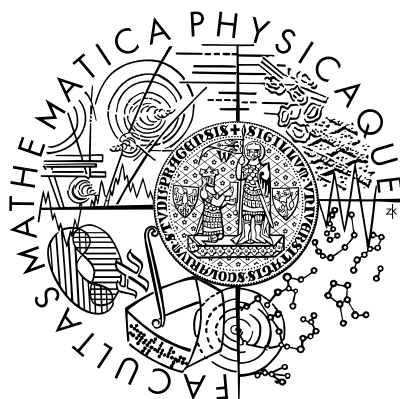


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko–fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Lucia Jarešová

Modely celočíselných časových řad

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2007

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí diplomové práce, paní Doc. RNDr. Zuzaně Práškové, CSc., za její velmi cenné rady a připomínky, a také za její mimořádnou trpělivost a ochotu vyjít mi vstříc.

Dále bych chtěla poděkovat Mgr. Martinovi Zemanovi z České Spořitelny za pomoc s daty a mé rodině za podporu během celé doby studia.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 7. srpna 2007

Lucia Jarešová

Abstrakt

Název práce: Modely celočíselných časových řad

Autor: Lucia Jarešová

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

e-mail vedoucího: praskova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V této práci jsou studovány zobecněné nezáporné celočíselné autoregresní procesy typu GINAR (generalized integer autoregressive) definované pomocí Steutelova a van Harnova zobecněného operátoru. Vlastnosti tohoto náhodného operátoru, který je založený na součtu i.i.d. veličin, jsou podrobně prozkoumány včetně určení definičního oboru a návrhu možné konstrukce tohoto operátoru. Hlavní pozornost je zaměřena na slabě stacionární GINAR(p), jsou popsány základní vlastnosti tohoto procesu a je ukázáno, že tento proces lze vyjádřit jako AR(p), kde je bílý šum tvořen martingalovými diferencemi. Dále jsou popsány odhady parametrů tohoto procesu, které jsou následně odzkoušeny na rozsáhlých simulacích s různě rozdělenými inovacemi a výsledky jsou porovnány na základě MSE. Práce obsahuje také ukázkou aplikace tohoto postupu na reálná data. Na závěr jsou zmíněny vektorové procesy VGINAR, které je také možné vyjádřit jako VAR. Součástí práce jsou naprogramované funkce pro programové prostředí R.

Klíčová slova: GINAR, VGINAR, Steutelův a van Harnův operátor, náhodné operátory (thinning)

Title: Models of integer-valued time series

Author: Lucia Jarešová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

Supervisor's e-mail address: praskova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the presented work the generalized integer valued processes GINAR founded on the Steutel and van Harn generalized operator are studied. Properties of this operator, which are based on the sum of i.i.d. random variables are investigated including the determination of the domain of the operator and suggestion of possible construction of this operator. The attention is given on a weak stationary GINAR(p), the main properties of this process are described and it is shown that this process has an AR(p) representation, where the white noise consists of martingale differences. Further, the parameter estimators are described and consequently tested on extensive simulation with differently distributed innovations. The results are compared according to MSE. The work also contains a real data application. At the end the vector processes VGINAR are mentioned, that can also have a VAR representation. The functions for the program environment R are included.

Keywords: GINAR, VGINAR, Steutel and van Harn operator, thinning

Obsah

1	Úvod	5
2	Některé typy celočíselných časových řad	8
2.1	Markovovy řetězce	8
2.2	DARMA modely	9
3	Náhodné operátory	14
3.1	Pomocná tvrzení a definice	14
3.2	Steutelův a van Harnův zobecněný operátor	16
3.3	Binomický operátor	18
3.4	Multinomický operátor	19
3.5	Definiční obor zobecněného operátoru	20
4	Proces GINAR	24
4.1	Střední hodnota a autokovarianční funkce	25
4.2	Ergodicita	29
4.3	AR(p) reprezentace procesu GINAR(p)	31
4.3.1	CLV pro martingalové diference	33
4.3.2	Asymptotické rozdělení průměru	35
4.3.3	Spektrální hustota procesu GINAR(p)	39
4.4	INAR(p)	39
5	Odhady parametrů procesu GINAR	41
5.1	Odhad střední hodnoty procesu μ	41
5.2	Odhad autokovariancí $R(h)$ a autokorelací $r(h)$	42
5.2.1	Asymptotické vlastnosti odhadu $\widehat{R}_n(h)$	42
5.3	Parciální autokorelační funkce	43
5.4	Odhady φ	44
5.4.1	Yule–Walkerův odhad	44
5.4.2	Odhad metodou nejmenších čtverců	44
5.4.3	Konzistence odhadů	45
5.5	Odhad μ_Z	46
5.6	Odhad σ_e^2	46
5.7	Odhad α	46

5.8	Odhad σ_Z^2	48
6	Numerické studie	49
6.1	Generování procesu GINAR(p)	49
6.1.1	Inovace	50
6.1.2	Ukázky procesů	50
6.2	Odhady parametrů μ , $R(0)$, $r(h)$ a $a(h)$	54
6.3	Odhady parametrů φ , μ_Z a σ_e^2	56
6.4	Odhady parametrů α a σ_Z^2	58
6.5	Závislost $\sqrt{\text{MSE}}$ na počtu pozorování	60
7	Analýza reálných dat	61
7.1	Popis dat	61
7.2	Odhad parametrů procesu GINAR	62
7.3	Rozdělení inovací	63
8	Vektorové GINAR procesy	65
8.1	Střední hodnota a autokorelační funkce	66
8.2	VAR(1) reprezentace procesu VGINAR(1)	68
8.3	Proces GINAR(p) jako VGINAR(1)	69
9	Závěr	71
	Dodatky	73
A	Některá diskrétní rozdělení	73
B	Vytvořující funkce pravděpodobnosti	75
C	Kroneckerův součin a operátor vec()	75
D	R funkce a programy	76

Použité značení

\mathbb{N}	obor přirozených čísel
\mathbb{N}_0	obor nezáporných celých čísel
\mathbb{Z}	obor celých čísel
\mathbb{R}	obor reálných čísel
\mathbb{C}	obor komplexních čísel
$\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Riemannova sféra komplexních čísel
$\mathbf{0}_{n \times m}$	matice samých nul
$\mathbf{0}_n$	(sloupcový) vektor samých nul
$\mathbf{1}_{n \times m}$	matice samých jedniček
$\mathbf{1}_n$	(sloupcový) vektor samých jedniček
\mathbf{I}, \mathbf{I}_n	jednotková matice
i.i.d.	nezávislé stejně rozdělené
$\mathcal{L}(\mathbf{X})$	rozdělení náhodného vektoru \mathbf{X}
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	obecný pravděpodobnostní prostor
s.j.	platí skoro jistě (s pravděpodobností 1)
$\xrightarrow{s.j.}$	konvergence skoro jistě
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	konvergence v distribuci
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	konvergence v pravděpodobnosti
$\xrightarrow{\mathcal{L}_1}$	konvergence v \mathcal{L}_1
$\xrightarrow{\mathcal{L}_2}$	konvergence v \mathcal{L}_2 , konvergence podle kvadratického středu
$\text{Int } M$	interior M , vnitřek množiny M
$U_\epsilon(a)$	ϵ -okolí bodu a
$\lfloor a \rfloor$	dolní celá část a (tj. $\max\{z \in \mathbb{Z}; z \leq a\}$)
$\lceil a \rceil$	horní celá část a (tj. $\min\{z \in \mathbb{Z}; z \geq a\}$)
$ \mathbf{A} = \det(\mathbf{A})$	determinant matice \mathbf{A}
$\mathbb{I}_{[A]}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$	indikátor jevu A
$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$	Kroneckerovo delta
$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$	Diracova míra

Kapitola 1

Úvod

Celočíselné časové řady vznikají v mnoha situacích a lidé se s nimi setkávají už od pradávna. Například pastevci pravidelně sledovali počty kusů zvířat ve stádě, obchodníky zase pravidelně zajímala poptávka, aby věděli, kolik kusů výrobků mají zajistit.

Nezáporné celočíselné časové řady jsou tedy nejčastěji počty věcí, událostí nebo lidí sledované pravidelně v určitých časových okamžicích během delší doby. Příkladem může být například denní sledování počtu nefunkčních nebo opravovaných strojů v továrně, denní počty pacientů v lékařské ordinaci, hodinové sledování počtů zasahujících sanitek, denní počty záchvatů u pacienta nemocného epilepsií, denní počty návštěvníků hotelu atd.

