zobrazení f je proto základní afinitou.

Následující věta říká, že každou afinitu afinního prostoru lze složit ze základních afinit. Tím se také zároveň vysvětluje označení „základní“ afinita.

Věta 24: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor dimenze n.
Ke každé afinitě f prostoru $\boldsymbol{A}$ existuje k základních afinit $f_1, \dots, f_k$, kde $k \leq n + 1$, tak, že $f = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$.

***Důkaz*:** Zvolme v prostoru $\boldsymbol{A}$ lineárně nezávislé body $P_0, P_1, \dots, P_n$.
Podle věty 14 je afinita f prostoru $\boldsymbol{A}$ jednoznačně určena obrazy těchto bodů.
Předpokládejme, že $f(P_0) = P'_0$, $f(P_1) = P'_1, \dots, f(P_n) = P'_n$.
Zvolme dále v prostoru $\boldsymbol{A}$ nadrovinu ρ_1, která neobsahuje body P_0, P'_0.

Potom podle věty 23 existuje právě jedna základní afinita f_1, která zobrazuje bod P_0 na bod P'_0 (tj. platí $f_1(P_0) = P'_0$) a má nadrovinu ρ_1 za svou množinu všech samodružných bodů. Označme $f_1(P_i) = P_{1i}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Body $P'_0, P_{11}, \dots, P_{1n}$ jsou jakožto obrazy lineárně nezávislých bodů při afinitě f_1 také lineárně nezávislé.

Dále zvolíme v prostoru $\boldsymbol{A}$ nadrovinu ρ_2, která prochází bodem P'_0, ale neobsahuje body P_{11} a P'_1. Potom opět podle věty 23 existuje právě jedna základní afinita f_2, která má ρ_2 za svou množinu všech samodružných bodů a platí $f_2(P_{11}) = P'_1$. Označme nyní $f_2(P_{1i}) = P_{2i}$ pro $i = 2, 3, \dots, n$.

Dále postupujeme analogicky: zvolíme nadrovinu ρ_3, která prochází body P'_0 a P'_1, ale neobsahuje body P_{22} a P'_2. Základní afinita f_3 potom bude mít za množinu všech svých samodružných bodů právě nadrovinu ρ_3 a bude platit $f_3(P_{22}) = P'_2$. Nakonec budeme volit nadrovinu ρ_{n+1} obsahující body $P'_0, P'_1, \dots, P'_{n-1}$. Body P_{nn} a P'_n v ní ležet nebudou. Poslední základní afinita f_{n+1} s nadrovinou samodružných bodů ρ_{n+1} pak zobrazí bod P_{nn} na bod P'_n.

Složená afinita $f_{n+1} \circ f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ zobrazuje bod P_i na bod P'_i pro $i = 0, 1, \dots, n$, je tedy totožná s afinitou f. Tím jsme ukázali, že každá afinita f je složena z nejvýše $n + 1$ základních afinit. Počet základních afinit ale může být i nižší.

V případě, že by se při základní afinitě f_1 bod P_1 zobrazil přímo na bod P'_1, by nám jedna základní afinita ubyla. Počet základních afinit se tak případně může snížit. Proto pro počet k základních afinit platí nerovnost $k \le n + 1$.

Postup při rozkladu afinity f na základní afinity ještě přiblížíme následujícím schématem (viz obr. č. 13). Každý řádek je přitom tvořen lineárně nezávislými body.

$$
\begin{array}{cccccc}
P_0 & P_1 & P_2 & \cdots\cdots & P_{n-1} & P_n \\
 & & & \downarrow f_1 & & \\
P'_0 & P_{11} & P_{12} & \cdots\cdots & P_{1,n-1} & P_{1n} \\
 & & & \downarrow f_2 & & \\
P'_0 & P'_1 & P_{22} & \cdots\cdots & P_{2,n-1} & P_{2n} \\
 & & & \downarrow f_3 & & \\
P'_0 & P'_1 & P'_2 & \cdots\cdots & P_{3,n-1} & P_{3n} \\
 & & & & & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
 & & & & & \\
P'_0 & P'_1 & P'_2 & \cdots\cdots & P'_{n-1} & P_{nn} \\
 & & & \downarrow f_{n+1} & & \\
P'_0 & P'_1 & P'_2 & \cdots\cdots & P'_{n-1} & P'_n
\end{array}
$$

Obrázek č. 13

Následující věta uvádí, v jakém tvaru lze zapsat analytické vyjádření každé základní afinity.

Věta 25: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor dimenze n.
Nechť ρ je nadrovina prostoru $\boldsymbol{A}$, která má vzhledem ke zvolené LSS rovnici $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1} = 0$.
Je-li f základní afinita, jejíž množinou všech samodružných bodů je nadrovina ρ, potom existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}$ tak, že analytické vyjádření základní afinity f má tvar $f: x'_j = x_j + \lambda_j (c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1})$, kde $j = 1, \ldots, n$.

***Důkaz*:** Analytické vyjádření základní afinity f musí mít podle věty 18 stejný tvar jako analytické vyjádření každého afinního zobrazení, tj. $f: x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j$, kde $j = 1, \ldots, n$,

neboli
$$x'_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n + b_1,$$
$$x'_2 = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n + b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x'_n = a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n + b_n.$$

Kdybychom počítali samodružné body základní afinity f, řešili bychom následující soustavu rovnic pro neznámé $x_1, \ldots, x_n$:
$$x_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n + b_1,$$
$$x_2 = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n + b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n + b_n.$$

Uvedenou soustavu lze přepsat do tvaru:
$$(a_{11} - 1)\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n + b_1 = 0,$$
$$a_{21}\, x_1 + (a_{22} - 1)\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n + b_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + (a_{nn} - 1)\, x_n + b_n = 0.$$

Maticí této soustavy je matice $A - I$, kde $A = (a_{ji})$, I je jednotková matice řádu n. Protože množinou všech samodružných bodů základní afinity f má být nadrovina ρ, plyne odtud, že hodnost matice $A - I$ musí být rovna jedné. Uvažovaná homogenní soustava rovnic je v podstatě pouze jedinou rovnicí (rovnicí naší nadroviny), ostatní rovnice jsou jejími násobky. Obecně každá rovnice uvažované soustavy musí být nějakým násobkem rovnice nadroviny ρ, tj. rovnice $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1} = 0$.
To znamená, že existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}$ tak, že
$$a_{11} - 1 = \lambda_1 c_1,\ a_{12} = \lambda_1 c_2,\ \ldots,\ a_{1n} = \lambda_1 c_n,\ b_1 = \lambda_1 c_{n+1},$$
$$a_{21} = \lambda_2 c_1,\ a_{22} - 1 = \lambda_2 c_2,\ \ldots,\ a_{2n} = \lambda_2 c_n,\ b_2 = \lambda_2 c_{n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1} = \lambda_n c_1,\ a_{n2} = \lambda_n c_2,\ \ldots,\ a_{nn} - 1 = \lambda_n c_n,\ b_n = \lambda_n c_{n+1}.$$

Po dosazení čísel a_{ji} do obecného analytického vyjádření afinního zobrazení získáme rovnice základní afinity f ve tvaru

$$x'_1 = x_1 + \lambda_1 (c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + c_{n+1}),$$
$$x'_2 = x_2 + \lambda_2 (c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + c_{n+1}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x'_n = x_n + \lambda_n (c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + c_{n+1}).$$

Tím je důkaz proveden.

Navíc vidíme, že alespoň jedno z čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ musí být nenulové. V opačném případě by zobrazení f bylo identitou a identita není základní afinitou.

Podle věty 23 není nadrovinou ρ základní afinita ještě jednoznačně určena. Musíme znát navíc obraz B'_0 některého bodu B_0, který neleží v nadrovině ρ.

Pokud ve zvolené LSS platí $B_0 = [b_{01}, \dots, b_{0n}]$ a $B'_0 = [b'_{01}, \dots, b'_{0n}]$, musí být splněna rovnost $b'_{0j} = b_{0j} + \lambda_j (c_1 b_{01} + \dots + c_n b_{0n} + c_{n+1})$, kde $j = 1, \dots, n$.

Čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou potom jednoznačně určena vztahem

$$\lambda_j = \frac{b'_{0j} - b_{0j}}{c_1 b_{01} + \dots + c_n b_{0n} + c_{n+1}}, \text{kde } j = 1, \dots, n.$$

Věta 26: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor dimenze n. Nechť ρ je nadrovina prostoru $\boldsymbol{A}$ a nechť jsou dále dány body $B_0, B'_0 \in \boldsymbol{A}$, přičemž $B_0 \notin \rho$ a $B'_0 \neq B_0$.

Potom existuje právě jedno afinní zobrazení $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ takové, že množinou všech jeho samodružných bodů je nadrovina ρ a $f(B_0) = B'_0$. Přitom platí:

1. Je-li $B'_0 \in \rho$, je f projekce prostoru $\boldsymbol{A}$ na nadrovinu ρ ve směru vektoru $B'_0 - B_0$.
2. Jestliže $B'_0 \notin \rho$, je f základní afinitou a platí:
   a) Pokud $B'_0 - B_0 \in \boldsymbol{V}(\rho)$, jsou všechny přímky $X f(X)$ navzájem rovnoběžné a jsou také rovnoběžné s nadrovinou ρ.
   V tomto případě se příslušná afinita nazývá elace.
   b) Pokud $B'_0 - B_0 \notin \boldsymbol{V}(\rho)$, jsou všechny přímky $X f(X)$ navzájem rovnoběžné a existuje číslo $k \in \boldsymbol{R}$ tak, že pro každý bod $X \in \boldsymbol{A} - \rho$ platí $(\bar{X}; X, f(X)) = k$, kde $\bar{X}$ je průsečík přímky $X f(X)$ s nadrovinou ρ.
   V tomto případě se číslo k nazývá charakteristika afinity f.

***Důkaz*:** Zvolme v afinním prostoru $\boldsymbol{A}$ nadrovinu ρ a body B_0, B'_0 tak, že $B_0 \notin \rho$ a $B'_0 \neq B_0$. Afinní zobrazení $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, jehož množinou všech samodružných bodů je nadrovina ρ, je potom podle věty 14 jednoznačně určeno, je-li dán ještě obraz $f(B_0) = B'_0$ některého bodu B_0, který v nadrovině ρ neleží.

Přitom samozřejmě platí $B'_0 \neq B_0$, neboť bod B_0 není samodružným bodem zobrazení f. Pro bod B'_0 ale mohou nastat dva případy – buď $B'_0 \in \rho$, nebo $B'_0 \notin \rho$.

ad 1) Nechť $B'_0 \in \rho$. Chceme ukázat, že v tomto případě je f projekce prostoru $\boldsymbol{A}$ na nadrovinu ρ ve směru vektoru $B'_0 - B_0$.

Obraz libovolného bodu $X \notin \rho$ při afinním zobrazení f získáme následujícím způsobem (rozlišíme tři případy):

Pokud $X \notin B_0B'_0$ a není-li přímka XB_0 rovnoběžná s nadrovinou ρ (viz obr. č. 14), označíme P průsečík přímky XB_0 s nadrovinou ρ. Bod $P \in \rho$ je při zobrazení f samodružný. Protože bod X leží na přímce PB_0, leží jeho obraz $f(X) = X'$ na přímce PB'_0 a platí, že $(X'; P, B'_0) = (X; P, B_0)$. Protože rovnoběžné promítání dělicí poměr zachovává (důkaz viz [17], str. 65, věta 1.7.2), musí být přímky XX' a $B_0B'_0$ navzájem rovnoběžné.

Je-li přímka XB_0 rovnoběžná s nadrovinou ρ (viz obr. č. 15), můžeme v nadrovině ρ zvolit bod Y tak, aby XYB'_0B_0 byl rovnoběžník, tj. aby platila rovnost $X - B_0 = Y - B'_0$. Potom podle věty 10 je $f(X) - f(B_0) = f(Y) - f(B'_0) = Y - B'_0$, neboť body Y a B'_0 jsou při zobrazení f samodružné. Protože zároveň $f(B_0) = B'_0$, musí platit $f(X) = Y$.

Leží-li konečně bod X na přímce $B_0B'_0$, musí podle věty 11 být $X' = B'_0$, neboť obrazy bodů B_0 a B'_0 při zobrazení f splývají.

Ve všech třech výše uvedených případech tedy obraz X' bodu X při zobrazení f získáme jako průmět bodu X do nadroviny ρ ve směru vektoru $B'_0 - B_0$.
Je zřejmé, že toto zobrazení není prosté, nejedná se tedy o afinitu.

ad 2) Nechť $B'_0 \notin \rho$. Potom podle věty 23 je zobrazení f základní afinitou.

a) Jestliže $B'_0 - B_0 \in \boldsymbol{V}(\rho)$, je přímka $B_0B'_0$ s nadrovinou ρ rovnoběžná.
Předpokládejme tedy, že body B_0 a B'_0 leží v nějaké nadrovině σ, která je s nadrovinou ρ rovnoběžná (viz obr. č. 16). Chceme opět najít obraz libovolného bodu $X \notin \rho$.

Pokud bod $X \notin \sigma$, sestrojíme průsečík P přímky XB_0 s nadrovinou ρ. Bod P je při zobrazení f samodružný. Protože bod X leží na přímce PB_0, leží jeho obraz X' při afinním zobrazení f na přímce PB'_0 a platí, že
$(X'; P, B'_0) = (X; P, B_0)$.
Přímky XX' a $B_0B'_0$ jsou v tomto případě navzájem rovnoběžné.

Pokud zvolíme bod $Y \in \sigma$, nelze výše uvedený postup pro konstrukci obrazu bodu Y použít, přímka YB_0 nadrovinu ρ v tomto případě vůbec neprotne. Je třeba zvolit pomocný bod $X \notin \sigma$, jehož obraz X' jsme již sestrojili, a najít průsečík Q přímky XY s nadrovinou ρ. Bod Q je opět při zobrazení f samodružný. Protože bod Y leží na přímce XQ, bude jeho obraz Y' ležet na přímce $X'Q$ tak, že platí $(Y'; X', Q) = (Y; X, Q)$.
Také v tomto případě jsou přímky YY' a $B_0B'_0$ navzájem rovnoběžné, ale oproti předchozímu případu jsou úsečky YY' a $B_0B'_0$ navíc stejně dlouhé. Vidíme tedy, že restrikce (zúžení) elace na nadrovinu rovnoběžnou s nadrovinou ρ dává posunutí ($B_0 \to B'_0$, $Y \to Y'$).

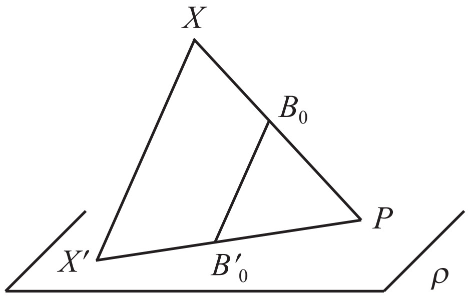
b) Předpokládejme nyní, že $B'_0 - B_0 \notin \boldsymbol{V}(\rho)$. V tomto případě je přímka $B_0B'_0$ s nadrovinou ρ různoběžná, označme jejich průsečík $\overline{B}_0$ (viz obr. č. 17).

Pokud bod $X \notin B_0B'_0$ a přímka XB_0 není s nadrovinou ρ rovnoběžná, protne nadrovinu v bodě, který označíme P. Protože bod X leží na přímce PB_0, leží jeho obraz X' na přímce PB'_0 a platí $(X'; P, B'_0) = (X; P, B_0)$. Přímky XX' a $B_0B'_0$ jsou opět rovnoběžné. Označme ještě $\overline{X}$ průsečík přímky XX' s nadrovinou ρ. Protože se dělicí poměr zachovává také při středovém promítání (se středem P) z přímky XX' na přímku $B_0B'_0$ s ní rovnoběžnou (důkaz viz [17], str. 66, věta 1.7.4), platí rovnost $(\overline{X}; X, X') = (\overline{B}_0; B_0, B'_0)$. Protože dělicí poměr $(\overline{B}_0; B_0, B'_0)$ je v případě libovolně, ale pevně zvolených bodů B_0, B'_0 a nadroviny ρ konstantní, můžeme označit $(\overline{B}_0; B_0, B'_0) = k$, kde $k \in \boldsymbol{R}$.

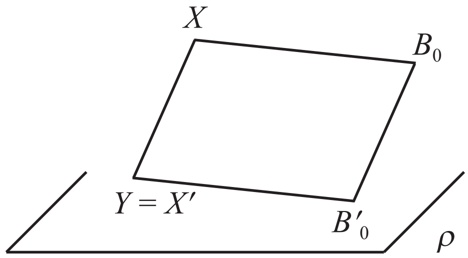
Je-li přímka XB_0 s nadrovinou ρ rovnoběžná (viz obr. č. 18), doplníme body X, B_0, B'_0 pomocí bodu Y na rovnoběžník XYB'_0B_0. Platí tedy rovnost $X - B_0 = Y - B'_0$. Ze základní vlastnosti homomorfismu φ asociovaného afinnímu zobrazení f potom plyne rovnost $f(X) - f(B_0) = \varphi(X - B_0) = X - B_0$, neboť homomorfismus φ zobrazí vektor $X - B_0 \in \boldsymbol{V}(\rho)$ na sebe. Protože $f(B_0) = B'_0$, musí platit $X' = f(X) = Y$. Také v tomto případě jsou přímky XX' a $B_0B'_0$ navzájem rovnoběžné a označíme-li opět $\overline{X}$ průsečík přímky XX' s nadrovinou ρ, pak platí $(\overline{X}; X, X') = k$.

Leží-li konečně bod X na přímce $B_0B'_0$ (viz obr. č. 19), sestrojíme nejprve obraz Y' libovolného bodu Y, který na přímce $B_0B'_0$ neleží. Průsečík přímky YB_0 s nadrovinou ρ jsme označili P, průsečík přímky XY s nadrovinou ρ jsme označili Q. Protože bod X leží na přímce YQ, leží jeho obraz X' na přímce $Y'Q$ a platí, že $(X'; Y', Q) = (X; Y, Q)$. Také v tomto případě je přímka XX' rovnoběžná s přímkou $B_0B'_0$ (dokonce $XX' \subset B_0B'_0$ a $\overline{X} = \overline{B}_0$). Zřejmě je splněna rovnost $(\overline{X}; X, X') = (\overline{Y}; Y, Y') = (\overline{B}_0; B_0, B'_0)$.

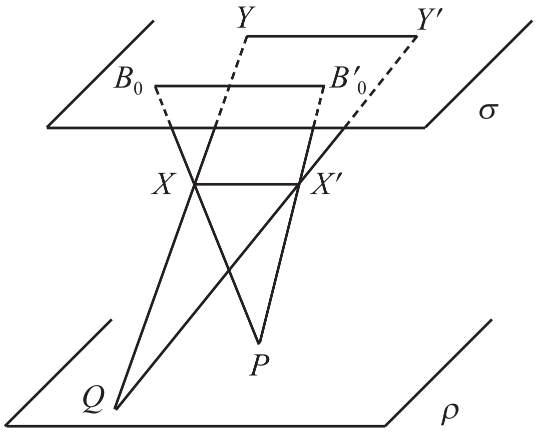
Ve všech třech výše uvedených případech jsou tedy pro libovolný bod $X \notin \rho$ přímky XX' navzájem rovnoběžné a existuje číslo $k \in \boldsymbol{R}$ tak, že
$(\overline{X}; X, X') = k$, kde $k = (\overline{B}_0; B_0, B'_0)$.
Zároveň je již zřejmé, proč musí být $X \notin \rho$. Kdyby bylo $X \in \rho$, byl by bod X samodružný ($X = X'$) a dělicí poměr $(\overline{X}; X, X')$ by nebyl definován.



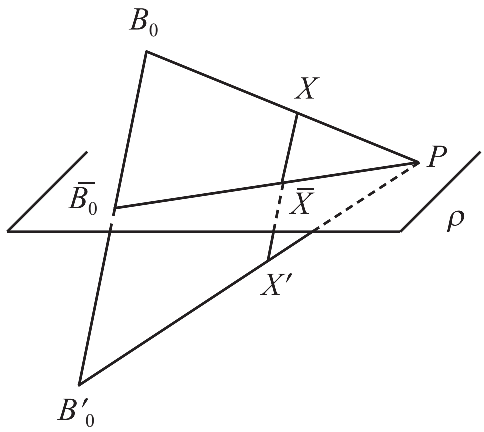
Obrázek č. 14



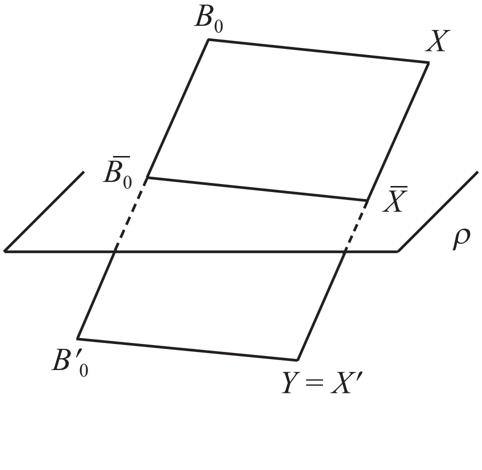
Obrázek č. 15



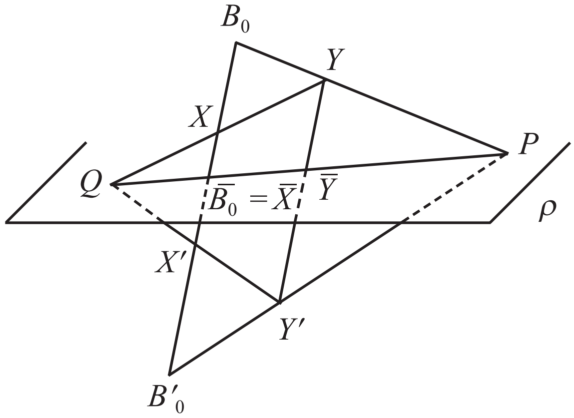
Obrázek č. 16



Obrázek č. 17



Obrázek č. 18



Obrázek č. 19

Definice 13: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor. Neidentické afinní zobrazení $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, které složeno samo se sebou dává identitu, se nazývá involutorní.

Kromě pojmu involutorní zobrazení se někdy používá také involutivní, nebo zkráceně involuce. Pro involutorní zobrazení f tedy platí $f \circ f =$ identita. Např. symetrie podle přímky v rovině je involuce.

Věta 27: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor. Základní afinita $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ je involutorním zobrazením právě tehdy, když není elací a její charakteristika $k = -1$.

***Důkaz*:** Nechť je základní afinita f involutorním zobrazením. Je zřejmé, že elace nemůže být involutorním zobrazením, protože její restrikce na nadrovinu rovnoběžnou s nadrovinou samodružných bodů je posunutí o nenulový vektor, a to složeno samo se sebou není identitou.

Pro základní afinitu f tedy existuje charakteristika $k = (\overline{X}; X, X')$, kde X' je obraz bodu X při základní afinitě f a $\overline{X}$ je průsečík přímky XX' s nadrovinou samodružných bodů. Má-li se při afinitě f bod X' zobrazit zpět do bodu X, musí také platit
$k = (\overline{X}; X', X)$.
Aby současně platilo $\overline{X} - X = k\,(\overline{X} - X')$ a $\overline{X} - X' = k\,(\overline{X} - X)$, musí být $k = -1$
($k = 1$ nevyhovuje, neboť dělicí poměr nenabývá hodnoty 1).

Předpokládejme nyní, že základní afinita f není elací a její charakteristika
$k = (\overline{X}; X, X') = -1$. To znamená, že bod $\overline{X}$ je středem úsečky XX'. Jestliže se v této afinitě bod X zobrazí do bodu X', zobrazí se ve stejné afinitě bod X' nazpět do bodu X. Základní afinita f je tedy involutorním zobrazením.

2.6 Grupa homotetií

S pojmem homotetie jste se na střední škole setkali jako s jiným označením pro stejnolehlost. V této kapitole si ukážeme, že stejnolehlost má některé vlastnosti společné s posunutím, a proto pojem homotetie zavedeme jako společný název pro stejnolehlosti a posunutí afinního prostoru. Nejprve ale uvedeme definice obou zobrazení a prostudujeme grupové vlastnosti množin těchto zobrazení.

Definice 14: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor se zaměřením $\boldsymbol{V}$.
Posunutím o vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ v prostoru $\boldsymbol{A}$ rozumíme zobrazení f definované předpisem $f(X) = X + \boldsymbol{u}$, kde $X \in \boldsymbol{A}$.

Kromě pojmu posunutí se používá také termín translace.
Je zřejmé, že pokud $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, je zobrazení f identitou.

Věta 28: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor se zaměřením $\boldsymbol{V}$.
Všechna posunutí prostoru $\boldsymbol{A}$ tvoří grupu vzhledem ke skládání.

***Důkaz*:** Uvažujme dvě posunutí prostoru $\boldsymbol{A}$; posunutí f o vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ a posunutí g o vektor $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, pro která platí $f(X) = X + \boldsymbol{u}$ a $g(X) = X + \boldsymbol{v}$.

Zajímá nás, jestli složením dvou posunutí vznikne opět posunutí.

Platí $(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(X + \boldsymbol{u}) = (X + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v}$.
Protože $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor, lze psát $(g \circ f)(X) = X + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$.

Složené zobrazení je posunutím o vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Množina všech posunutí prostoru $\boldsymbol{A}$ je tedy uzavřená vzhledem k operaci skládání.

Skládání libovolných tří zobrazení je asociativní, tedy speciálně skládání tří posunutí je asociativní.

Neutrálním prvkem vzhledem ke skládání je identita, neboli posunutí o nulový vektor.

Inverzním prvkem k posunutí o vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ je zřejmě posunutí o vektor $(-\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{V}$.

Tím je důkaz proveden.

Předchozí úvahy nás vedou k myšlence, že grupa tvořená všemi posunutími prostoru $\boldsymbol{A}$ je izomorfní s aditivní grupou tvořenou všemi vektory zaměření $\boldsymbol{V}$. Detaily se dají snadno ověřit.

Definice 15: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor.
Stejnolehlostí prostoru $\boldsymbol{A}$ se středem $S \in \boldsymbol{A}$ a koeficientem $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda \neq 0$, rozumíme zobrazení f definované předpisem $f(X) = S + \lambda(X - S)$, kde $X \in \boldsymbol{A}$.

Všimněte si, že definice 15 zahrnuje mezi stejnolehlosti také identitu jako stejnolehlost s koeficientem $\lambda = 1$. Za její střed v tomto případě můžeme zvolit libovolný bod prostoru $\boldsymbol{A}$.

Kdybychom připustili $\lambda = 0$, bylo by $f(X) = S$ pro každý bod $X \in \boldsymbol{A}$. V tomto případě by se celý prostor $\boldsymbol{A}$ zobrazil do jediného bodu S. Takové zobrazení za stejnolehlost nepovažujeme.

Z předpisu pro stejnolehlost také vidíme, že bod S je při stejnolehlosti s libovolným koeficientem $\lambda \neq 0$ samodružný. Dosadíme-li totiž $X = S$, potom $f(S) = S + \lambda (S - S) = S + \lambda \boldsymbol{o} = S$.

Věta 29: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor.
Všechny stejnolehlosti prostoru $\boldsymbol{A}$ s daným středem tvoří grupu vzhledem ke skládání.

***Důkaz*:** Uvažujme dvě stejnolehlosti prostoru $\boldsymbol{A}$ se stejným středem $S \in \boldsymbol{A}$; stejnolehlost f s koeficientem $\lambda \neq 0$ a stejnolehlost g s koeficientem $\mu \neq 0$, pro které platí $f(X) = S + \lambda (X - S)$ a $g(X) = S + \mu (X - S)$, kde $X \in \boldsymbol{A}$.

Chceme dokázat, že složením dvou stejnolehlostí se stejným středem je opět stejnolehlost s daným středem.

Platí
$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(S + \lambda (X - S)) = S + \mu [(S + \lambda (X - S)) - S] = \\ = S + \lambda \mu (X - S).$$

Složené zobrazení je tedy stejnolehlostí se středem S a koeficientem $\lambda \mu$.

Skládání libovolných tří zobrazení je asociativní, tedy speciálně skládání tří stejnolehlostí s daným středem je asociativní.

Neutrálním prvkem vzhledem ke skládání je identita, neboli stejnolehlost se středem S a koeficientem $\lambda = 1$.

Inverzním prvkem ke stejnolehlosti se středem S a koeficientem λ je stejnolehlost se stejným středem S a koeficientem $1/\lambda$.

Tím je důkaz proveden.

Opět lze dokázat, že grupa tvořená všemi stejnolehlostmi prostoru $\boldsymbol{A}$ s daným středem je izomorfní s multiplikativní grupou nenulových reálných čísel.

Ve větě 29 je podstatné, že se jedná pouze o stejnolehlosti se stejným středem. Všechny stejnolehlosti afinního prostoru totiž grupu netvoří. Pokud k nim ale přidáme také všechna posunutí daného prostoru, bude vzniklá množina grupou.

Věta 30: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor se zaměřením $\boldsymbol{V}$.
Množina tvořená všemi posunutími a všemi stejnolehlostmi prostoru $\boldsymbol{A}$ je grupou vzhledem ke skládání.

***Důkaz*:** Z důkazu věty 28 víme, že složením dvou posunutí vznikne opět posunutí.

Zbývá prozkoumat skládání posunutí a stejnolehlosti a skládání dvou stejnolehlostí s různými středy.

Nechť f je stejnolehlost se středem S a koeficientem $\lambda \neq 0$ (předpokládejme navíc $\lambda \neq 1$, aby f nebyla identita), g je posunutí o vektor $\boldsymbol{u}$.

Potom pro $X \in \boldsymbol{A}$ je $f(X) = S + \lambda (X - S)$ a $g(X) = X + \boldsymbol{u}$.

Složené zobrazení $(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(S + \lambda(X - S)) = S + \lambda(X - S) + \boldsymbol{u}$.
Z tohoto předpisu je vidět, že složené zobrazení $g \circ f$ není posunutím. Je proto třeba ověřit, že zobrazení $g \circ f$ je stejnolehlost – musíme najít její střed T a koeficient.

Lze předpovědět, že koeficient uvažované stejnolehlosti bude λ. Střed T najdeme jako samodružný bod zobrazení $g \circ f$, pro který je splněno, že $(g \circ f)(T) = T$.
Musí tedy platit $T = S + \lambda(T - S) + \boldsymbol{u}$.

Odtud postupně dostaneme

$$(T - S) - \lambda(T - S) = \boldsymbol{u},$$
$$(1 - \lambda)(T - S) = \boldsymbol{u},$$
$$T - S = \frac{1}{1-\lambda}\boldsymbol{u},$$
$$T = S + \frac{1}{1-\lambda}\boldsymbol{u}.$$

Ověřme nyní, že stejnolehlosti se středem T a koeficientem λ opravdu přísluší stejný předpis jako složenému zobrazení $g \circ f$. Dostaneme

$$\begin{aligned} T + \lambda(X - T) &= \left(S + \frac{1}{1-\lambda}\boldsymbol{u}\right) + \lambda\left[X - \left(S + \frac{1}{1-\lambda}\boldsymbol{u}\right)\right] = \\ &= S + \frac{1}{1-\lambda}\boldsymbol{u} + \lambda(X - S) - \frac{\lambda}{1-\lambda}\boldsymbol{u} = \\ &= S + \lambda(X - S) + \boldsymbol{u} = (g \circ f)(X). \end{aligned}$$

Kdybychom stejnolehlost f a posunutí g skládali v opačném pořadí, dostali bychom složené zobrazení $(f \circ g)(X) = f(g(X)) = f(X + \boldsymbol{u}) = S + \lambda[(X + \boldsymbol{u}) - S] =$
$= S + \lambda(X - S) + \lambda\boldsymbol{u}$.

Také toto zobrazení $f \circ g$ je stejnolehlost s koeficientem λ. Pro její střed P v tomto případě platí $(f \circ g)(P) = P$, neboli

$$P = S + \lambda(P - S) + \lambda\boldsymbol{u},$$
$$(P - S) - \lambda(P - S) = \lambda\boldsymbol{u},$$
$$(1 - \lambda)(P - S) = \lambda\boldsymbol{u},$$
$$P - S = \frac{\lambda}{1-\lambda}\boldsymbol{u},$$
$$P = S + \frac{\lambda}{1-\lambda}\boldsymbol{u}.$$

Ověřme opět, že $P + \lambda(X - P) = (f \circ g)(X)$. Zřejmě

$$\begin{aligned} P + \lambda(X - P) &= \left(S + \frac{\lambda}{1-\lambda}\boldsymbol{u}\right) + \lambda\left[X - \left(S + \frac{\lambda}{1-\lambda}\boldsymbol{u}\right)\right] = \\ &= S + \frac{\lambda}{1-\lambda}\boldsymbol{u} + \lambda(X - S) - \frac{\lambda^2}{1-\lambda}\boldsymbol{u} = \\ &= S + \lambda(X - S) + \lambda\boldsymbol{u} = (f \circ g)(X). \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že složením posunutí a stejnolehlosti v libovolném pořadí je opět stejnolehlost.

Zbývá prozkoumat skládání dvou stejnolehlostí s různými středy.

Nechť f je stejnolehlost se středem S a koeficientem λ, g stejnolehlost se středem T a koeficientem μ. Potom pro $X \in \boldsymbol{A}$ je $f(X) = S + \lambda\,(X - S)$ a $g(X) = T + \mu\,(X - T)$.

Složené zobrazení $(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(S + \lambda\,(X - S)) =$
$$= T + \mu\,[(S + \lambda\,(X - S)) - T] =$$
$$= T + \mu\,(S - T) + \lambda\,\mu\,(X - S).$$

Nyní mohou nastat dva případy:

1. Pro $\lambda\,\mu = 1$ je $(g \circ f)(X) = T + \mu\,(S - T) + (X - S) = X + (T - S) + \mu\,(S - T) =$
$$= X + (1 - \mu)(T - S).$$
Složené zobrazení $g \circ f$ je v tomto případě posunutím o vektor $(1 - \mu)(T - S)$.