Základním rysem časových řad, které vznikají jako sousledná pozorování, je jejich korelovanost v čase. Nová pozorování tedy většinou více či méně závisí na předešlých hodnotách a úkolem analýzy časových řad je popsat tyto závislosti, případně modelovat očekávaný vývoj do budoucnosti na základě pozorovaných hodnot. K této analýze máme většinou k dispozici pouze jednu realizaci časové řady. Tato skutečnost je velmi omezující, protože běžným požadavkem pro statistickou analýzu je náhodný výběr, tedy několik nezávislých pozorování vzniklých za stejných okolností (tj. známé i.i.d. nezávislé stejně rozdělené veličiny).

Bohužel se nemůžeme vrátit do minulosti, pustit historii znovu a získat další nezávislou realizaci časové řady. Proto abychom mohli na základě jedné realizace časové řady činit závěry o chování jednotlivých pozorování, je nutné, aby pozorované veličiny sdílely společné vlastnosti, které se příliš nemění v čase (*stacionarita časové řady*). Také je nutné, aby pozorování v časové řadě nebyla příliš závislá. Tedy aby každé pozorování obsahovalo informaci, která není dostupná z ostatních pozorování, abychom mohli na základě všech pozorování odhadovat jejich společné vlastnosti (*ergodičnost časové řady*).

Mějme časovou řadu $\{X_t, t \in T \subseteq \mathbb{Z}\}$. Časová řada je *striktně (silně) stacionární*, pokud rozdělení náhodných veličin nezávisí na posunutí v čase, tj. $\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \mathcal{L}(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$, pro všechna n, t_1, \dots, t_n, h taková, že $t_i \in T, t_i + h \in T$ pro $i = 1, \dots, n$. Časová řada s konečnými druhými momenty je *slabě stacionární*, pokud má konstantní střední hodnotu ($E[X_t] = \mu$ pro všechna $t \in T$) a její autoko-

varianční funkce se nemění při posunutí v čase ($\text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = R(h)$ pro všechna $t, t-h \in T$). Autokovarianční funkce reálných náhodných veličin je symetrická, protože $\text{Cov}(X_t, X_s) = \text{Cov}(X_s, X_t)$. V této práci se budeme zabývat slabě stacionárními časovými řadami.

V teoriích klasických časových řad (časové řady s reálnými hodnotami) se velmi důležitou metodou pro analýzu slabě stacionárních časových řad stala Box–Jenkinsova metodologie (70. léta), jejímž základem je korelační analýza. Tato metodologie poskytuje univerzální aparát na volbu vhodného lineárního modelu, odhad parametrů a předpověď budoucích hodnot pro široké spektrum různých slabě stacionárních časových řad. Zároveň poskytuje možnost simulace časové řady s podobnými vlastnostmi. Mezi velké výhody této metody patří obrovská flexibilita a mnohé úspěšné aplikace na různé situace. Nevýhodou této analýzy je většinou špatná interpretace získaných výsledků.

V celočíselných časových řadách jsou v mnoha případech sledované počty velká čísla a je možné tyto časové řady analyzovat stejně jako klasické časové řady. V případě, kdy jsou hodnoty poměrně malá čísla, je tato analýza vhodná méně. Důvod si ukážeme na následujícím příkladu nejjednoduššího autoregresního modelu AR(1), který je definován jako proces vyhovující rovnici

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \varphi \neq 0$$

kde ε_t je bílý šum, neboli posloupnost nekorelovaných náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem σ_ε^2 . Podmínka stacionarity je splněna, když polynom $1 - \varphi z$ má kořen vně jednotkového kruhu, neboli když $|\varphi| < 1$. Pro nezáporné náhodné veličiny se tato podmínka ještě redukuje na $0 < \varphi < 1$. Použití tohoto modelu na celočíselné časové řady nám sice umožní odhadnout korelační strukturu procesu, bohužel ale neumožňuje simulování této časové řady. Je zřejmé, že pokud má X_t být posloupnost nezáporných celočíselných náhodných veličin, není možné, aby veličiny ε_t byly nezávislé na X_{t-1} (φX_{t-1} obecně není celé číslo), navíc ani není možné, aby veličiny ε_t byly obecně celočíselné.

Přestože jsou v praxi metody pro simulování nezáporných celočíselných řad s určitými vlastnostmi velmi důležité, patří tyto časové řady mezi velmi málo popsané náhodné procesy. Od konce 70. let se mnoho autorů pokoušelo vytvořit určitou analogii Box–Jenkinsonovy metodologie, která by byla vhodná obecně pro nezáporné celočíselné časové řady. V roce 1978 vydali autoři Jacobs a Lewis serií článků ([7], [8], [9]) popisující velmi jednoduché modely DARMA pro modelování celočíselných časových řad s určitou korelační strukturou. V 80. a 90. letech vznikaly také modely založené na Markovových řetězcích vyšších řádů (Raftery [21]). V následující kapitole jsou pro představu stručně představeny některé z těchto prvních modelů. Tyto a i některé další modely spolu s příklady jsou uvedeny také v knize [10].

Určitým zlomem v této oblasti byl v roce 1979 vydaný článek autorů Steutel a Harn [22], kde poprvé představili operátor založený na náhodném součtu nul a jedniček, pro který se vžil název *binomický operátor* (*binomial thinning*). Následně vznikaly články

o autoregresních modelech nezáporných celočíselných řad (INAR), kde je na rozdíl od AR modelů násobení nahrazeno binomickým operátorem (například Alzaid a Al-Osh [1], [2], Du a Li [5] a další). V 90. letech navrhl Latour zobecněné autoregresní modely pro nezáporné celočíselné časové řady GINAR založené na zobecněném binomickém operátoru, které potom rozšířil na vektorové GINAR procesy ([14] a [13]). Ukazuje se, že autoregresní modely založené na zobecněných operátorech jsou vlastně klasické autoregresní náhodné posloupnosti. Výborné shrnutí dosavadního výzkumu v oboru celočíselných časových řad je práce od autora McKenzie [16], která společně s [14] a [13] byly hlavními zdroji při psaní této práce.

Třetí kapitola této práce se věnuje různým náhodným operátorům. Jsou zde uvedeny a dokázány základní vztahy pro počítání s těmito operátory. Zároveň je zde odvozen definiční obor zobecněného operátoru a navrhnout postup konstrukce tohoto operátoru. V kapitolách 4 až 6 jsou rozebrány vlastnosti zobecněného nezáporného celočíselného autoregresního procesu $\text{GINAR}(p)$, navrženy odhady parametrů tohoto procesu a pomocí simulací vyzkoušeny jejich vlastnosti. Dále je v kapitole 7 uvedena ukázka aplikace popsaného postupu na reálná data. Kapitola 8 se věnuje základnímu popisu vektorových GINAR procesů.

Podmíněná střední hodnota

V celé práci budeme mnohokrát používat následující větu pro výpočet střední hodnoty známou pod zkratkou *l.i.e.* (*law of iterated expectations*).

Věta 1.1. *Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ a $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^\top$ jsou náhodné vektory a nechť $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je měřitelná funkce $n + m$ proměnných pro kterou platí $E[S(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] < \infty$.*

Pak existuje podmíněná střední hodnota $E[S(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{Y} = \mathbf{y}]$ a je konečná pro skoro všechna \mathbf{y} . Přitom platí

$$E[S(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = E[E[S(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{Y}]]. \quad (1.1)$$

Důkaz. Anděl [3, str. 58, Věta 3.22].

□

Kapitola 2

Některé typy celočíselných časových řad

V této kapitole je uveden přehled některých typů celočíselných řad uváděných v literatuře. Tyto modely vznikaly dříve, než se rozšířily modely založené na zobecněných operátorech, a v této práci jim nebude věnována větší pozornost.

2.1 Markovovy řetězce

Markovovy řetězce s diskrétními stavy a diskrétním časem jsou známou třídou náhodných procesů. Nejdříve připomeňme definici Markovova řetězce k -tého řádu.

Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost celočíselných náhodných veličin definovaných na (Ω, \mathcal{A}, P) . Množinu $S = \{i \in \mathbb{Z} | \exists n \in \mathbb{N}_0 : P(X_n = i) > 0\}$ nazýváme *množinou stavů* a prvky této množiny nazýváme *stavy*.

Definice 2.1. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ nazveme *Markovův řetězec k -tého řádu s množinou stavů S* , jestliže platí tzv. *markovská vlastnost*

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \\ = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_{n-k+1} = i_{n-k+1}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $i_{n+1}, i_n, i_{n-1}, \dots, i_0 \in S$ taková, že $P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$. Pokud navíc platí

$$\begin{aligned} P(X_{n+m+1} = i_{n+1} | X_{n+m} = i_n, X_{n+m-1} = i_{n-1}, \dots, X_{n+m-k+1} = i_{n-k+1}) = \\ = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_{n-k+1} = i_{n-k+1}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

pro všechna $m \in \mathbb{N}_0$, mluvíme o *homogenním Markovově řetězci k -tého řádu*.

Markovská vlastnost (2.1) znamená, že náhodná veličina X_n nezávisí na celé minulosti, ale pouze na hodnotě k minulých výsledků.

Uvažujme homogenní Markovův řetězec k -tého řádu s množinou stavů $S \subseteq \mathbb{N}_0$ a označme pro $i, i_1, \dots, i_k \in S$ takové, že $P(X_{n-1} = i_1, X_{n-2} = i_2, \dots, X_{n-k} = i_k) > 0$ *pravděpodobnosti přechodu* jako

$$p(i | i_1, \dots, i_k) := P(X_n = i | X_{n-1} = i_1, \dots, X_{n-k} = i_k). \quad (2.3)$$

Tímto Markovovým řetězcem je možné popsat korelační strukturu celočíselné časové řady korelované k stupňů do minulosti. V případě, že má množina S m prvků, je kromě specifikace počátečního rozdělení k popisu tohoto modelu potřeba $m^k(m-1)$ parametrů (rozdělení je pak popsáno kompletně). Vzhledem k tomu, že většinou máme k dispozici jen jednu realizaci časové řady a pro dobré odhady parametrů bychom potřebovali mnohem víc pozorování než parametrů, bylo by pro použití tohoto modelu nutné mít velmi dlouhou časovou řadu. Další nevýhodou tohoto modelu je značně omezený popis korelační struktury řady v čase. Tento model proto není velmi vhodný pro popis celočíselných časových řad.

MTD model

Model MTD (*mixture transition distribution*) je jistým vylepšením přeparametrizovaných Markovových řetězců vyšších řádů na množině stavů $S = \{1, 2, \dots, m\}$ (Raftery 1985 [21]). Základní myšlenkou tohoto modelu je požadavek na pravděpodobnosti přechodu (2.3) tvaru:

$$p(i|i_1, \dots, i_k) = \sum_{j=1}^k \lambda_j q(i|i_j), \quad (2.4)$$

kde $i, i_1, \dots, i_k \in S$, $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0$ pro $j = 1, \dots, k$ a $\{q(i|j) : i = 1, \dots, m\}$ je pravděpodobnostní rozdělení pro každé $j = 1, \dots, m$ (tedy $\sum_{i=1}^m q(i|j) = 1$, $q(i|j) \geq 0$ pro $i, j = 1, \dots, m$ a $\mathbf{Q} = (q_{j,i} := q(i|j))_{j,i=1,\dots,m}$ je stochastická matice). Tento model má pouze $m(m-1) + (k-1)$ parametrů. V [10, kap. 5.3] je uveden popis modelu včetně odhadů parametrů.

2.2 DARMA modely

DARMA (*discrete autoregressive moving average*) modely byly navrženy v roce 1978 (Jacobs, Lewis [7], [8], [9]) pro modelování stacionárních řad závislých náhodných veličin s určitým marginálním rozdělením a danou korelační strukturou. Tato třída modelů je považovaná za první pokus o vytvoření obecné množiny modelů pro popis celočíselných časových řad.

Dále uvedeme pro ukázkou přehled a některé vlastnosti těchto procesů. Detailní odvození následujících vztahů je možné najít v [7], [8] a [9].

DAR(1) model

Proces DAR(1) je definován jako řešení stochastické diferenční rovnice

$$X_t = V_t X_{t-1} + (1 - V_t) Z_t, \quad (2.5)$$

kde $\{V_t, t \in \mathbb{N}\}$ je i.i.d. posloupnost náhodných veličin s alternativním rozdělením $\text{Alt}(\alpha)$ pro $\alpha \in (0, 1)$ a $\{Z_t, t \in \mathbb{N}\}$ je i.i.d. posloupnost náhodných veličin s diskrétním

nezáporným celočíselným rozdělením¹ π nezávislá na $\{V_t, t \in \mathbb{N}\}$ se střední hodnotou $E[Z_1] = \mu$ a rozptylem $\text{Var}[Z_1] = \sigma^2$. Veličiny V_t a Z_t jsou nezávislé na X_s pro $s < t$. Dále platí $X_0 \sim \pi$.

Podle tohoto modelu je současné pozorování buď minulé pozorování s pravděpodobností α , nebo s pravděpodobností $1 - \alpha$ nezávislé nové pozorování z rozdělení π .

Nechť $X_0 \sim \pi$. Spočítejme marginální rozdělení veličiny X_t :

$$\begin{aligned} P(X_t = k) &= P(V_t X_{t-1} + (1 - V_t)Z_t = k) = \\ &= P(V_t X_{t-1} + (1 - V_t)Z_t = k | V_t = 1)P(V_t = 1) + \\ &+ P(V_t X_{t-1} + (1 - V_t)Z_t = k | V_t = 0)P(V_t = 0) = \\ &= P(X_{t-1} = k) \cdot \alpha + P(Z_t = k) \cdot (1 - \alpha) = P(X_{t-1} = k)\alpha + \pi_k(1 - \alpha), \end{aligned}$$

kde $\pi_k = P(X_0 = k) = P(Z_t = k)$ pro $k \in \mathbb{N}_0$.

Postupným dosazováním za $t = 1, 2, \dots$ dostaneme $P(X_t = k) = \pi_k$, tj. marginální rozdělení X_t pro $t \in \mathbb{N}_0$ je π a platí $E[X_t] = \mu$ a $\text{Var}[X_t] = \sigma^2$ pro všechna $t \in \mathbb{N}_0$.

Z (2.5) určíme autokovarianční funkci:

$$\begin{aligned} X_t - \mu &= V_t X_{t-1} - V_t \mu + (1 - V_t)Z_t - (1 - V_t)\mu \\ X_t - \mu &= V_t(X_{t-1} - \mu) + (1 - V_t)(Z_t - \mu) \\ (X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu) &= V_t(X_{t-1} - \mu)(X_{t-h} - \mu) + (1 - V_t)(Z_t - \mu)(X_{t-h} - \mu) \end{aligned}$$

Pro $t > h \geq 1$ platí

$$\begin{aligned} f(t, t-h) &:= E[(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)] = E[V_t] \cdot E[(X_{t-1} - \mu)(X_{t-h} - \mu)] = \alpha f(t-1, t-h) \\ \text{Použitím rovnosti } f(t, t) &= \text{Var}[X_t] = \sigma^2 \text{ dostaneme} \\ f(t, t-1) &= \alpha f(t-1, t-1) = \alpha \sigma^2, \quad f(t, t-2) = \alpha f(t, t-1) = \alpha^2 \sigma^2 \text{ atd.} \end{aligned}$$

Obecně pro $h \geq 1$ dostaneme $f(t, t-h) = \alpha^h \sigma^2$, tedy autokovarianční funkce nezávisí na čase t a můžeme psát, že $R(h) = \alpha^h \sigma^2$ pro $h \in \mathbb{N}_0$. Proces DAR(1) je tedy slabě stacionární náhodná posloupnost.

Poznámka. Všechny ostatní DARMA modely jsou konstruovány stejným způsobem, tedy náhodným vybíráním a mícháním i.i.d. veličin se stejným marginálním rozdělením.

DAR(p) model

Model DAR(p) je posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, která je řešením stochastické diferenční rovnice

$$X_t = V_t X_{t-A_t} + (1 - V_t)Z_t, \quad (2.6)$$

kde $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ a $\{V_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jsou stejné jako výše a $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin nezávislých na $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$, $\{V_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nabývajících hodnot v množině $\{1, \dots, p\}$, kde $P(A_t = k) = \varphi_k$, pro $k = 1, \dots, p$, $\sum_{k=1}^p \varphi_k = 1$. Dále platí, že V_t , A_t a Z_t nezávisí na X_s pro $s < t$.

¹Bylo by možné uvažovat i obecné rozdělení.

Tedy současné pozorování je buď s pravděpodobností α náhodně vybrané pozorování z k minulých pozorování, nebo s pravděpodobností $1 - \alpha$ nové nezávislé pozorování z rozdělení π .

V [9] je popsána konstrukce slabě stacionární posloupnosti, která vyhovuje rovnici (2.6) a rozdělení veličin X_t je π .

Dále budeme předpokládat, že máme slabě stacionární řešení $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ s marginálním rozdělením π . Střední hodnota a autokovarianční funkce tohoto procesu nezávisí na t , platí tedy $E[X_t] = \mu$ a $\text{Var}[X_t] = \sigma^2$ pro všechna $t \in \mathbb{Z}_0$.