2. Pokud $\lambda\,\mu \neq 1$, je zobrazení $g \circ f$ stejnolehlostí se středem P a koeficientem $\lambda\,\mu$. Pro střed P platí $(g \circ f)(P) = P$, odkud dostaneme
$$P = T + \mu\,(S - T) + \lambda\,\mu\,(P - S),$$
$$P = S + (T - S) + \mu\,(S - T) + \lambda\,\mu\,(P - S),$$
$$(P - S) - \lambda\,\mu\,(P - S) = (1 - \mu)(T - S),$$
$$(1 - \lambda\,\mu)(P - S) = (1 - \mu)(T - S),$$
$$P - S = \frac{1-\mu}{1-\lambda\,\mu}(T - S),$$
$$P = S + \frac{1-\mu}{1-\lambda\,\mu}(T - S).$$

Ověřme opět, že $P + \lambda\,\mu\,(X - P) = (g \circ f)(X)$. Zřejmě
$$P + \lambda\,\mu\,(X - P) = \left(S + \frac{1-\mu}{1-\lambda\,\mu}(T - S)\right) + \lambda\,\mu\left[X - \left(S + \frac{1-\mu}{1-\lambda\,\mu}(T - S)\right)\right] =$$
$$= T + (S - T) + \frac{1-\mu}{1-\lambda\,\mu}(T - S) + \lambda\,\mu\,(X - S) - \frac{\lambda\,\mu\,(1-\mu)}{1-\lambda\,\mu}(T - S) =$$
$$= T + \left(1 - \frac{1-\mu}{1-\lambda\,\mu} + \frac{\lambda\,\mu\,(1-\mu)}{1-\lambda\,\mu}\right)(S - T) + \lambda\,\mu\,(X - S) =$$
$$= T + \mu\,(S - T) + \lambda\,\mu\,(X - S) = (g \circ f)(X).$$

Tím jsme dokázali, že složením dvou stejnolehlostí s různými středy je buďto posunutí, nebo stejnolehlost.

Sami ověřte, že skládání dvou stejnolehlostí s různými středy není komutativní a záleží tedy na pořadí, v jakém obě stejnolehlosti skládáme. Kdybychom v případě výše uvedených stejnolehlostí f, g vytvořili zobrazení $f \circ g$, dostali bychom pro $\lambda\,\mu = 1$ posunutí o vektor $(1 - \lambda)(S - T)$.

Zatím jsme ukázali, že množina tvořená všemi posunutími a všemi stejnolehlostmi prostoru $\boldsymbol{A}$ je uzavřená vzhledem k operaci skládání.

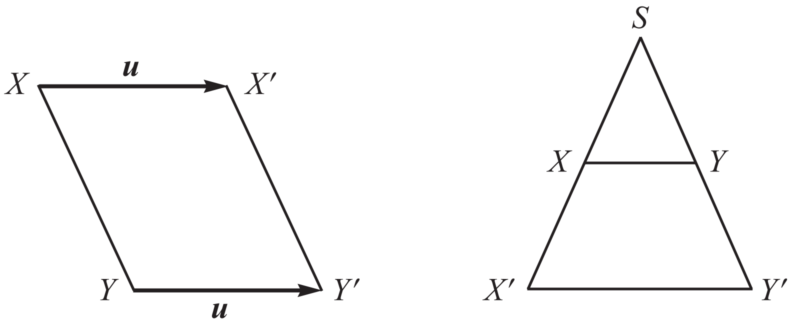
Také pro skládání těchto zobrazení platí asociativní zákon.

Neutrálním prvkem vzhledem ke skládání je identita, kterou můžeme považovat za speciální případ jak posunutí, tak stejnolehlosti.

Inverzním prvkem k posunutí o vektor $\boldsymbol{u}$ je posunutí o vektor $(-\boldsymbol{u})$, inverzním prvkem ke stejnolehlosti se středem S a koeficientem λ je stejnolehlost se středem S a koeficientem $1/\lambda$.
Tím je dokázáno, že množina všech posunutí a stejnolehlostí prostoru $\boldsymbol{A}$ je grupou. Přitom tato grupa je podgrupou grupy všech afinit prostoru $\boldsymbol{A}$.

Definice 16: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor se zaměřením $\boldsymbol{V}$.
Grupa tvořená všemi posunutími a všemi stejnolehlostmi prostoru $\boldsymbol{A}$ se nazývá grupa homotetií prostoru $\boldsymbol{A}$.

Už víme, že stejnolehlost, která není identitou, má právě jeden samodružný bod – střed stejnolehlosti. Posunutí o nenulový vektor žádný samodružný bod nemá. Jak posunutí, tak stejnolehlost ale zobrazí každou úsečku na úsečku s ní rovnoběžnou (viz obr. č. 20 pro posunutí o vektor $\boldsymbol{u}$ a stejnolehlost se středem S a koeficientem $\lambda = 2$). Platí tedy následující věta.



Obrázek č. 20

Věta 31: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor se zaměřením $\boldsymbol{V}$.
Posunutí i stejnolehlosti prostoru $\boldsymbol{A}$ mají každý směr za směr samodružný.

***Důkaz*:** Formálně tuto větu dokážeme následujícím způsobem:
Nechť f je posunutí o vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$. Pro libovolné body $X, Y \in \boldsymbol{A}$ platí $f(X) = X + \boldsymbol{u}$, $f(Y) = Y + \boldsymbol{u}$. Potom $f(X) - f(Y) = \varphi_f(X - Y) = X - Y$, kde φ_f je asociovaný homomorfismus posunutí f. Každý směr $X - Y$ je tedy při posunutí f samodružný. Zároveň vidíme, že vlastní číslo posunutí $\lambda = 1$.
Je-li g stejnolehlost se středem S a koeficientem μ, lze pro libovolné body $X, Y \in \boldsymbol{A}$ psát $g(X) = S + \mu(X - S)$, $g(Y) = S + \mu(Y - S)$.
Potom $g(X) - g(Y) = \varphi_g(X - Y) = \mu(X - S) - \mu(Y - S) = \mu(X - Y)$, kde φ_g je asociovaný homomorfismus stejnolehlosti g. Každý směr $X - Y$ je tedy při stejnolehlosti g samodružný. Přitom příslušné vlastní číslo λ je rovno μ.

Věta 32: Nechť $\boldsymbol{A}$ je afinní prostor se zaměřením $\boldsymbol{V}$.
Afinita prostoru $\boldsymbol{A}$, která má každý směr za směr samodružný, je buďto posunutí, nebo stejnolehlost prostoru $\boldsymbol{A}$.

Důkaz: Nechť f je afinita prostoru $\boldsymbol{A}$, pro kterou je každý směr směrem samodružným.

Zvolme nenulový vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$, který určuje směr $\{\boldsymbol{u}\}$. Aby byl tento směr při afinitě f samodružný, musí pro vektor $\boldsymbol{u}$ existovat $\lambda \neq 0$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\, \boldsymbol{u}$, kde φ je asociovaný homomorfismus afinity f.

Nejprve ukážeme, že vlastní číslo λ nezávisí na volbě vektoru $\boldsymbol{u}$.

Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ jsou dva lineárně závislé vektory, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$. Potom existuje $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \neq 0$ tak, že $\boldsymbol{v} = \alpha\, \boldsymbol{u}$. Platí $\varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(\alpha\, \boldsymbol{u}) = \lambda(\alpha\, \boldsymbol{u})\, \alpha\, \boldsymbol{u}$, kde $\lambda(\alpha\, \boldsymbol{u})$ značí vlastní číslo homomorfismu φ příslušející vektoru $\alpha\, \boldsymbol{u}$.

Zároveň $\varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(\alpha\, \boldsymbol{u}) = \alpha\, \varphi(\boldsymbol{u}) = \alpha\, \lambda(\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u}$. V tomto případě jsme využili základní vlastnost homomorfismu φ, $\lambda(\boldsymbol{u})$ značí vlastní číslo homomorfismu φ příslušející vektoru $\boldsymbol{u}$.

Porovnáním obou vztahů pro $\varphi(\boldsymbol{v})$ dostaneme rovnost $\lambda(\boldsymbol{u}) = \lambda(\alpha\, \boldsymbol{u})$.
Vidíme tedy, že dva lineárně závislé vektory mají stejné vlastní číslo.

Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ jsou dva lineárně nezávislé vektory, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$, pro které platí $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda(\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u}$, $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v}$.
Potom $\varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})\,(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{u} + \lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v}$, kde $\lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ značí vlastní číslo homomorfismu φ příslušející vektoru $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

Zároveň $\varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u}) + \varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u} + \lambda(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v}$. V tomto případě jsme opět využili jednu ze základních vlastností homomorfismu φ.

Porovnáním obou lineárních kombinací získáme díky lineární nezávislosti vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ rovnost $\lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{u}) = \lambda(\boldsymbol{v})$. Tedy pro všechny nenulové vektory z $\boldsymbol{V}$ existuje stejné vlastní číslo $\lambda \neq 0$, pro které $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\, \boldsymbol{u}$.

Nyní rozlišíme dva případy:

1. Je-li $\lambda = 1$, potom $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ pro každý vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$.
   Zvolme libovolný, ale pevný bod $B \in \boldsymbol{A}$ a označme $\boldsymbol{v} = f(B) - B$.
   Pro každý bod $X \in \boldsymbol{A}$ je $f(X) = f(B) + \varphi(X - B) = f(B) + (X - B) =$
   $= X + (f(B) - B) = X + \boldsymbol{v}$.
   Afinita f je v tomto případě posunutím o vektor $\boldsymbol{v} = f(B) - B$.
2. Nechť $\lambda \neq 1$. Zvolme opět pevný bod $B \in \boldsymbol{A}$ a označme $\boldsymbol{v} = f(B) - B$.
   Pro každý bod $X \in \boldsymbol{A}$ je nyní $f(X) = f(B) + \varphi(X - B) = f(B) + \lambda(X - B)$.
   Chceme dokázat, že toto zobrazení je stejnolehlostí. Střed S této stejnolehlosti najdeme jako samodružný bod zobrazení f:

$$S = f(B) + \lambda(S - B),$$
$$S = B + (f(B) - B) + \lambda(S - B),$$
$$(S - B) - \lambda(S - B) = f(B) - B,$$
$$(1 - \lambda)(S - B) = \boldsymbol{v},$$
$$S - B = \frac{1}{1 - \lambda}\boldsymbol{v},$$
$$S = B + \frac{1}{1 - \lambda}\boldsymbol{v}.$$

   Pro libovolný bod $X \in \boldsymbol{A}$ platí $f(X) = f(S) + \varphi(X - S) = S + \lambda(X - S)$.
   Afinita f je v tomto případě stejnolehlostí se středem S a koeficientem λ.

2.7 Shodná zobrazení

V této kapitole postupně probereme základní vlastnosti shodných zobrazení. Shodná zobrazení jsou přitom (stejně jako na střední škole) definována jako zobrazení, která zachovávají délky úseček. Na rozdíl od předchozích kapitol tedy musíme uvažovat eukleidovské prostory, protože v afinním prostoru není vzdálenost bodů definována.

Definice 17: Nechť $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E'}$ jsou eukleidovské prostory.
Zobrazení $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E'}$ se nazývá shodné, jestliže pro každé $X, Y \in \boldsymbol{E}$ platí $|f(X)\,f(Y)| = |XY|$.

Věta 33: Nechť $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E'}$ jsou eukleidovské prostory.
Každé shodné zobrazení $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E'}$ je prosté a afinní.

***Důkaz*:** Nechť f je shodné zobrazení. Nejprve dokážeme, že f je prosté.

Zvolme dva různé body $A, B \in \boldsymbol{E}$. Protože zobrazení f je shodné, platí $|f(A)\,f(B)| = |AB| \neq 0$. Pro $A \neq B$ je tedy také $f(A) \neq f(B)$.
Tím je dokázáno, že každé shodné zobrazení je prosté.

Abychom dokázali, že je také afinní, zvolme tři navzájem různé, kolineární body $A, B, C \in \boldsymbol{E}$. Předpokládejme, že např. bod C leží mezi body A, B.

Potom existuje $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda < 0$, tak, že $C - A = \lambda\,(C - B)$. Víme, že bod C leží na úsečce AB právě tehdy, když v trojúhelníkové nerovnosti $|AB| \leq |AC| + |CB|$ platí rovnost, tj. když $|AB| = |AC| + |CB|$.

Protože f je shodné zobrazení, platí také rovnost $|f(A)f(B)| = |f(A)f(C)| + |f(C)f(B)|$.
To ale znamená, že bod $f(C)$ leží na úsečce $f(A)\,f(B)$.
Existuje tedy $\lambda' \in \boldsymbol{R}$, $\lambda' < 0$, tak, že $f(C) - f(A) = \lambda'\,(f(C) - f(B))$. Odtud plyne rovnost $|f(C)\,f(A)| = |\lambda'|\,|f(C)\,f(B)|$.

Ze vztahu $C - A = \lambda\,(C - B)$ zase plyne rovnost $|CA| = |\lambda|\,|CB|$. Protože zobrazení f je shodné, lze psát také $|f(C)\,f(A)| = |\lambda|\,|f(C)\,f(B)|$.

Porovnáním obou vztahů pro $|f(C)\,f(A)|$ získáme rovnost $|\lambda| = |\lambda'|$.
Díky tomu, že obě čísla λ, λ' jsou záporná ($\lambda < 0$, $\lambda' < 0$), musí být $\lambda = \lambda'$.
To znamená, že $(C; A, B) = (f(C); f(A), f(B))$.

Tím je dokázáno, že zobrazení f je také afinní.

Další dvě věty se týkají vlastností homomorfismu asociovaného se shodným zobrazením.

Věta 34: Nechť $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E}'$ jsou eukleidovské prostory.
Afinní zobrazení $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ je shodné právě tehdy, když jeho asociovaný homomorfismus φ zachovává normu vektoru, tj. když pro každý vektor $\boldsymbol{u} \in V(\boldsymbol{E})$ platí $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$.

***Důkaz*:** (1) Nechť je afinní zobrazení f shodné.
Zvolme libovolný vektor $\boldsymbol{u} \in V(\boldsymbol{E})$ a body $X, Y \in \boldsymbol{E}$ tak, že $\boldsymbol{u} = Y - X$.
Označme $f(X) = X'$, $f(Y) = Y'$.
Platí $\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(Y - X) = f(Y) - f(X) = Y' - X'$.
Tedy $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = \|Y' - X'\| = |X'Y'|$.
Protože je zobrazení f shodné, je $|X'Y'| = |XY|$.
Odtud $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = \|Y' - X'\| = |X'Y'| = |XY| = \|Y - X\| = \|\boldsymbol{u}\|$.

(2) Předpokládejme, že asociovaný homomorfismus φ zachovává normu vektoru.
Zvolme opět body $X, Y \in \boldsymbol{E}$ a označme jejich obrazy při afinním zobrazení f jako $f(X) = X'$, $f(Y) = Y'$. Platí $\varphi(Y - X) = Y' - X'$.
Potom $|X'Y'| = \|Y' - X'\| = \|\varphi(Y - X)\| = \|Y - X\| = |XY|$.
Zobrazení f je tedy shodné.

Věta 35: Nechť $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E}'$ jsou eukleidovské prostory.
Afinní zobrazení $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ je shodné právě tehdy, když jeho asociovaný homomorfismus φ zachovává skalární součin vektorů, tj. když pro každé dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\boldsymbol{E})$ platí $\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}$.

***Důkaz*:** (1) Nechť je afinní zobrazení f shodné.
Z věty 34 víme, že asociovaný homomorfismus φ shodného zobrazení f zachovává normu vektoru. Jak známo, norma vektoru souvisí se skalárním součinem podle vztahu $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{u}}$.
Pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\boldsymbol{E})$ ale platí

$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \circ (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{u} + 2\, \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{v}$, neboli

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\, \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} + \|\boldsymbol{v}\|^2.$$

Odtud

$$\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2\right).$$

Podobně

$$\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(\|\varphi(\boldsymbol{u}) + \varphi(\boldsymbol{v})\|^2 - \|\varphi(\boldsymbol{u})\|^2 - \|\varphi(\boldsymbol{v})\|^2\right).$$

Protože φ je homomorfismus, platí $\varphi(\boldsymbol{u}) + \varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$. Odtud

$$\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(\|\varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})\|^2 - \|\varphi(\boldsymbol{u})\|^2 - \|\varphi(\boldsymbol{v})\|^2\right).$$

Protože φ zachovává normu vektoru, platí $\|\varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|$, $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$, $\|\varphi(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$.

Potom

$$\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\,(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2) = \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}.$$

(2) Předpokládejme, že asociovaný homomorfismus φ zachovává skalární součin. To znamená, že pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E})$ je $\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}$. Položme $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$. Potom $\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{u}$, neboli $\|\varphi(\boldsymbol{u})\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2$. Protože norma vektoru je vždy číslo nezáporné, musí být $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$. To znamená, že asociovaný homomorfismus φ zachovává normu vektoru. Podle věty 34 je tedy zobrazení f shodné.

Věta 14 říkala, že afinní zobrazení je jednoznačně určeno obrazy vhodného počtu lineárně nezávislých bodů. Následující věta specifikuje, kdy je takové afinní zobrazení shodné.

Věta 36: Nechť $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E'}$ jsou eukleidovské prostory, nechť $\dim \boldsymbol{E} = n$. Jsou-li $P_0, P_1, \dots, P_n$ lineárně nezávislé body prostoru $\boldsymbol{E}$ a $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ jsou libovolně zvolené body prostoru $\boldsymbol{E'}$, pak afinní zobrazení $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E'}$, pro které platí $f(P_i) = P'_i$ pro každé $i = 0, 1, \dots, n$, je shodné právě tehdy, když zachovává vzdálenosti, tj. když $|P'_iP'_j| = |P_iP_j|$ pro všechna $i, j = 0, 1, \dots, n$.

***Důkaz*:** (1) Je-li zobrazení f shodné, je podmínka $|P'_iP'_j| = |P_iP_j|$ pro všechna $i, j = 0, 1, \dots, n$ splněna přímo z definice shodného zobrazení.

(2) Předpokládejme, že $|P'_iP'_j| = |P_iP_j|$ pro všechna $i, j = 0, 1, \dots, n$.
Označme $\boldsymbol{e}_i = P_i - P_0$, $\boldsymbol{e'}_i = P'_i - P'_0$ pro $i = 1, \dots, n$,
$\boldsymbol{e}_j = P_j - P_0$, $\boldsymbol{e'}_j = P'_j - P'_0$ pro $j = 1, \dots, n$.
Vektory $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ jsou podle věty 7 lineárně nezávislé, tvoří tedy bázi zaměření $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{E})$ prostoru $\boldsymbol{E}$. Vektory $\boldsymbol{e'}_1, \dots, \boldsymbol{e'}_n$ jsou obrazy této báze při asociovaném homomorfismu φ.
Potom $\|\boldsymbol{e}_i\| = |P_iP_0| = |P'_iP'_0| = \|\boldsymbol{e'}_i\|$, $\|\boldsymbol{e}_j\| = |P_jP_0| = |P'_jP'_0| = \|\boldsymbol{e'}_j\|$.
Dále platí $\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j = (P_i - P_0) - (P_j - P_0) = P_i - P_j$,

$$\boldsymbol{e'}_i - \boldsymbol{e'}_j = (P'_i - P'_0) - (P'_j - P'_0) = P'_i - P'_j,$$

$$\|\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j\| = |P_iP_j| = |P'_iP'_j| = \|\boldsymbol{e'}_i - \boldsymbol{e'}_j\|.$$

Pro vektory $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$ lze odvodit vztah

$$(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j) \circ (\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_i - 2\,\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j \circ \boldsymbol{e}_j,$$

$$\|\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j\|^2 = \|\boldsymbol{e}_i\|^2 - 2\,\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j + \|\boldsymbol{e}_j\|^2,$$

$$\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j = \frac{1}{2}\,(\|\boldsymbol{e}_i\|^2 + \|\boldsymbol{e}_j\|^2 - \|\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j\|^2).$$

Z výše uvedeného plyne, že $\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j = \frac{1}{2}\,(\|\boldsymbol{e'}_i\|^2 + \|\boldsymbol{e'}_j\|^2 - \|\boldsymbol{e'}_i - \boldsymbol{e'}_j\|^2) = \boldsymbol{e'}_i \circ \boldsymbol{e'}_j$.

Homomorfismus φ tedy zachovává skalární součin vektorů $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$.

Uvažujme nyní libovolné dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E})$, které lze zřejmě zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \, \boldsymbol{e_j}.$$

Potom

$$\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \, \varphi(\boldsymbol{e_i}) \right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \, \varphi(\boldsymbol{e_j}) \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i \, v_j \, \boldsymbol{e'_i} \circ \boldsymbol{e'_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i \, v_j \, \boldsymbol{e_i} \circ \boldsymbol{e_j} = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \, \boldsymbol{e_i} \right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \, \boldsymbol{e_j} \right) = \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}.$$

To znamená, že asociovaný homomorfismus φ zachovává skalární součin libovolných dvou vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E})$. Zobrazení f je tedy podle věty 35 shodné.

Podle vět 14 a 36 je např. shodné zobrazení eukleidovské roviny $\boldsymbol{E_2}$ do prostoru $\boldsymbol{E'}$ jednoznačně určeno obrazy vrcholů libovolného trojúhelníku ABC v rovině $\boldsymbol{E_2}$. Aby ale takové shodné zobrazení vůbec existovalo, musí být $|A'B'| = |AB|$, $|B'C'| = |BC|$ a $|A'C'| = |AC|$, neboli trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ musí být shodné.

Definice 18: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Shodné zobrazení $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ se nazývá shodnost prostoru $\boldsymbol{E}$.

Věta 37: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Shodnost prostoru $\boldsymbol{E}$ je vzájemně jednoznačné zobrazení.

***Důkaz*:** Z věty 33 víme, že shodné zobrazení $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ je prosté.
To podle věty 17 znamená, že také jeho asociovaný homomorfismus $\varphi: \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E})$ je prostým zobrazením.
Odtud plyne, že homomorfismus φ je vzájemně jednoznačné zobrazení.
Opět podle věty 17 platí, že zobrazení f je také na, neboli f je vzájemně jednoznačné.

Věta 38: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Všechny shodnosti prostoru $\boldsymbol{E}$ tvoří grupu vzhledem ke skládání.

***Důkaz*:** Uvažujme dvě shodnosti f a g prostoru $\boldsymbol{E}$.
Protože shodnosti f a g zachovávají vzdálenosti, je zřejmé, že také složené zobrazení $g \circ f$ bude zachovávat vzdálenosti, tj. $g \circ f$ bude také shodnost.
Skládání libovolných tří zobrazení je asociativní, tedy speciálně skládání tří shodností je asociativní.
Neutrálním prvkem vzhledem ke skládání je identita, která je zřejmě shodností.
Inverzní zobrazení f^{-1} ke shodnosti f také zachovává vzdálenosti, tj. f^{-1} je shodnost.
Tím je důkaz proveden.

Následující věta se týká analytického vyjádření shodnosti a stanovuje podmínku, kterou musí matice analytického vyjádření afinního zobrazení splňovat, aby se jednalo o shodnost.

Věta 39: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor dimenze n.
Je-li v prostoru $\boldsymbol{E}$ zvolena KSS a afinní zobrazení $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ má vzhledem k ní analytické vyjádření

$$f : x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j \text{ pro } j = 1, \ldots, n,$$

pak f je shodnost prostoru $\boldsymbol{E}$ právě tehdy, když matice $A = (a_{ji})$ je ortogonální, tj. když platí $A^T \cdot A = I$, kde A^T je matice transponovaná k matici A a I je jednotková matice řádu n.

Uvedená rovnost $A^T \cdot A = I$ je ekvivalentní rovnosti $A \cdot A^T = I$ a vyjadřuje, že matice A^T je inverzní maticí k matici A.

Pro matici A, která tuto rovnost splňuje, se kromě pojmu ortogonální používá také označení ortonormální, neboť vektory určené řádky takovéto matice tvoří ortonormální bázi příslušného vektorového prostoru (každé dva vektory jsou navzájem kolmé a navíc jsou všechny normované, mají jednotkovou velikost).

***Důkaz*:** (1) Předpokládejme, že zobrazení f je shodnost.
Nechť je zvolená KSS v prostoru $\boldsymbol{E}$ dána pomocí ortonormální báze $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Protože asociovaný homomorfismus φ podle věty 35 zachovává skalární součin, platí $\varphi(\boldsymbol{e}_i) \circ \varphi(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_k = \delta_{ik}$, kde $\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq k$ a $\delta_{ik} = 1$ pro $i = k$.
Na druhé straně lze psát

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, \boldsymbol{e}_j, \quad \varphi(\boldsymbol{e}_k) = \sum_{r=1}^{n} a_{rk}\, \boldsymbol{e}_r .$$

Odtud

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i) \circ \varphi(\boldsymbol{e}_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, \boldsymbol{e}_j \right) \circ \left(\sum_{r=1}^{n} a_{rk}\, \boldsymbol{e}_r \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{ji}\, a_{rk}\, \boldsymbol{e}_j \circ \boldsymbol{e}_r =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{ji}\, a_{rk}\, \delta_{jr} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, a_{jk} .$$

Porovnáním obou vztahů pro $\varphi(\boldsymbol{e}_i) \circ \varphi(\boldsymbol{e}_k)$ získáme rovnost

$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, a_{jk} = \delta_{ik}$, neboli $A^T \cdot A = I$.

(2) Předpokládejme, že platí $A^T \cdot A = I$, neboli $\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, a_{jk} = \delta_{ik}$.

Afinní zobrazení f přiřadí bodu $X = [x_1, \dots, x_n] \in \boldsymbol{E}$ bod $f(X) = X' = [x'_1, \dots, x'_n] \in \boldsymbol{E}$ a bodu $Y = [y_1, \dots, y_n] \in \boldsymbol{E}$ přiřadí bod $f(Y) = Y' = [y'_1, \dots, y'_n] \in \boldsymbol{E}$ tak, že

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j \ \text{ a } \ y'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, y_i + b_j \ \text{ pro } j = 1, \dots, n.$$

Přitom platí

$$|f(X)f(Y)|^2 = \sum_{j=1}^{n} (y'_j - x'_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ji} (y_i - x_i) \right]^2 .$$

Odtud postupně dostaneme

$$|f(X)f(Y)|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ji} (y_i - x_i) \right] \left[\sum_{k=1}^{n} a_{jk} (y_k - x_k) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, a_{jk} \right) (y_i - x_i)(y_k - x_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} (y_i - x_i)(y_k - x_k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 = |XY|^2.$$

Vidíme tedy, že $|f(X)f(Y)| = |XY|$. Tím je dokázáno, že zobrazení f je shodnost.

Z předchozí věty víme, že matice $A = (a_{ji})$ analytického vyjádření každé shodnosti vzhledem ke KSS je vždy ortogonální, tj. platí pro ni vztah $A^T \cdot A = I$. Podle věty o součinu determinantů odtud plyne $\det A^T \cdot \det A = \det I$. Protože determinanty navzájem transponovaných matic se rovnají ($\det A^T = \det A$), platí $(\det A)^2 = \det I = 1$, neboli $\det A = \pm 1$.

Podle toho, která z obou rovností pro $\det A$ nastane, rozlišujeme shodnost přímou ($\det A = 1$) a nepřímou ($\det A = -1$). Přitom tato definice přímé a nepřímé shodnosti není v rozporu se středoškolskou představou o přemísťování přímo a nepřímo shodných útvarů.

Definice 19: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Shodnost f prostoru $\boldsymbol{E}$ se nazývá přímá, jestliže matice v analytickém vyjádření f vzhledem ke KSS má kladný determinant.
Shodnost f prostoru $\boldsymbol{E}$ se nazývá nepřímá, jestliže matice v analytickém vyjádření f vzhledem ke KSS má záporný determinant.

Abychom prokázali korektnost výše uvedené definice (tj. nezávislost definovaného pojmu na volbě KSS), je třeba ještě ověřit, že se znaménko determinantu uvedené matice nezmění při volbě jiné KSS.

Nechť je v prostoru $\boldsymbol{E}$ zvolena KSS pomocí báze $M = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ a shodnost $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ má vzhledem k této KSS analytické vyjádření $f: x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j$ pro $j = 1, \ldots, n$.

Matice $A = (a_{ji})$ je přitom maticí homomorfismu φ vzhledem k bázi M.

Pokud chceme určit matici homomorfismu φ vzhledem k jiné ortonormální bázi N, musíme matici A zleva vynásobit maticí B a zprava maticí C, kde B je matice přechodu od báze M k bázi N a C je matice přechodu od báze N k bázi M. Matice $B \cdot A \cdot C$ je potom maticí homomorfismu φ vzhledem k bázi N.

Přitom podle věty o součinu determinantů platí det $(B \cdot A \cdot C)$ = det $B \cdot$ det $A \cdot$ det C. Protože obě matice přechodu jsou navzájem inverzní ($C = B^{-1}$), je det $C = 1/(\det B)$.

Odtud det $(B \cdot A \cdot C)$ = det A.

Vidíme, že znaménko determinantu matice analytického vyjádření se nezmění při volbě jiné KSS. Definice 19 proto nezávisí na volbě soustavy souřadnic.

Z věty 38 víme, že všechny shodnosti daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání. Nyní dokážeme, že také všechny přímé shodnosti tvoří grupu, která je zřejmě podgrupou grupy všech shodností.

Věta 40: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Všechny přímé shodnosti prostoru $\boldsymbol{E}$ tvoří grupu vzhledem ke skládání.

***Důkaz*:** Nechť f a g jsou dvě přímé shodnosti prostoru $\boldsymbol{E}$, jejichž analytická vyjádření vzhledem ke zvolené KSS mají tvar

$$f: x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j\,,$$

$$g: x'_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, x_k + d_j \quad \text{pro } j = 1, \ldots, n.$$

Přitom obě matice $A = (a_{ji})$ a $C = (c_{jk})$ mají kladný determinant (det $A > 0$, det $C > 0$).
Složené zobrazení $g \circ f$ bude mít analytické vyjádření

$$g \circ f: x'_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, x_i + b_k \right) + d_j\,,$$

$$x'_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{jk}\, a_{ki}\, x_i + \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, b_k + d_j \quad \text{pro } j = 1, \ldots, n.$$

Vidíme, že maticí analytického vyjádření složeného zobrazení $g \circ f$ je matice $C \cdot A$.
Protože det $A > 0$, det $C > 0$, je také det $(C \cdot A)$ = det $C \cdot$ det $A > 0$.
Složením dvou přímých shodností je tedy opět přímá shodnost.
Skládání libovolných tří zobrazení je asociativní, tedy speciálně skládání tří přímých shodností je asociativní.
Neutrálním prvkem vzhledem ke skládání je identita, která je přímou shodností, neboť jednotková matice má kladný determinant.

Inverzní zobrazení f^{-1} k přímé shodnosti f je opět přímou shodností, neboť maticí jeho analytického vyjádření je matice A^{-1} inverzní k matici A a $\det A^{-1} = 1/(\det A) > 0$.
Tím je důkaz proveden.

Na rozdíl od přímých shodností všechny nepřímé shodnosti daného prostoru grupu netvoří. Složením dvou nepřímých shodností je shodnost přímá, množina tvořená všemi nepřímými shodnostmi tedy není uzavřená vzhledem ke skládání. Navíc v této množině chybí neutrální prvek vzhledem ke skládání, neboť identita patří mezi shodnosti přímé.

Věta 41: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Je-li λ vlastním číslem homomorfismu φ asociovaného shodnosti f prostoru $\boldsymbol{E}$, pak $\lambda = 1$, nebo $\lambda = -1$.

***Důkaz*:** Je-li λ vlastním číslem homomorfismu φ, pak existuje nenulový vektor $\boldsymbol{u} \in V(\boldsymbol{E})$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\, \boldsymbol{u}$. Protože asociovaný homomorfismus φ podle věty 34 zachovává normu vektoru, platí $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$.
Na druhou stranu z výše uvedeného plyne $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = \|\lambda\, \boldsymbol{u}\| = |\lambda|\, \|\boldsymbol{u}\|$.
Porovnáním obou vztahů pro $\|\varphi(\boldsymbol{u})\|$ získáme rovnost $\|\boldsymbol{u}\| = |\lambda|\, \|\boldsymbol{u}\|$, odkud $|\lambda| = 1$.

Věta 41 jinými slovy říká, že vektor $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ generuje samodružný směr shodnosti f, jestliže se při asociovaném homomorfismu φ zobrazí sám na sebe ($\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$), nebo se zobrazí na vektor k němu opačný ($\varphi(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u}$).

Dále se budeme zabývat symetrií podle podprostoru a ukážeme, že každá symetrie podle podprostoru je involutorní shodnost, a naopak, každá involutorní shodnost je symetrií podle podprostoru.

Definice 20: Nechť je v eukleidovském prostoru $\boldsymbol{E}_n$ zvolen podprostor $\boldsymbol{E}'_k$.
Symetrií prostoru $\boldsymbol{E}_n$ podle podprostoru $\boldsymbol{E}'_k$ budeme rozumět takové zobrazení $f: \boldsymbol{E}_n \to \boldsymbol{E}_n$, které každému bodu $X \in \boldsymbol{E}_n$ přiřadí bod $f(X) = X' \in \boldsymbol{E}_n$ takový, že střed S úsečky XX' je kolmým průmětem bodu X do podprostoru $\boldsymbol{E}'_k$.

Věta 42: Nechť $\boldsymbol{E}_n$ je eukleidovský prostor.
Symetrie prostoru $\boldsymbol{E}_n$ podle libovolného podprostoru $\boldsymbol{E}'_k$ prostoru $\boldsymbol{E}_n$ je involutorní shodnost.

***Důkaz*:** Nechť f je symetrie prostoru $\boldsymbol{E}_n$ podle podprostoru $\boldsymbol{E}'_k$.
Zvolme libovolné dva body $X, Y \in \boldsymbol{E}_n$ a označme jejich kolmé průměty do podprostoru $\boldsymbol{E}'_k$ jako $\bar{X}, \bar{Y}$. Pro obrazy $X' = f(X)$ a $Y' = f(Y)$ bodů X, Y potom podle definice 20 platí $X' = X + 2(\bar{X} - X)$, $Y' = Y + 2(\bar{Y} - Y)$.

Potom $X' - Y' = (X - Y) + 2\,(\bar{X} - X) - 2\,(\bar{Y} - Y) =$

$= (X - Y) + (\bar{X} - X) + (\bar{X} - X) - (\bar{Y} - Y) - (\bar{Y} - Y) =$

$= (\bar{X} - X) + (Y - \bar{Y}) + [(X - Y) + (\bar{X} - X)] - (\bar{Y} - Y) =$

$= (\bar{X} - X) + (Y - \bar{Y}) + (\bar{X} - Y) + (Y - \bar{Y}).$

Odtud $X' - Y' = (\bar{X} - X) + (Y - \bar{Y}) + (\bar{X} - \bar{Y}) = \boldsymbol{u} + (\bar{X} - \bar{Y})$,
kde jsme označili $\boldsymbol{u} = (\bar{X} - X) + (Y - \bar{Y})$.

Vektor $\boldsymbol{u}$ je zřejmě kolmý k zaměření $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{E}'_k)$, vektor $\bar{X} - \bar{Y} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E}'_k)$.

Podobně vektor $X - Y$ lze vyjádřit ve tvaru $X - Y = (X - \bar{X}) + (\bar{Y} - Y) + (\bar{X} - \bar{Y}) =$
$= -\boldsymbol{u} + (\bar{X} - \bar{Y})$.

Oba vektory $X' - Y'$ a $X - Y$ jsme vyjádřili jako součet dvou navzájem kolmých vektorů. Pomocí Pythagorovy věty dostaneme rovnost

$$\|X' - Y'\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\bar{X} - \bar{Y}\|^2 = \|X - Y\|^2,$$

odkud $\|X' - Y'\| = \|X - Y\|$, neboli $|X'Y'| = |XY|$. Zobrazení f je tedy shodnost.

Abychom dokázali, že je tato shodnost involutorní, je třeba ověřit, že zobrazení $f \circ f$, které bodu X přiřazuje bod X'', je identita.

Zřejmě $X'' = X' + 2\,(\bar{X} - X') = [X + 2\,(\bar{X} - X)] + 2\,[\bar{X} - (X + 2\,(\bar{X} - X))] =$
$= X + 2\,(\bar{X} - X) + 2\,(\bar{X} - X) - 4\,(\bar{X} - X) = X.$

Vidíme, že $(f \circ f)\,(X) = X'' = X$.
Tím je důkaz proveden.

Věta 43: Nechť $\boldsymbol{E}_n$ je eukleidovský prostor.
Každá involutorní shodnost prostoru $\boldsymbol{E}_n$ je symetrií tohoto prostoru podle některého podprostoru.

***Důkaz*:** Nechť f je involutorní shodnost prostoru $\boldsymbol{E}_n$.

Zvolme libovolný bod $A \in \boldsymbol{E}_n$. Pro střed S úsečky $A\,f(A)$ platí $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}f(A)$,

odkud $f(S) = \frac{1}{2}f(A) + \frac{1}{2}f(f(A)) = \frac{1}{2}f(A) + \frac{1}{2}A = S$, neboť f je involuce.

Střed S úsečky $A\,f(A)$ je tedy samodružným bodem zobrazení f.
Tím je zatím dokázáno, že množina všech samodružných bodů zobrazení f je neprázdná. Podle věty 20 je tedy podprostorem prostoru $\boldsymbol{E}_n$.

Zvolme libovolný vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E}_n)$ a body $A, B \in \boldsymbol{E}_n$ tak, že $\boldsymbol{u} = A - B$.
Je-li φ asociovaný homomorfismus zobrazení f, platí $\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(A - B) = f(A) - f(B)$,
$\varphi(\varphi(\boldsymbol{u})) = f(f(A)) - f(f(B)) = A - B = \boldsymbol{u}$.

Protože pro každý vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E}_n)$ je $\varphi(\varphi(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{u}$, je také asociovaný homomorfismus φ involutorním zobrazením.

Podle věty 41 generuje vektor $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ samodružný směr shodnosti f, jestliže $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$, nebo $\varphi(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u}$. Přitom každý vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E}_n)$ lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u} + \varphi(\boldsymbol{u})) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u} - \varphi(\boldsymbol{u})).$$

Pro vektory $\boldsymbol{u} + \varphi(\boldsymbol{u})$ a $\boldsymbol{u} - \varphi(\boldsymbol{u})$ platí

$$\varphi(\boldsymbol{u} + \varphi(\boldsymbol{u})) = \varphi(\boldsymbol{u}) + \varphi(\varphi(\boldsymbol{u})) = \varphi(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \varphi(\boldsymbol{u}),$$
$$\varphi(\boldsymbol{u} - \varphi(\boldsymbol{u})) = \varphi(\boldsymbol{u}) - \varphi(\varphi(\boldsymbol{u})) = \varphi(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{u} - \varphi(\boldsymbol{u})).$$

Pro každý nenulový vektor $\boldsymbol{u}$ tedy vektor $\boldsymbol{u} + \varphi(\boldsymbol{u})$ představuje vlastní vektor homomorfismu φ příslušející vlastnímu číslu $\lambda = 1$, vektor $\boldsymbol{u} - \varphi(\boldsymbol{u})$ je vlastním vektorem odpovídajícím vlastnímu číslu $\lambda = -1$.

Označme $\boldsymbol{V}^{(1)}$ resp. $\boldsymbol{V}^{(-1)}$ vektorový podprostor tvořený všemi vlastními vektory homomorfismu φ, kterým odpovídá vlastní číslo $\lambda = 1$ resp. $\lambda = -1$.
Libovolný vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E}_n)$ jsme vyjádřili jako součet vektorů z obou podprostorů $\boldsymbol{V}^{(1)}$ a $\boldsymbol{V}^{(-1)}$. To znamená, že vektorový prostor $\boldsymbol{V}$ je spojením podprostorů $\boldsymbol{V}^{(1)}$ a $\boldsymbol{V}^{(-1)}$, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{(1)} + \boldsymbol{V}^{(-1)}$.

Přitom průnik podprostorů $\boldsymbol{V}^{(1)}$ a $\boldsymbol{V}^{(-1)}$ je triviální, neboť pouze nulový vektor splňuje současně obě podmínky $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ a $\varphi(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u}$. Vektorový prostor $\boldsymbol{V}$ je proto direktním součtem podprostorů $\boldsymbol{V}^{(1)}$ a $\boldsymbol{V}^{(-1)}$, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{(1)} \oplus \boldsymbol{V}^{(-1)}$.

Zvolme nyní vektory $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}^{(1)}$ a $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}^{(-1)}$. Platí $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$, $\varphi(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}$, tedy
$\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \circ (-\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}$. Protože homomorfismus φ podle věty 35 zachovává skalární součin, musí být současně $\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}$.
To znamená, že $\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} = 0$, neboli vektor $\boldsymbol{u}$ je kolmý k vektoru $\boldsymbol{v}$.

Podprostory $\boldsymbol{V}^{(1)}$ a $\boldsymbol{V}^{(-1)}$ jsou tedy navzájem kolmé, $\boldsymbol{V}^{(-1)}$ je ortogonálním doplňkem prostoru $\boldsymbol{V}^{(1)}$.

Označme $\boldsymbol{E}^{(1)} = \{S, \boldsymbol{V}^{(1)}\}$ podprostor prostoru $\boldsymbol{E}_n$ určený bodem S (střed úsečky $A f(A)$) a vektorovým prostorem $\boldsymbol{V}^{(1)}$. Každý bod $X \in \boldsymbol{E}^{(1)}$ lze psát ve tvaru $X = S + \boldsymbol{v}_1$, kde $\boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{V}^{(1)}$. Potom $f(X) = f(S) + \varphi(\boldsymbol{v}_1) = S + \boldsymbol{v}_1 = X$.

Každý bod prostoru $\boldsymbol{E}^{(1)}$ je tedy při zobrazení f samodružný.

Je-li naopak bod $X \in \boldsymbol{E}_n$ při zobrazení f samodružný, je $f(X) = X$. Bod X lze zřejmě zapsat ve tvaru $X = S + \boldsymbol{u}$, kde $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E}_n)$. Potom $f(X) = f(S) + \varphi(\boldsymbol{u}) = S + \varphi(\boldsymbol{u}) = X$. Musí tedy platit $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$, vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}^{(1)}$.

Každý samodružný bod X proto leží v podprostoru $\boldsymbol{E}^{(1)}$. Podprostor $\boldsymbol{E}^{(1)}$ tvoří množinu všech samodružných bodů zobrazení f.

Zbývá ověřit, že zobrazení f je symetrií podle podprostoru $\boldsymbol{E}^{(1)}$.

Zvolme bod $X \in \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{E}^{(1)}$. Označme $\boldsymbol{E}_X = \{X, \boldsymbol{V}^{(-1)}\}$ podprostor prostoru $\boldsymbol{E}_n$ určený zvoleným bodem X a vektorovým prostorem $\boldsymbol{V}^{(-1)}$. Protože prostor $\boldsymbol{V}^{(-1)}$ je ortogonálním doplňkem prostoru $\boldsymbol{V}^{(1)}$, protnou se prostory $\boldsymbol{E}_X$ a $\boldsymbol{E}^{(1)}$ v jediném bodě, označme tento bod $\overline{X}$.

Zřejmě platí $\bar{X} = X + \boldsymbol{v}_{-1}$, kde vektor $\boldsymbol{v}_{-1} = \bar{X} - X \in \boldsymbol{V}^{(-1)}$.

Odtud $X = \bar{X} - \boldsymbol{v}_{-1}$, $f(X) = f(\bar{X}) - \varphi(\boldsymbol{v}_{-1}) = \bar{X} - (-\boldsymbol{v}_{-1}) = \bar{X} + \boldsymbol{v}_{-1}$, neboť bod $\bar{X} \in \boldsymbol{E}^{(1)}$ je při zobrazení f samodružný. Rovnost $f(X) = \bar{X} + \boldsymbol{v}_{-1} = \bar{X} + (\bar{X} - X)$ vyjadřuje, že bod $f(X)$ je souměrný s bodem X podle podprostoru $\boldsymbol{E}^{(1)}$.

Tím je důkaz proveden.

V definici 12 jsme zavedli pojem základní afinita afinního prostoru jako označení pro vzájemně jednoznačné afinní zobrazení, jehož množina všech samodružných bodů je nadrovinou daného prostoru. Bude-li takové afinní zobrazení navíc shodné, budeme ho nazývat základní shodností.

Definice 21: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Základní shodností prostoru $\boldsymbol{E}$ budeme rozumět takovou shodnost prostoru $\boldsymbol{E}$, která je současně základní afinitou.

Věta 44: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor dimenze n.
Každá základní shodnost prostoru $\boldsymbol{E}$ je symetrií tohoto prostoru podle své nadroviny samodružných bodů.

***Důkaz*:** Nechť f je základní shodnost prostoru $\boldsymbol{E}$, jejíž množinou všech samodružných bodů je nadrovina ρ prostoru $\boldsymbol{E}$.

Zvolme bod $X \in \boldsymbol{E} - \rho$ a označme jeho kolmý průmět do nadroviny ρ jako X_1.
Dále zvolme body $X_2, X_3, \dots, X_n \in \rho$ tak, aby skupina bodů $X_1, X_2, \dots, X_n$ byla lineárně nezávislá. Potom také body $X, X_1, X_2, \dots, X_n$ budou lineárně nezávislé.
Body $X_1, X_2, \dots, X_n \in \rho$ jsou navíc při základní shodnosti f samodružné,
platí $f(X_i) = X_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$.
Obraz bodu X při základní shodnosti f označme $f(X) = X'$. Zřejmě $X' \neq X$.
Podle věty 36 pro shodnost f platí $|X'X_i| = |XX_i|$ pro každé $i = 1, \dots, n$.
Pro $i = 1$ získáme rovnost $|X'X_1| = |XX_1|$, která říká, že bod X_1 je středem úsečky XX'.
Vektor $X - X_1$ je přitom kolmý ke všem vektorům ze zaměření $\boldsymbol{V}(\rho)$ nadroviny ρ.
To znamená, že např. $(X - X_1) \circ (X_1 - X_2) = 0$, neboť $X_1 - X_2 \in \boldsymbol{V}(\rho)$.
Protože asociovaný homomorfismus φ shodnosti f podle věty 35 zachovává skalární součin, je také $\varphi(X - X_1) \circ \varphi(X_1 - X_2) = (X' - X_1) \circ (X_1 - X_2) = 0$.
To znamená, že i vektor $X' - X_1$ je kolmý ke všem vektorům ze zaměření $\boldsymbol{V}(\rho)$.
Body X a X' jsou proto souměrně sdruženy podle nadroviny ρ.
Tím je důkaz proveden.

Protože každá nadrovina je podprostorem daného prostoru, je podle věty 42 každá základní shodnost navíc involutorní. To je ovšem zřejmé již z předchozího důkazu.

Lze také dokázat, že základní shodnosti patří mezi shodnosti nepřímé.

Na rozdíl od základní afinity (viz věta 23) je základní shodnost eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}$ (jakožto symetrie podle nadroviny) jednoznačně určena pouze množinou svých samodružných bodů, tj. nadrovinou prostoru $\boldsymbol{E}$. Stejně tak je jednoznačně určena pouze dvojicí odpovídajících si různých bodů A, B (vzhledem k involutornosti základní shodnosti přitom není třeba rozlišit, který z těchto bodů je vzorem a který je obrazem). Příslušná nadrovina samodružných bodů v tomto případě prochází středem úsečky AB a je k ní kolmá.

Základní shodnosti mají v eukleidovském prostoru podobný význam jako základní afinity v afinním prostoru (viz věta 24). Každou shodnost eukleidovského prostoru lze totiž složit ze základních shodností.

Věta 45: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor dimenze n.
Ke každé shodnosti f prostoru $\boldsymbol{E}$ existuje k základních shodností $f_1, \dots , f_k$, kde $k \leq n + 1$, tak, že $f = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$.

***Důkaz*:** Zvolme v prostoru $\boldsymbol{E}$ lineárně nezávislé body $P_0, P_1, \dots , P_n$.

Podle věty 14 je shodnost f prostoru $\boldsymbol{E}$ jednoznačně určena obrazy těchto bodů.

Předpokládejme, že $f(P_0) = P'_0$, $f(P_1) = P'_1, \dots , f(P_n) = P'_n$.

Uvažujme základní shodnost f_1, která zobrazuje bod P_0 na bod P'_0, tj. platí $f_1(P_0) = P'_0$. Tato shodnost bude symetrií podle nadroviny ρ_1, která prochází středem úsečky $P_0P'_0$ a je k ní kolmá. Označme $f_1(P_i) = P_{1i}$ pro $i = 1, 2, \dots , n$.

Dále uvažujme základní shodnost f_2, pro kterou $f_2(P_{11}) = P'_1$. Tato shodnost bude symetrií podle nadroviny ρ_2 kolmé k úsečce $P_{11}P'_1$ a obsahující její střed. Označme nyní $f_2(P_{1i}) = P_{2i}$ pro $i = 2, 3, \dots , n$.

Přitom nadrovina ρ_2 prochází také bodem P'_0, neboť díky tomu, že zobrazení f a f_1 jsou shodná, platí $|P_0P_1| = |f(P_0)f(P_1)| = |P'_0P'_1|$,

$|P_0P_1| = |f_1(P_0)f_1(P_1)| = |P'_0P_{11}|$, odkud $|P'_0P_{11}| = |P'_0P'_1|$.

Bod P'_0 má od bodů P_{11} a P'_1 stejnou vzdálenost, musí tedy ležet v nadrovině ρ_2.

Analogicky: základní shodnost f_3, pro kterou $f_3(P_{22}) = P'_2$, bude symetrií podle nadroviny ρ_3, která bude procházet oběma body P'_0 a P'_1.

Dále postupujeme induktivně.

Poslední základní shodnost f_{n+1}, která zobrazí bod P_{nn} na bod P'_n, pak bude symetrií podle nadroviny ρ_{n+1} obsahující všechny body $P'_0, P'_1, \dots , P'_{n-1}$.

Složená shodnost $f_{n+1} \circ f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ zobrazuje bod P_i na bod P'_i pro $i = 0, 1, \dots , n$, je tedy totožná se shodností f. Tím jsme ukázali, že každá shodnost f je složena z nejvýše $n + 1$ základních shodností. Počet základních shodností ale může být i nižší.

V případě, že by se při základní shodnosti f_1 bod P_1 zobrazil přímo na bod P'_1, by nám jedna základní shodnost ubyla. Počet základních shodností se tak podobně jako v případě základních afinit může snížit. Proto pro počet k základních shodností platí nerovnost $k \leq n + 1$.

Postup při rozkladu shodnosti f na základní shodnosti lze opět přiblížit schématem podle obr. č. 13 (viz str. č. 43).

Ilustrujme uvedenou větu na příkladu přímé shodnosti v eukleidovské rovině $\boldsymbol{E}_2$.

Podle věty 45 lze každou (přímou i nepřímou) shodnost v rovině složit ze základních shodností roviny, tj. ze symetrií podle přímek.

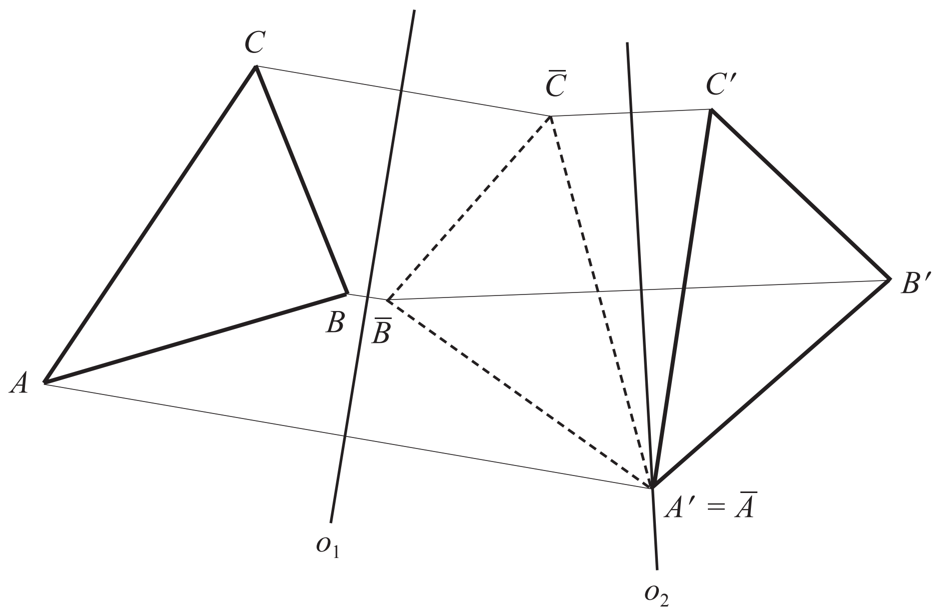
Zvolme tedy v rovině $\boldsymbol{E}_2$ přímo shodné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ (viz obr. č. 21) a uvažujme shodné zobrazení f, pro které platí $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

Sestrojme nyní osu souměrnosti o_1 tak, aby se v osové souměrnosti podle přímky o_1 bod A zobrazil do bodu $\overline{A} = A'$. V této souměrnosti se potom bod B zobrazí do bodu $\overline{B}$ a bod C do bodu $\overline{C}$.

Dále sestrojme osu souměrnosti o_2 tak, aby osová souměrnost podle přímky o_2 zobrazila bod $\overline{B}$ do bodu B'. Z obr. č. 21 potom vidíme, že osa o_2 prochází právě bodem $\overline{A} = A'$ a osová souměrnost podle přímky o_2 zobrazí také bod $\overline{C}$ do bodu C'.

Tím jsme ukázali, že přímou shodnost eukleidovské roviny můžeme složit ze dvou základních shodností (osových souměrností). Sami ověřte, že nepřímou shodnost eukleidovské roviny lze složit ze tří základních shodností.

Obecně platí, že každou přímou (nepřímou) shodnost eukleidovského prostoru lze složit ze sudého (lichého) počtu základních shodností. To plyne z toho, že základní shodnosti patří mezi shodnosti nepřímé.



Obrázek č. 21

Na závěr této kapitoly ukážeme, v jakém tvaru lze zapsat analytické vyjádření každé základní shodnosti.

Věta 46: Nechť ***E*** je eukleidovský prostor dimenze n se zvolenou KSS.
Nechť ρ je nadrovina prostoru ***E***, která má vzhledem ke zvolené KSS rovnici
$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1} = 0$.
Je-li f základní shodnost, jejíž množinou všech samodružných bodů je nadrovina ρ, lze analytické vyjádření základní shodnosti f zapsat ve tvaru

$$f: x'_j = x_j - \frac{2\,c_j}{\sum_{i=1}^{n} c_i^{\,2}}(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1}),\ \text{kde } j = 1, \ldots, n.$$

***Důkaz*:** Protože základní shodnost f je současně základní afinitou, existují podle věty 25 čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}$ tak, že analytické vyjádření základní shodnosti f bude mít tvar

$$f: x'_j = x_j + \lambda_j\,(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1}),\ \text{kde } j = 1, \ldots, n.$$

Základní shodnost f je na rozdíl od základní afinity nadrovinou ρ určena jednoznačně. Podmínku pro určení čísel λ_j v tomto případě získáme následujícím postupem.

Zvolme bod $X \in \boldsymbol{E} - \rho$ a označme $f(X) = X'$. Aby základní shodnost f byla symetrií podle nadroviny ρ, musí být současně splněny dvě podmínky:

1) vektor $X' - X$ musí být kolmý na zaměření $\boldsymbol{V}(\rho)$ nadroviny ρ,
2) střed S úsečky XX' musí ležet v nadrovině ρ.

ad 1) Vektor $X' - X$ a normálový vektor $\boldsymbol{n} = (c_1, \ldots, c_n)$ nadroviny ρ musí být lineárně závislé. To znamená, že existuje $\lambda \in \boldsymbol{R}$ tak, že $x'_j - x_j = \lambda\, c_j$ pro $j = 1, \ldots, n$. Odtud $x'_j = x_j + \lambda\, c_j$ pro $j = 1, \ldots, n$.

ad 2) Souřadnice středu S úsečky XX' musí vyhovovat rovnici nadroviny ρ.

Po dosazení postupně získáme

$$c_1\frac{x_1 + x'_1}{2} + \ldots + c_n\frac{x_n + x'_n}{2} + c_{n+1} = 0, \qquad /\cdot 2$$

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_1x'_1 + \ldots + c_nx'_n + 2\,c_{n+1} = 0,$$

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_1(x_1 + \lambda\, c_1) + \ldots + c_n(x_n + \lambda\, c_n) + 2\,c_{n+1} = 0,$$

$$2\,(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1}) + \lambda\,(c_1^{\,2} + \ldots + c_n^{\,2}) = 0,$$

$$\lambda = -\frac{2\,(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1})}{c_1^{\,2} + \ldots + c_n^{\,2}}.$$

Potom

$$x'_j = x_j + \lambda\, c_j = x_j - \frac{2\,c_j}{\sum_{i=1}^{n} c_i^{\,2}}(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1}),\ \text{kde } j = 1, \ldots, n.$$

Tím je důkaz proveden.

2.8 Klasifikace shodností v rovině

Tato kapitola je věnována přehledu všech typů shodností eukleidovské roviny. Shodnosti v rovině přitom budeme klasifikovat podle jejich samodružných bodů a směrů.

Nechť je v eukleidovské rovině $\boldsymbol{E}_2$ zvolena KSS. Vzhledem k ní nechť má shodnost f roviny $\boldsymbol{E}_2$ analytické vyjádření

$$f: x' = a\,x + b\,y + p,$$
$$y' = c\,x + d\,y + q, \text{ kde } a, b, c, d, p, q \in \boldsymbol{R}.$$

Podle věty 39 musí být matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ shodnosti f ortogonální, tj. musí pro ni platit vztah $A \cdot A^T = I$, kde I je jednotková matice 2. řádu. Po dosazení získáme rovnost

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & a\,c + b\,d \\ a\,c + b\,d & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tato rovnost bude splněna, budou-li současně splněny podmínky $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $a\,c + b\,d = 0$. Aby byla splněna podmínka $a^2 + b^2 = 1$, stačí položit $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$ pro vhodný úhel α.

Pro koeficienty c, d pak musí platit $a\,c + b\,d = 0$, neboli vektory $(a, b) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ a (c, d) musí být navzájem kolmé. Lze proto volit buď $c = -\sin\alpha$, $d = \cos\alpha$, nebo
$c = \sin\alpha$, $d = -\cos\alpha$.
V obou případech pak bude splněna také poslední podmínka $c^2 + d^2 = 1$.

Pro matici A tak mohou nastat dvě možnosti:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ nebo } A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

V prvním případě je $\det A = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, jedná se tedy o shodnost přímou, druhý případ odpovídá shodnosti nepřímé, pro kterou $\det A = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$.

(1) Uvažujme nejprve přímé shodnosti v rovině.

Analytické vyjádření každé přímé shodnosti f v rovině má tvar

$$f: x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + p,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + q.$$

Bod $X = [x, y]$ je samodružným bodem přímé shodnosti f, jestliže jeho souřadnice x, y splňují soustavu rovnic

$$x\,(1 - \cos\alpha) - y\sin\alpha = p,$$
$$x\sin\alpha + y\,(1 - \cos\alpha) = q.$$

Determinant této soustavy rovnic je roven

$$\det\begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{pmatrix} = (1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2\,(1-\cos\alpha).$$

a) Je-li $\cos\alpha = 1$, je potom $\sin\alpha = 0$.
Analytické vyjádření přímé shodnosti má v tomto případě tvar

$$f: x' = x + p,$$
$$y' = y + q.$$

Uvedená přímá shodnost f je obecně posunutím o vektor (p, q).
Jestliže $p = q = 0$, jedná se speciálně o identitu. Pokud je alespoň jedno z čísel p, q nenulové, jde o posunutí o nenulový vektor.

Z kapitoly 6 víme, že posunutí (včetně identity) má každý směr za směr samodružný. Přitom posunutí o nenulový vektor nemá žádný samodružný bod, při identitě je naopak samodružný každý bod.

b) Je-li $\cos\alpha \neq 1$, je determinant soustavy rovnic pro výpočet samodružných bodů nenulový, uvedená soustava má právě jedno řešení.

To znamená, že přímá shodnost f má v tomto případě právě jeden samodružný bod. Předpokládejme, že jsme počátek $P = [0, 0]$ uvažované KSS zvolili právě v tomto jediném samodružném bodě.

Potom $p = q = 0$ a analytické vyjádření přímé shodnosti f má tvar

$$f: x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Zvolme bod $X \in \boldsymbol{E_2}$, $X \neq P$, a označme jeho obraz při uvažované shodnosti f jako X'.
Potom $(X-P)\circ(X'-P) = (x, y)\circ(x\cos\alpha + y\sin\alpha, -x\sin\alpha + y\cos\alpha) =$

$$= x^2\cos\alpha + x\,y\sin\alpha - x\,y\sin\alpha + y^2\cos\alpha =$$
$$= (x^2 + y^2)\cos\alpha = \|X-P\|^2\cos\alpha.$$

Protože f je shodnost, platí $\|X-P\| = |XP| = |X'P| = \|X'-P\|$.
Potom $(X-P)\circ(X'-P) = \|X-P\|^2\cos\alpha = \|X-P\|\cdot\|X'-P\|\cos\alpha$, odkud

$$\cos\alpha = \frac{(X-P)\circ(X'-P)}{\|X-P\|.\|X'-P\|}.$$

Vidíme tedy, že vektory $X-P$ a $X'-P$ svírají úhel α.

Protože $\|X-P\| = \|X'-P\|$, je uvažovaná přímá shodnost f otočením kolem samodružného bodu P o úhel α.

Hledejme ještě samodružné směry shodnosti f. Příslušná charakteristická rovnice má tvar $\det(A - \lambda I) = 0$, kde I je jednotková matice 2. řádu.
Odtud

$$\det\begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$(\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = 0,$$
$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice pro neznámou λ má reálné kořeny právě tehdy, když je její determinant $D = 4\cos^2\alpha - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) \geq 0$, tj. když $\cos^2\alpha \geq 1$, odkud $|\cos\alpha| \geq 1$.

Protože $\cos\alpha = 1$ jsme již probrali v případě a), musí být $\cos\alpha = -1$, odkud $\alpha = \pi$ rad.

Jedná se tedy o otočení kolem samodružného bodu P o úhel 180°, neboli o středovou symetrii se středem v bodě P. Její analytické vyjádření má vzhledem ke zvolené KSS tvar

$$f: x' = -x, \quad y' = -y.$$

Kvadratická rovnice pro neznámou λ má potom tvar $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, neboli $(\lambda + 1)^2 = 0$. Řešením této rovnice je $\lambda = -1$.

Pro samodružný směr $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ musí platit rovnice $(A - \lambda I)\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, neboli $0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 = 0$, která je splněna pro každý vektor $\boldsymbol{u}$.

Vidíme tedy, že středová symetrie má každý směr za směr samodružný a každý vektor zobrazí na vektor k němu opačný.

(2) Uvažujme nyní nepřímé shodnosti v rovině.

Analytické vyjádření každé nepřímé shodnosti g v rovině má tvar

$$g: x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + p,$$
$$y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + q.$$

Vektor $(x, y) \neq \boldsymbol{o}$ generuje samodružný směr nepřímé shodnosti g, jestliže jeho souřadnice x, y splňují soustavu rovnic

$$x(\cos\alpha - \lambda) + y\sin\alpha = 0,$$
$$x\sin\alpha - y(\cos\alpha + \lambda) = 0.$$

Vlastní číslo λ příslušející vektoru (x, y) je řešením charakteristické rovnice

$$\det\begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -(\cos\alpha + \lambda) \end{pmatrix} = 0.$$

Odtud

$$-(\cos\alpha - \lambda)(\cos\alpha + \lambda) - \sin^2\alpha = 0,$$
$$-(\cos^2\alpha - \lambda^2) - \sin^2\alpha = 0,$$
$$\lambda^2 - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0,$$
$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Kořeny charakteristické rovnice jsou vlastní čísla $\lambda = 1$ a $\lambda = -1$.

Shodnost g má tedy dva různé samodružné směry, označme jejich reprezentanty $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Potom platí $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ a $\varphi(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}$, kde φ je homomorfismus asociovaný shodnosti g. Každý vektor prvního samodružného směru se tedy při asociovaném homomorfismu zobrazí sám na sebe, každý vektor druhého směru se zobrazí na vektor k němu opačný.

Pro vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ platí $\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \circ (-\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}$. Protože homomorfismus φ podle věty 35 zachovává skalární součin, musí být současně $\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}$.
To znamená, že $\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} = 0$, neboli vektor $\boldsymbol{u}$ je kolmý k vektoru $\boldsymbol{v}$.
Oba samodružné směry jsou proto navzájem kolmé.

Předpokládejme, že jsme KSS zvolili tak, že směr osy x je totožný s prvním samodružným směrem, směr osy y je druhým samodružným směrem.
Tomu odpovídá $\cos\alpha = 1$ a $\sin\alpha = 0$.

Analytické vyjádření nepřímé shodnosti g má v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} g: x' &= x + p, \\ y' &= -y + q. \end{aligned}$$

a) Je-li $p = 0$, má shodnost g analytické vyjádření

$$\begin{aligned} g: x' &= x, \\ y' &= -y + q. \end{aligned}$$

Bod $X = [x, y]$ je při shodnosti g samodružný, pokud $y = -y + q$, neboli $y = q/2$.
Samodružnými body jsou proto všechny body přímky $y = q/2$.
Shodnost g je tedy symetrií podle této přímky.

Předpokládejme dále, že jsme počátek $P = [0, 0]$ uvažované KSS zvolili právě na přímce $y = q/2$. Potom $q = 0$ a přímka $y = q/2$ splyne s osou x.

Analytické vyjádření shodnosti g má v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} g: x' &= x, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

Jedná se o osovou symetrii podle osy x.

b) Je-li $p \neq 0$, nemá shodnost g žádný samodružný bod.
Přímka $y = q/2$ je ale samodružná jako celek, každý její bod se zobrazí opět do jejího bodu.

Zvolíme-li opět počátek $P = [0, 0]$ uvažované KSS na této samodružné přímce, bude $q = 0$ a shodnost g bude mít analytické vyjádření

$$\begin{aligned} g: x' &= x + p, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

Tuto shodnost lze složit z osové symetrie podle osy x a posunutí o vektor $(p, 0)$ ve směru osy symetrie. Takové zobrazení nazýváme posunutá symetrie.

Tím jsme získali následující přehled všech typů shodností eukleidovské roviny uvedený v tabulce č. 1. U každého typu shodnosti je navíc uvedeno její analytické vyjádření vzhledem k vhodné KSS. Shodnosti v prostředním sloupci jsou shodnosti nepřímé, ostatní shodnosti patří mezi shodnosti přímé.

Tabulka č. 1

<table>
<tr><th rowspan="2">Samodružné body</th><th colspan="3">Samodružné směry</th></tr>
<tr><th>Žádný samodružný směr</th><th>Právě dva samodružné směry</th><th>Každý směr samodružný</th></tr>
<tr><td>Žádný samodružný bod</td><td>–</td><td>posunutá symetrie
$x' = x + p,\ p \neq 0$
$y' = -y$</td><td>posunutí o nenulový vektor
$x' = x + p$
$y' = y + q,\ (p, q) \neq (0, 0)$</td></tr>
<tr><td>Právě jeden samodružný bod</td><td>otočení o obecný úhel $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq \pi$
$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$
$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$</td><td>–</td><td>středová symetrie
$x' = -x$
$y' = -y$</td></tr>
<tr><td>Přímka samodružných bodů</td><td>–</td><td>osová symetrie
$x' = x$
$y' = -y$</td><td>–</td></tr>
<tr><td>Každý bod samodružný</td><td>–</td><td>–</td><td>identita
$x' = x$
$y' = y$</td></tr>
</table>

2.9 Podobná zobrazení

V této kapitole postupně probereme základní vlastnosti podobných zobrazení. Podobná zobrazení jsou přitom (stejně jako na střední škole) definována jako zobrazení, která mění délky úseček v určitém poměru.