Podobnými úpravami jako u DAR(1) dostaneme

$$(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu) = V_t(X_{t-A_t} - \mu)(X_{t-h} - \mu) + (1 - V_t)(Z_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)$$

a určíme vztah pro autokorelační funkci

$$\begin{aligned} R(h) &= E[(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)] = E[V_t] \cdot E[(X_{t-A_t} - \mu)(X_{t-h} - \mu)] + 0 = \\ &= \alpha \cdot E[E[(X_{t-A_t} - \mu)(X_{t-h} - \mu) | A_t]] = \alpha \cdot E[R(h - A_t)] = \alpha \sum_{k=1}^p \varphi_k R(h - k) \end{aligned}$$

Autokovarianční funkce slabě stacionárního DAR(p) tedy vyhovuje systému Yule-Walkerových rovnic

$$R(0) = \sigma^2, \quad R(h) = \alpha \sum_{k=1}^p \varphi_k R(h - k), \quad h = 1, 2, \dots$$

Korelační struktura tohoto procesu je tedy stejná s korelační strukturou klasického procesu AR(p) (srov. např. [18, kap. 5.3]).

DMA(q) model

Podobným způsobem je možné zkonstruovat i diskrétní analogii MA procesů, které definujeme jako

$$X_t = Z_{t-S_t}, \quad (2.7)$$

kde $\{Z_t, t \in \mathbb{N} \cup \{1 - q, \dots, 0\}\}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin s rozdělením π a $\{S_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin nabývajících hodnot v množině $\{0, 1, \dots, q\}$, kde $P(S_t = k) = \theta_k$, pro $k = 0, 1, \dots, q$, $\sum_{k=0}^q \theta_k = 1$, nezávislých na $\{Z_t\}$. Tento model je velmi jednoduchý, jedná se vlastně o náhodné vybírání z posledních $q + 1$ vygenerovaných nezávislých pozorování z rozdělení π .

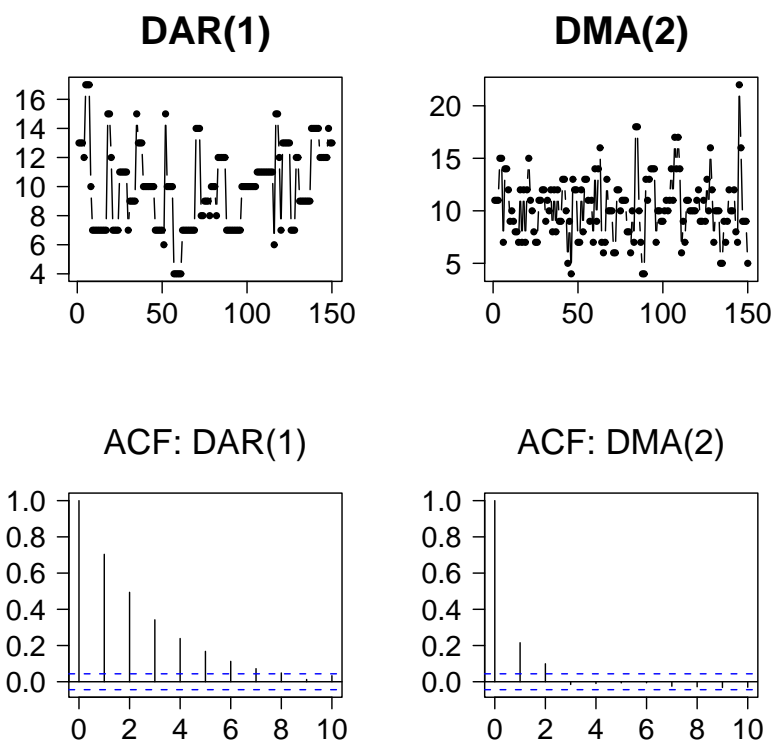
Stejně jako u DAR procesů dokážeme, že marginální rozdělení n.v. X_t je π :

$$P(X_t = k) = P(Z_{t-S_t} = k) = \sum_{i=0}^q P(Z_{t-i} = k)P(S_t = i) = \sum_{i=0}^q \pi_k \theta_i = \pi_k.$$

Platí tedy $E[X_t] = \mu$ a $\text{Var}[X_t] = \sigma^2$ pro všechna $t \in \mathbb{N}_0$.

Dále spočítáme autokovarianční funkci pro $h \geq 1$ (využijeme nezávislosti $\{Z_t\}$):

$$\begin{aligned} E[(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)] &= E[(Z_{t-S_t} - \mu)(Z_{t-h-S_{t-h}} - \mu)] = \\ &= E[E[(Z_{t-S_t} - \mu)(Z_{t-h-S_{t-h}} - \mu) | S_t, S_{t-h}]] = E[\text{Cov}(Z_{t-S_t}, Z_{t-h-S_{t-h}} | S_t, S_{t-h})] = \\ &= E[\sigma^2 \mathbf{I}_{[t-S_t=t-h-S_{t-h}]}] = \sigma^2 \cdot P(t - S_t = t - h - S_{t-h}) = \sigma^2 \cdot P(S_t = S_{t-h} + h) = \\ &= \sigma^2 \cdot \sum_{k=0}^q P(S_t = S_{t-h} + h | S_{t-h} = k) \cdot P(S_{t-h} = k) = \sigma^2 \cdot \sum_{k=0}^q P(S_t = k + h) \cdot \theta_k \end{aligned}$$



Obrázek 2.1: Ukázky procesů DAR a DMA s empirickými odhady autokorelační funkce, kde $Z_t \sim \text{Po}(10) = \pi$; DAR(1): $\alpha = 0.7$; DMA(2): $\theta_0 = 0.4$, $\theta_1 = 0.3$, $\theta_2 = 0.3$.

Autokovarianční funkce tedy nezávisí na t a můžeme psát

$$R(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pro } h = 0 \\ \sigma^2 \sum_{k=0}^{q-h} \theta_{h+k} \theta_k & \text{pro } 1 \leq h \leq q \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

DARMA(p, q) model

DARMA(p, q) je proces $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ splňující stochastickou diferenční rovnici

$$X_t = V_t X_{t-A_t} + (1 - V_t) Z_{t-S_t}, \quad (2.8)$$

kde $\{V_t, t \in \mathbb{N}\}$ je opět posloupnost i.i.d. náhodných veličin s alternativním rozdělením $\text{Alt}(\alpha)$, $\{Z_t, t \in \mathbb{N} \cup \{1 - q, \dots, 0\}\}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin s rozdělením π , $\{A_t, t \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin nabývajících hodnot v množině $\{1, \dots, p\}$, kde $P(A_t = k) = \varphi_k$, pro $k = 1, \dots, p$, $\sum_{k=1}^p \varphi_k = 1$. $\{S_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin nabývajících hodnot v množině $\{0, 1, \dots, q\}$, kde

$P(S_t = k) = \theta_k$, pro $k = 0, 1, \dots, q$, $\sum_{k=0}^q \theta_k = 1$. Dále platí, že rozdělení veličin $X_{1-p}, X_{2-p}, \dots, X_0$ je π .

Další vlastnosti těchto modelů jsou popsány v článcích [7], [8], [9]. Tato třída modelů je velmi jednoduchá a zároveň velmi obecná co se týče zvoleného typu rozdělení (π dokonce nemusí být omezeno jenom na celočíselná rozdělení). Vzhledem k tomu, že korelační struktura je tvořena pouze opakováním určitých pozorování z minulosti, je průběh tohoto procesu značně "umělý" a nehodí se pro popis praktických úloh, kde korelace vznikají na základě vnitřních závislostí daných jevů. Vybírání z minulých pozorování se více hodí na popis proměnných, kde není definováno uspořádání, než na celočíselné časové řady sledující výskyt událostí v čase.

Kapitola 3

Náhodné operátory

Třída modelů založených na náhodných operátorech¹ (viz dále) je vzhledem velmi podobná klasickým modelům ARMA pro časové řady. Základním stavebním prvkem je zavedení operátorů nahrazujících násobení vyskytující se v klasických časových řadách.

Motivace: Galtonův–Watsonův proces větvení s imigrací

Mějme populaci jedinců, která se vyvíjí v čase. Na začátku je počet jedinců v populaci $X_0 \geq 0$. Pro každého jedince i žijícího v době t označme $Y_{t,i} \in \{0, 1, 2, \dots\}$ velikost "rodiny" v čase t jedince i , který žil v čase $t - 1$ (tj. $i = 1, \dots, X_{t-1}$). Dále označme I_t počet jedinců, kteří se k naší populaci přistěhují v době $(t - 1, t]$. Předpokládejme, že se jedinci rozmnožují a stěhují nezávisle. Vývoj této populace v čase je popsán následující rovnicí ($\sum_{i=1}^0 \equiv 0$)

$$X_t = \sum_{i=1}^{X_{t-1}} Y_{t,i} + I_t. \quad (3.1)$$

Řada $\{X_t\}$ je Markovův řetězec prvního řádu (vývoj populace nezávisí na celé historii, ale pouze na jednom stavu populace v minulosti). Náhodné operátory slouží ke zjednodušení manipulace s náhodným součtem vyskytujícím se v (3.1) a v podobných rovnicích.