Definice 22: Nechť $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E'}$ jsou eukleidovské prostory.
Zobrazení $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E'}$ se nazývá podobné, jestliže existuje $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$, tak, že pro každé $X, Y \in \boldsymbol{E}$ platí $|f(X) f(Y)| = k\,|XY|$.
Číslo k se nazývá koeficient podobného zobrazení.

Přímo z definice plyne, že shodné zobrazení je speciálním případem podobného zobrazení s koeficientem $k = 1$.

Příkladem podobného zobrazení je stejnolehlost f eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}$ na sebe.
Má-li stejnolehlost f střed S a koeficient $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda \neq 0$, platí
$f(X) = S + \lambda\,(X - S)$, $f(Y) = S + \lambda\,(Y - S)$, kde $X, Y \in \boldsymbol{E}$.
Potom $f(Y) - f(X) = (S + \lambda\,(Y - S)) - (S + \lambda\,(X - S)) = (S - S) + \lambda\,(Y - S) - \lambda\,(X - S) =$
$= \lambda\,(Y - S) + \lambda\,(S - X) = \lambda\,(Y - X)$.
Odtud $|f(X) f(Y)| = |\lambda|\,|XY|$.
Každá stejnolehlost s koeficientem λ je proto podobným zobrazením s koeficientem $k = |\lambda|$.

Pro podobná zobrazení platí některé věty, které jsou analogické větám platným pro zobrazení shodná. Postupy při důkazech těchto vět budou obdobné, pro úplnost je zde uvedeme, ale můžete je již provádět samostatně, je třeba jen provést příslušné úpravy na místech týkajících se vzdálenosti obrazů dvou bodů při daném zobrazení.

Věta 47: Nechť $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E'}$ jsou eukleidovské prostory.
Každé podobné zobrazení $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E'}$ je prosté a afinní.

***Důkaz*:** Nechť f je podobné zobrazení s koeficientem $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$.
Nejprve dokážeme, že f je prosté.

Zvolme dva různé body $A, B \in \boldsymbol{E}$. Protože zobrazení f je podobné s koeficientem k, je $|f(A) f(B)| = k\,|AB|$. Protože $k \neq 0$, je pro $A \neq B$ také $f(A) \neq f(B)$. Tím je dokázáno, že každé podobné zobrazení je prosté.

Abychom dokázali, že je také afinní, zvolme tři navzájem různé, kolineární body $A, B, C \in \boldsymbol{E}$. Předpokládejme, že např. bod C leží mezi body A, B.

Potom existuje $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda < 0$, tak, že $C - A = \lambda\,(C - B)$. Víme, že bod C leží na úsečce AB právě tehdy, když v trojúhelníkové nerovnosti $|AB| \leq |AC| + |CB|$ platí rovnost, tj. když $|AB| = |AC| + |CB|$.

Protože f je podobné zobrazení s koeficientem k, platí také rovnost

$$\frac{1}{k}\ |f(A)\,f(B)| = \frac{1}{k}\ |f(A)\,f(C)| + \frac{1}{k}\ |f(C)\,f(B)|, \text{ neboli}$$

$$|f(A)\,f(B)| = |f(A)\,f(C)| + |f(C)\,f(B)|.$$

To ale znamená, že bod $f(C)$ leží na úsečce $f(A)\,f(B)$.
Existuje tedy $\lambda' \in \boldsymbol{R}$, $\lambda' < 0$, tak, že $f(C) - f(A) = \lambda'\,(f(C) - f(B))$. Odtud plyne rovnost $|f(C)\,f(A)| = |\lambda'|\,|f(C)\,f(B)|$.

Ze vztahu $C - A = \lambda\,(C - B)$ zase plyne rovnost $|CA| = |\lambda|\,|CB|$.

Protože zobrazení f je podobné s koeficientem k, lze psát také

$$\frac{1}{k}\ |f(C)\,f(A)| = |\lambda|\ \frac{1}{k}\ |f(C)\,f(B)|, \text{ neboli}$$

$$|f(C)\,f(A)| = |\lambda|\,|f(C)\,f(B)|.$$

Porovnáním obou vztahů pro $|f(C)\,f(A)|$ získáme rovnost $|\lambda| = |\lambda'|$.
Díky tomu, že obě čísla λ, λ' jsou záporná ($\lambda < 0$, $\lambda' < 0$), musí být $\lambda = \lambda'$.
To znamená, že $(C; A, B) = (f(C); f(A), f(B))$.

Tím je dokázáno, že zobrazení f je také afinní.

Další dvě věty se týkají vlastností homomorfismu asociovaného s podobným zobrazením.

Věta 48: Nechť $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E'}$ jsou eukleidovské prostory.
Afinní zobrazení $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E'}$ je podobné s koeficientem k právě tehdy, když jeho asociovaný homomorfismus φ pro každý vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E})$ splňuje rovnost $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = k\,\|\boldsymbol{u}\|$.

***Důkaz*:** (1) Nechť je afinní zobrazení f podobné s koeficientem k.
Zvolme body $X, Y \in \boldsymbol{E}$ a označme $f(X) = X'$, $f(Y) = Y'$.
Body X, Y určují vektor $\boldsymbol{u} = Y - X$, pro který podle základní vlastnosti asociovaného homomorfismu platí $\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(Y - X) = f(Y) - f(X) = Y' - X'$.
Potom $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = \|Y' - X'\| = |Y'X'|$.
Protože je zobrazení f podobné s koeficientem k, je $|Y'X'| = k\,|YX|$.
Odtud $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = \|Y' - X'\| = |Y'X'| = k\,|YX| = k\,\|Y - X\| = k\,\|\boldsymbol{u}\|$.

(2) Předpokládejme, že pro každý vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E})$ platí $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = k\,\|\boldsymbol{u}\|$.
Zvolme opět body $X, Y \in \boldsymbol{E}$ a označme jejich obrazy při afinním zobrazení f jako $f(X) = X'$, $f(Y) = Y'$. Opět $\boldsymbol{u} = Y - X$ a $\varphi(\boldsymbol{u}) = Y' - X'$.
Potom $|Y'X'| = \|Y' - X'\| = \|\varphi(\boldsymbol{u})\| = k\,\|\boldsymbol{u}\| = k\,\|Y - X\| = k\,|YX|$.
Zobrazení f je tedy podobné s koeficientem k.

Věta 49: Nechť $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E'}$ jsou eukleidovské prostory.
Afinní zobrazení $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E'}$ je podobné s koeficientem k právě tehdy, když jeho asociovaný homomorfismus φ pro každé dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\boldsymbol{E})$ splňuje rovnost $\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = k^2\, \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}$.

***Důkaz*:** (1) Nechť je afinní zobrazení f podobné s koeficientem k.
Z věty 48 víme, že asociovaný homomorfismus φ podobného zobrazení f pro každý vektor $\boldsymbol{u} \in V(\boldsymbol{E})$ splňuje rovnost $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = k\,\|\boldsymbol{u}\|$. Přitom norma vektoru souvisí se skalárním součinem podle vztahu $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{u}}$.
Pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\boldsymbol{E})$ ale platí

$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \circ (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{u} + 2\, \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{v}$, neboli

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\, \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} + \|\boldsymbol{v}\|^2.$$

Odtud

$$\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2\right).$$

Podobně

$$\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(\|\varphi(\boldsymbol{u}) + \varphi(\boldsymbol{v})\|^2 - \|\varphi(\boldsymbol{u})\|^2 - \|\varphi(\boldsymbol{v})\|^2\right).$$

Protože φ je homomorfismus, platí $\varphi(\boldsymbol{u}) + \varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$. Odtud

$$\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(\|\varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})\|^2 - \|\varphi(\boldsymbol{u})\|^2 - \|\varphi(\boldsymbol{v})\|^2\right).$$

Podle věty 48 platí $\|\varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})\| = k\,\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|$, $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = k\,\|\boldsymbol{u}\|$, $\|\varphi(\boldsymbol{v})\| = k\,\|\boldsymbol{v}\|$.
Potom

$$\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(k^2\,\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 - k^2\,\|\boldsymbol{u}\|^2 - k^2\,\|\boldsymbol{v}\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\, k^2\left(\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2\right) = k^2\, \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}.$$

(2) Předpokládejme, že asociovaný homomorfismus φ pro každé dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\boldsymbol{E})$ splňuje rovnost $\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = k^2\, \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}$.
Položme $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$. Potom $\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{u}) = k^2\, \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{u}$, neboli $\|\varphi(\boldsymbol{u})\|^2 = k^2\,\|\boldsymbol{u}\|^2$.
Protože norma vektoru je vždy číslo nezáporné a $k > 0$, musí být $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = k\,\|\boldsymbol{u}\|$.
Podle věty 48 je tedy zobrazení f podobné s koeficientem k.

Věta 14 říkala, že afinní zobrazení je jednoznačně určeno obrazy vhodného počtu lineárně nezávislých bodů. Následující věta specifikuje, kdy je takové afinní zobrazení podobné.

Věta 50: Nechť $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E'}$ jsou eukleidovské prostory, nechť dim $\boldsymbol{E} = n$.
Jsou-li $P_0, P_1, \ldots, P_n$ lineárně nezávislé body prostoru $\boldsymbol{E}$ a $P'_0, P'_1, \ldots, P'_n$ jsou libovolně zvolené body prostoru $\boldsymbol{E'}$, pak afinní zobrazení $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E'}$, pro které platí $f(P_i) = P'_i$ pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ je podobné právě tehdy, když existuje $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$, tak, že $|P'_iP'_j| = k\,|P_iP_j|$ pro všechna $i, j = 0, 1, \ldots, n$.

***Důkaz*:** (1) Je-li zobrazení f podobné, plyne existence takového kladného čísla k, že $|P'_iP'_j| = k\,|P_iP_j|$ pro všechna $i, j = 0, 1, \ldots, n$ přímo z definice podobného zobrazení.

(2) Předpokládejme, že existuje $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$, tak, že $|P'_iP'_j| = k\,|P_iP_j|$ pro všechna $i, j = 0, 1, \ldots, n$.

Označme $\boldsymbol{e_i} = P_i - P_0$, $\boldsymbol{e'_i} = P'_i - P'_0$ pro $i = 1, \ldots, n$,
$\boldsymbol{e_j} = P_j - P_0$, $\boldsymbol{e'_j} = P'_j - P'_0$ pro $j = 1, \ldots, n$.

Vektory $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ jsou podle věty 7 lineárně nezávislé, tvoří tedy bázi zaměření $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{E})$ prostoru $\boldsymbol{E}$. Vektory $\boldsymbol{e'_1}, \ldots, \boldsymbol{e'_n}$ jsou obrazy této báze při asociovaném homomorfismu φ.

Potom $\|\boldsymbol{e'_i}\| = |P'_iP'_0| = k\,|P_iP_0| = k\,\|\boldsymbol{e_i}\|$, $\|\boldsymbol{e'_j}\| = |P'_jP'_0| = k\,|P_jP_0| = k\,\|\boldsymbol{e_j}\|$.

Dále platí $\boldsymbol{e_i} - \boldsymbol{e_j} = (P_i - P_0) - (P_j - P_0) = P_i - P_j$,

$$\boldsymbol{e'_i} - \boldsymbol{e'_j} = (P'_i - P'_0) - (P'_j - P'_0) = P'_i - P'_j,$$

$$\|\boldsymbol{e'_i} - \boldsymbol{e'_j}\| = |P'_iP'_j| = k\,|P_iP_j| = k\,\|\boldsymbol{e_i} - \boldsymbol{e_j}\|.$$

Pro vektory $\boldsymbol{e'_i}, \boldsymbol{e'_j}$ lze odvodit vztah

$$(\boldsymbol{e'_i} - \boldsymbol{e'_j}) \circ (\boldsymbol{e'_i} - \boldsymbol{e'_j}) = \boldsymbol{e'_i} \circ \boldsymbol{e'_i} - 2\,\boldsymbol{e'_i} \circ \boldsymbol{e'_j} + \boldsymbol{e'_j} \circ \boldsymbol{e'_j},$$

$$\|\boldsymbol{e'_i} - \boldsymbol{e'_j}\|^2 = \|\boldsymbol{e'_i}\|^2 - 2\,\boldsymbol{e'_i} \circ \boldsymbol{e'_j} + \|\boldsymbol{e'_j}\|^2,$$

$$\boldsymbol{e'_i} \circ \boldsymbol{e'_j} = \frac{1}{2}\,(\|\boldsymbol{e'_i}\|^2 + \|\boldsymbol{e'_j}\|^2 - \|\boldsymbol{e'_i} - \boldsymbol{e'_j}\|^2).$$

Z výše uvedeného plyne, že $\boldsymbol{e'_i} \circ \boldsymbol{e'_j} = \dfrac{1}{2}\,(k^2\,\|\boldsymbol{e_i}\|^2 + k^2\,\|\boldsymbol{e_j}\|^2 - k^2\,\|\boldsymbol{e_i} - \boldsymbol{e_j}\|^2) =$

$$= \frac{1}{2}\;k^2\,(\|\boldsymbol{e_i}\|^2 + \|\boldsymbol{e_j}\|^2 - \|\boldsymbol{e_i} - \boldsymbol{e_j}\|^2) = k^2\,\boldsymbol{e_i} \circ \boldsymbol{e_j}.$$

Uvažujme nyní libovolné dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E})$, které lze zřejmě zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i\,\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j\,\boldsymbol{e_j}.$$

Potom

$$\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\,\varphi(\boldsymbol{e_i})\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} v_j\,\varphi(\boldsymbol{e_j})\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i\,v_j\,\boldsymbol{e'_i} \circ \boldsymbol{e'_j} =$$

$$= k^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i\,v_j\,\boldsymbol{e_i} \circ \boldsymbol{e_j} = k^2 \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\,\boldsymbol{e_i}\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} v_j\,\boldsymbol{e_j}\right) = k^2\,\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}.$$

Zobrazení f je tedy podle věty 49 podobné.

Podle vět 14 a 50 je např. podobné zobrazení eukleidovské roviny $\boldsymbol{E}_2$ do prostoru $\boldsymbol{E}'$ jednoznačně určeno obrazy vrcholů libovolného trojúhelníku ABC v rovině $\boldsymbol{E}_2$. Aby ale takové podobné zobrazení vůbec existovalo, musí existovat $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$, tak, že $|A'B'| = k\,|AB|$, $|B'C'| = k\,|BC|$ a $|A'C'| = k\,|AC|$, neboli trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ musí být podobné s poměrem podobnosti k.

Věta 51: Nechť $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E}'$ jsou eukleidovské prostory.
Každé podobné zobrazení $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ lze složit ze stejnolehlosti a shodného zobrazení.

***Důkaz*:** Nechť $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ je podobné zobrazení s koeficientem $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$.

Je-li $k = 1$, je zobrazení f shodné a věta 51 zřejmě platí. Za příslušnou stejnolehlost vezmeme identitu.

Pokud $k \neq 1$, označme hledané shodné zobrazení g a hledanou stejnolehlost h.
Protože stejnolehlost je vždy zobrazení daného eukleidovského prostoru do sebe, musí být buď $h: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, nebo $h: \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{E}'$.

Zvolme nejprve libovolnou stejnolehlost h prostoru $\boldsymbol{E}$ s koeficientem k.
Je-li bod S středem této stejnolehlosti, platí $h(X) = S + k(X - S)$ pro libovolný bod $X \in \boldsymbol{E}$. Označme jeho obraz $h(X) = X'$. Potom $X' = S + k(X - S)$.

Odtud $X' - S = k(X - S)$, $\dfrac{1}{k}(X' - S) = X - S$, $X = S + \dfrac{1}{k}(X' - S)$.

Inverzním zobrazením ke stejnolehlosti h je stejnolehlost h^{-1} se stejným středem S a koeficientem $1/k$. Stejnolehlost h^{-1} je přitom podobné zobrazení s koeficientem $1/k$.

Složené zobrazení $f \circ h^{-1}$ je potom shodné zobrazení prostoru $\boldsymbol{E}$ do prostoru $\boldsymbol{E}'$. Označme $g = f \circ h^{-1}$.

Protože skládání zobrazení je asociativní, platí

$f = f \circ (h^{-1} \circ h) = (f \circ h^{-1}) \circ h = g \circ h$.

Podobné zobrazení f jsme složili ze stejnolehlosti $h: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ a shodného zobrazení $g: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$, $g = f \circ h^{-1}$ (viz obr. č. 22).

Pokud za stejnolehlost h zvolíme stejnolehlost prostoru $\boldsymbol{E}'$ se stejným koeficientem k, bude složené zobrazení $g = h^{-1} \circ f$ shodným zobrazením prostoru $\boldsymbol{E}$ do prostoru $\boldsymbol{E}'$. Potom $f = (h \circ h^{-1}) \circ f = h \circ (h^{-1} \circ f) = h \circ g$.

Podobné zobrazení f v tomto případě složíme ze stejnolehlosti $h: \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{E}'$ a shodného zobrazení $g: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$, $g = h^{-1} \circ f$ (viz obr. č. 23).

Tím je důkaz proveden.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & \boldsymbol{E}' \\ & \boldsymbol{E} \arrow[ur, "g = f \circ h^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Obrázek č. 22

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h^{-1} \circ f = g"'] & & \boldsymbol{E}' \\ & \boldsymbol{E}' \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Obrázek č. 23

Na základě věty 51 můžeme také jiným, jednodušším způsobem znovu dokázat, že každé podobné zobrazení je afinní. Protože shodné zobrazení i stejnolehlost jsou zobrazení afinní a zobrazení složené ze dvou afinních zobrazení je rovněž afinní, je každé podobné zobrazení afinní.

Definice 23: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Podobné zobrazení $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ se nazývá podobnost prostoru $\boldsymbol{E}$.

Každá shodnost eukleidovského prostoru je speciálním případem podobnosti daného prostoru. Podobnost, která není současně shodnost, nazýváme vlastní podobnost. Koeficient vlastní podobnosti $k \neq 1$.

Věta 52: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Podobnost prostoru $\boldsymbol{E}$ je vzájemně jednoznačné zobrazení.

***Důkaz*:** Z věty 47 víme, že podobné zobrazení $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ je prosté.
To podle věty 17 znamená, že také jeho asociovaný homomorfismus $\varphi : \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{V}(\boldsymbol{E})$ je prostým zobrazením.
Odtud plyne, že homomorfismus φ je vzájemně jednoznačné zobrazení.
Opět podle věty 17 platí, že zobrazení f je také na, neboli f je vzájemně jednoznačné.

Věta 53: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Všechny podobnosti prostoru $\boldsymbol{E}$ tvoří grupu vzhledem ke skládání.

***Důkaz*:** Nechť f je podobnost prostoru $\boldsymbol{E}$ s koeficientem $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$, a g je podobnost prostoru $\boldsymbol{E}$ s koeficientem $l \in \boldsymbol{R}$, $l > 0$.
Z definice podobného zobrazení plyne, že $|f(X)f(Y)| = k\,|XY|$ a $|g(X)\,g(Y)| = l\,|XY|$ pro libovolné dva body $X, Y \in \boldsymbol{E}$.
Pro složené zobrazení $g \circ f$ potom platí
$|(g \circ f)(X)\,(g \circ f)(Y)| = |g(f(X))\,g(f(Y))| = l\,|f(X)f(Y)| = l \cdot k\,|XY| = k \cdot l\,|XY|$.
Složené zobrazení $g \circ f$ je tedy podobnost s koeficientem $k \cdot l$.
Skládání libovolných tří zobrazení je asociativní, tedy speciálně skládání tří podobností je asociativní.
Neutrálním prvkem vzhledem ke skládání je identita, která je zřejmě podobností s koeficientem $k = 1$.
Inverzní zobrazení f^{-1} k podobnosti f je opět podobnost, její koeficient je roven $1/k$.
Tím je důkaz proveden.

Následující věta se týká analytického vyjádření podobnosti a stanovuje podmínku, kterou musí matice analytického vyjádření afinního zobrazení splňovat, aby se jednalo o podobnost.

Věta 54: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor dimenze n.
Je-li v prostoru $\boldsymbol{E}$ zvolena KSS a afinní zobrazení $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ má vzhledem k ní analytické vyjádření

$$f : x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j \text{ pro } j = 1, \dots, n,$$

pak f je podobnost prostoru $\boldsymbol{E}$ s koeficientem $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$, právě tehdy, když matice $A = (a_{ji})$ splňuje rovnost $A^T \cdot A = k^2 \cdot I$, kde A^T je matice transponovaná k matici A a I je jednotková matice řádu n.

***Důkaz*:** Tuto větu lze opět dokázat obdobným způsobem jako větu 39.
Ukážeme si ale, jak lze přímou implikaci dokázat jednodušším způsobem využívajícím platnost věty 51.

Nechť f je podobnost prostoru $\boldsymbol{E}$ s koeficientem $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$.
Podle věty 51 lze podobnost f složit ze shodnosti g prostoru $\boldsymbol{E}$ a stejnolehlosti h prostoru $\boldsymbol{E}$ s koeficientem k (v libovolném pořadí). Předpokládejme, že $f = g \circ h$.

Označíme-li B matici analytického vyjádření shodnosti g a C matici analytického vyjádření stejnolehlosti h, musí pro matici $A = (a_{ji})$ podobnosti f platit rovnost $A = B \cdot C$.

Pro matici B přitom podle věty 39 platí vztah $B^T \cdot B = I$, kde B^T je matice transponovaná k matici B.

Je-li bod $S = [s_1, \dots , s_n]$ středem stejnolehlosti h, platí $h\,(X) = S + k\,(X - S)$ pro libovolný bod $X \in \boldsymbol{E}$. Označme jeho obraz $h\,(X) = X'$. Potom $X' = S + k\,(X - S)$.

Analytické vyjádření stejnolehlosti h bude mít tvar $h : x'_j = k\, x_j + (1 - k)\, s_j$ pro $j = 1, \dots , n$. Pro matici C analytického vyjádření stejnolehlosti h tedy platí $C = k \cdot I$.

Odtud vidíme, že matice C je maticí diagonální, proto $C^T = C = k \cdot I$, $C^T \cdot C = k^2 \cdot I$.

Z výše uvedeného potom plyne, že $A^T \cdot A = (B \cdot C)^T \cdot (B \cdot C) = C^T \cdot B^T \cdot B \cdot C =$
$= C^T \cdot I \cdot C = C^T \cdot C = k^2 \cdot I$.

Tím je důkaz přímé implikace proveden.

Také podobnosti eukleidovského prostoru dělíme podle znaménka determinantu matice analytického vyjádření vzhledem k libovolné KSS na dvě skupiny, podobnosti přímé a nepřímé. V kapitole 7 jsme přitom již ukázali, že se znaménko determinantu uvedené matice nezmění při volbě jiné KSS. Následující definice je proto opět korektní.

Definice 24: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Podobnost f prostoru $\boldsymbol{E}$ se nazývá přímá, jestliže matice v analytickém vyjádření f vzhledem ke KSS má kladný determinant.
Podobnost f prostoru $\boldsymbol{E}$ se nazývá nepřímá, jestliže matice v analytickém vyjádření f vzhledem ke KSS má záporný determinant.

Z věty 53 víme, že všechny podobnosti daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání. Opět lze dokázat, že také všechny přímé podobnosti tvoří grupu, která je zřejmě podgrupou grupy všech podobností.

Věta 55: Nechť ***E*** je eukleidovský prostor.
Všechny přímé podobnosti prostoru ***E*** tvoří grupu vzhledem ke skládání.

Důkaz*:** Nechť f a g jsou dvě přímé podobnosti prostoru ***E, jejichž analytická vyjádření vzhledem ke zvolené KSS mají tvar

$$f: x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i + b_j\,,$$

$$g: x'_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, x_k + d_j \quad \text{pro } j = 1, \dots, n.$$

Přitom obě matice $A = (a_{ji})$ a $C = (c_{jk})$ mají kladný determinant ($\det A > 0$, $\det C > 0$).
Složené zobrazení $g \circ f$ bude mít analytické vyjádření

$$g \circ f: x'_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, x_i + b_k \right) + d_j\,,$$

$$x'_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{jk}\, a_{ki}\, x_i + \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, b_k + d_j \quad \text{pro } j = 1, \dots, n.$$

Vidíme, že maticí analytického vyjádření složeného zobrazení $g \circ f$ je matice $C \cdot A$.
Protože $\det A > 0$, $\det C > 0$, je také $\det (C \cdot A) = \det C \cdot \det A > 0$.
Složením dvou přímých podobností je tedy opět přímá podobnost.
Skládání libovolných tří zobrazení je asociativní, tedy speciálně skládání tří přímých podobností je asociativní.
Neutrálním prvkem vzhledem ke skládání je identita, která je přímou podobností, neboť jednotková matice má kladný determinant.
Inverzní zobrazení f^{-1} k přímé podobnosti f je opět přímou podobností, neboť maticí jeho analytického vyjádření je matice A^{-1} inverzní k matici A.
Protože $\det A > 0$, je také $\det A^{-1} = 1/(\det A) > 0$.
Tím je důkaz proveden.

Podobně jako nepřímé shodnosti pouze nepřímé podobnosti daného prostoru grupu netvoří. Složením dvou nepřímých podobností je podobnost přímá, množina tvořená všemi nepřímými podobnostmi opět není uzavřená vzhledem ke skládání. Také v této množině chybí neutrální prvek vzhledem ke skládání, neboť identita patří mezi podobnosti přímé.

Věta 56: Nechť ***E*** je eukleidovský prostor.
Je-li λ vlastním číslem homomorfismu φ asociovaného podobnosti f prostoru ***E*** s koeficientem $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$, pak $\lambda = k$, nebo $\lambda = -k$.

Důkaz: Je-li λ vlastním číslem homomorfismu φ, pak existuje nenulový vektor $\boldsymbol{u} \in V(\boldsymbol{E})$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\, \boldsymbol{u}$. Podle věty 48 pro asociovaný homomorfismus φ platí $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = k\,\|\boldsymbol{u}\|$.
Na druhou stranu z výše uvedeného plyne $\|\varphi(\boldsymbol{u})\| = \|\lambda\, \boldsymbol{u}\| = |\lambda|\, \|\boldsymbol{u}\|$.
Porovnáním obou vztahů pro $\|\varphi(\boldsymbol{u})\|$ získáme rovnost $k\,\|\boldsymbol{u}\| = |\lambda|\, \|\boldsymbol{u}\|$, odkud $|\lambda| = k$.
Tím je důkaz proveden.

Věta 56 jinými slovy říká, že vektor $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ generuje samodružný směr podobnosti f, jestliže se při asociovaném homomorfismu φ zobrazí na svůj k-násobek ($\varphi(\boldsymbol{u}) = k\,\boldsymbol{u}$), nebo na svůj $(-k)$-násobek ($\varphi(\boldsymbol{u}) = -k\,\boldsymbol{u}$).

Také v případě podobností eukleidovské roviny $\boldsymbol{E}_2$ můžeme stejně jako u shodností hledat jejich samodružné body a směry a provést klasifikaci všech typů podobností v rovině.
Výsledky získané pro vlastní podobnost uvedeme v následujících dvou větách. Přitom věta 57 platí obecně pro každou vlastní podobnost eukleidovského prostoru libovolné dimenze.

Věta 57: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Každá vlastní podobnost prostoru $\boldsymbol{E}$ má právě jeden samodružný bod.

Důkaz: Nechť f je vlastní podobnost prostoru $\boldsymbol{E}$.
Nejprve dokážeme, že vlastní podobnost f nemůže mít více než jeden samodružný bod.
Kdyby $X, Y \in \boldsymbol{E}$ byly dva samodružné body vlastní podobnosti f, pro které $f(X) = X$ a $f(Y) = Y$, musela by platit rovnost $|f(X)\,f(Y)| = |XY| = k\,|XY|$, kde k je koeficient vlastní podobnosti f.
Odtud získáme $k = 1$, což je spor s předpokladem, že f je vlastní podobnost.
To znamená, že každá vlastní podobnost má nejvýše jeden samodružný bod.
Nyní dokážeme, že má právě jeden.
V prostoru $\boldsymbol{E}$ zvolme KSS. Vzhledem k ní nechť má maticový zápis analytického vyjádření podobnosti f s koeficientem $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$, tvar $f\colon x' = A\,x + b$, kde $A \cdot A^T = k^2 \cdot I$.
Souřadnice x samodružných bodů podobnosti f splňují soustavu rovnic $(A - I)\,x = -b$ zapsanou v maticovém tvaru.
Kdyby byl $\det(A - I) = 0$, bylo by vlastní číslo $\lambda = 1$ kořenem charakteristické rovnice $\det(A - \lambda\, I) = 0$. To znamená, že by existoval nenulový vektor $\boldsymbol{u} \in V(\boldsymbol{E})$, který by se při asociovaném homomorfismu φ zobrazil sám na sebe, tj. platilo by $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$, což by byl spor s tím, že f je vlastní podobnost.
Musí tedy být $\det(A - I) \neq 0$, což znamená, že soustava rovnic pro výpočet samodružných bodů má právě jedno řešení.
Vlastní podobnost f má proto právě jeden samodružný bod.

Věta 58: Každá vlastní podobnost eukleidovské roviny $\boldsymbol{E_2}$ je buď stejnolehlost, nebo stejnolehlost složená s otočením kolem středu této stejnolehlosti, nebo stejnolehlost složená s osovou symetrií, jejíž osa prochází středem této stejnolehlosti.

***Důkaz*:** Nechť f je vlastní podobnost roviny $\boldsymbol{E_2}$ s koeficientem $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$, $k \neq 1$.

Z věty 51 víme, že každou podobnost f s koeficientem k lze složit ze stejnolehlosti h s libovolným středem a stejným koeficientem k a ze shodnosti g.

Z věty 57 dále víme, že každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod. Zvolme tento samodružný bod za počátek $P = [0, 0]$ uvažované KSS a současně v tomto bodě zvolme střed uvedené stejnolehlosti.

Stejnolehlost h se středem v bodě P a koeficientem k má analytické vyjádření

$$h: x' = k\,x, \quad y' = k\,y.$$

Shodnost g má v eukleidovské rovině analytické vyjádření

$$g_1: x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha + p, \quad y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha + q, \qquad \text{nebo} \qquad g_2: x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha + p, \quad y' = x \sin\alpha - y \cos\alpha + q.$$

Analytické vyjádření podobnosti f má proto tvar

$$f_1: x' = k\,x \cos\alpha + k\,y \sin\alpha + k\,p = a\,x + b\,y + r,$$
$$y' = -k\,x \sin\alpha + k\,y \cos\alpha + k\,q = -b\,x + a\,y + s,$$

nebo

$$f_2: x' = k\,x \cos\alpha + k\,y \sin\alpha + k\,p = a\,x + b\,y + r,$$
$$y' = k\,x \sin\alpha - k\,y \cos\alpha + k\,q = b\,x - a\,y + s,$$

kde jsme označili $a = k \cos\alpha$, $b = k \sin\alpha$, $r = k\,p$, $s = k\,q$.

Pro koeficient k tedy platí $k = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Podobnost f_1 je podobnost přímá ($a^2 + b^2 > 0$), podobnost f_2 patří mezi podobnosti nepřímé ($-a^2 - b^2 < 0$).

Protože bod $P = [0, 0]$ je samodružným bodem podobnosti f, mají podobnosti f_1 a f_2 analytická vyjádření

$$f_1: x' = a\,x + b\,y, \quad y' = -b\,x + a\,y. \qquad f_2: x' = a\,x + b\,y, \quad y' = b\,x - a\,y.$$

(1) Uvažujme nejprve přímou podobnost f_1.

Charakteristická rovnice podobnosti f_1 má tvar

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ -b & a-\lambda \end{pmatrix} = 0, \text{ neboli}$$
$$(a-\lambda)^2 + b^2 = 0.$$

a) Je-li $b = 0$, je přímá podobnost f_1 stejnolehlostí se středem v jediném samodružném bodě P a koeficientem $k = a$.

Její analytické vyjádření má tvar $f_1: x' = a\,x,$
$y' = a\,y.$

V tomto případě je každý směr samodružný, příslušné vlastní číslo $\lambda = a = k$.

b) Pokud $b \neq 0$, nemá charakteristická rovnice žádný reálný kořen.

Zvolme bod $X \in \boldsymbol{E}_2$, $X \neq P$, a označme jeho obraz při stejnolehlosti h se středem v bodě P a koeficientem k jako X'. Obraz bodu X při přímé podobnosti f_1 označme X''.

Potom $(X' - P) \circ (X'' - P) = (k\,x, k\,y) \circ (a\,x + b\,y, -b\,x + a\,y) =$
$$= k\,a\,x^2 + k\,b\,x\,y - k\,b\,x\,y + k\,a\,y^2 =$$
$$= k\,a\,(x^2 + y^2) = k^2 \cos\alpha\,(x^2 + y^2).$$

Přitom platí $|X'P| = k\,|XP| = |X''P|$,
$$\|X' - P\| = \|X'' - P\| = k\,\|X - P\| = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Potom $(X' - P) \circ (X'' - P) = \|X' - P\| \cdot \|X'' - P\| \cos\alpha$, odkud
$$\cos\alpha = \frac{(X' - P) \circ (X'' - P)}{\|X' - P\| . \|X'' - P\|}.$$

Vidíme tedy, že vektory $X' - P$ a $X'' - P$ svírají úhel α a platí rovnost $\|X' - P\| = \|X'' - P\|$.

Přímou podobnost f_1 lze v tomto případě složit ze stejnolehlosti se středem v jediném samodružném bodě P a koeficientem k a otočení kolem tohoto samodružného bodu o úhel α, kde $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(2) Uvažujme nyní nepřímou podobnost f_2.

Vektor $(x, y) \neq \boldsymbol{o}$ generuje samodružný směr nepřímé podobnosti f_2, jestliže jeho souřadnice x, y splňují soustavu rovnic
$$(a - \lambda)\,x + b\,y = 0,$$
$$b\,x - (a + \lambda)\,y = 0.$$

Vlastní číslo λ příslušející vektoru (x, y) je řešením charakteristické rovnice
$$\det\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & -a - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Odtud
$$-(a - \lambda)\,(a + \lambda) - b^2 = 0,$$
$$-(a^2 - \lambda^2) - b^2 = 0,$$
$$\lambda^2 = a^2 + b^2.$$

Tato rovnice má podle očekávání (viz věta 56) dva kořeny:
$$\lambda_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = k \text{ a } \lambda_2 = -\sqrt{a^2 + b^2} = -k.$$

Podobnost f_2 má tedy dva různé samodružné směry, označme jejich reprezentanty $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Potom platí $\varphi(\boldsymbol{u}) = k\,\boldsymbol{u}$ a $\varphi(\boldsymbol{v}) = -k\,\boldsymbol{v}$, kde φ je homomorfismus asociovaný podobnosti f_2.

Pro vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ platí $\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = k\,\boldsymbol{u} \circ (-k\,\boldsymbol{v}) = -k^2\,\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}$.

Pro homomorfismus φ podle věty 49 současně platí $\varphi(\boldsymbol{u}) \circ \varphi(\boldsymbol{v}) = k^2\,\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}$.

To znamená, že $\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} = 0$, neboli vektor $\boldsymbol{u}$ je kolmý k vektoru $\boldsymbol{v}$.
Oba samodružné směry jsou proto navzájem kolmé.

Předpokládejme, že jsme KSS zvolili tak, že směr osy x je totožný s prvním samodružným směrem, směr osy y je druhým samodružným směrem.
Tomu odpovídá $b = 0$.

Analytické vyjádření nepřímé podobnosti f_2 má v tomto případě tvar

$$f_2: x' = a\,x, \quad y' = -a\,y.$$

Tuto podobnost lze složit ze stejnolehlosti se středem v jediném samodružném bodě P a koeficientem $k = a$ a osové symetrie podle osy x, která prochází středem stejnolehlosti P.
Tím je důkaz proveden.

2.10 Kruhová inverze

Poslední kapitola je věnována zobrazení, které se v mnoha vlastnostech liší od všech dosud probraných geometrických zobrazení. Přitom ho lze zavést velmi podobným způsobem jako stejnolehlost.

V kapitole 6 jsme stejnolehlost f afinního prostoru $\boldsymbol{A}$ se středem S a koeficientem $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda \neq 0$, definovali jako zobrazení, které každému bodu $X \in \boldsymbol{A}$ přiřazuje bod $X' = S + \lambda\,(X - S)$.

Bod S je při uvedené stejnolehlosti samodružný, pro $X \neq S$ leží bod X' na přímce SX.

Je-li $\lambda > 0$, leží bod X' na polopřímce SX, pokud $\lambda < 0$, je bod X' bodem polopřímky opačné k polopřímce SX.

V eukleidovském prostoru plyne z předpisu pro obraz X' bodu X při stejnolehlosti f rovnost $|SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$.

Na úrovni střední školy bychom proto mohli stejnolehlost definovat tímto způsobem:

Definice: Stejnolehlostí eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}$ se středem $S \in \boldsymbol{E}$ a koeficientem $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda \neq 0$, budeme rozumět zobrazení, které
1. bodu S přiřadí bod S,
2. každému bodu $X \in \boldsymbol{E}$, $X \neq S$, přiřadí bod $X' \in \boldsymbol{E}$ tak, že platí $|SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$, přitom pro $\lambda > 0$ jsou polopřímky SX, SX' totožné a pro $\lambda < 0$ jsou opačné.

Tato definice stejnolehlosti se skutečně používá ve středoškolských učebnicích.

Obdobným způsobem se v eukleidovském prostoru definuje zobrazení, které se nazývá inverze. Také inverze je dána svým středem a koeficientem. Jediným, ale velmi podstatným rozdílem v definicích stejnolehlosti a inverze je změna přímé úměrnosti mezi vzdálenostmi $|SX'|$ a $|SX|$ v úměrnost nepřímou. Obraz bodu S potom není definován.

Definice 25: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Inverzí prostoru $\boldsymbol{E}$ se středem $S \in \boldsymbol{E}$ a koeficientem $\kappa \in \boldsymbol{R}$, $\kappa \neq 0$, rozumíme zobrazení $f\colon \boldsymbol{E} - \{S\} \to \boldsymbol{E} - \{S\}$, které každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod $f(X) = X'$ tak, že polopřímky SX' a SX jsou totožné při $\kappa > 0$, opačné při $\kappa < 0$, a platí $|SX'| \cdot |SX| = |\kappa|$.

V případě eukleidovské roviny $\boldsymbol{E}_2$ mluvíme o kruhové inverzi, v případě eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}_3$ o sférické inverzi.

Z definice 25 je vidět, že každá inverze je také jednoznačně určena svým středem S a jednou dvojicí X, X' bodu $X \neq S$ a jeho obrazu $X' \neq S$. Body S, X, X' přitom musí být kolineární.

Věta 59: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor dimenze n.
Nechť je dána inverze prostoru $\boldsymbol{E}$ se středem $S \in \boldsymbol{E}$ a koeficientem $\kappa \in \boldsymbol{R}$, $\kappa \neq 0$.
Nechť je v prostoru $\boldsymbol{E}$ zvolena KSS, vzhledem k níž má bod S souřadnice $S = [s_1, \dots, s_n]$. Označíme-li souřadnice nezávisle proměnného bodu $X \in \boldsymbol{E}$, $X \neq S$, vzhledem ke zvolené KSS jako $X = [x_1, \dots, x_n]$ a souřadnice jeho obrazu X' v uvedené inverzi jako $X' = [x'_1, \dots, x'_n]$, má analytické vyjádření uvažované inverze vzhledem ke zvolené KSS tvar

$$x'_j = s_j + \frac{\kappa}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - s_i)^2}(x_j - s_j),\ \text{kde}\ \ j = 1, \dots, n.$$

Důkaz: Při inverzi se středem S a koeficientem κ jsou body S, X, X' kolineární, lze tedy psát $X' - S = k\,(X - S)$, kde číslo $k \in \boldsymbol{R}$ má stejné znaménko jako koeficient κ.
Odtud plyne $|SX'| = |k| \cdot |SX|$. Podle definice inverze zároveň platí $|SX'| = \dfrac{|\kappa|}{|SX|}$.

Porovnáním obou vztahů pro $|SX'|$ získáme rovnost $|k| \cdot |SX| = \dfrac{|\kappa|}{|SX|}$,

odkud $|k| = \dfrac{|\kappa|}{|SX|^2}$.

Protože obě čísla k a κ mají stejná znaménka, platí $k = \dfrac{\kappa}{|SX|^2}$.

Po dosazení získáme $X' = S + k\,(X - S) = S + \dfrac{\kappa}{|SX|^2}(X - S)$.

Rozepsáním v souřadnicích pak získáme výše uvedené analytické vyjádření inverze.

Věta 60: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Každá inverze prostoru $\boldsymbol{E}$ je involutorní zobrazení.

Důkaz: Nechť f je inverze prostoru $\boldsymbol{E}$ se středem $S \in \boldsymbol{E}$ a koeficientem $\kappa \in \boldsymbol{R}$, $\kappa \neq 0$.
Zvolme bod $X \in \boldsymbol{E}$, $X \neq S$, a označme $f(X) = X'$.
Podle definice 25 jsou body S, X, X' kolineární a platí $|SX'| \cdot |SX| = |\kappa|$.
Označme dále obraz bodu X' v inverzi f jako $f(X') = X''$.
Také body S, X', X'' pak budou kolineární a bude platit $|SX''| \cdot |SX'| = |\kappa| = |SX'| \cdot |SX|$, neboli $|SX''| = |SX|$.
Je-li $\kappa > 0$, leží bod X'' na polopřímce SX' totožné s polopřímkou SX a díky rovnosti $|SX''| = |SX|$ je $X'' = X$.
Pokud $\kappa < 0$, je bod X'' bodem polopřímky opačné k polopřímce SX'. Přitom polopřímka SX' je opačná k polopřímce SX.
Bod X'' proto také v tomto případě leží na polopřímce SX a díky rovnosti $|SX''| = |SX|$ je opět $X'' = X$.
Inverze f je tedy involutorním zobrazením, $f \circ f$ = identita.

Platnost věty 60 je zřejmá i bez předchozích úvah. Body X a X' v definici 25 vystupují symetricky, uvedené podmínky se tedy nezmění, zaměníme-li X a X'. Je-li obrazem bodu X v uvedené inverzi bod X', je naopak obrazem bodu X' ve stejné inverzi bod X.

Dále se budeme věnovat pouze kruhovým inverzím eukleidovské roviny $\boldsymbol{E}_2$ a dokážeme některé základní vlastnosti kruhových inverzí. Většinu těchto vlastností lze přitom zobecnit také pro sférické inverze eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}_3$.

Kruhovou inverzi se středem v bodě S a koeficientem κ budeme značit $\mathcal{K}(S, \kappa)$.

Věta 61: Kruhová inverze se středem $S \in \boldsymbol{E}_2$ a koeficientem $\kappa \in \boldsymbol{R}$, $\kappa \neq 0$, zobrazuje vnitřní oblast kružnice k se středem S a poloměrem $r = \sqrt{|\kappa|}$ na její vnější oblast a naopak.

Přitom uvedená kružnice k je při uvažované kruhové inverzi samodružná;
při $\kappa > 0$ je každý její bod samodružný,
při $\kappa < 0$ se každý její bod zobrazí na bod diametrálně protilehlý.

***Důkaz*:** Zvolme bod $X \in \boldsymbol{E}_2$, $X \neq S$. Obraz bodu X při kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa)$ označme X'. Potom $|SX'| \cdot |SX| = |\kappa|$.

Leží-li bod X ve vnitřní oblasti kružnice k, je $|SX| < \sqrt{|\kappa|}$, a proto musí být $|SX'| > \sqrt{|\kappa|}$. Obraz X' bodu X tedy leží ve vnější oblasti kružnice k.

Pokud bod X leží ve vnější oblasti kružnice k, je $|SX| > \sqrt{|\kappa|}$, a proto musí být $|SX'| < \sqrt{|\kappa|}$. Obraz X' v tomto případě leží ve vnitřní oblasti kružnice k, $X' \neq S$.

Bod $X \neq S$ je při uvedené kruhové inverzi samodružný, pokud $X' = X$.

Je-li $\kappa > 0$, jsou polopřímky SX' a SX totožné a body X a X' splynou, pokud $|SX'| = |SX|$.

Po dosazení získáme rovnost $|SX'| \cdot |SX| = |SX|^2 = |\kappa|$, odkud $|SX| = \sqrt{|\kappa|} = \sqrt{\kappa}$.

Všechny samodružné body kruhové inverze $\mathcal{K}(S, \kappa > 0)$ tedy tvoří kružnici se středem v bodě S a poloměrem $r = \sqrt{\kappa}$.

Pokud $\kappa < 0$, nemá kruhová inverze žádný samodružný bod, neboť polopřímky SX' a SX jsou opačné, takže body X a X' nemohou splynout.

Pro některé body X však platí rovnost $|SX'| = |SX|$, střed S kruhové inverze je pro ně středem úsečky XX'.

Jsou to právě ty body X, pro které $|SX| = \sqrt{|\kappa|} = \sqrt{-\kappa}$.

Kružnice se středem v bodě S a poloměrem $r = \sqrt{-\kappa}$ je v uvažované kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa < 0)$ samodružná. Její jednotlivé body přitom samodružné nejsou, každý se zobrazí na bod souměrně sdružený podle středu S.

Věta 62: Kruhovou inverzi se středem $S \in \boldsymbol{E}_2$ a záporným koeficientem κ ($\kappa < 0$) lze složit z kruhové inverze se stejným středem S a kladným koeficientem $|\kappa|$ a středové symetrie podle středu S.

***Důkaz*:** Tvrzení věty je zřejmé a plyne přímo z definice kruhové inverze.

Kruhová inverze $\mathcal{K}(S, |\kappa|)$ zobrazí bod $X \in \boldsymbol{E_2}$, $X \neq S$, na bod X' tak, že polopřímky SX' a SX jsou totožné a platí $|SX'| \cdot |SX| = |\kappa|$.

Středová symetrie podle středu S bod X' zobrazí na bod X'' tak, že $|SX''| = |SX'|$, přitom bod X'' leží na polopřímce opačné k polopřímce SX' resp. SX.

Protože také platí $|SX''| \cdot |SX| = |\kappa|$, je bod X'' obrazem bodu X v kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa < 0)$.

Nebude-li řečeno jinak, omezíme se v dalším textu (na základě věty 62) pouze na kruhové inverze s kladným koeficientem κ ($\kappa > 0$).

Z definice 25 plyne, že kruhová inverze je jednoznačně určena svým středem S a koeficientem κ. Lze ji proto zadat přímo kružnicí se středem S a poloměrem $r = \sqrt{\kappa}$, tj. kružnicí jejích samodružných bodů.

Jak již bylo řečeno, kruhová inverze je také jednoznačně určena svým středem S a dvojicí odpovídajících si bodů A, B ($A \neq S$, $B \neq S$). Vzhledem k involutornosti kruhové inverze přitom není třeba rozlišit, který z nich je vzorem a který je obrazem.

Ukažme si, jak v tomto případě najdeme kružnici jejích samodružných bodů (viz [19], str. 22).

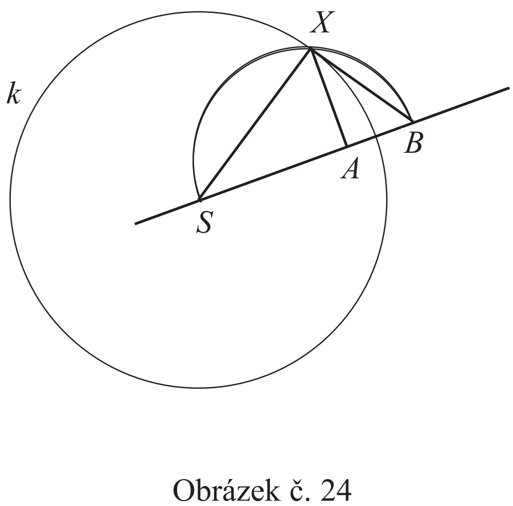
Nechť je kruhová inverze s kladným koeficientem κ dána středem S a dvojicí odpovídajících si bodů A, B (viz obr. č. 24). Polopřímky SA, SB jsou tedy totožné a platí $|SA| \cdot |SB| = \kappa$.

Kdyby bylo $A = B$, je hledanou kružnicí kružnice se středem v bodě S, která prochází bodem A.

Je-li $A \neq B$, můžeme předpokládat, že $|SB| > |SA|$.

Nad úsečkou SB sestrojíme Thaletovu polokružnici, její průsečík s kolmicí k přímce SA vedenou bodem A označme X. Bod X je potom samodružným bodem uvažované kruhové inverze, neboť podle Eukleidovy věty o odvěsně pro trojúhelník SBX je $|SX|^2 = |SA| \cdot |SB| = \kappa$, odkud získáme rovnost $|SX| = \sqrt{\kappa}$.

Hledanou kružnicí samodružných bodů je tedy kružnice k se středem v bodě S procházející bodem X (viz obr. č. 24).



Obrázek č. 24

Nyní se budeme věnovat konstrukci obrazu bodu v zadané kruhové inverzi.

Je-li kruhová inverze $\mathcal{K}(S, \kappa > 0)$ dána kružnicí $k\left(S, r = \sqrt{\kappa}\right)$ jejích samodružných bodů, sestrojíme obraz X' libovolného bodu $X \neq S$ následujícím způsobem (viz obr. č. 25).

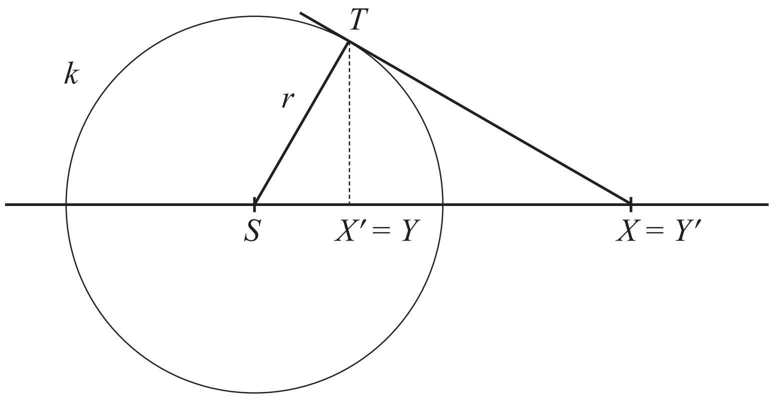
Je-li bod X bodem vnější oblasti kružnice k, vedeme jím tečnu ke kružnici k a její bod dotyku T kolmo promítneme na přímku SX. Pata kolmice je hledaný bod X'.

Z pravoúhlého trojúhelníku STX (s pravým úhlem při vrcholu T) totiž podle Eukleidovy věty o odvěsně plyne $|ST|^2 = |SX| \cdot |SX'|$. Protože $|ST|^2 = r^2 = \kappa$, je $|SX| \cdot |SX'| = \kappa$.

Bod X' je tedy skutečně obrazem bodu X v zadané kruhové inverzi.

Vzhledem k involutornosti kruhové inverze je naopak obrazem bodu X' ve stejné kruhové inverzi právě bod X.

Je-li tedy bod Y bodem vnitřní oblasti kružnice k, vedeme jím kolmici k přímce SY, v jejím průsečíku T s kružnicí k sestrojíme tečnu ke kružnici k a průsečík této tečny s přímkou SY je obraz Y' bodu Y.



Obrázek č. 25

Ukažme si ještě jeden postup konstrukce obrazu bodu v zadané kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa > 0)$ (viz obr. č. 26).

Zvolme bod $X \neq S$ a označme P, Q průsečíky kružnice k s kolmicí k přímce SX vedenou bodem S. Sestrojme nyní přímku PX, její průsečík s kružnicí k označme X_0. Obraz X' bodu X pak získáme jako průsečík přímek SX a QX_0.

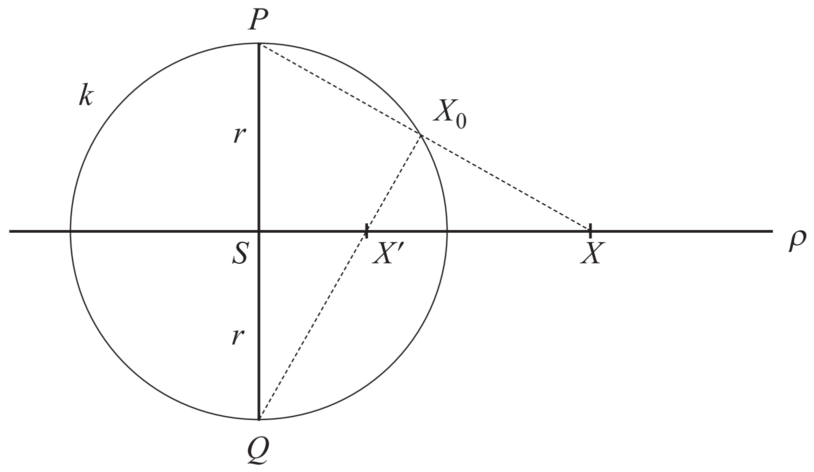
Z obr. č. 26 vidíme, že trojúhelníky XSP a QSX' jsou podobné, neboť jsou oba pravoúhlé s pravým úhlem při vrcholu S a platí $|\angle SXP| = 90° - |\angle XPS| = |\angle SQX'|$.

Z podobnosti těchto trojúhelníků plyne rovnost $|SX| : |SP| = |SQ| : |SX'|$, neboli $|SX| \cdot |SX'| = |SQ| \cdot |SP| = r^2 = \kappa$. Vidíme tak, že bod X' je skutečně obrazem bodu X v kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa)$.

Představme si nyní na obr. č. 26 kružnici k jako průmět sféry eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}_3$ se středem S a poloměrem $r = \sqrt{\kappa}$ do roviny PQX. Body P, Q a X_0 jsou tedy body této sféry. Zvolený bod X pak leží v rovině ρ, která prochází středem S a je kolmá k přímce PQ.

Zobrazení, které každému bodu X_0 sféry ($X_0 \neq P$) přiřadí průsečík X přímky PX_0 s rovinou ρ, se nazývá stereografická projekce sféry z bodu P do roviny ρ. Bod X' je naopak stereografickým průmětem bodu X_0 z bodu Q do roviny ρ.

Tím jsme ukázali souvislost mezi kruhovou inverzí v rovině a stereografickou projekcí sféry do roviny. Každou kruhovou inverzi s kladným koeficientem můžeme získat složením zobrazení inverzního ke stereografické projekci z bodu P a stereografické projekce z bodu Q diametrálně protilehlého k bodu P.



Obrázek č. 26

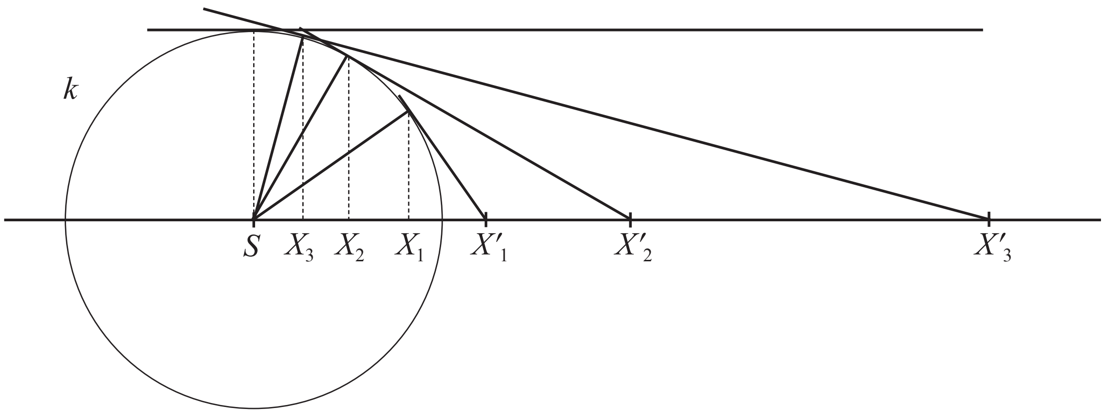
Vraťme se nyní k obr. č. 25, který ilustruje postup při konstrukci obrazu bodu v kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa > 0)$ zadané kružnicí k jejích samodružných bodů. Obraz bodu S přitom není definován.

Je-li bod $X \neq S$ bodem vnitřní oblasti kružnice k, vedeme jím kolmici k přímce SX, v jejím průsečíku s kružnicí k sestrojíme tečnu ke kružnici k a průsečík této tečny s přímkou SX je obraz X' bodu X.

Uvažujme nyní limitní proces, při kterém se bod X blíží ke středu S (viz obr. č. 27). Vidíme, že v tomto případě roste vzdálenost jeho obrazu X' od bodu S nade všechny meze.

Naším cílem je doplnit definici kruhové inverze tak, aby také bod S měl svůj obraz. To nás vede k zavedení tzv. Möbiovy roviny, která vznikne přidáním dalšího jednoho prvku k eukleidovské rovině $\boldsymbol{E}_2$. Tento prvek budeme značit ∞ a nazývat ho nevlastním bodem.

Každou kruhovou inverzi pak dodefinujeme tak, že obrazem středu inverze je nevlastní bod ∞ a obrazem nevlastního bodu ∞ je střed inverze.



Obrázek č. 27

Definice 26: Möbiovou rovinou rozumíme množinu $\boldsymbol{E}_2^* = \boldsymbol{E}_2 \cup \{\infty\}$.
Bod ∞ nazýváme nevlastním bodem Möbiovy roviny, body roviny $\boldsymbol{E}_2$ nazýváme vlastními body Möbiovy roviny.
Přímkou v Möbiově rovině rozumíme množinu $p^* = p \cup \{\infty\}$, kde p je přímka v rovině $\boldsymbol{E}_2$.
Kružnicí v Möbiově rovině rozumíme každou kružnici roviny $\boldsymbol{E}_2$.

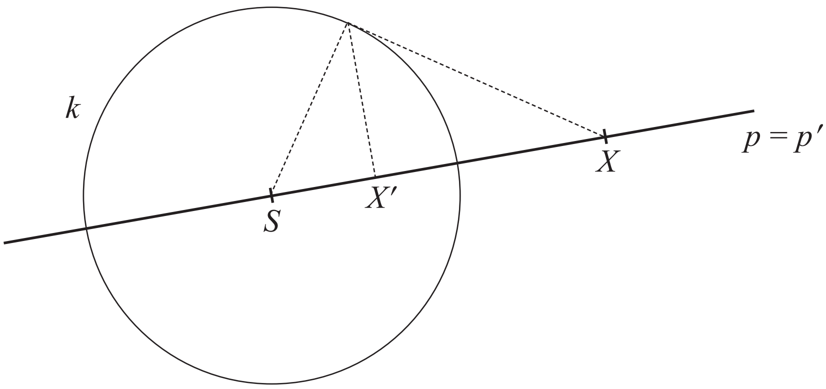
Definice 27: Kruhovou inverzí Möbiovy roviny $\boldsymbol{E}_2^*$ se středem $S \in \boldsymbol{E}_2$ a koeficientem $\kappa \in \boldsymbol{R}$, $\kappa \neq 0$, rozumíme zobrazení $f : \boldsymbol{E}_2^* \to \boldsymbol{E}_2^*$, jehož parcializací (zúžením) na $\boldsymbol{E}_2$ je kruhová inverze $\mathcal{K}(S, \kappa)$ roviny $\boldsymbol{E}_2$, a pro které $f(S) = \infty$ a $f(\infty) = S$.

Definice 28: Zobecněnou kružnicí v Möbiově rovině $\boldsymbol{E}_2^*$ rozumíme libovolnou přímku nebo kružnici Möbiovy roviny.

Věta 63: Kruhová inverze Möbiovy roviny $\boldsymbol{E}_2^*$ se středem $S \in \boldsymbol{E}_2$ a koeficientem $\kappa \in \boldsymbol{R}$, $\kappa \neq 0$, zobrazuje zobecněnou kružnici na zobecněnou kružnici, přičemž:
1. Obrazem přímky procházející bodem S je tatáž přímka.
2. Obrazem přímky neprocházející bodem S je kružnice procházející bodem S.
3. Obrazem kružnice procházející bodem S je přímka neprocházející bodem S.
4. Obrazem kružnice neprocházející bodem S je kružnice neprocházející bodem S.

Důkaz: Nechť k je kružnice samodružných bodů kruhové inverze $\mathcal{K}(S, \kappa)$.
Uvažujme opět pouze $\kappa > 0$. Platnost věty i pro $\kappa < 0$ je pak zřejmá z věty 62.

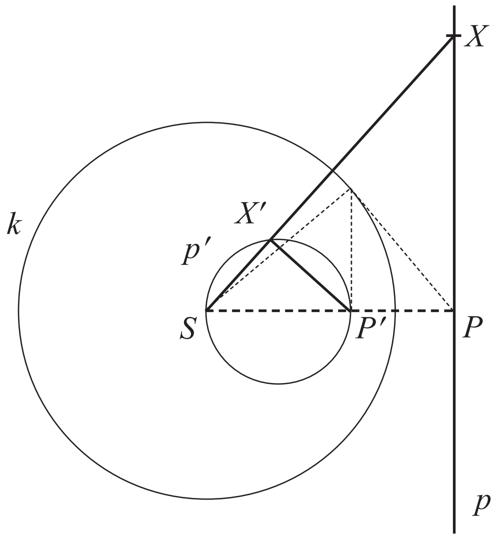
ad 1) Nechť p je přímka procházející bodem S.
Z definice 25 plyne, že pro libovolný bod $X \in \boldsymbol{E}_2$, $X \neq S$, jsou body S, X, X' kolineární. Každý vlastní bod X přímky p, $X \neq S$, se proto zobrazí opět na přímku p.
Samotný bod S se přitom podle definice 27 zobrazí do nevlastního bodu ∞, který ale považujeme za bod ležící na všech přímkách Möbiovy roviny.
Také bod S se proto zobrazí na přímku p.
Naopak, nevlastní bod ∞ ležící na přímce p se zobrazí do bodu S přímky p.
Přímka p procházející bodem S se proto zobrazí sama na sebe (viz obr. č. 28).



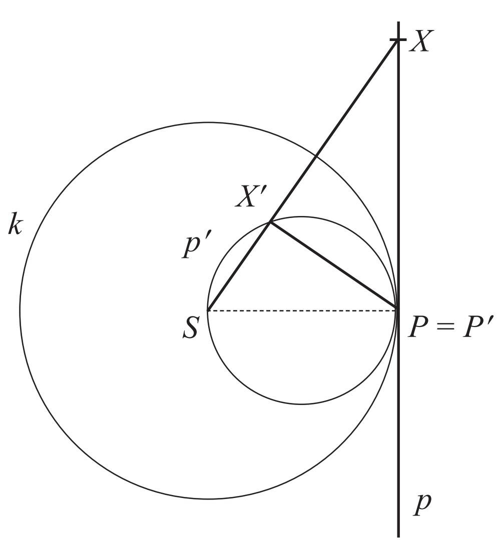
Obrázek č. 28

ad 2) Nechť p je přímka neprocházející bodem S.
Předpokládejme, že přímka p je vnější přímkou kružnice k (viz obr. č. 29).
Označme P patu kolmice vedené bodem S k přímce p a P' její obraz v uvažované kruhové inverzi. Platí tedy $|SP| \cdot |SP'| = \kappa$.
Zvolme na přímce p vlastní bod X, $X \neq P$, a označme X' ten průsečík přímky SX s Thaletovou kružnicí p' sestrojenou nad průměrem SP', který je různý od bodu S.
Nyní ukážeme, že bod X' je obrazem bodu X v kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa)$.
Z podobnosti trojúhelníků SPX a $SX'P'$ plyne $|SP| : |SX| = |SX'| : |SP'|$, neboli $|SP| \cdot |SP'| = |SX'| \cdot |SX|$. Protože $|SP| \cdot |SP'| = \kappa$, je také $|SX'| \cdot |SX| = \kappa$.
Každý vlastní bod přímky p se tak zobrazí na kružnici p'.
Také nevlastní bod ∞ přímky p se zobrazí na kružnici p', neboť se zobrazí do jejího bodu S.
Je-li přímka p tečnou resp. sečnou kružnice k, dokáže se tvrzení věty stejným způsobem. Na přímce p pak leží v prvním případě jeden, ve druhém případě dva samodružné body (viz obr. č. 30 a 31).

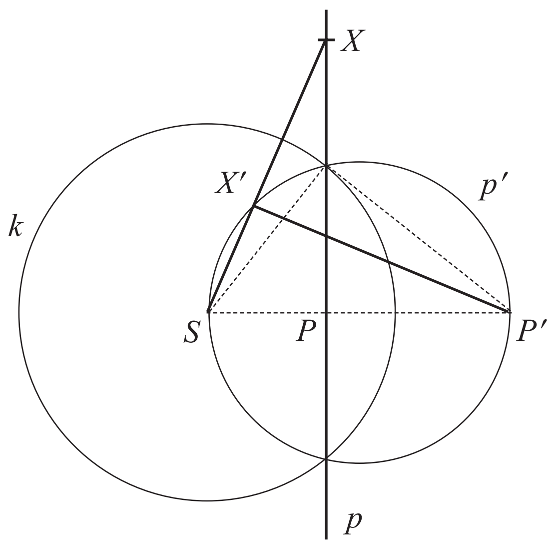
ad 3) Důkaz tohoto tvrzení plyne vzhledem k involutornosti kruhové inverze z důkazu bodu 2). Zobrazí-li se přímka neprocházející bodem S na kružnici procházející bodem S, zobrazí se naopak kružnice procházející bodem S na přímku neprocházející bodem S. Různé vzájemné polohy zobrazované kružnice a kružnice k jsou přitom uvedeny na obr. č. 29, 30 a 31.



Obrázek č. 29



Obrázek č. 30



Obrázek č. 31

ad 4) Nechť l je kružnice neprocházející bodem S.

Předpokládejme, že kružnice l leží uvnitř kružnice k (viz obr. č. 32).

Označme P, Q krajní body toho průměru kružnice l, pro který přímka PQ prochází bodem S. Obrazy těchto bodů v kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa)$ označme P', Q'.

Platí tedy $|SP| \cdot |SP'| = |SQ| \cdot |SQ'| = \kappa$.

Sestrojme nad průměrem $P'Q'$ Thaletovu kružnici l'.

Ukážeme, že kružnice l' je obrazem kružnice l v uvažované kruhové inverzi.

Kružnice l a l' jsou zřejmě stejnolehlé ve stejnolehlosti se středem v bodě S, neboť $|SP'| : |SQ| = |SQ'| : |SP|$.

V této stejnolehlosti se bod P zobrazí na bod Q' a bod Q se zobrazí na bod P'.

Každá přímka procházející bodem S proto buď obě kružnice l a l' protíná, nebo je jejich společnou tečnou, nebo nemá ani s jednou z nich žádný společný bod.

Zvolme na kružnici l libovolný bod X a označme Y další průsečík přímky SX s kružnicí l, popřípadě položme $Y = X$, je-li přímka SX tečnou kružnice l.

Dále označme X', Y' průsečíky přímky SX s kružnicí l', a to tak, aby bodu X ve stejnolehlosti kružnic l a l' odpovídal bod Y' a bodu Y odpovídal bod X'.

Z definice mocnosti bodu S ke kružnici l plyne $|SX| \cdot |SY| = |SP| \cdot |SQ|$.