3.1 Pomocná tvrzení a definice

Skutečnost, že pro náhodnou veličinu X platí $P(X = k) = p_k > 0$ pro $k \in M$ a $\sum_{k \in M} p_k = 1$, budeme zkráceně zapisovat jako

$$X \sim \{p_k, k \in M\}. \quad (3.2)$$

Nejdříve uvedeme některé statistické vlastnosti náhodných součtů.

¹V angličtině se pro tyto operátory používá termín *thinning*.

Věta 3.1. Uvažujme náhodné součty $S = \sum_{n=1}^N X_n$ a $S' = \sum_{n=1}^M Y_n$, kde $\{X_n\}$ jsou i.i.d. náhodné veličiny s rozdělením π_X a $\{Y_n\}$ jsou i.i.d. náhodné veličiny s rozdělením π_Y . Řady $\{X_n\}$ a $\{Y_n\}$ jsou vzájemně nezávislé. N a M jsou nezáporné celočíselné náhodné veličiny nezávislé na $\{X_n\}$ a $\{Y_n\}$. Pak platí (pokud existují příslušné střední hodnoty a rozptyly)

$$i) \quad \mathbb{E}[S|N] = N \mathbb{E}[X_1]; \quad \mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X_1]$$

$$ii) \quad \mathbb{E}[SS'|N, M] = NM \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[Y_1]; \quad \mathbb{E}[SS'] = \mathbb{E}[NM] \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[Y_1]$$

$$iii) \quad \mathbb{E}[S^2|N] = N \text{Var}[X_1] + N^2(\mathbb{E}[X_1])^2; \quad \mathbb{E}[S^2] = \mathbb{E}[N] \text{Var}[X_1] + \mathbb{E}[N^2] (\mathbb{E}[X_1])^2$$

$$iv) \quad \text{Var}[S|N] = N \text{Var}[X_1]; \quad \text{Var}[S] = \mathbb{E}[N] \text{Var}[X_1] + \text{Var}[N] (\mathbb{E}[X_1])^2$$

$$v) \quad \text{Cov}[S, S'] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[Y_1] \text{Cov}[N, M].$$

Poznámka. Nepodmíněné vztahy z i) a iv) bývají označovány jako *Waldovy rovnosti*.

Důkaz.

$$\text{ad i)} \quad \mathbb{E}[S|N] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N X_n|N\right] = N \mathbb{E}[X_1], \quad \mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|N]] = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X_1]$$

$$\text{ad ii)} \quad \mathbb{E}[SS'|N, M] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N X_n \sum_{k=1}^M Y_k|N, M\right] = NM \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[Y_1]$$

$$\mathbb{E}[SS'] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[SS'|N, M]] = \mathbb{E}[NM] \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[Y_1]$$

$$\begin{aligned} \text{ad iii)} \quad \mathbb{E}[S^2|N] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N X_n X_k|N\right] = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbb{E}[X_n X_k|N] = \\ &= N(N-1)(\mathbb{E}[X_1])^2 + N(\text{Var}[X_1] + (\mathbb{E}[X_1])^2) = N\text{Var}[X_1] + N^2(\mathbb{E}[X_1])^2 \\ \mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S^2|N]] = \mathbb{E}[N] \text{Var}[X_1] + \mathbb{E}[N^2] (\mathbb{E}[X_1])^2 \end{aligned}$$

$$\text{ad iv)} \quad \text{Var}[S|N] = \text{Var}\left[\sum_{n=1}^N X_n|N\right] = N \text{Var}[X_1]$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[S] &= \mathbb{E}[S^2] - (\mathbb{E}[S])^2 = [\mathbb{E}[N] \text{Var}[X_1] + \mathbb{E}[N^2] (\mathbb{E}[X_1])^2] - (\mathbb{E}[N])^2 (\mathbb{E}[X_1])^2 = \\ &= \mathbb{E}[N] \text{Var}[X_1] + (\mathbb{E}[X_1])^2 \text{Var}[N] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ad v)} \quad \text{Cov}[S, S'] &= \mathbb{E}[SS'] - \mathbb{E}[S]\mathbb{E}[S'] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[Y_1] \cdot \mathbb{E}[NM] - \\ &= \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[M] \cdot \mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[Y_1] \cdot \text{Cov}[N, M] \end{aligned}$$

□

Dále pro celočíselnou nezápornou náhodnou veličinu X označíme její vytvořující funkci pravděpodobnosti (*probability generating function, p.g.f.*) jako

$$P_X(s) := \mathbb{E} s^X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) \cdot s^n.$$

V článcích o celočíselných časových řadách se často vyskytuje *alternativní vytvořující funkce pravděpodobnosti* (*alternate probability generating function, a.p.g.f*) definovaná

$$G_X(s) := \mathbb{E} (1 - s)^X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) \cdot (1 - s)^n = P_X(1 - s).$$

Základní vlastnosti vytvořující funkce jsou uvedeny v dodatku B.

Věta 3.2. *Nechť $P_N(s)$ a P_X jsou vytvořující funkce náhodných veličin N a $\{X_n\}$ z věty 3.1. Vytvořující funkce náhodné veličiny $S = \sum_{n=1}^N X_n$ je dána vztahem*

$$P_S(s) = P_N[P_X(s)]. \quad (3.3)$$

Důkaz. [19, Věta A.7, str. 140]

□

3.2 Steutelův a van Harnův zobecněný operátor

Definice 3.3. Nechť X je nezáporná celočíselná náhodná veličina a nechť $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost i.i.d. nezáporných celočíselných náhodných veličin s konečnou střední hodnotou α a konečným rozptylem β nezávislá na X . Definujme *zobecněný operátor* (*generalized operator*) $\alpha(\beta) \bullet$ *asociovaný s řadou* (*associated with sequence*) $\{Y_n\}$ jako

$$\alpha(\beta) \bullet X := \sum_{n=1}^X Y_n \quad , \text{ kde } \sum_{n=1}^0 Y_n := 0$$

Řadu $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ nazveme *čítací řadou* (*counting series*).

Poznámka. Z definice operátoru je zřejmé, že $\alpha \geq 0$. Zároveň platí $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$ (z nezápornosti náhodných veličin v čítací řadě).

Místo $\alpha(\beta) \bullet$ bývají v literatuře pro zobecněný operátor také používány symboly $\alpha \bullet$, α^* nebo $\alpha \circ$.

Zobecněný operátor je v literatuře nazýván *zobecněný Steutelův a van Harnův operátor* (*generalized Steutel and van Harn operator*). Steutelův a van Harnův původní operátor byl poprvé zmíněn v [22], jednalo se o speciální případ zobecněného operátoru, tzv. *binomický operátor* (*binomial thinning*) (viz dále).

Definice 3.4. Nechť $\alpha(\beta) \bullet$ a $\gamma(\delta) \bullet$ jsou zobecněné operátory asociované s posloupnostmi $\{Y_n\}$ a $\{Z_n\}$. Tyto operátory nazveme *nezávislé* (*independent*), když čítací řady $\{Y_n\}$ a $\{Z_n\}$ jsou vzájemně nezávislé.

Definice 3.5. Nechť $\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet = (\alpha_{ij}(\beta_{ij}) \bullet)$ je $p \times p$ matice nezávislých zobecněných operátorů, $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ a $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$ jsou matice konečných středních hodnot a rozptylů zobecněných operátorů a $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^\top$ je náhodný nezáporný celočíselný vektor. *Zobecněný maticový operátor* definujeme jako

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X} := \begin{pmatrix} \alpha_{11}(\beta_{11}) & \cdots & \alpha_{1p}(\beta_{1p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p1}(\beta_{p1}) & \cdots & \alpha_{pp}(\beta_{pp}) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p \alpha_{1j}(\beta_{1j}) \bullet X_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p \alpha_{pj}(\beta_{pj}) \bullet X_j \end{pmatrix}$$

Vlastnosti zobecněného operátoru

Věta 3.6. *Nechť X a Y jsou celočíselné nezáporné náhodné veličiny (nemusí být nezávislé), $\alpha(\beta)\bullet$ a $\gamma(\delta)\bullet$ jsou nezávislé zobecněné operátory. Pak*

i) *Nechť $P(X > 0) > 0$ ($\Leftrightarrow E[X] > 0$), pak platí:*

$$\alpha(\beta)\bullet X = 0 \text{ s.j.} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0; \quad \alpha(\beta)\bullet X = X \text{ s.j.} \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ a } \beta = 0$$

$$\text{Vždy platí } 0(0)\bullet X = 0 \text{ s.j.} \quad \text{a} \quad 1(0)\bullet X = X \text{ s.j.}$$

$$ii) E[\alpha(\beta)\bullet X] = \alpha E[X]; \quad E[\alpha(\beta)\bullet X|X] = \alpha X$$

$$iii) E[(\alpha(\beta)\bullet X)^2] = \beta E[X] + \alpha^2 E[X^2]; \quad E[(\alpha(\beta)\bullet X)^2|X] = \beta X + \alpha^2 X^2$$

$$iv) E[(\alpha(\beta)\bullet X) \cdot (\gamma(\delta)\bullet Y)] = \alpha\gamma E[XY]$$

$$v) \text{Var}[\alpha(\beta)\bullet X] = \beta E[X] + \alpha^2 \text{Var}[X]; \quad \text{Var}[\alpha(\beta)\bullet X|X] = \beta X$$

$$vi) \text{Cov}[\alpha(\beta)\bullet X, \gamma(\delta)\bullet Y] = \alpha\gamma \text{Cov}[X, Y]; \quad \text{Cov}[\alpha(\beta)\bullet X, Y] = \alpha \text{Cov}[X, Y]; \\ \text{Cov}[\alpha(\beta)\bullet X, \gamma(\delta)\bullet Y|X, Y] = 0$$

vii) $P_{\alpha(\beta)\bullet X}(s) = P_X(P_Z(s))$, kde $P_Z(s)$ je vytvořující funkce pravděpodobností náhodné veličiny Z_1 v čítací řadě operátoru $\alpha(\beta)\bullet$.