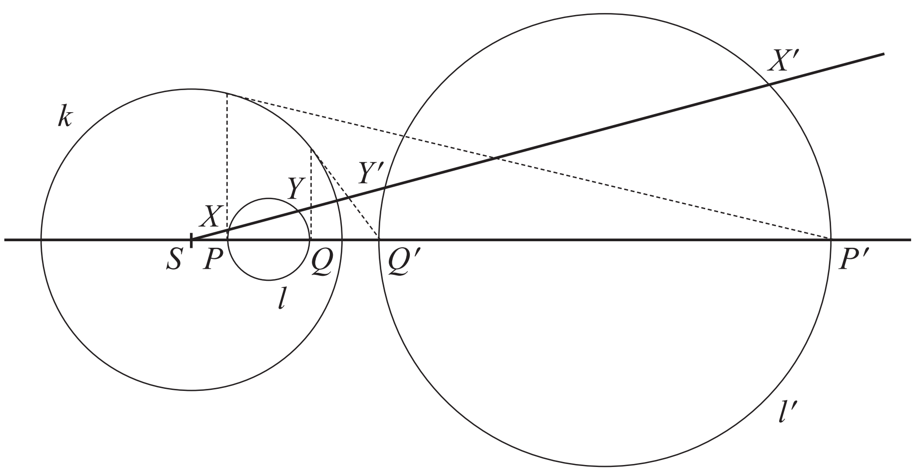
Ze stejnolehlosti kružnic l a l' zase plyne $|SX'| : |SY| = |SP'| : |SQ|$.

Vynásobením obou rovnic získáme rovnost $|SX| \cdot |SX'| = |SP| \cdot |SP'| = \kappa$.

Bod $X' \in l'$ je tedy obrazem bodu $X \in l$ v kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa)$.

Tím jsme dokázali, že obrazem kružnice l v uvažované kruhové inverzi je kružnice l'. Vzhledem k involutornosti kruhové inverze je naopak obrazem kružnice l' ve stejné inverzi kružnice l.

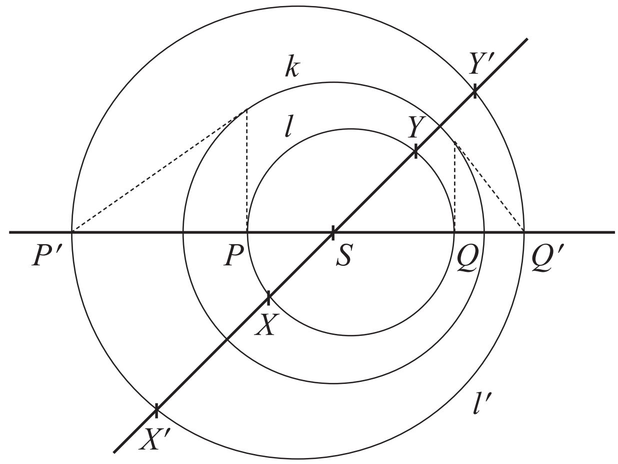
Kružnice neprocházející bodem S se proto v kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa)$ zobrazí opět na kružnici, která také bodem S neprochází, neboť na žádné kružnici neleží vzor bodu S, nevlastní bod ∞.



Obrázek č. 32

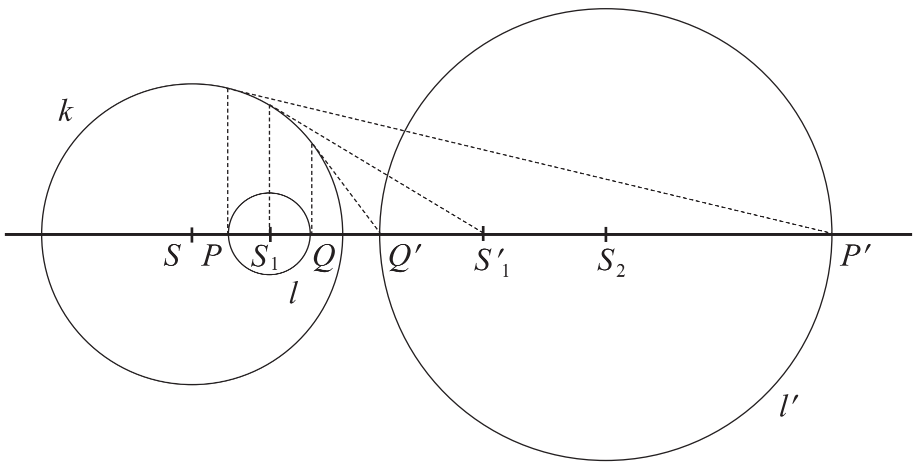
Na obr. č. 32 byl bod S bodem vnější oblasti kružnice l. Pokud bod S leží ve vnitřní oblasti kružnice l (viz obr. č. 33), protne každá přímka procházející bodem S obě kružnice l a l' vždy ve dvou bodech. Postup při důkazu pak zůstane stejný.

Také v případě ostatních vzájemných poloh zobrazované kružnice a kružnice k se tvrzení věty dokáže stejným způsobem.



Obrázek č. 33

Ukázali jsme, že v kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa)$ se kružnice l neprocházející bodem S zobrazí na kružnici l'. Přitom by se mohlo zdát, že se střed S_1 kružnice l zobrazí na střed S_2 kružnice l'. Snadno se ale dokáže, že tomu tak není (viz obr. č. 34).



Obrázek č. 34

Vzdálenost $|SS_1|$ je zřejmě aritmetickým průměrem vzdáleností $|SP|$, $|SQ|$, tj. platí

$$|SS_1| = \frac{|SP| + |SQ|}{2}.$$

Z definice kruhové inverze dále platí $|SP| \cdot |SP'| = |SQ| \cdot |SQ'| = \kappa$.

Pro obraz S'_1 středu S_1 kružnice l v kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa)$ potom platí

$$|SS'_1| = \frac{\kappa}{|SS_1|} = \frac{2\kappa}{|SP| + |SQ|} = \frac{2\kappa}{\dfrac{\kappa}{|SP'|} + \dfrac{\kappa}{|SQ'|}} = \frac{2\kappa}{\dfrac{\kappa\,(|SP'| + |SQ'|)}{|SP'|\,.\,|SQ'|}} = \frac{2\,|SP'|\,.\,|SQ'|}{|SP'| + |SQ'|}\ .$$

Vidíme, že vzdálenost $|SS'_1|$ je harmonickým průměrem vzdáleností $|SP'|$, $|SQ'|$.

Naproti tomu vzdálenost $|SS_2|$ je jejich aritmetickým průměrem.

Pro $|SP'| \neq |SQ'|$ je tedy $|SS'_1| \neq |SS_2|$, odkud $S'_1 \neq S_2$.

Střed S_1 kružnice l se proto nezobrazí na střed S_2 kružnice l' (opět viz obr. č. 34).

Na začátku této kapitoly jsme ukázali obdobný přístup k definici stejnolehlosti a inverze. Z věty 29 víme, že všechny stejnolehlosti s daným středem tvoří grupu vzhledem ke skládání. Pokud k těmto stejnolehlostem přidáme také všechny inverze se stejným středem, bude takto vzniklá množina opět grupou. Přitom samotné inverze s daným středem grupu netvoří.

Věta 64: Nechť $\boldsymbol{E}$ je eukleidovský prostor.
Množina tvořená všemi stejnolehlostmi a všemi inverzemi prostoru $\boldsymbol{E}$ s daným středem $S \in \boldsymbol{E}$ tvoří grupu vzhledem ke skládání.

***Důkaz*:** Z důkazu věty 29 víme, že složením dvou stejnolehlostí se stejným středem je opět stejnolehlost s daným středem.

Zbývá prozkoumat skládání dvou inverzí s daným středem a skládání stejnolehlosti a inverze se stejným středem.

Uvažujme dvě inverze se stejným středem $S \in \boldsymbol{E}$;
inverzi f s koeficientem $\kappa \neq 0$ a inverzi g s koeficientem $\tau \neq 0$.
Zvolme bod $X \in \boldsymbol{E}$, $X \neq S$, a označme $f(X) = X'$, $g(X') = X''$. Platí

$$X' = S + \frac{\kappa}{|SX|^2}(X - S) \text{ a } X'' = S + \frac{\tau}{|SX'|^2}(X' - S).$$

Po dosazení získáme

$$X'' = S + \frac{\tau}{|SX'|^2}(X' - S) = S + \frac{\tau}{\left(\dfrac{\kappa}{|SX|^2}|SX|\right)^2} \cdot \frac{\kappa}{|SX|^2}(X - S) = S + \frac{\tau}{\kappa}(X - S).$$

Vidíme tedy, že složené zobrazení $g \circ f$, zobrazující bod X na bod X'', je stejnolehlost se středem S a koeficientem τ/κ.

Nechť f je opět inverze se středem $S \in \boldsymbol{E}$ a koeficientem $\kappa \neq 0$, h je stejnolehlost se stejným středem S a koeficientem $\lambda \neq 0$.

Zvolme bod $X \in \boldsymbol{E}$, $X \neq S$, a označme nyní $f(X) = X'$, $h(X') = X''$. Platí

$$X' = S + \frac{\kappa}{|SX|^2}(X - S) \text{ a } X'' = S + \lambda(X' - S).$$

Po dosazení získáme

$$X'' = S + \lambda(X' - S) = S + \frac{\lambda\kappa}{|SX|^2}(X - S).$$

Vidíme tedy, že složené zobrazení $h \circ f$ zobrazující bod X na bod X'' je inverze se středem S a koeficientem $\lambda\kappa$.

Sami ověřte, že skládání stejnolehlosti a inverze se stejným středem není komutativní a záleží tedy na pořadí, v jakém obě zobrazení skládáme. Kdybychom ve výše uvedeném případě vytvořili zobrazení $f \circ h$, dostali bychom inverzi se středem S, ale s koeficientem κ/λ.

Zatím jsme ukázali, že množina tvořená všemi stejnolehlostmi a všemi inverzemi s daným středem je uzavřená vzhledem k operaci skládání.

Také pro skládání těchto zobrazení platí asociativní zákon.

Neutrálním prvkem vzhledem ke skládání je identita, neboli stejnolehlost se středem S a koeficientem $\lambda = 1$.

Inverzním prvkem ke stejnolehlosti se středem S a koeficientem λ je stejnolehlost se středem S a koeficientem $1/\lambda$. Inverzním prvkem k inverzi se středem S a koeficientem κ je vzhledem k involutornosti opět inverze se středem S a koeficientem κ.

Tím je důkaz proveden.

Vraťme se na závěr této kapitoly ještě ke kruhové inverzi. Z věty 63 je zřejmé, že kruhová inverze není afinním zobrazením, neboť se při ní mohou kolineární body zobrazit na body nekolineární. Kruhová inverze tedy obecně nezachovává kolineárnost bodů.

V poslední větě dokážeme, že kruhová inverze zachovává velikost úhlu mezi dvěma křivkami, tj. je konformní. Přitom úhlem dvou protínajících se křivek rozumíme úhel mezi tečnami k těmto křivkám v jejich společném bodě.

Věta 65: Kruhová inverze je konformní zobrazení.

***Důkaz*:** Nechť je dána kruhová inverze $\mathcal{K}(S, \kappa)$.

Uvažujme dvě různé přímky p, q protínající se ve vlastním bodě R, $R \neq S$.

Dále předpokládejme, že žádná z přímek p, q neprochází bodem S (viz obr. č. 35), v opačném případě se důkaz ještě zjednoduší.

Podle věty 63 se tedy každá z přímek p, q zobrazí na kružnici procházející bodem S.

Obrazy přímek p, q v kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa)$ označme p', q'.

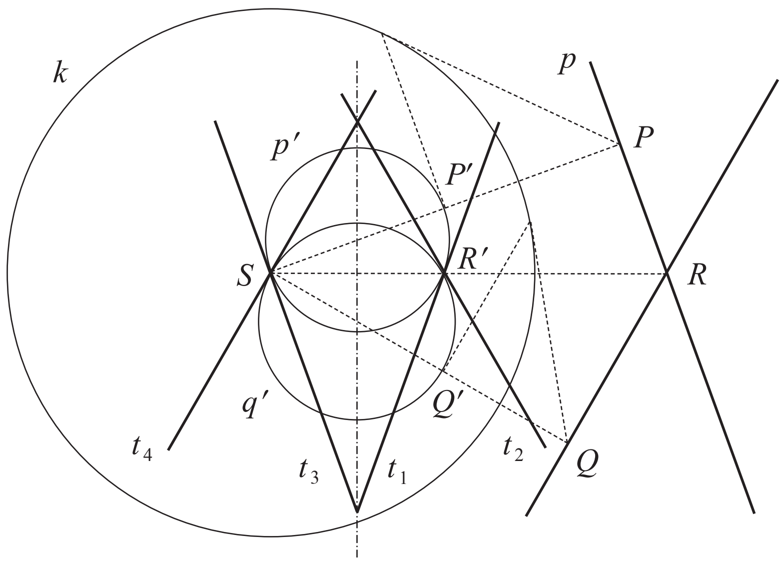
Obě kružnice p', q' se kromě bodu S protínají ještě v bodě R', který je obrazem bodu R v kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa)$.

Úhel, který kružnice p', q' svírají v bodě R', určíme jako úhel jejich tečen t_1, t_2 v tomto bodě. Přitom úhel tečen t_1, t_2 kružnic p', q' v bodě R' je v důsledku symetrie podle spojnice středů obou kružnic roven úhlu tečen t_3, t_4 kružnic p', q' v bodě S.

Tento úhel je potom roven úhlu přímek p, q, neboť tečny t_3, t_4 jsou s přímkami p, q rovnoběžné. Tečny t_1, t_2 tedy svírají stejný úhel jako přímky p, q.

Dokázali jsme tak, že kruhová inverze zachovává úhel mezi dvěma přímkami.

Tím je důkaz proveden, neboť v případě obecných křivek uvažujeme vždy úhel mezi tečnami k těmto křivkám v jejich společném bodě a tento úhel se podle výše uvedeného zachovává.



Obrázek č. 35

3. Geometrická zobrazení – sbírka příkladů

3.1 Dělicí poměr

1. [DT] Na přímce $\boldsymbol{A}_1$ jsou dány tři po dvou různé body A, B, C. Nechť platí $(A;\,B,\,C) = d$. Určete dělicí poměry $(A;\,C,\,B)$, $(B;\,A,\,C)$ a $(C;\,B,\,A)$.

Řešení: $(A;C,B)=\dfrac{1}{d}$, $(B;A,C)=\dfrac{d}{d-1}$ a $(C;B,A)=1-d$

2. [S1] Na přímce $\boldsymbol{A}_1$ jsou dány čtyři po dvou různé body A, B, C, D. Dokažte, že platí $(D;\,A,\,B)\cdot(D;\,B,\,C) = (D;\,A,\,C)$.

Řešení: Platí $\dfrac{d-a}{d-b}\cdot\dfrac{d-b}{d-c}=\dfrac{d-a}{d-c}$

3.2 Analytické vyjádření afinního zobrazení

1. [S2] V afinní rovině $\boldsymbol{A}_2$ je dán rovnoběžník $ABCD$. Rozhodněte, zda existuje afinní zobrazení dané roviny do sebe, při kterém je bod A samodružný, bod B se zobrazí na bod C a bod C na bod D. Jestliže ano, který bod je obrazem středu S rovnoběžníku $ABCD$? Napište analytické vyjádření takového afinního zobrazení v některé LSS a ověřte pomocí něj, který bod je obrazem bodu S.

Řešení: Existuje právě jedno afinní zobrazení daných vlastností,
obrazem bodu S je střed úsečky AD,
v LSS určené repérem $\langle A,\, B-A,\, D-A\rangle$, má uvedené afinní zobrazení analytické vyjádření $x' = x - y$,
$y' = x$,
ve zvolené LSS je $S = [1/2,\, 1/2]$, $S' = [0,\, 1/2]$

2. [S2] V afinní rovině $\boldsymbol{A}_2$ je dán trojúhelník ABC. Určete, kolik existuje afinních zobrazení dané roviny do sebe, při kterých se bod A zobrazí na bod B, bod B na bod C a bod C na bod A. Který bod je obrazem těžiště T trojúhelníku ABC při takovém zobrazení? Napište analytické vyjádření takového afinního zobrazení v některé LSS a ověřte pomocí něj, který bod je obrazem bodu T.

Řešení: Existuje právě jedno afinní zobrazení daných vlastností,

obrazem bodu T je opět bod T,

v LSS určené repérem $+A, B - A, C - A$, má uvedené afinní zobrazení analytické vyjádření $x' = -x - y + 1$,

$y' = x$,

ve zvolené LSS je $T = [1/3, 1/3]$, $T' = [1/3, 1/3] = T$

3. [DT] V afinní rovině $\boldsymbol{A}_2$ je dán trojúhelník ABC, kde $A = [1, 0]$, $B = [3, 1]$, $C = [2, 5]$. Určete analytické vyjádření afinního zobrazení f roviny $\boldsymbol{A}_2$ do sebe, pro které $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, kde $A' = [3, -2]$, $B' = [4, 0]$, $C' = [-1, -1]$.

Řešení: $x' = x - y + 2$

$y' = x - 3$

4. [DT] V $\boldsymbol{E}_2$ je dán čtverec $ABCD$, přičemž $A = [-3, -5]$, $B = [2, -8]$, $C = [5, c]$, kde $c \in \boldsymbol{R}$. Určete analytické vyjádření symetrie podle středu S čtverce $ABCD$. Pomocí něj potom ověřte, že v této symetrii je obrazem bodu D bod B.

Řešení: $C = [5, -3]$, $S = [1, -4]$

$x' = -x + 2$

$y' = -y - 8$

$D = [0, 0]$, $D' = [2, -8] = B$

5. [DT] Určete analytické vyjádření symetrie prostoru $\boldsymbol{E}_2$ podle tečny t ke kružnici k: $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$ v jejím bodě $T = [0, y_0]$, kde $y_0 < 0$. Dále určete obraz středu S kružnice k v této symetrii.

Řešení: $T = [0, -7]$, t: $x + y + 7 = 0$

$x' = -y - 7$

$y' = -x - 7$

$S = [4, -3]$, $S' = [-4, -11]$

6. [DT] V afinním prostoru $\boldsymbol{A}_3$ jsou dány body $A = [1, 1, 0]$, $B = [1, 0, 1]$, $C = [0, 1, 1]$, $D = [1, 1, 1]$. Určete analytické vyjádření afinního zobrazení f prostoru $\boldsymbol{A}_3$ do sebe, pro které $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$, kde $A' = [1, 4, 0]$, $B' = [3, 0, -1]$, $C' = [0, 2, -3]$, $D' = [2, 3, -2]$.

Řešení: $x' = 2x - y + z$
$y' = x + 3y - z$
$z' = x - y - 2z$

7. [DT] Najděte analytické vyjádření symetrie prostoru $\boldsymbol{E}_3$ podle průsečnice p rovin $\rho: 2x - 5y + 4z - 10 = 0$ a $\sigma: x - y - z - 2 = 0$.

Řešení: $p = \{[0, -2, 0], (3, 2, 1)\}$
$x' = 1/7\,(2x + 6y + 3z + 12)$
$y' = 1/7\,(6x - 3y + 2z - 20)$
$z' = 1/7\,(3x + 2y - 6z + 4)$

8. [DT] Najděte analytické vyjádření kolmé projekce prostoru $\boldsymbol{E}_3$ do roviny ρ určené přímkami $p = \{[4, 3, 0], (1, 2, -2)\}$ a $q = \{[3, 3, 1], (0, -2, 1)\}$.

Řešení: $\rho: 2x + y + 2z - 11 = 0$
$x' = 1/9\,(5x - 2y - 4z + 22)$
$y' = 1/9\,(-2x + 8y - 2z + 11)$
$z' = 1/9\,(-4x - 2y + 5z + 22)$

9. [VK] Pravidelný čtyřstěn v $\boldsymbol{E}_3$ má vrcholy $ABCD$, přičemž $A = [0, 0, 0]$, $B = [2, 0, 0]$, $C = [1, c, 0]$, $D = [1, d_2, d_3]$, kde $c > 0$, $d_2 > 0$, $d_3 > 0$.
Určete analytické vyjádření symetrie podle roviny $\rho = \{B, C, D\}$.

Řešení: $C = \left[1, \sqrt{3}, 0\right]$, $D = \left[1, \sqrt{3}/3, 2\sqrt{6}/3\right]$
$\rho:\ 3x\sqrt{2} + y\sqrt{6} + z\sqrt{3} - 6\sqrt{2} = 0$
$x' = 1/9\left(-3x - 4y\sqrt{3} - 2z\sqrt{6} + 24\right)$
$y' = 1/9\left(-4x\sqrt{3} + 5y - 2z\sqrt{2} + 8\sqrt{3}\right)$
$z' = 1/9\left(-2x\sqrt{6} - 2y\sqrt{2} + 7z + 4\sqrt{6}\right)$

10. [VK] Najděte analytické vyjádření symetrie prostoru $\boldsymbol{E}_4$ podle roviny $\rho = \{[2, 2, -2, -2], [2, -2, 2, -2], [4, -2, 2, -4]\}$.

Řešení: $x' = -u$
$y' = -z$
$z' = -y$
$u' = -x$

11. [VK] Zjistěte analytické vyjádření kolmé projekce prostoru $\boldsymbol{E}_4$ do roviny $\rho = \{[1, -1, -1, 1], (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)\}$.

Řešení: $x' = 1/2\ (x + z) + 1$
$y' = 1/2\ (y + u) - 1$
$z' = 1/2\ (x + z) - 1$
$u' = 1/2\ (y + u) + 1$

12. [VK] Určete analytické vyjádření kolmé projekce do podprostoru $\alpha : x + y - 2\,z - 2\,u = 0,\ x - 2\,y + z - 2\,u = 0$ prostoru $\boldsymbol{E}_4$.

Řešení: $\alpha = \{[0, 0, 0, 0], (1, 1, 1, 0), (2, 0, 0, 1)\}$
$x' = 1/11\ (9\,x + y + z + 4\,u)$
$y' = 1/11\ (x + 5\,y + 5\,z - 2\,u)$
$z' = 1/11\ (x + 5\,y + 5\,z - 2\,u)$
$u' = 1/11\ (4\,x - 2\,y - 2\,z + 3\,u)$

13. [VK] V $\boldsymbol{E}_4$ jsou dány body $A = [2, 1, 1, 2]$, $B = [3, 3, 2, 4]$, $C = [4, -1, 2, 1]$, $D = [-1, 3, 0, 2]$. Určete analytické vyjádření kolmé projekce do podprostoru $\alpha = \{A, B, C, D\}$.

Řešení: $x' = 1/4\ (3\,x - y + z + u)$
$y' = 1/4\ (-x + 3\,y + z + u)$
$z' = 1/4\ (x + y + 3\,z - u)$
$u' = 1/4\ (x + y - z + 3\,u)$

14. [VK] Určete analytické vyjádření symetrie prostoru $\boldsymbol{E}_4$ podle podprostoru $\alpha = \{[1, 1, 0, 1], [1, 0, 1, 1], [2, 1, 0, 2], [2, 0, 0, 2]\}$.

Řešení: $x' = u$
$y' = y$
$z' = z$
$u' = x$

15. [VK] Napište analytické vyjádření symetrie podle podprostoru $\boldsymbol{E'} = \{[1, 0, 2, 1], [1, 1, 0, 2], [2, 1, 1, 0], [0, 2, 1, 1]\}$ prostoru $\boldsymbol{E}_4$.
Určete obraz bodu $M = [0, 6, -3, 1]$.

Řešení: $\boldsymbol{E'}: x + y + z + u - 4 = 0$

$$x' = 1/2\,(x - y - z - u) + 2$$
$$y' = 1/2\,(-x + y - z - u) + 2$$
$$z' = 1/2\,(-x - y + z - u) + 2$$
$$u' = 1/2\,(-x - y - z + u) + 2$$

$M' = [0, 6, -3, 1] = M$

3.3 Samodružné body a směry afinního zobrazení

1. [DT] Afinní zobrazení roviny $\boldsymbol{A}_2$ do sebe má vzhledem ke zvolené LSS analytické vyjádření $x' = 2\,x - 4\,y + 3$, $y' = x - 3\,y + 5$. Určete jeho samodružné body a směry.

Řešení: SB neexistuje

SS: $\lambda_1 = 1$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(4\,t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = -2$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$

Poznámka: Zápisem $\lambda_1 = 1$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(4\,t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$ rozumíme skutečnost, že generátorem samodružného směru je každý nenulový vektor $\boldsymbol{u_1}$ ze zaměření roviny $\boldsymbol{A}_2$, jehož souřadnice náleží množině $\{(4\,t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$.
Vlastnímu vektoru $\boldsymbol{u_1}$ přitom přísluší vlastní číslo $\lambda_1 = 1$.

2. [DT] Napište analytické vyjádření všech afinních zobrazení roviny $\boldsymbol{A}_2$ do sebe, při kterých jsou body $[1, 0]$ a $[0, -1]$ samodružné.

Řešení: $x' = (1 - p)\,x + p\,y + p$, $p \in \boldsymbol{R}$
$y' = -q\,x + (1 + q)\,y + q$, $q \in \boldsymbol{R}$

3. [DT] V $\boldsymbol{E}_2$ je dán obdélník $ABCD$, kde $A = [-1, 3]$, $B = [5, 1]$, $C = [6, 4]$.
Určete samodružné body a směry symetrie podle úhlopříčky BD obdélníku $ABCD$.

Řešení: $D = [0, 6]$

SB: přímka $x + y - 6 = 0$ (úhlopříčka BD)

SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$

$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(t, -t), t \in \boldsymbol{R}\}$

4. [DT] V $\boldsymbol{E_2}$ jsou dány body A, B, C, kde $A = [1, 6]$, $B = [4, 0]$, $C = [-2, 3]$, $A' = [5, 0]$, $B' = [2, 4]$, $C' = [2, -1]$. Určete analytické vyjádření afinního zobrazení, které zobrazuje body A, B, C po řadě na body A', B', C'.
Dále vypočítejte samodružné body tohoto zobrazení.

Řešení: $x' = 1/3\,(x + 2y + 2)$

$y' = 1/3\,(2x - y + 4)$

SB: $X = [4, 3]$

5. [VK] V $\boldsymbol{E_2}$ jsou dány body A, B, C, kde $A = [3, 1]$, $B = [4, 2]$, $C = [2, 4]$, $A' = [2, 0]$, $B' = [0, -2]$, $C' = [-2, 0]$. Určete analytické vyjádření afinního zobrazení, které zobrazuje body A, B, C po řadě na body A', B', C'.
Dále vypočítejte samodružné body a samodružné směry tohoto zobrazení.

Řešení: $x' = 1/2\,(-x - 3y + 10)$

$y' = 1/2\,(-3x - y + 10)$

SB: $X(t) = [t, (10 - 3t)/3]$, $t \in \boldsymbol{R}$

SS: $\lambda_1 = -2$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$

$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(t, -t), t \in \boldsymbol{R}\}$

6. [VK] V $\boldsymbol{E_2}$ je dán rovnoběžník $ABCD$, kde $A = [2, 1]$, $B = [5, 2]$, $C = [1, 4]$.
Určete analytické vyjádření afinního zobrazení, které zobrazuje body A, B, C po řadě na body a) A, B, D, b) B, C, D, c) B, A, D.
Dále vypočítejte samodružné body a samodružné směry tohoto zobrazení.

Řešení: $D = [-2, 3]$

a) $x' = 1/10\,(13x - 9y + 3)$

$y' = 1/10\,(x + 7y + 1)$

SB: $X(t) = [3t - 1, t]$, $t \in \boldsymbol{R}$

SS: $\lambda = 1$, $\boldsymbol{u} \in \{(3t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$

b) $x' = 1/2\,(-x - 5\,y + 17)$
$y' = 1/2\,(x + y + 1)$
SB: $X = [3/2,\ 5/2]$
SS neexistuje

c) $x' = 1/5\,(-x - 12\,y + 39)$
$y' = 1/5\,(-2\,x + y + 13)$
SB: $X\,(t) = [t,\ (13 - 2\,t)/4],\ t \in \boldsymbol{R}$
SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{(3\,t,\ t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{(-2\,t,\ t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

7. [S2] Afinní zobrazení prostoru $\boldsymbol{A_3}$ do sebe má vzhledem ke zvolené LSS analytické vyjádření $x' = x - y + z + 1,\ y' = -x + y + z + 2,\ z' = -x - y + 3\,z + 3$. Určete jeho samodružné body a směry.

Řešení: SB: $X\,(t) = [t + 2,\ t + 1,\ t],\ t \in \boldsymbol{R}$
SS: $\lambda_1 = 1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{(t,\ t,\ t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 2,\ \boldsymbol{u_2} \in \{(t,\ s,\ t + s),\ t,\ s \in \boldsymbol{R}\}$

8. [S2] Afinní zobrazení prostoru do sebe je dáno rovnicemi $x' = x - y + 2\,z - 7$, $y' = y + z - 5,\ z' = x - 2\,y + z + 6$. Určete jeho samodružné body a směry.

Řešení: SB: $X = [0,\ 3,\ 5]$
SS neexistuje

9. [S2] Určete samodružné body a směry afinního zobrazení prostoru do sebe daného rovnicemi $x' = 3\,x - 2\,y + 6\,z - 2,\ y' = x + 3\,z - 1,\ z' = -x + y - 2\,z + 1$.

Řešení: SB: rovina $x - y + 3\,z - 1 = 0$
SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{(2\,t,\ t,\ -t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{(t,\ t + 3\,s,\ s),\ t,\ s \in \boldsymbol{R}\}$

10. [DT] Najděte analytické vyjádření kolmé projekce do přímky $p = \{[2,\ 2,\ 1],\ [3,\ -1,\ 2]\}$ v prostoru $\boldsymbol{E_3}$ a vypočítejte její samodružné body a směry.

Řešení: $x' = 1/11\ (x - 3\,y + z + 25)$
$y' = 1/11\ (-3\,x + 9\,y - 3\,z + 13)$
$z' = 1/11\ (x - 3\,y + z + 14)$
SB: přímka $\{[0, 8, -1], (1, -3, 1)\}$ (přímka p)
SS: $\lambda = 1$, $\boldsymbol{u} \in \{(t, -3\,t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$

11. [VK] Najděte analytické vyjádření 2-symetrie podle roviny $\rho = \{[2, 2, -2, -2], [2, -2, 2, -2], [4, -2, 2, -4]\}$ v prostoru $\boldsymbol{E}_4$ a vypočítejte její samodružné směry.

Poznámka: 2-symetrií podle roviny rozumíme zobrazení, které bodu X přiřadí bod $X' = \overline{X} + 2\,(\overline{X} - X)$, kde $\overline{X}$ je kolmý průmět bodu X do dané roviny (jedná se o jakési „prohloubené“ zrcadlení).

Řešení: $x' = -1/2\ (x + 3\,u)$
$y' = -1/2\ (y + 3\,z)$
$z' = -1/2\ (3\,y + z)$
$u' = -1/2\ (3\,x + u)$
SS: $\lambda_1 = -2$, $\boldsymbol{u}_1 \in \{(t, s, s, t), t, s \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u}_2 \in \{(t, s, -s, -t), t, s \in \boldsymbol{R}\}$

12. [VK] V $\boldsymbol{E}_4$ jsou dány body $A = [2, 1, 1, 2]$, $B = [3, 3, 2, 4]$, $C = [4, -1, 2, 1]$, $D = [-1, 3, 0, 2]$. Určete analytické vyjádření a vypočítejte samodružné body a směry symetrie podle podprostoru $\alpha = \{A, B, C, D\}$.

Řešení: $x' = 1/2\ (x - y + z + u)$
$y' = 1/2\ (-x + y + z + u)$
$z' = 1/2\ (x + y + z - u)$
$u' = 1/2\ (x + y - z + u)$
SB: $X(t, s, r) = [t, s, r, t + s - r]$, $t, s, r \in \boldsymbol{R}$
SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u}_1 \in \{(t, t, -t, -t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u}_2 \in \{(t, s, r, t + s - r), t, s, r \in \boldsymbol{R}\}$

13. [S2] V afinní rovině je dán trojúhelník BCD, afinní zobrazení f roviny trojúhelníku do sebe je dáno podmínkami $f(B) = C$, $f(C) = B$ a $f(D) = D$. Určete samodružné body a směry afinního zobrazení f.

Řešení: SB: $X(t) = B + 1/2\,(1-t)\,(C-B) + t\,(D-B),\ t \in \boldsymbol{R}$
přímka procházející body D a S_{BC}
SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{t\,(C-B),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{t/2\,(C-B) - t\,(D-B),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

Poznámka: V tomto případě zápisem $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{t\,(C-B),\ t \in \boldsymbol{R}\}$ rozumíme skutečnost, že generátorem samodružného směru je každý nenulový vektor $\boldsymbol{u_1}$ tvaru $t\,(C-B)$, kde $t \in \boldsymbol{R}$.
Vlastnímu vektoru $\boldsymbol{u_1}$ přitom přísluší vlastní číslo $\lambda_1 = -1$.

14. [DT] V $\boldsymbol{E_2}$ je dán rovnoběžník $ABCD$ se středem S. Určete samodružné body a směry afinního zobrazení f, pro které $f(A) = 1/2\,A + 1/2\,B$, $f(B) = 1/2\,A + 1/2\,B$, $f(S) = S$.

Řešení: SB: $X(t) = A + 1/2\,(1-t)\,(B-A) + t\,(S-A),\ t \in \boldsymbol{R}$
přímka procházející body S a S_{AB}
SS: $\lambda = 1,\ \boldsymbol{u} \in \{t/2\,(B-A) - t\,(S-A),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

15. [VK] V $\boldsymbol{E_2}$ jsou zvoleny 3 lineárně nezávislé body A, B, C. Určete samodružné body a směry afinního zobrazení f, pro které $f(A) = A - B + C$, $f(B) = B - A + C$, $f(C) = 1/2\,A + 1/2\,B$.