Důkaz.

ad ii)-vii) Důsledek vět 3.1 a 3.2.

ad i) Protože X není skoro jistě rovna 0, platí $E[X] > 0$.

$$\alpha(\beta)\bullet X = 0 \text{ s.j.} \Rightarrow E[\alpha(\beta)\bullet X] = \alpha E[X] = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Tedy pro veličiny Z_i ve čítací řadě operátoru $\alpha(\beta)\bullet$ platí $E[Z_i] = 0$. Protože Z_i jsou nezáporné náhodné veličiny, musí platit $\text{Var}[Z_i] = 0 = \beta$.

$$\alpha(\beta)\bullet X = X \text{ s.j.} \Rightarrow E[\alpha(\beta)\bullet X] = E[X] \quad \text{a} \quad \text{Var}[\alpha(\beta)\bullet X] = \text{Var}[X]$$

$$\alpha E[X] = E[X] \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\beta E[X] + \alpha^2 \text{Var}[X] = \text{Var}[X] \Rightarrow \beta E[X] = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

Opačná implikace je v obou případech zřejmá a nevyžaduje nezápornost střední hodnoty. \square

Vlastnosti zobecněného maticového operátoru

Věta 3.7. *Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^\top$ a $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_r)^\top$ jsou celočíselné nezáporné náhodné vektory, $\mathbf{A}(\mathbf{B})\bullet$ a $\mathbf{C}(\mathbf{D})\bullet$ jsou nezávislé zobecněné maticové operátory rozměru $p \times p$ a $r \times r$. Pak*

$$i) \mathbf{0}_{p \times p}(\mathbf{0}_{p \times p})\bullet \mathbf{X} = \mathbf{0}_{p \times 1} \text{ s.j.} \quad \text{a} \quad \mathbf{I}_p(\mathbf{0}_{p \times p})\bullet \mathbf{X} = \mathbf{X} \text{ s.j.}$$

$$ii) E[\mathbf{A}(\mathbf{B})\bullet \mathbf{X}] = \mathbf{A}E[\mathbf{X}]$$

$$iii) \ E[(\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X})(\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X})^\top] = \text{diag}(\mathbf{B}\mathbf{E}[\mathbf{X}]) + \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^\top]\mathbf{A}^\top,$$

kde $\text{diag}(\mathbf{B}\mathbf{E}[\mathbf{X}])$ je čtvercová matice s vektorem $\mathbf{B}\mathbf{E}[\mathbf{X}]$ na diagonále.

Pozn.: Oba operátory na levé straně jsou totožné, tj. čítecí řady v obou operátorech tvoří stejné náhodné veličiny.

$$iv) \ E[(\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X})(\mathbf{C}(\mathbf{D}) \bullet \mathbf{Y})^\top] = \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{X}\mathbf{Y}^\top]\mathbf{C}^\top$$

$$v) \ \text{Var}[\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X}] = \text{diag}(\mathbf{B}\mathbf{E}[\mathbf{X}]) + \mathbf{A}\text{Var}[\mathbf{X}]\mathbf{A}^\top$$

$$vi) \ \text{Cov}[\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X}, \mathbf{C}(\mathbf{D}) \bullet \mathbf{Y}] = \mathbf{A}\text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\mathbf{C}^\top$$

Důkaz.

Připomeňme že

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p \alpha_{1j}(\beta_{1j}) \bullet X_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p \alpha_{pj}(\beta_{pj}) \bullet X_j \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}(\mathbf{D}) \bullet \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^r \gamma_{1j}(\delta_{1j}) \bullet Y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^r \gamma_{rj}(\delta_{rj}) \bullet Y_j \end{pmatrix}.$$

ad i) Zřejmé z nulovosti rozptylů.

ad ii) Plyne z definice maticového operátoru a z toho, že $\mathbf{E}[\alpha_{ij}(\beta_{ij}) \bullet X_j] = \alpha_{ij}\mathbf{E}[X_j]$.

$$\begin{aligned} \text{ad iii)} \quad & (\mathbf{E}[(\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X})(\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X})^\top])_{i,j} = \mathbf{E}[\sum_{k=1}^p \alpha_{ik}(\beta_{ik}) \bullet X_k \cdot \sum_{l=1}^p \alpha_{jl}(\beta_{jl}) \bullet X_l] = \\ & = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \mathbf{E}[\alpha_{ik}(\beta_{ik}) \bullet X_k \cdot \alpha_{jl}(\beta_{jl}) \bullet X_l] = \\ & = \begin{cases} \text{pro } i = j : & = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \mathbf{E}[\alpha_{ik}(\beta_{ik}) \bullet X_k \cdot \alpha_{il}(\beta_{il}) \bullet X_l] = \\ & = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1, l \neq k}^p \alpha_{ik}\alpha_{il}\mathbf{E}[X_k X_l] + \sum_{k=1}^p (\beta_{ik}\mathbf{E}[X_k] + \alpha_{ik}^2\mathbf{E}[X_k^2]) = \\ & = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \alpha_{ik}\alpha_{il}\mathbf{E}[X_k X_l] + \sum_{k=1}^p \beta_{ik}\mathbf{E}[X_k] = \\ & = (\mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^\top]\mathbf{A}^\top)_{i,i} + (\mathbf{B}\mathbf{E}[\mathbf{X}])_i \\ \text{pro } i \neq j : & = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \alpha_{ik}\alpha_{jl}\mathbf{E}[X_k X_l] = (\mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^\top]\mathbf{A}^\top)_{i,j} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ad iv)} \quad & (\mathbf{E}[(\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X})(\mathbf{C}(\mathbf{D}) \bullet \mathbf{Y})^\top])_{i,j} = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^r \mathbf{E}[\alpha_{ik}(\beta_{ik}) \bullet X_k \cdot \gamma_{jl}(\delta_{jl}) \bullet X_l] = \\ & = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^r \alpha_{ik}\gamma_{jl}\mathbf{E}[X_k Y_l] = (\mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{X}\mathbf{Y}^\top]\mathbf{C}^\top)_{i,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ad v)} \quad & \text{Var}[\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X}] = \mathbf{E}[(\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X})(\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X})^\top] - \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{X}]\mathbf{E}[\mathbf{X}]^\top\mathbf{A}^\top = \\ & = \text{diag}(\mathbf{B}\mathbf{E}[\mathbf{X}]) + \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^\top]\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{X}]\mathbf{E}[\mathbf{X}]^\top\mathbf{A}^\top = \text{diag}(\mathbf{B}\mathbf{E}[\mathbf{X}]) + \mathbf{A}\text{Var}[\mathbf{X}]\mathbf{A}^\top \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ad vi)} \quad & \text{Cov}[\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X}, \mathbf{C}(\mathbf{D}) \bullet \mathbf{Y}] = \mathbf{E}[(\mathbf{A}(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{X})(\mathbf{C}(\mathbf{D}) \bullet \mathbf{Y})^\top] - \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{X}]\mathbf{E}[\mathbf{Y}]^\top\mathbf{C}^\top = \\ & = \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{X}\mathbf{Y}^\top]\mathbf{C}^\top - \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{X}]\mathbf{E}[\mathbf{Y}]^\top\mathbf{C}^\top = \mathbf{A}\text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\mathbf{C}^\top \quad \square \end{aligned}$$

3.3 Binomický operátor

Nejčastěji používaným náhodným operátorem je speciální případ zobecněného operátoru nazvaný *binomický operátor*.