Řešení: SB: $X = A + 1/4\,(B-A) + 1/2\,(C-A)$
SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{t/2\,(B-A) + t\,(C-A),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 2,\ \boldsymbol{u_2} \in \{t\,(B-A),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

16. [VK] V $\boldsymbol{E_2}$ je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Vypočítejte samodružné body a směry afinního zobrazení f, pro které $f(A) = A$, $f(C) = 2/3\,A - 1/3\,C + 2/3\,E$, $f(E) = 2/3\,A + 2/3\,C - 1/3\,E$.

Řešení: SB: $X = A$
SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{t\,(C-A) - t\,(E-A),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1/3,\ \boldsymbol{u_2} \in \{t\,(C-A) + t\,(E-A),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

17. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ jsou zvoleny 4 lineárně nezávislé body A, B, C, D. Určete samodružné body a směry afinního zobrazení f, pro které $f(A) = B$, $f(B) = A$, $f(C) = D$, $f(D) = C$.

Řešení: SB: $X(t) = A + 1/2\,(1 - 2\,t)\,(B - A) + t\,(C - A) + t\,(D - A),\ t \in \boldsymbol{R}$
přímka procházející body S_{AB} a S_{CD}

SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{t\,(B - A) + s\,(C - A) - s\,(D - A),\ t, s \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{t\,(B - A) - t\,(C - A) - t\,(D - A),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

18. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ je dán čtyřstěn $ABCD$. Najděte samodružné body afinního zobrazení f, pro které $f(A) = 1/3\,A + 2/3\,B$, $f(B) = 2/3\,A + 1/3\,B$, $f(C) = D$, $f(D) = C$.

Řešení: SB: $X(t) = A + 1/2\,(1 - 2\,t)\,(B - A) + t\,(C - A) + t\,(D - A),\ t \in \boldsymbol{R}$
přímka procházející body S_{AB} a S_{CD}

19. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ jsou dány lineárně nezávislé body A, B, C, D a afinní zobrazení f, pro které $f(A) = 2\,A - B$, $f(B) = 2\,B - A$, $f(C) = 1/2\,C + 1/2\,D$, $f(D) = 1/2\,C + 1/2\,D$. Určete samodružné body a směry afinního zobrazení f.

Řešení: SB: $X(t) = A + 1/2\,(1 - 2\,t)\,(B - A) + t\,(C - A) + t\,(D - A),\ t \in \boldsymbol{R}$
přímka procházející body S_{AB} a S_{CD}

SS: $\lambda_1 = 1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{t\,(B - A) - t\,(C - A) - t\,(D - A),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 3,\ \boldsymbol{u_2} \in \{t\,(B - A),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

20. [VK] V $\boldsymbol{E_4}$ jsou dány lineárně nezávislé body A, B, C, D, E. Určete samodružné body a směry afinního zobrazení f, pro které $f(A) = B$, $f(B) = A$, $f(C) = D$, $f(D) = E$, $f(E) = C$.

Řešení: SB: $X(t) = A + 1/2\,(1 - 3\,t)\,(B - A) + t\,(C - A) + t\,(D - A) + t\,(E - A),\ t \in \boldsymbol{R}$
přímka procházející body S_{AB} a T_{CDE} (těžiště trojúhelníku CDE)

SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{t\,(B - A),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{3\,t\,(T_{CDE} - S_{AB}),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

21. [VK] V $\boldsymbol{E_4}$ jsou dány lineárně nezávislé body A, B, C, D, E. Určete samodružné body a směry afinního zobrazení f, pro které $f(A) = 2\,B - A$, $f(B) = 2\,A - B$, $f(C) = D$, $f(D) = E$, $f(E) = C$.

Řešení: SB: $X(t) = A + 1/2\,(1 - 3\,t)\,(B - A) + t\,(C - A) + t\,(D - A) + t\,(E - A),\ t \in \boldsymbol{R}$
přímka procházející body S_{AB} a T_{CDE}

SS: $\lambda_1 = -3,\ \boldsymbol{u_1} \in \{t\,(B - A),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{3\,t\,(T_{CDE} - S_{AB}),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

22. [VK] V $\boldsymbol{E_4}$ jsou dány lineárně nezávislé body A, B, C, D, E. Určete samodružné body a směry afinního zobrazení f, pro které $f(A) = 2\,B - A$, $f(B) = 2\,A - B$, $f(C) = 2\,D - E$, $f(D) = 2\,E - C$, $f(E) = 2\,C - D$.

Řešení: SB: $X(t) = A + 1/2\,(1 - 3\,t)\,(B - A) + t\,(C - A) + t\,(D - A) + t\,(E - A),\ t \in \boldsymbol{R}$
přímka procházející body S_{AB} a T_{CDE}

SS: $\lambda_1 = -3,\ \boldsymbol{u_1} \in \{t\,(B - A),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{3\,t\,(T_{CDE} - S_{AB}),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

3.4 Základní afinity

1. [S2] Napište analytické vyjádření osové afinity afinní roviny $\boldsymbol{A_2}$, která má osu x za přímku samodružných bodů (osu afinity) a zobrazuje bod [0, 1] na bod [3, 5].

Řešení: $x' = x + 3\,y$
$y' = 5\,y$

2. [VK] V $\boldsymbol{E_2}$ je dána přímka p: $2\,x + y - 3 = 0$ a body $B = [1, 5]$, $B' = [3, 1]$.
Určete analytické vyjádření základní afinity f, pro kterou $f(B) = B'$, a jejíž množinou všech samodružných bodů je přímka p. Dále vypočítejte samodružné směry afinity f.

Řešení: $x' = 1/2\,(4\,x + y - 3)$
$y' = -2\,x + 3$
SS: $\lambda = 1,\ \boldsymbol{u} \in \{(t, -2\,t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

3. [VK] V $\boldsymbol{E_2}$ je dána přímka p: $x + 2\,y + 3 = 0$ a body $B = [1, 5]$, $B' = [3, 6]$.
Určete analytické vyjádření základní afinity f, pro kterou $f(B) = B'$, a jejíž množinou všech samodružných bodů je přímka p. Dále vypočítejte samodružné směry afinity f.

Řešení: $x' = 1/7\,(8\,x + 2\,y + 3)$
$y' = 1/14\,(x + 16\,y + 3)$
SS: $\lambda_1 = 1$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(2\,t, -t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 9/7$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(2\,t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$

4. [VK] V $\boldsymbol{E_2}$ je dána přímka p: $2\,x - 3\,y + 2 = 0$ a body $B = [1, 5]$, $B' = [2, 2]$. Určete analytické vyjádření afinního zobrazení f, pro které $f(B) = B'$, a jehož množinou všech samodružných bodů je přímka p. Dále vypočítejte samodružné směry zobrazení f. Je toto zobrazení afinitou?

Řešení: $x' = 1/11\,(9\,x + 3\,y - 2)$
$y' = 1/11\,(6\,x + 2\,y + 6)$
SS: $\lambda = 1$, $\boldsymbol{u} \in \{(3\,t, 2\,t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$B' \in p$, f je projekce prostoru $\boldsymbol{E_2}$ na přímku p ve směru vektoru $B' - B$, nejedná se o afinitu

5. [DT] Napište analytické vyjádření základní afinity prostoru $\boldsymbol{E_3}$, která má rovinu $x + y - 2\,z + 1 = 0$ za množinu všech samodružných bodů a zobrazuje bod $B = [1, 0, -1]$ na bod $B' = [-1, 2, 1]$.

Řešení: $x' = 1/2\,(x - y + 2\,z - 1)$
$y' = 1/2\,(x + 3\,y - 2\,z + 1)$
$z' = 1/2\,(x + y + 1)$

6. [DT] V $\boldsymbol{E_3}$ je dána rovina $\rho = \{[1, 0, 6], (1, 3, 1), (0, -2, 5)\}$ a body $B = [1, 1, 0]$, $B' = [0, 2, 7]$. Určete analytické vyjádření základní afinity f, pro kterou $f(B) = B'$, a jejíž množinou všech samodružných bodů je rovina ρ.

Řešení: ρ: $17\,x - 5\,y - 2\,z - 5 = 0$
$x' = 1/7\,(-10\,x + 5\,y + 2\,z + 5)$
$y' = 1/7\,(17\,x + 2\,y - 2\,z - 5)$
$z' = 17\,x - 5\,y - z - 5$

7. [DT] V $\boldsymbol{E_4}$ je dán podprostor $\alpha = \{[0, 2, -1, 0], [1, -3, 0, 2], [-1, 1, 0, 0], [2, 2, 1, 2]\}$ a body $B = [0, 1, 2, 0]$, $B' = [1, 3, 0, -1]$.
Určete analytické vyjádření základní afinity f, pro kterou $f(B) = B'$, a jejíž množinou všech samodružných bodů je podprostor α.

Řešení: $\alpha: 3x - y + 2z - 5u + 4 = 0$

$x' = 1/7\,(10x - y + 2z - 5u + 4)$
$y' = 1/7\,(6x + 5y + 4z - 10u + 8)$
$z' = 1/7\,(-6x + 2y + 3z + 10u - 8)$
$u' = 1/7\,(-3x + y - 2z + 12u - 4)$

8. [S2] Rozložte afinitu f afinní roviny s rovnicemi $x' = y$, $y' = x + 1$ v osové afinity.

Řešení: Například f_1: $x' = x$
$y' = -x + y + 1$
f_2: $x' = x + y - 1$
$y' = -y + 2$
f_3: $x' = x$
$y' = x + y$

9. [S2] V afinní rovině je afinita f dána rovnicemi $x' = 2x - y + 1$, $y' = x + y + 3$. Rozložte afinitu f na osové afinity.

Řešení: Například f_1: $x' = x - y + 1$
$y' = -2y + 3$
f_2: $x' = 2x - 1$
$y' = x + y - 1$
f_3: $x' = 1/4\,(5x - 2y + 5)$
$y' = x - y + 5$

10. [DT] Ověřte, že rovnicemi $x' = 1/5\,(3x - 4y) + 2$, $y' = 1/5\,(-4x - 3y) + 4$ je v afinní rovině $\boldsymbol{A}_2$ dána základní afinita f. Určete přímku p jejích samodružných bodů a její charakteristiku, není-li to elace. Potom rozhodněte, zda je tato afinita involutorním zobrazením.

Řešení: p: $x + 2y - 5 = 0$

zvolíme-li např. $X = [0, 0]$, je $X' = [2, 4]$, $\overline{X} = [1, 2]$,
odtud $k = (\overline{X}; X, X') = -1$
f je involutorní zobrazení

11. [DT] Ověřte, že rovnicemi $x' = 1/8\,(6\,x + 3\,y - 5\,z + 6)$, $y' = 1/8\,(2\,x + 5\,y + 5\,z - 6)$, $z' = 1/8\,(2\,x - 3\,y + 13\,z - 6)$ je v afinním prostoru $\boldsymbol{A}_3$ dána základní afinita f. Určete rovinu ρ jejích samodružných bodů a rozhodněte, zda je tato afinita elací. Není-li f elace, určete její charakteristiku.

Řešení: $\rho: 2\,x - 3\,y + 5\,z - 6 = 0$
f je elace

12. [S2] Ověřte, že rovnicemi $x' = y - 2\,z + 1$, $y' = -x + 2\,y - 2\,z + 1$, $z' = x - y + 3\,z - 1$ je v afinním prostoru $\boldsymbol{A}_3$ dána základní afinita. Určete rovinu ρ jejích samodružných bodů a její charakteristiku, není-li to elace.

Řešení: $\rho: x - y + 2\,z - 1 = 0$
zvolíme-li např. $X = [0, 0, 1]$, je $X' = [-1, -1, 2]$, $\overline{X} = [1/2, 1/2, 1/2]$,
odtud $k = (\overline{X}; X, X') = 1/3$

3.5 Shodná zobrazení

1. [DT] Určete parametr $p \in \boldsymbol{R}$ tak, aby existovalo shodné zobrazení roviny $\boldsymbol{E}_2$ zobrazující body $[0, 0]$, $[1, -2]$, $[3, -1]$ po řadě na body $[1, 2]$, $[p, 1]$, $[4, p]$. Napište analytické vyjádření tohoto zobrazení a určete jeho samodružné body a směry.

Řešení: $p = 3$
$x' = 1/5\,(4\,x - 3\,y) + 1$
$y' = 1/5\,(3\,x + 4\,y) + 2$
SB: $X = [-5/2, 5/2]$
SS neexistuje

2. [S2] Určete parametry $p, q \in \boldsymbol{R}$ tak, aby existovala shodnost zobrazující body $[3, 0]$, $[1, 2]$, $[-1, -1]$ po řadě na body $[1, 4]$, $[p, 2]$, $[2, q]$. Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení.

Řešení: $p = -1,\ q = 0$

$x' = -y + 1$

$y' = x + 1$

SB: $X = [0, 1]$

SS neexistuje

3. [DT] Napište analytické vyjádření symetrie podle přímky $x - 3y + 4 = 0$ v $\boldsymbol{E_2}$ a zjistěte, o jakou shodnost se jedná.

Řešení: $x' = 1/25\,(-24x + 7y - 21)$

$y' = 1/25\,(7x + 24y + 3)$

nepřímá shodnost

4. [DT] V $\boldsymbol{E_2}$ jsou dány body $A = [0, 1]$, $B = [2, -2]$, $A' = [1, 2]$, $B' = [3, 5]$.
Určete analytické vyjádření a samodružné body a směry přímé shodnosti f, pro kterou $f(A) = A'$ a $f(B) = B'$.

Řešení: $x' = 1/13\,(-5x - 12y + 25)$

$y' = 1/13\,(12x - 5y + 31)$

SB: $X = [1/6, 11/6]$

SS neexistuje

5. [VK] V $\boldsymbol{E_2}$ jsou dány body $A = [1, 0]$, $B = [2, 7]$, $A' = [9, 1]$, $B' = [4, -4]$.
Určete analytické vyjádření a samodružné body a směry nepřímé shodnosti f, pro kterou $f(A) = A'$ a $f(B) = B'$.

Řešení: $x' = 1/5\,(3x - 4y + 42)$

$y' = 1/5\,(-4x - 3y + 9)$

SB neexistuje

SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{(t, 2t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

$\lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{(2t, -t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

6. [VK] Určete analytické vyjádření, samodružné body a směry pro všechny shodnosti f prostoru $\boldsymbol{E_2}$, pro které $f(A) = A'$ a $f(B) = B'$, kde $A = [-1, 1]$, $B = [0, -2]$, $A' = [3, 2]$, $B' = [2, -1]$.

Řešení: a) přímá shodnost:

$x' = 1/5\,(4\,x + 3\,y + 16)$
$y' = 1/5\,(-3\,x + 4\,y + 3)$

SB: $X = [5/2, -9/2]$

SS neexistuje

b) nepřímá shodnost:

$x' = -x + 2$
$y' = y + 1$

SB neexistuje

SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{(t, 0),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{(0, t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

7. [S2] Při shodném zobrazení f eukleidovského prostoru do sebe jsou body [0, 0, 0] a [1, 1, 1] samodružné, bod A = [1, –1, 0] se zobrazí do bodu $f(A)$, který leží v rovině $x = 0$. Určete zbývající dvě souřadnice bodu $f(A)$.

Řešení: $f(A) = [0, 1, -1]$, nebo $f(A) = [0, -1, 1]$

8. [S2] Ověřte, že rovnicemi $x' = 1/3\,(x - 2\,y + 2\,z + 2)$, $y' = 1/3\,(2\,x - y - 2\,z - 2)$, $z' = 1/3\,(-2\,x - 2\,y - z + 2)$ je dáno shodné zobrazení prostoru $\boldsymbol{E_3}$ do sebe a najděte jeho samodružné body a směry.

Řešení: SB: $X = [1, 0, 0]$
SS: $\lambda = -1,\ \boldsymbol{u} \in \{(0, t, t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

9. [VK] Afinní zobrazení f prostoru $\boldsymbol{E_3}$ do sebe je dáno předpisem $x' = 1/9\,(-x - 8\,y - 4\,z + 18)$, $y' = 1/9\,(-8\,x - y + 4\,z)$, $z' = 1/9\,(-4\,x + 4\,y - 7\,z + 36)$. Rozhodněte, zda se jedná o shodnost (přímou, či nepřímou) a určete samodružné směry zobrazení f.

Řešení: f je přímá shodnost

SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{(t, s, 2\,(t - s)),\ t, s \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{(2\,t, -2\,t, -t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

10. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ má afinní zobrazení f analytické vyjádření splňující $3\,x' = -x + 2\,y - 2\,z$, $3\,y' = 2\,x - y - 2\,z$, $3\,z' = -2\,x - 2\,y - z$.
Zjistěte, zda se jedná o shodnost (přímou, či nepřímou, případně involutorní) a určete samodružné body a směry zobrazení f.

Řešení: f je nepřímá, involutorní shodnost

SB: $X(t) = [t, t, -t],\ t \in \boldsymbol{R}$

SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{(t, s, t + s),\ t, s \in \boldsymbol{R}\}$

$\lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{(t, t, -t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

11. [DT] Napište analytické vyjádření symetrie podle přímky $p = \{[1, -2, 0], (0, 3, 1)\}$ v $\boldsymbol{E_3}$ a zjistěte, o jakou shodnost se jedná. Dále ověřte, že tato shodnost je involutorním zobrazením.

Řešení: $x' = -x + 2$

$y' = 1/5\,(4\,y + 3\,z - 2)$

$z' = 1/5\,(3\,y - 4\,z + 6)$

přímá shodnost

12. [DT] Napište analytické vyjádření symetrie podle roviny $\rho = \{[-1, 0, 2], [2, 5, 0], [-3, -2, 4]\}$ v $\boldsymbol{E_3}$ a zjistěte, o jakou shodnost se jedná.

Řešení: $x' = 1/7\,(-2\,x + 3\,y - 6\,z + 3)$

$y' = 1/7\,(3\,x + 6\,y + 2\,z - 1)$

$z' = 1/7\,(-6\,x + 2\,y + 3\,z + 2)$

nepřímá shodnost

13. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ jsou dány body $A = [1, 0, 0]$, $B = [2, 7, 0]$, $C = [-6, 1, 0]$, $D = [1, 0, 3]$ a body $A' = [9, 1, 0]$, $B' = [4, -4, 0]$, $C' = [4, 6, 0]$, $D' = [9, 1, ?]$.
Určete analytické vyjádření přímé shodnosti, která zobrazuje body A, B, C, D po řadě na body A', B', C', D'.
Dále určete samodružné body a samodružné směry této shodnosti.

Řešení: $D' = [9, 1, -3]$

$x' = 1/5\,(3x - 4y + 42)$
$y' = 1/5\,(-4x - 3y + 9)$
$z' = -z$

SB neexistuje

SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, 2t, s), t, s \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(2t, -t, 0), t \in \boldsymbol{R}\}$

14. [VK] V $\boldsymbol{E}_3$ jsou dány body $A = [1, 0, 0]$, $B = [2, 7, 0]$, $C = [-6, 1, 0]$, $D = [1, 0, 3]$ a body $A' = [9, 1, 0]$, $B' = [4, -4, 0]$, $C' = [4, 6, 0]$, $D' = [9, 1, ?]$.
Určete analytické vyjádření nepřímé shodnosti, která zobrazuje body A, B, C, D po řadě na body A', B', C', D'.
Dále určete samodružné body a samodružné směry této shodnosti.

Řešení: $D' = [9, 1, 3]$

$x' = 1/5\,(3x - 4y + 42)$
$y' = 1/5\,(-4x - 3y + 9)$
$z' = z$

SB neexistuje

SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, 2t, 0), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(2t, -t, s), t, s \in \boldsymbol{R}\}$

15. [VK] V $\boldsymbol{E}_4$ jsou dány body $[1, 0, -1, 1]$, $[1, 1, 0, -1]$, $[-1, 1, 1, 0]$, $[0, -1, 1, 1]$.
Napište analytické vyjádření symetrie podle podprostoru α, který je těmito body určen. Ověřte pomocí tohoto vyjádření, že tato symetrie je involutorní shodnost.

Řešení: $\alpha: x + y + z + u - 1 = 0$

$x' = 1/2\,(x - y - z - u + 1)$
$y' = 1/2\,(-x + y - z - u + 1)$
$z' = 1/2\,(-x - y + z - u + 1)$
$u' = 1/2\,(-x - y - z + u + 1)$

16. [DT] Napište analytické vyjádření symetrie prostoru $\boldsymbol{E}_4$ podle nadroviny $x - y + z - 3u = 0$ a zjistěte, zda tato symetrie je přímá, nebo nepřímá shodnost.

Řešení: $x' = 1/6\,(5\,x + y - z + 3\,u)$

$y' = 1/6\,(x + 5\,y + z - 3\,u)$

$z' = 1/6\,(-x + y + 5\,z + 3\,u)$

$u' = 1/2\,(x - y + z - u)$

nepřímá shodnost

17. [VK] Najděte analytické vyjádření symetrie podle podprostoru $\alpha: x - y + z + u = 1$, $x + y + z - u = 3$ prostoru $\boldsymbol{E}_4$ a zjistěte, jaká je to shodnost.

Řešení: $\alpha = \{[2 - t, 1 + s, t, s], t, s \in \boldsymbol{R}\}$

$x' = -z + 2$

$y' = u + 1$

$z' = -x + 2$

$u' = y - 1$

přímá shodnost

18. [VK] Buďte $\alpha: x + y - z - u = 0$ a $\beta: x + 2\,y - z - 2\,u = 0$ dvě nadroviny v $\boldsymbol{E}_4$. Najděte analytické vyjádření symetrie podle $\alpha \cap \beta$ a zjistěte, o jakou shodnost se jedná.

Řešení: $\alpha \cap \beta = \{[t, s, t, s], t, s \in \boldsymbol{R}\}$

$x' = z$

$y' = u$

$z' = x$

$u' = y$

přímá shodnost

19. [VK] Najděte analytické vyjádření symetrie podle podprostoru $\alpha: x + y - z = 1$, $x + y - u = 1$, $x - z - u = 1$ v $\boldsymbol{E}_4$ a zjistěte, zda tato symetrie je přímá, nebo nepřímá shodnost.

Řešení: $\alpha = \{[1 + 2\,t, -t, t, t], t \in \boldsymbol{R}\}$

$x' = 1/7\,(x - 4\,y + 4\,z + 4\,u + 6)$

$y' = 1/7\,(-4\,x - 5\,y - 2\,z - 2\,u + 4)$

$z' = 1/7\,(4\,x - 2\,y - 5\,z + 2\,u - 4)$

$u' = 1/7\,(4\,x - 2\,y + 2\,z - 5\,u - 4)$

nepřímá shodnost

20. [VK] Z analytického vyjádření zjistěte, zda symetrie podle podprostoru, který je průnikem nadrovin $\rho: 4x + 3y + 2z - 5u = 0$, $\sigma: 2x + y + 2z - u = 0$ a $\tau: 3x + 2y + 3z - 2u = 0$ je přímá, nebo nepřímá shodnost prostoru $\boldsymbol{E}_4$.

Řešení: $\rho \cap \sigma \cap \tau = \{[-t, -t, t, -t], t \in \boldsymbol{R}\}$

$x' = 1/2\,(-x + y - z + u)$
$y' = 1/2\,(x - y - z + u)$
$z' = 1/2\,(-x - y - z - u)$
$u' = 1/2\,(x + y - z - u)$

nepřímá shodnost

3.6 Základní shodnosti

1. [S2] Napište analytické vyjádření osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod [1, 5].

Řešení: osa souměrnosti: $x + 5y - 13 = 0$

$x' = 1/13\,(12x - 5y) + 1$
$y' = 1/13\,(-5x - 12y) + 5$

2. [S2] Rovnicemi $x' = y$, $y' = -x + 1$ je dána shodnost roviny $\boldsymbol{E}_2$. Rozložte ji v osové souměrnosti.

Řešení: Například f_1: $x' = x$
$y' = -y + 1$
f_2: $x' = -y + 1$
$y' = -x + 1$

3. [DT] Shodnost roviny E_2 má analytické vyjádření $x' = x + 2$, $y' = -y - 2$. Rozložte ji na základní shodnosti.

Řešení: Například $f_1: x' = y + 2$
$y' = x - 2$
$f_2: x' = -y$
$y' = -x$
$f_3: x' = -x + 4$
$y' = y$

4. [DT] V $\boldsymbol{E_2}$ je dán rovnostranný trojúhelník ABC, přičemž $A = [-4, 1]$, $B = [2, 1]$, $C = [c_1, c_2]$, kde $c_2 > 0$. Pomocí vzorce určete analytické vyjádření symetrie f podle strany AC trojúhelníku ABC. Dále určete obraz těžiště T trojúhelníku ABC.

Řešení: $C = \left[-1, 1 + 3\sqrt{3}\right]$

strana AC: $x\sqrt{3} - y + 1 + 4\sqrt{3} = 0$

$f: x' = 1/2\left(-x + y\sqrt{3} - 12 - \sqrt{3}\right)$

$y' = 1/2\left(x\sqrt{3} + y + 1 + 4\sqrt{3}\right)$

$T = \left[-1, 1 + \sqrt{3}\right]$, $T' = \left[-4, 1 + 2\sqrt{3}\right]$

5. [VK] Elipsa má osy v osách souřadných a prochází body $M = \left[\sqrt{3}, -2\right]$, $N = \left[-2\sqrt{3}, 1\right]$. Určete analytické vyjádření symetrie f roviny E_2 podle tečny této elipsy, která vytíná na osách souřadných stejně velké kladné úseky. Užijte přímý výpočet i postup podle vzorce.

Řešení: elipsa: $x^2 + 3y^2 = 15$

tečna: $x + y - 2\sqrt{5} = 0$

symetrie: $x' = -y + 2\sqrt{5}$

$y' = -x + 2\sqrt{5}$

6. [S2] Napište analytické vyjádření souměrnosti podle roviny ρ, při které se bod $[1, 0, -2]$ zobrazí na bod $[3, 2, 0]$.

Řešení: $\rho: x + y + z - 2 = 0$

$x' = 1/3\,(x - 2y - 2z + 4)$
$y' = 1/3\,(-2x + y - 2z + 4)$
$z' = 1/3\,(-2x - 2y + z + 4)$

7. [DT] Napište analytické vyjádření základní shodnosti v $\boldsymbol{E}_3$, jejíž množinou všech samodružných bodů je rovina $\rho = \{[5, 1, 4], (2, 0, 1), (3, -1, 0)\}$.
Dále určete samodružné směry této shodnosti.

Řešení: $\rho: x + 3y - 2z = 0$

$$x' = 1/7\,(6x - 3y + 2z)$$
$$y' = 1/7\,(-3x - 2y + 6z)$$
$$z' = 1/7\,(2x + 6y + 3z)$$

SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u}_1 \in \{(t, 3t, -2t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u}_2 \in \{(t, s, 1/2\,(t + 3s)), t, s \in \boldsymbol{R}\}$

8. [DT] Najděte analytické vyjádření symetrie prostoru $\boldsymbol{E}_3$ podle roviny ρ určené přímkami $p = \{[2, 3, 1], [5, 4, 0]\}$ a $q = \{[0, 1, 2], (3, 1, -1)\}$.
Ověřte přímo z analytického vyjádření, že tato symetrie je involutorní shodnost.

Řešení: $\rho: x + y + 4z - 9 = 0$

$$x' = 1/9\,(8x - y - 4z) + 1$$
$$y' = 1/9\,(-x + 8y - 4z) + 1$$
$$z' = 1/9\,(-4x - 4y - 7z) + 4$$

9. [DT] V $\boldsymbol{E}_3$ je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, kde $A = [4, 1, 1]$, $B = [4, 3, 1]$, $C = [2, 3, 1]$, výška jehlanu $v = 2$. Pomocí vzorce určete analytické vyjádření symetrie podle roviny $\rho = \{B, D, V\}$ a ověřte, že v této symetrii je obrazem bodu A bod C.

Řešení: $D = [2, 1, 1]$, $V = [3, 2, 3]$

$\rho: x - y - 1 = 0$

$$x' = y + 1$$
$$y' = x - 1$$
$$z' = z$$

10. [DT] Napište analytické vyjádření symetrie prostoru $\boldsymbol{E}_4$ podle nadroviny ρ, při které se bod $[1, 0, 3, 2]$ zobrazí na bod $[5, 2, -1, 0]$.

Řešení: $\rho: 2x + y - 2z - u - 4 = 0$

$$x' = 1/5\,(x - 2y + 4z + 2u + 8)$$
$$y' = 1/5\,(-2x + 4y + 2z + u + 4)$$
$$z' = 1/5\,(4x + 2y + z - 2u - 8)$$
$$u' = 1/5\,(2x + y - 2z + 4u - 4)$$

11. [DT] Určete analytické vyjádření symetrie prostoru $\boldsymbol{E}_4$ podle nadroviny $\rho = \{[-1, 0, 2, 2], [2, 1, 0, 2], [1, 1, -1, 0], [0, 2, 2, 1]\}$.
Užijte přímý výpočet i postup podle vzorce.

Řešení: $\rho : x - y + z - u + 1 = 0$

$$x' = 1/2\,(x + y - z + u - 1)$$
$$y' = 1/2\,(x + y + z - u + 1)$$
$$z' = 1/2\,(-x + y + z + u - 1)$$
$$u' = 1/2\,(x - y + z + u + 1)$$

12. [VK] Určete analytické vyjádření základní shodnosti prostoru $\boldsymbol{E}_4$, jejíž množinou všech samodružných bodů je nadrovina σ, obsahující průnik nadrovin $\alpha : x + y - 2\,z + u = 1$ a $\beta : 3\,x + 2\,y - 3\,z + 2\,u = 1$ a procházející bodem $M = [1, -1, 1, 0]$.

Řešení: $\sigma : 2\,x + y - z + u = 0$

$$x' = 1/7\,(-x - 4\,y + 4\,z - 4\,u)$$
$$y' = 1/7\,(-4\,x + 5\,y + 2\,z - 2\,u)$$
$$z' = 1/7\,(4\,x + 2\,y + 5\,z + 2\,u)$$
$$u' = 1/7\,(-4\,x - 2\,y + 2\,z + 5\,u)$$

3.7 Klasifikace shodností v rovině

1. [DT] Shodnost f roviny $\boldsymbol{E}_2$ má analytické vyjádření $x' = 1/17\,(8\,x + 15\,y + 6)$, $y' = 1/17\,(15\,x - 8\,y - 10)$. Najděte samodružné body a směry shodnosti f a určete pomocí nich, o jaký typ shodnosti v rovině se jedná.

Řešení: SB: přímka $3\,x - 5\,y - 2 = 0$

SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(3\,t, -5\,t), t \in \boldsymbol{R}\}$

$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(5\,t, 3\,t), t \in \boldsymbol{R}\}$

f je osová symetrie podle přímky $3\,x - 5\,y - 2 = 0$

2. [DT] Shodnost f roviny $\boldsymbol{E}_2$ má analytické vyjádření $x' = 1/25\,(-7\,x - 24\,y + 56)$, $y' = 1/25\,(24\,x - 7\,y + 8)$. Najděte samodružné body a směry shodnosti f a určete pomocí nich, o jaký typ shodnosti v rovině se jedná.

Řešení: SB: $X = [1, 1]$

SS neexistuje

f je otočení kolem bodu $[1, 1]$

3. [VK] V $\boldsymbol{E_2}$ jsou dány body $A = [1, 5]$, $B = [3, 1]$. Určete analytická vyjádření všech shodností f, pro které $f(A) = B$ a $f(B) = A$. Proveďte klasifikaci těchto shodností.

Řešení: a) přímá shodnost f_1:

$x' = -x + 4$
$y' = -y + 6$

SB: $X = [2, 3]$

SS: $\lambda = -1$, $\boldsymbol{u} \in \{(t, s), t, s \in \boldsymbol{R}\}$ (každý směr samodružný)

f_1 je středová symetrie podle bodu $[2, 3]$

b) nepřímá shodnost f_2:

$x' = 1/5\,(3x + 4y - 8)$
$y' = 1/5\,(4x - 3y + 16)$

SB: přímka $x - 2y + 4 = 0$

SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, -2t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(2t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$

f_2 je osová symetrie podle přímky $x - 2y + 4 = 0$

4. [DT] V $\boldsymbol{E_2}$ jsou dány body $A = [-2, 1]$, $B = [2, 3]$, $A' = [3, 0]$, $B' = [5, -4]$. Určete analytická vyjádření všech shodností f, pro které $f(A) = A'$ a $f(B) = B'$. Proveďte klasifikaci těchto shodností.

Řešení: a) přímá shodnost f_1:

$x' = y + 2$
$y' = -x - 2$

SB: $X = [0, -2]$

SS neexistuje

f_1 je otočení kolem bodu $[0, -2]$

b) nepřímá shodnost f_2:

$x' = 1/5\,(4x - 3y + 26)$
$y' = 1/5\,(-3x - 4y - 2)$

SB neexistuje

SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, 3t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(3t, -t), t \in \boldsymbol{R}\}$

f_2 je posunutá symetrie

5. [VK] V $\boldsymbol{E}_2$ jsou dány body $A = [-1, 2]$, $B = [2, 3]$, $A' = [5, 0]$, $B' = [2, -1]$. Vypočítejte samodružné body a směry nepřímé shodnosti f, pro kterou $f(A) = A'$ a $f(B) = B'$. O jaký typ zobrazení se jedná?

Řešení: $f: x' = -1/5\,(4x + 3y - 27)$
$y' = -1/5\,(3x - 4y + 11)$

SB neexistuje

SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u}_1 \in \{(3t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u}_2 \in \{(t, -3t), t \in \boldsymbol{R}\}$

f je posunutá symetrie

6. [VK] Najděte analytické vyjádření nepřímé shodnosti f roviny $\boldsymbol{E}_2$, pro kterou $f(A) = A'$ a $f(B) = B'$, kde $A = [1, -1]$, $B = [4, 1]$, $A' = [1, 1]$, $B' = [3, 4]$. Rozložte toto zobrazení na osovou symetrii a posunutí ve smyslu klasifikace shodností v rovině.

Řešení: $f: x' = y + 2$
$y' = x$

osová symetrie: $x' = y + 1$
$y' = x - 1$

posunutí: $x' = x + 1$
$y' = y + 1$

7. [VK] V $\boldsymbol{E}_2$ jsou dány body $A = [-1, -2]$, $B = [-4, -1]$, $A' = [4, -2]$, $B' = [5, 1]$. Nepřímou shodnost f, pro kterou $f(A) = A'$ a $f(B) = B'$, rozložte na osovou symetrii a posunutí ve smyslu klasifikace shodností v rovině.

Řešení: $f: x' = -1/5\,(3x + 4y - 9)$
$y' = -1/5\,(4x - 3y + 8)$

osová symetrie: $x' = -1/5\,(3x + 4y - 4)$
$y' = -1/5\,(4x - 3y - 2)$

posunutí: $x' = x + 1$
$y' = y - 2$

8. [VK] V $\boldsymbol{E}_2$ jsou dány body $A = [1, 1]$, $B = [4, 3]$, $A' = [3, 0]$, $B' = [1, 3]$. Nepřímou shodnost f, pro kterou $f(A) = A'$ a $f(B) = B'$, rozložte na osovou symetrii a posunutí ve smyslu klasifikace shodností v rovině.

Řešení: $f: x' = 1/13\,(-12\,x + 5\,y + 46)$
$y' = 1/13\,(5\,x + 12\,y - 17)$

osová symetrie: $x' = 1/13\,(-12\,x + 5\,y) + 95/26$
$y' = 1/13\,(5\,x + 12\,y) - 19/26$

posunutí: $x' = x - 3/26$
$y' = y - 15/26$

3.8 Skládání zobrazení

1. [DT] V $\boldsymbol{E}_2$ jsou dány body $S_1 = [1, -2]$ a $S_2 = [4, -3]$. Napište analytické vyjádření zobrazení $f = f_2 \circ f_1$, kde f_1 resp. f_2 je středová symetrie podle bodu S_1 resp. S_2. Potom určete, o jaké zobrazení se jedná.

Řešení: $f_1: x' = -x + 2$, $y' = -y$ $\quad$ $f_2: x' = -x + 8$, $y' = -y - 6$ $\quad$ $f: x' = x + 6$, $y' = y - 2$

f je posunutí o vektor $(6, -2)$

2. [DT] V $\boldsymbol{E}_2$ jsou dány přímky $p = \{[0, 1], (2, -1)\}$ a q: $2\,x - y + 1 = 0$.
Označme f_p a f_q symetrie podle těchto přímek. Určete analytické vyjádření zobrazení $f = f_q \circ f_p$ a rozhodněte, o jaké zobrazení se jedná.
Řešení: $f_p: x' = 1/5\,(3\,x - 4\,y + 4)$, $y' = 1/5\,(-4\,x - 3\,y + 8)$ $\quad$ $f_q: x' = 1/5\,(-3\,x + 4\,y - 4)$, $y' = 1/5\,(4\,x + 3\,y + 2)$

$f: x' = -x$
$y' = -y + 2$

f je středová symetrie podle bodu $[0, 1]$

3. [DT] V $\boldsymbol{E}_2$ je dán trojúhelník ABC, kde $A = [1, 1]$, $B = [4, 3]$, $C = [2, -1]$.
Označme f symetrii podle přímky AB a g symetrii podle bodu C.
Určete analytické vyjádření zobrazení $f \circ g$ a po vyšetření samodružných bodů a směrů rozhodněte, o jaké zobrazení se jedná.

Řešení: $f: x' = 1/13\,(5x + 12y - 4)$
$\quad y' = 1/13\,(12x - 5y + 6)$

$g: x' = -x + 4$
$\quad y' = -y - 2$

$f \circ g: x' = 1/13\,(-5x - 12y - 8)$
$\quad y' = 1/13\,(-12x + 5y + 64)$

SB neexistuje

SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{(3t, 2t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\quad \lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{(2t, -3t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

$f \circ g$ je posunutá symetrie

4. [VK] V $\boldsymbol{E}_3$ jsou dány přímky p: $X(t) = [1 + t, 1 - t, 0]$, $t \in \boldsymbol{R}$ a q: $2x + 2y - 3z = 1$, $x + y - z = 1$. Napište analytické vyjádření zobrazení $f = f_q \circ f_p$, kde f_p je symetrie podle přímky p a f_q je symetrie podle přímky q.
Dále vypočítejte samodružné body a směry zobrazení f.

Řešení: $f_p: x' = -y + 2$
$\quad y' = -x + 2$
$\quad z' = -z$

$f_q: x' = -y + 2$
$\quad y' = -x + 2$
$\quad z' = -z + 2$

$f: x' = x$
$\quad y' = y$
$\quad z' = z + 2$

SB neexistuje

SS: $\lambda = 1,\ \boldsymbol{u} \in \{(t, s, r),\ t, s, r \in \boldsymbol{R}\}$ (každý směr samodružný)

5. [VK] V $\boldsymbol{E}_3$ jsou dány přímky $p = \{[4, 0, -1], (3, -1, -2)\}$ a q: $X(t) = [t, -5t, 4t]$, $t \in \boldsymbol{R}$. Označme f_p a f_q symetrie podle těchto přímek. Určete analytické vyjádření, samodružné body a směry zobrazení $f = f_q \circ f_p$.

Řešení: $f_p: x' = 1/7\,(2x - 3y - 6z) + 2$
$\quad y' = 1/7\,(-3x - 6y + 2z) + 2$
$\quad z' = 1/7\,(-6x + 2y - 3z) + 2$

$f_q: x' = 1/21\,(-20x - 5y + 4z)$
$\quad y' = 1/21\,(-5x + 4y - 20z)$
$\quad z' = 1/21\,(4x - 20y - 5z)$

$f: x' = 1/3\,(-x + 2y + 2z) - 2$
$\quad y' = 1/3\,(2x - y + 2z) - 2$
$\quad z' = 1/3\,(2x + 2y - z) - 2$

SB neexistuje

SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{(t, s, -t - s),\ t, s \in \boldsymbol{R}\}$
$\quad \lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{(t, t, t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

6. [VK] V $\boldsymbol{E}_3$ je dána rovina $\alpha: x - y - z = 0$ a bod $S = [1, 2, -1]$.
Označme f_α symetrii podle roviny α a f_S symetrii podle bodu S. Vypočítejte samodružné body a směry afinního zobrazení $f = f_\alpha \circ f_S$.

Řešení: f_α: $x' = 1/3\ (x + 2y + 2z)$
$y' = 1/3\ (2x + y - 2z)$
$z' = 1/3\ (2x - 2y + z)$

f_S: $x' = -x + 2$
$y' = -y + 4$
$z' = -z - 2$

f: $x' = -1/3\ (x + 2y + 2z) + 2$
$y' = -1/3\ (2x + y - 2z) + 4$
$z' = -1/3\ (2x - 2y + z) - 2$

SB: $X(t) = [-t, t + 3, t],\ t \in \boldsymbol{R}$

SS: $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{u_1} \in \{(t, s, t - s),\ t, s \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{u_2} \in \{(t, -t, -t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

7. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ jsou dány roviny $\alpha: x - y - z = 0$ a $\beta: x + 2y - z = 0$.
Vypočítejte samodružné body a směry afinního zobrazení f, které vznikne složením symetrie podle roviny β a kolmé projekce do roviny α.

Řešení: kolmá projekce do roviny α: $x' = 1/3\ (2x + y + z)$
$y' = 1/3\ (x + 2y - z)$
$z' = 1/3\ (x - y + 2z)$

symetrie podle roviny β: $x' = 1/3\ (2x - 2y + z)$
$y' = 1/3\ (-2x - y + 2z)$
$z' = 1/3\ (x + 2y + 2z)$

afinní zobrazení f: $x' = 1/3\ (x - y + 2z)$
$y' = 1/3\ (-x - 2y + z)$
$z' = 1/3\ (2x + y + z)$

SB: $X(t) = [t, 0, t],\ t \in \boldsymbol{R}$

SS: $\lambda = 1,\ \boldsymbol{u} \in \{(t, 0, t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

8. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ je dána přímka p: $X(t) = [t, t, -t],\ t \in \boldsymbol{R}$ a bod $M = [1, 1, -1]$.
Určete samodružné body a směry afinity $f = f_p \circ s_M$, kde f_p je symetrie podle přímky p a s_M je stejnolehlost se středem M a koeficientem $k = -2$.

Řešení: f_p: $x' = 1/3\ (-x + 2y - 2z)$
$y' = 1/3\ (2x - y - 2z)$
$z' = 1/3\ (-2x - 2y - z)$

s_M: $x' = -2x + 3$
$y' = -2y + 3$
$z' = -2z - 3$

f: $x' = 2/3\ (x - 2y + 2z) + 3$
$y' = 2/3\ (-2x + y + 2z) + 3$
$z' = 2/3\ (2x + 2y + z) - 3$

SB: $X = [1, 1, -1]$

SS: $\lambda_1 = -2,\ \boldsymbol{u_1} \in \{(t, t, -t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 2,\ \boldsymbol{u_2} \in \{(t, s, t + s),\ t, s \in \boldsymbol{R}\}$

9. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ je dána přímka $p = \{[1, 0, 1], (1, 1, -1)\}$ a bod $S = [2, 1, 2]$.
Určete analytické vyjádření zobrazení $f = f_S \circ f_p$, kde f_p je symetrie podle přímky p a f_S je stejnolehlost se středem S a koeficientem $k = -2$.
Vypočítejte samodružné body a směry zobrazení f.

Řešení: f_p: $x' = 1/3\,(-x + 2\,y - 2\,z) + 2$, $y' = 1/3\,(2\,x - y - 2\,z)$, $z' = 1/3\,(-2\,x - 2\,y - z) + 2$

f_S: $x' = -2\,x + 6$, $y' = -2\,y + 3$, $z' = -2\,z + 6$

f: $x' = 2/3\,(x - 2\,y + 2\,z) + 2$, $y' = 2/3\,(-2\,x + y + 2\,z) + 3$, $z' = 2/3\,(2\,x + 2\,y + z) + 2$

SB: $X = [-2/3, -5/3, -10/3]$

SS: $\lambda_1 = -2$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, t, -t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(t, s, t + s),\ t, s \in \boldsymbol{R}\}$

10. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ je dána rovina $\alpha: x - y - z = 0$ a bod $S = [1, 2, -1]$.
Označme f_α symetrii podle roviny α a f_S stejnolehlost se středem S a koeficientem $k = -2$. Vypočítejte samodružné body a směry afinního zobrazení $f = f_\alpha \circ f_S$.

Řešení: f_α: $x' = 1/3\,(x + 2\,y + 2\,z)$, $y' = 1/3\,(2\,x + y - 2\,z)$, $z' = 1/3\,(2\,x - 2\,y + z)$

f_S: $x' = -2\,x + 3$, $y' = -2\,y + 6$, $z' = -2\,z - 3$

f: $x' = -2/3\,(x + 2\,y + 2\,z) + 3$, $y' = -2/3\,(2\,x + y - 2\,z) + 6$, $z' = -2/3\,(2\,x - 2\,y + z) - 3$

SB: $X = [1, 2, -1]$

SS: $\lambda_1 = -2$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, s, t - s),\ t, s \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(t, -t, -t),\ t \in \boldsymbol{R}\}$

11. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ je dána rovina $\rho: x + y - 2\,z = 1$ a bod $S = [1, 2, 1]$.
Napište analytické vyjádření zobrazení $f = f_\rho \circ f_S$, kde f_ρ je symetrie podle roviny ρ a f_S je stejnolehlost se středem S a koeficientem $k = 2$. Dále vypočítejte samodružné body a směry zobrazení f.

Řešení: f_ρ: $x' = 1/3\,(2x - y + 2z + 1)$ $\quad$ f_S: $x' = 2x - 1$

$y' = 1/3\,(-x + 2y + 2z + 1)$ $\quad$ $y' = 2y - 2$

$z' = 1/3\,(2x + 2y - z - 2)$ $\quad$ $z' = 2z - 1$

f: $x' = 1/3\,(4x - 2y + 4z - 1)$

$y' = 1/3\,(-2x + 4y + 4z - 4)$

$z' = 1/3\,(4x + 4y - 2z - 7)$

SB: $X = [1, 2, 1]$

SS: $\lambda_1 = -2$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, t, -2t), t \in \boldsymbol{R}\}$

$\lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(t, -t + 2s, s), t, s \in \boldsymbol{R}\}$

12. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ je dána rovina $\rho: x + y + z = 0$ a bod $S = [1, -2, 1]$.
Určete analytické vyjádření, samodružné body a směry zobrazení $f = f_\rho \circ f_S$, kde f_ρ je kolmá projekce do roviny ρ a f_S je stejnolehlost se středem S a koeficientem $k = 2$.

Řešení: f_ρ: $x' = 1/3\,(2x - y - z)$ $\quad$ f_S: $x' = 2x - 1$

$y' = 1/3\,(-x + 2y - z)$ $\quad$ $y' = 2y + 2$

$z' = 1/3\,(-x - y + 2z)$ $\quad$ $z' = 2z - 1$

f: $x' = 2/3\,(2x - y - z) - 1$

$y' = 2/3\,(-x + 2y - z) + 2$

$z' = 2/3\,(-x - y + 2z) - 1$

SB: $X = [1, -2, 1]$

SS: $\lambda = 2$, $\boldsymbol{u} \in \{(t, s, -t - s), t, s \in \boldsymbol{R}\}$

13. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ je dána přímka $p = \{[3, 1, 1], [4, 3, 2]\}$ a rovina $\rho: x + y - 3z = 1$.
Určete analytické vyjádření a vypočítejte samodružné body zobrazení $f = f_p \circ f_\rho$, kde f_p je symetrie podle přímky p a f_ρ je symetrie podle roviny ρ.

Řešení: f_p: $x' = 1/3\,(-2x + 2y + z) + 4$ $\quad$ f_ρ: $x' = 1/11\,(9x - 2y + 6z + 2)$

$y' = 1/3\,(2x + y + 2z) - 2$ $\quad$ $y' = 1/11\,(-2x + 9y + 6z + 2)$

$z' = 1/3\,(x + 2y - 2z)$ $\quad$ $z' = 1/11\,(6x + 6y - 7z - 6)$

f: $x' = 1/33\,(-16x + 28y - 7z + 126)$

$y' = 1/33\,(28x + 17y + 4z - 72)$

$z' = 1/33\,(-7x + 4y + 32z + 18)$

SB: rovina $7x - 4y + z - 18 = 0$

14. [VK] Určete analytické vyjádření, samodružné body a samodružné směry zobrazení $g \circ f$, kde f je symetrie prostoru $\boldsymbol{E_3}$ podle roviny $\rho = \{[1, 2, 3], [3, 5, 8], [2, 4, 6]\}$ a g je symetrie podle přímky $p = \{[3, 3, 6], [-1, 1, 0]\}$.

Řešení: $f: x' = 1/3\,(x - 2y + 2z)$, $y' = 1/3\,(-2x + y + 2z)$, $z' = 1/3\,(2x + 2y + z)$

$g: x' = 1/7\,(-3x + 2y + 6z - 12)$, $y' = 1/7\,(2x - 6y + 3z + 15)$, $z' = 1/7\,(6x + 3y + 2z + 3)$

$g \circ f: x' = 1/21\,(5x + 20y + 4z - 36)$
$y' = 1/21\,(20x - 4y - 5z + 45)$
$z' = 1/21\,(4x - 5y + 20z + 9)$

SB: rovina $4x - 5y - z + 9 = 0$

SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(4t, -5t, -t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(t, s, 4t - 5s), t, s \in \boldsymbol{R}\}$

15. [VK] V $\boldsymbol{E_3}$ je dána přímka p: $x + 2y + 3z = 4$, $3x + 2y + z = 4$ a rovina $\rho = \{[1, 1, 0], [1, 0, 1], [0, 1, 1]\}$. Označme symetrie podle těchto podprostorů s_p a s_ρ. Určete analytické vyjádření, samodružné body a směry zobrazení $s_\rho \circ s_p$.

Řešení: $s_p: x' = 1/3\,(-2x - 2y + z + 4)$, $y' = 1/3\,(-2x + y - 2z + 4)$, $z' = 1/3\,(x - 2y - 2z + 4)$

$s_\rho: x' = 1/3\,(x - 2y - 2z + 4)$, $y' = 1/3\,(-2x + y - 2z + 4)$, $z' = 1/3\,(-2x - 2y + z + 4)$

$s_\rho \circ s_p: x' = z$
$y' = y$
$z' = x$

SB: rovina $x - z = 0$

SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, 0, -t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(t, s, t), t, s \in \boldsymbol{R}\}$

16. [VK] V $\boldsymbol{E_4}$ je dána přímka p: $X(t) = [1 + t, t, 1 - t, -t]$, $t \in \boldsymbol{R}$ a bod $M = [1, 0, 1, 0]$. Označme s_p symetrii podle přímky p a s_M symetrii podle bodu M. Určete analytické vyjádření zobrazení $s_p \circ s_M$ a zjistěte, o jakou shodnost se jedná.

Řešení: s_p: $x' = 1/2\,(-x + y - z - u) + 2$
$y' = 1/2\,(x - y - z - u)$
$z' = 1/2\,(-x - y - z + u)$
$u' = 1/2\,(-x - y + z - u) + 2$

s_M: $x' = -x + 2$
$y' = -y$
$z' = -z + 2$
$u' = -u$

$s_p \circ s_M$: $x' = 1/2\,(x - y + z + u)$
$y' = 1/2\,(-x + y + z + u)$
$z' = 1/2\,(x + y + z - u)$
$u' = 1/2\,(x + y - z + u)$

$s_p \circ s_M$ je nepřímá shodnost

17. [VK] Určete analytické vyjádření zobrazení $f = f_\rho \circ f_S$ v prostoru $\boldsymbol{E}_4$, kde f_ρ je symetrie podle roviny $\rho = \{[2, 2, -2, -2], [2, -2, 2, -2], [4, -2, 2, -4]\}$a f_S je symetrie podle bodu $S = [3, -2, 2, -3]$. Vypočítejte samodružné směry zobrazení f.

Řešení: f_ρ: $x' = -u$
$y' = -z$
$z' = -y$
$u' = -x$

f_S: $x' = -x + 6$
$y' = -y - 4$
$z' = -z + 4$
$u' = -u - 6$

f: $x' = u + 6$
$y' = z - 4$
$z' = y + 4$
$u' = x - 6$

SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, s, -s, -t), t, s \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(t, s, s, t), t, s \in \boldsymbol{R}\}$

18. [DT] V $\boldsymbol{E}_4$ je dána rovina α: $2x - y + 2z + u = 0$, $3x - 2y + 3z + u = 0$ a bod $S = [2, 1, -1, -1]$. Určete analytické vyjádření, samodružné body a směry zobrazení $f = g \circ h$, kde g je kolmá projekce do roviny α a h je stejnolehlost se středem S a koeficientem $k = 3$.

Řešení: g: $x' = 1/5\,(3x + y - 2z - u)$
$y' = 1/5\,(x + 2y + z - 2u)$
$z' = 1/5\,(-2x + y + 3z - u)$
$u' = 1/5\,(-x - 2y - z + 2u)$

h: $x' = 3x - 4$
$y' = 3y - 2$
$z' = 3z + 2$
$u' = 3u + 2$

f: $x' = 3/5\,(3x + y - 2z - u) - 4$
$y' = 3/5\,(x + 2y + z - 2u) - 2$
$z' = 3/5\,(-2x + y + 3z - u) + 2$
$u' = 3/5\,(-x - 2y - z + 2u) + 2$

SB: $X = [2, 1, -1, -1]$

SS: $\lambda = 3$, $\boldsymbol{u} \in \{(t, s, -t + s, -s), t, s \in \boldsymbol{R}\}$

19. [VK] Určete analytické vyjádření, samodružné body a směry zobrazení f prostoru $\boldsymbol{E}_4$, jestliže $f = g \circ h$, kde h je symetrie podle nadroviny $\rho: x + y + z + u = 0$ a g je symetrie podle přímky p: $X(t) = [t, t, t, t]$, $t \in \boldsymbol{R}$.

Řešení: h: $x' = 1/2\,(x - y - z - u)$
$y' = 1/2\,(-x + y - z - u)$
$z' = 1/2\,(-x - y + z - u)$
$u' = 1/2\,(-x - y - z + u)$

g: $x' = 1/2\,(-x + y + z + u)$
$y' = 1/2\,(x - y + z + u)$
$z' = 1/2\,(x + y - z + u)$
$u' = 1/2\,(x + y + z - u)$

f: $x' = -x$
$y' = -y$
$z' = -z$
$u' = -u$

SB: $X = [0, 0, 0, 0]$

SS: $\lambda = -1$, $\boldsymbol{u} \in \{(t, s, r, q), t, s, r, q \in \boldsymbol{R}\}$ (každý směr samodružný)

20. [VK] V $\boldsymbol{E}_4$ jsou dány body $A = [1, 2, 3, 1]$, $B = [2, 3, 4, 2]$, $C = [3, -1, 1, 4]$, $D = [4, 2, 0, 1]$, $S = [1, 1, 2, 1]$. Určete analytické vyjádření, samodružné body a směry afinního zobrazení $f = f_\rho \circ f_S$, kde f_S je symetrie podle bodu S a f_ρ je symetrie podle podprostoru $\rho = \{A, B, C, D\}$. Je zobrazení f přímá, či nepřímá shodnost?

Řešení: f_ρ: $x' = 1/2\,(x + y - z + u + 1)$
$y' = 1/2\,(x + y + z - u - 1)$
$z' = 1/2\,(-x + y + z + u + 1)$
$u' = 1/2\,(x - y + z + u - 1)$

f_S: $x' = -x + 2$
$y' = -y + 2$
$z' = -z + 4$
$u' = -u + 2$

f: $x' = 1/2\,(-x - y + z - u + 3)$
$y' = 1/2\,(-x - y - z + u + 5)$
$z' = 1/2\,(x - y - z - u + 7)$
$u' = 1/2\,(-x + y - z - u + 5)$

SB: $X(t) = [t, 2 - t, 1 + t, 2 - t]$, $t \in \boldsymbol{R}$

SS: $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{u}_1 = (t, s, r, t - s + r)$, $t, s, r \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{u}_2 = (t, -t, t, -t)$, $t \in \boldsymbol{R}\}$

f je nepřímá shodnost

3.9 Podobná zobrazení

1. [DT] Určete parametr $p \in \boldsymbol{R}$ tak, aby existovalo podobné zobrazení roviny $\boldsymbol{E}_2$ zobrazující body [3, 0], [–1, 2], [1, p] po řadě na body [5, –2], [4, –4], [7, p + 1].
Určete koeficient k tohoto podobného zobrazení a napište jeho analytické vyjádření.

Řešení: $p = -4$, $k = 1/2$

$x' = 1/2\,(-y + 10)$
$y' = 1/2\,(x - 7)$

2. [S2] Určete parametry $p, q, r \in \boldsymbol{R}$ tak, aby rovnicemi $x' = x - 2y + 2z + 4$, $y' = px + 2y + z - 2$, $z' = qx + ry + 2z - 2$ byla vzhledem ke KSS dána podobnost. Určete její samodružné body a směry.

Řešení: $p = 2$, $q = -2$, $r = 1$

SB: $X = [0, 2, 0]$
SS: $\lambda = 3$, $\boldsymbol{u} \in \{(0, t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$

3. [S2] Najděte všechny podobnosti eukleidovské roviny, při kterých se bod [1, 0] zobrazí na bod [4, –2] a bod [2, 3] na bod [2, –8].

Řešení: a) přímá podobnost:

$x' = -2x + 6$
$y' = -2y - 2$

b) nepřímá podobnost:

$x' = 2/5\,(4x - 3y + 6)$
$y' = 2/5\,(-3x - 4y - 2)$

4. [VK] Najděte analytická vyjádření všech podobností f prostoru $\boldsymbol{E}_2$, pro které $f(A) = A'$ a $f(B) = B'$, kde $A = [3, -1]$, $B = [2, 1]$, $A' = [-1, -2]$, $B' = [1, 2]$.

Řešení: a) přímá podobnost:

$x' = 2/5\,(3\,x + 4\,y) - 3$
$y' = 2/5\,(-4\,x + 3\,y) + 4$

b) nepřímá podobnost:

$x' = -2\,x + 5$
$y' = 2\,y$

5. [VK] V $\boldsymbol{E}_2$ je dán rovnoběžník $ABCD$, kde $A = [2, 1]$, $B = [5, 2]$, $C = [1, 4]$. Určete analytická vyjádření všech podobností, které zobrazují uspořádanou úsečku AB na uspořádanou úsečku BD.

Řešení: $D = [-2, 3]$

a) přímá podobnost:

$x' = -2\,x - y + 10$
$y' = x - 2\,y + 2$

b) nepřímá podobnost:

$x' = 1/5\,(-11\,x - 2\,y + 49)$
$y' = 1/5\,(-2\,x + 11\,y + 3)$

6. [VK] V $\boldsymbol{E}_2$ jsou dány body $A = [1, 2]$, $B = [2, 4]$, $A' = [1, 1]$, $B' = [-1, 5]$. Určete analytické vyjádření, samodružné body a směry nepřímé podobnosti f, pro kterou $f(A) = A'$ a $f(B) = B'$.

Řešení: f : $x' = -2\,x + 3$
$y' = 2\,y - 3$

SB: $X = [1, 3]$

SS: $\lambda_1 = -2$, $\boldsymbol{u}_1 \in \{(t, 0), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{u}_2 \in \{(0, t), t \in \boldsymbol{R}\}$

7. [VK] Určete analytická vyjádření, samodružné body a směry všech podobností f roviny $\boldsymbol{E}_2$, pro které $f(A) = A'$ a $f(B) = B'$, kde $A = [-1, 0]$, $B = [0, 2]$, $A' = [0, -2]$, $B' = [4, 0]$.

Řešení: a) přímá podobnost:

$x' = 2/5\ (4\,x + 3\,y + 4)$
$y' = 2/5\ (-3\,x + 4\,y - 8)$

SB: $X = [-8/3, 0]$

SS neexistuje

b) nepřímá podobnost:

$x' = 2\,y$
$y' = 2\,x$

SB: $X = [0, 0]$

SS: $\lambda_1 = -2$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, -t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$

8. [VK] V $\boldsymbol{E_2}$ jsou dány body $A = [2, 1]$, $B = [3, 3]$, $C = [3, 0]$, $D = [0, 6]$. Určete analytická vyjádření, samodružné body a směry všech podobností, které zobrazují uspořádanou úsečku AB na uspořádanou úsečku CD.

Řešení: a) přímá podobnost:

$x' = 3/5\ (3\,x - 4\,y + 3)$
$y' = 3/5\ (4\,x + 3\,y - 11)$

SB: $X = [9/4, 3/2]$

SS neexistuje

b) nepřímá podobnost:

$x' = -3\,x + 9$
$y' = 3\,y - 3$

SB: $X = [9/4, 3/2]$

SS: $\lambda_1 = -3$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(t, 0), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 3$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(0, t), t \in \boldsymbol{R}\}$

9. [DT] V $\boldsymbol{E_2}$ je dána vlastní podobnost f, jejíž analytické vyjádření má tvar
$x' = -1/5\ (9\,x + 12\,y - 38)$, $y' = -1/5\ (12\,x - 9\,y - 4)$.
Vypočítejte její samodružné body a směry a určete pomocí nich, o jaké zobrazení se jedná.

Řešení: SB: $X = [1, 2]$

SS: $\lambda_1 = -3$, $\boldsymbol{u_1} \in \{(2\,t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 3$, $\boldsymbol{u_2} \in \{(t, -2\,t), t \in \boldsymbol{R}\}$

f je zobrazení složené ze stejnolehlosti se středem v bodě $[1, 2]$ a koeficientem $k = 3$ a osové symetrie podle přímky $2\,x + y - 4 = 0$

10. [DT] V $\boldsymbol{E}_3$ je dána rovina ρ: $3x - 2y + z + 5 = 0$ a bod $S = [3, -1, 2]$.
Označme f symetrii podle roviny ρ a g stejnolehlost se středem v bodě S a koeficientem $l = 2$. Najděte analytické vyjádření zobrazení $g \circ f$ a zjistěte, o jakou podobnost se jedná. Dále určete její koeficient k a samodružné body a směry.

Řešení: f: $x' = 1/7\,(-2x + 6y - 3z - 15)$
$y' = 1/7\,(6x + 3y + 2z + 10)$
$z' = 1/7\,(-2x + 6y - 3z - 15)$

h: $x' = 2x - 3$
$y' = 2y + 1$
$z' = 2z - 2$

$g \circ f$: $x' = 1/7\,(-4x + 12y - 6z - 51)$
$y' = 1/7\,(12x + 6y + 4z + 27)$
$z' = 1/7\,(-6x + 4y + 12z - 24)$

$g \circ f$ je nepřímá podobnost, $k = 2$

SB: $X = [-15/7, 17/7, 2/7]$

SS: $\lambda_1 = -2$, $\boldsymbol{u}_1 \in \{(3t, -2t, t), t \in \boldsymbol{R}\}$
$\lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{u}_2 \in \{(t, s, -3t + 2s), t, s \in \boldsymbol{R}\}$

3.10 Kruhová inverze

1. [DT] V $\boldsymbol{E}_2$ je dána kruhová inverze, při které jsou body $[0, 0]$ a $[0, 2]$ samodružné a bod $[1, 0]$ se zobrazí do bodu $[1, -1]$. Určete její střed S a koeficient κ.

Řešení: $S = [1, 1]$, $\kappa = 2$

2. [DT] V $\boldsymbol{E}_2$ jsou dány body $A = [1, -2]$, $B = [3, 0]$, $S = [5, 2]$. Určete analytické vyjádření kruhové inverze se středem v bodě S, při které je obrazem bodu A bod B.

Řešení: $$x' = 5 + \frac{16\,(x-5)}{(x-5)^2 + (y-2)^2}$$
$$y' = 2 + \frac{16\,(y-2)}{(x-5)^2 + (y-2)^2}$$

3. [DT] V $\boldsymbol{E}_2$ jsou dány body $A = [0, 5]$, $B = [2, 1]$, $C = [-3, -4]$.
Určete obraz bodu $M = [4, 2]$ v kruhové inverzi $\mathcal{K}(S, \kappa > 0)$, jejíž množinou všech samodružných bodů je kružnice k opsaná trojúhelníku ABC. Řešte početně i graficky.

Řešení: $k: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$
$S = [-3, 1]$, $\kappa = 25$
$M' = [1/2, 3/2]$

4. [DT] V $\boldsymbol{E}_2$ je dána kruhová inverze se středem $S = [2, -1]$ a koeficientem $\kappa = 5$.
Vyjádřete rovnicí obraz přímky $3x - y - 2 = 0$ v této kruhové inverzi.

Řešení: kružnice $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

5. [VK] V $\boldsymbol{E}_2$ je dána kruhová inverze se středem v počátku a koeficientem $\kappa = 4$.
Určete obraz množiny $M = \{[x, y];\ x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0\}$ v této kruhové inverzi.

Řešení: $M' = M$

6. [DT] V $\boldsymbol{E}_2$ je dána kruhová inverze se středem v počátku a koeficientem $\kappa = 9$.
Vyjádřete nerovnostmi a nakreslete obraz množiny
$M = \{[x, y];\ x^2 + y^2 - 3x \leq 0 \wedge x^2 + y^2 - 3y \leq 0\}$ v této kruhové inverzi.

Řešení: $M' = \{[x, y];\ x - 3 \geq 0 \wedge y - 3 \geq 0\}$

7. [VK] V $\boldsymbol{E}_2$ je dána kruhová inverze se středem v počátku a koeficientem $\kappa = 4$.
Vyjádřete nerovnostmi a nakreslete obraz množiny
$M = \{[x, y];\ x^2 + y^2 - 2x - 2y < 0 \wedge x^2 + y^2 - 2y > 0\}$ v této kruhové inverzi.

Řešení: $M' = \{[x, y];\ x + y - 2 > 0 \wedge y - 2 < 0\}$

Seznam použité literatury

[1] Odvárko O., Kadleček J.: Přehled matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. Prometheus, Praha 2004

[2] Mikulčák J.: Přehled učiva matematiky základní školy. SPN, Praha 1993

[3] Coufalová J. a kol.: Matematika pro 6. ročník základní školy. Fortuna, Praha 1998

[4] Coufalová J. a kol.: Matematika pro 7. ročník základní školy. Fortuna, Praha 1999

[5] Coufalová J. a kol.: Matematika pro 9. ročník základní školy. Fortuna, Praha 2000

[6] Odvárko O., Kadleček J.: Matematika pro 6. ročník základní školy, 3. díl. Prometheus, Praha 2003

[7] Odvárko O., Kadleček J.: Matematika pro 7. ročník základní školy, 3. díl. Prometheus, Praha 2003

[8] Odvárko O., Kadleček J.: Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl. Prometheus, Praha 2004

[9] Cihlář J., Zelenka M.: Matematika 7. Pythagoras Publishing, Praha 1998

[10] Cihlář J., Zelenka M.: Matematika 9. Pythagoras Publishing, Praha 1999

[11] Slouka J.: Geometrie pro 5.– 9. ročník ZŠ a nižší třídy víceletých gymnázií. FIN, Olomouc 1993

[12] Herman J. a kol.: Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Osová a středová souměrnost. Prometheus, Praha 2003

[13] Herman J. a kol.: Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Geometrické konstrukce. Prometheus, Praha 1998

[14] Herman J. a kol.: Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Podobnost a funkce úhlu. Prometheus, Praha 2000

[15] Pomykalová E.: Matematika pro gymnázia – Planimetrie. Prometheus, Praha 1997

[16] Pomykalová E.: Matematika pro gymnázia – Stereometrie. Prometheus, Praha 1999

[17] Sekanina M. a kol.: Geometrie I. SPN, Praha 1986

[18] Sekanina M. a kol.: Geometrie II. SPN, Praha 1988

[19] Boček L., Zhouf J.: Máte rádi kružnice? Prometheus, Praha 1995