Definice 3.8. Nechť X je nezáporná celočíselná náhodná veličina. Pro $\alpha \in [0, 1]$ definujeme *binomický operátor* (*binomial thinning*) $\alpha \circ$ jako

$$\alpha \circ X \sim \text{Bi}(X, \alpha), \quad (3.4)$$

tedy $\alpha \circ X := \sum_{n=1}^X Y_n$, kde $Y_n \sim \text{Alt}(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny.

Platí tedy, že $\alpha \circ X = \alpha(\alpha(1 - \alpha)) \bullet X$, kde veličiny v čítecí řadě zobecněného operátoru mají alternativní rozdělení s parametrem α .

Použití binomického operátoru v rovnici (3.1) vede na $X_t = \alpha \circ X_{t-1} + I_t$ a popisuje populaci, kde se jedinci pouze přistěhovávají a pak přežívají s pravděpodobností α .

Věta 3.9 (Vlastnosti binomického operátoru). *Nechť $\alpha, \beta \in [0, 1]$*

- i) $0 \circ X = 0$ s.j., $1 \circ X = X$ s.j.
- ii) $\beta \circ (\alpha \circ X) \sim (\alpha\beta) \circ X$ (\sim znamená rovnost rozdělení)
- iii) $E[\alpha \circ X] = \alpha E[X]$, $\text{Var}[\alpha \circ X] = \alpha(1 - \alpha)E[X] + \alpha^2 \text{Var}[X]$
- iv) $E[(\alpha \circ X)(\beta \circ Y)] = \alpha\beta \cdot E[XY]$, $\text{Cov}[\alpha \circ X, \beta \circ Y] = \alpha\beta \cdot \text{Cov}[X, Y]$
- v) $P_{\alpha \circ X}(s) = P_X(1 - \alpha + \alpha s)$, $G_{\alpha \circ X}(s) = G_X(\alpha s)$

Důkaz.

ad i), iii) a iv) Plyne z vlastností zobecněného operátoru.

ad v) Když $Y \sim \text{Alt}(\alpha)$, pak $P_Y(s) = (1 - \alpha) \cdot s^0 + \alpha \cdot s^1 = 1 - \alpha + \alpha s$, první vztah plyne z věty 3.2.

$$G_{\alpha \circ X} = P_{\alpha \circ X}(1 - s) = P_X(1 - \alpha + \alpha(1 - s)) = P_X(1 - \alpha s) = G_X(\alpha s)$$

$$\begin{aligned} \text{ad ii) } P_{\beta \circ (\alpha \circ X)}(s) &= P_{\alpha \circ X}(1 - \beta + \beta s) = P_X(1 - \alpha + \alpha(1 - \beta + \beta s)) = \\ &= P_X(1 - \alpha\beta + \alpha\beta s) = P_{(\alpha\beta) \circ X}(s) \end{aligned}$$

Z rovností vytvářejících funkcí n.v. $\beta \circ (\alpha \circ X)$ a $(\alpha\beta) \circ X$ plyne rovnost rozdělení. \square

3.4 Multinomický operátor

Multinomický operátor je rozšířením binomického operátoru. V této práci se budeme zabývat pouze modely založenými na zobecněném operátoru, proto uvedeme pouze definici multinomického operátoru.

Definice 3.10. Nechť $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^\top \in [0, 1]^p$ je vektor pravděpodobností splňující $\sum_{i=1}^p \alpha_i \leq 1$ a X je nezáporná celočíselná náhodná veličina. Definujeme *multinomický operátor* (*multinomial thinning*) $\alpha \circ$ jako

$$\alpha \circ X \sim \text{Multi}(X, \alpha) \quad (3.5)$$

tedy i -tá složka vektoru $\alpha \circ X$ je počet výsledků typu i v X nezávislých pokusech, kde pravděpodobnost výsledku i je α_i . Množina všech možných výsledků jednoho pokusu je $\{1, \dots, p, p + 1\}$, kde pravděpodobnost výsledku $p + 1$ je $(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i)$.

Poznámka. $\text{Multi}(X, \boldsymbol{\alpha})$ je multinomické rozdělení podle klasické definice pouze v případě, že $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$. V případě $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$ je rozdělení $\text{Multi}(X, \boldsymbol{\alpha})$ tvořeno prvními p složkami klasického multinomického $(p+1)$ -rozměrného rozdělení s vektorem pravděpodobností $(\boldsymbol{\alpha}^\top, 1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i)^\top$.

Multinomický operátor je zobrazení z \mathbb{N}_0 do \mathbb{N}_0^p . Definujme maticový operátor z \mathbb{N}_0^p do \mathbb{N}_0^p .

Definice 3.11. Uvažujme náhodný nezáporný celočíselný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^\top$ a matici $\mathbf{A} = [\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\alpha}^{(p)}]$, kde $\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = (\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_p^{(i)})^\top \in [0, 1]^p, i = 1, \dots, p$ jsou vektory pravděpodobností splňující $\sum_{j=1}^p \alpha_j^{(i)} \leq 1$. Maticový multinomický operátor definujeme jako

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{X} := \sum_{i=1}^p \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \circ X_i, \quad (3.6)$$

kde $\boldsymbol{\alpha}^{(i)} \circ X_i, i = 1, \dots, p$ jsou vzájemně nezávislé náhodné vektory.

3.5 Definiční obor zobecněného operátoru

Je zřejmé, že operátor $0(3)\bullet$ není definován, protože neexistuje celočíselná nezáporná náhodná veličina, která by měla střední hodnotu 0 a rozptyl 3. Pro která α a β je operátor $\alpha(\beta)\bullet$ definován?

Nechť $A := \lfloor \alpha \rfloor \in \mathbb{N}_0$ a $a := \alpha - A \in [0, 1)$, platí $A \leq \alpha < A + 1$.

Minimální rozptyl

Pro celočíselnou nezápornou náhodnou veličinu $Y \sim \{p_k, k \in \mathbb{N}_0\}$ se střední hodnotou $\alpha \geq 0$ budeme hledat pravděpodobnosti $\{p_k, k \in \mathbb{N}_0\}$ tak, aby náhodná veličina Y měla minimální rozptyl.

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \mathbb{E}[Y - \alpha]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \alpha)^2 \cdot p_k = \sum_{k=0}^A (\alpha - k)^2 \cdot p_k + \sum_{k=A+1}^{\infty} (k - \alpha)^2 \cdot p_k \geq \\ &\geq (\alpha - A)^2 \sum_{k=0}^A p_k + (A + 1 - \alpha)^2 \sum_{k=A+1}^{\infty} p_k = (\alpha - A)^2 \cdot \pi + (A + 1 - \alpha)^2 \cdot (1 - \pi) = \text{Var}[Y_0] \end{aligned}$$

Y_0 je náhodná veličina se střední hodnotou α a rozdělením $\mathbb{P}[Y_0 = A] = \pi$ a $\mathbb{P}[Y_0 = A + 1] = 1 - \pi$. Z podmínky na střední hodnotu dopočítáme π .

$$\mathbb{E}[Y_0] = A \cdot \pi + (A + 1) \cdot (1 - \pi) = A + 1 - \pi = \alpha = A + a \quad \Rightarrow \quad \pi = 1 - a$$

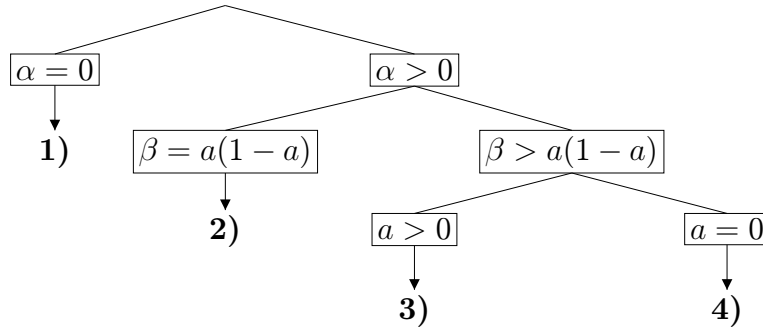
$$\text{Var}[Y_0] = a^2 \cdot (1 - a) + (1 - a)^2 \cdot a = a^2 - 2a^2 + a = a(1 - a)$$

Nejmenší možný rozptyl nezáporné celočíselné náhodné veličiny Y se střední hodnotou α je $a(1 - a)$ a nastává v případě, kdy pro náhodnou veličinu Y platí $p_A = 1 - a, p_{A+1} = a$ a $p_k = 0$ jinak. Operátor $\alpha(\beta)\bullet$ tedy není definován pro $\beta < a(1 - a)$.

Konstrukce zobecněného operátoru

Dále budeme konstruovat nezápornou celočíselnou veličinu Y se střední hodnotou α a rozptylem β . Připomeňme, že $A = \lfloor \alpha \rfloor \in \mathbb{N}_0$ a $a = \alpha - A \in [0, 1)$.

Schéma konstrukce operátoru:



1) $\alpha = 0$

Celočíselná nezáporná náhodná veličina má střední hodnotu rovnou 0 pouze v případě, kdy je konstantně rovná nule. Pak má ale nulový rozptyl, tedy musí nutně platit $\beta = 0$.

2) $\alpha > 0$, $\beta = a(1 - a)$

Jak již bylo dokázáno, hodnota $\beta = a(1 - a)$ je při daném α nejmenší možná hodnota, kdy je operátor definován. V tomto případě je

$$Y = \begin{cases} A & \text{s pravděpodobností } 1 - a \\ A + 1 & \text{s pravděpodobností } a. \end{cases}$$

3) $\alpha > 0$, $\beta > a(1 - a)$, $a > 0$

$$y := \lceil a + \beta/a \rceil \quad c := y - (a + \beta/a) \in [0, 1) \quad \Rightarrow \quad a^2 + \beta = a(y - c) \quad (3.7)$$

$$Y = \begin{cases} A & \text{s pravděpodobností } 1 - p_1 - p_2 \\ A + 1 & \text{s pravděpodobností } p_1 = \frac{ac}{y-1} \\ A + y & \text{s pravděpodobností } p_2 = \frac{\beta + a^2 - a}{y(y-1)}. \end{cases}$$

Protože $\beta > a(1 - a)$, platí $a + \beta/a > a + a(1 - a)/a = 1$ a dále dostaneme $y = \lceil a + \beta/a \rceil \geq a + \beta/a > 1 \Rightarrow y \geq 2$.

Z podmínek $\beta > a(1 - a)$, $y \geq 2$, $a \in (0, 1)$, $c \in [0, 1)$ a (3.7) dostaneme

$$\beta + a^2 - a > 0, \quad p_1 \geq 0, \quad p_2 > 0.$$

Dále ověříme, jestli je součet pravděpodobností p_1 a p_2 menší než 1 (použijeme (3.7)).

$$p_1 + p_2 = \frac{ac}{y-1} + \frac{\beta + a^2 - a}{y(y-1)} = \frac{yac + a(y-c) - a}{y(y-1)} = \frac{a(y-c-c+y-1)}{y(y-1)} = \frac{a(y-1)(c+1)}{y(y-1)} = \frac{a(c+1)}{y} < \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

Pravděpodobnosti p_1 a p_2 jsou dobře definované, můžeme spočítat střední hodnotu a rozptyl. Použijeme vztah $\alpha = A + a$.

$$\begin{aligned}
E[Y] &= A(1 - p_1 - p_2) + (A + 1)p_1 + (A + y)p_2 = A + p_1 + yp_2 = A + \frac{ac}{y-1} + y\frac{\beta+a^2-a}{y(y-1)} = \\
&= A + \frac{ac+a(y-c)-a}{y-1} = A + \frac{ay-a}{y-1} = A + a = \alpha \\
\text{Var}[Y] &= E[Y - \alpha]^2 = (A - \alpha)^2(1 - p_1 - p_2) + (A + 1 - \alpha)^2p_1 + (A + y - \alpha)^2p_2 = \\
&= a^2(1 - p_1 - p_2) + (1 - a)^2p_1 + (y - a)^2p_2 = \\
&= a^2 + p_1(-a^2 + 1 - 2a + a^2) + p_2(-a^2 + y^2 - 2ay + a^2) = \\
&= a^2 + p_1(1 - 2a) + p_2(y^2 - 2ay) = a^2 + \frac{ac(1-2a)}{y-1} + \frac{(\beta+a^2-a)(y-2a)y}{y(y-1)} = \\
&= a^2 + \frac{ac(1-2a)+[a(y-c)-a](y-2a)}{y-1} = a^2 + a\frac{c-2ac+(y-c-1)(y-2a)}{y-1} = \\
&= a^2 + a\frac{c-2ac+y^2-cy-y-2ay+2ac+2a}{y-1} = a^2 + a\frac{y^2-y-cy+c-2ay+2a}{y-1} = \\
&= a^2 + a\frac{(y-1)(y-c-2a)}{y-1} = a^2 + a(y - c) - 2a^2 = a^2 + (\beta + a^2) - 2a^2 = \beta
\end{aligned}$$

4) $\alpha > 0$, $\beta > a(1 - a)$, $a = 0$

$$y := \lceil \beta \rceil \geq \beta \tag{3.8}$$

$$Y = \begin{cases} A - 1 & \text{s pravděpodobností } p_1 = \frac{\beta}{y+1} \\ A & \text{s pravděpodobností } 1 - p_1 - p_2 \\ A + y & \text{s pravděpodobností } p_2 = \frac{\beta}{y(y+1)}. \end{cases}$$

Z podmínky $\beta > 0$ dostaneme

$$y = \lceil \beta \rceil \geq \beta > 0 \Rightarrow y \geq 1$$

$$p_1 > 0, \quad p_2 > 0$$

$$p_1 + p_2 = \frac{\beta}{y+1} + \frac{\beta}{y(y+1)} = \frac{\beta y + \beta}{y(y+1)} = \frac{\beta}{y} \leq \frac{y}{y} = 1$$

Pravděpodobnosti p_1 a p_2 jsou dobře definované. Dále spočítáme střední hodnotu a rozptyl. Protože $a = 0$, platí $A = \alpha$.

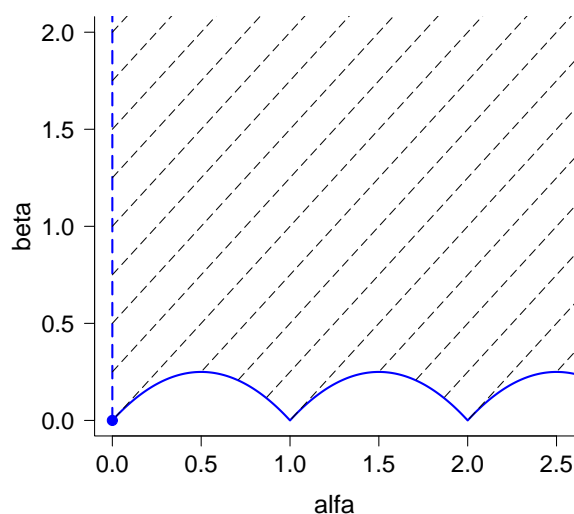
$$E[Y] = (A - 1)p_1 + A(1 - p_1 - p_2) + (A + 1)p_2 = A - p_1 + yp_2 = A - \frac{\beta}{y+1} + y\frac{\beta}{y(y+1)} = A = \alpha$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Y] &= E[Y - \alpha]^2 = (A - 1 - \alpha)^2p_1 + (A - \alpha)^2(1 - p_1 - p_2) + (A + y - \alpha)^2p_2 = \\
&= p_1 + y^2p_2 = \frac{\beta}{y+1} + y^2\frac{\beta}{y(y+1)} = \frac{\beta(y+1)}{y+1} = \beta
\end{aligned}$$

Zkonstruováním zobecněného operátoru jsme dokázali, že definiční obor tohoto operátoru je

$$\mathcal{D}_{\alpha(\beta)\bullet} = \{[0, 0]\} \cup \{[\alpha, \beta]; \alpha > 0, \beta \geq a(1 - a), a = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor\}. \tag{3.9}$$

Poznámka. Když je β mnohem větší než α , dochází k tomu, že také y je mnohem větší než α . Výsledné rozdělení náhodné veličiny Y je potom koncentrováno do dvou



Obrázek 3.1: Definiční obor zobecněného operátoru.

odlehých částí. V různých výběrech z tohoto rozdělení se pak velmi liší odhady střední hodnoty a rozptylu.

V případě $\alpha < \beta$ bude lepší výše zmíněné rozdělení nahradit negativně binomickým rozdělením $Y \sim \text{NBi}(r, p)$, $r > 0$, $p \in (0, 1)$, které je definováno dvěma nezávislými parametry, platí pro něj vztah $E[Y] < \text{Var}[Y]$ a nosičem tohoto rozdělení je množina \mathbb{N}_0 (viz dodatek A).

Ze vztahů $\alpha = E[Y] = \frac{r(1-p)}{p}$ a $\beta = \text{Var}[X] = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{\alpha}{p} > \alpha$ dopočítáme vhodné parametry r a p

$$p = \frac{\alpha}{\beta} \quad r = \frac{\alpha \frac{\alpha}{\beta}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\alpha^2}{\beta - \alpha}. \quad (3.10)$$

Na základě této konstrukce byla naprogramována funkce `goper(x, alpha, beta)` uvedená v dodatku D.

Kapitola 4

Proces GINAR

V této kapitole se blíže podíváme na jeden z modelů nezáporných celočíselných časových řad založený na zavedených zobecněných operátorech. Nejdříve připomeňme, že nezáporná náhodná veličina X s rozdělením $\{p_k, k \in M \subset \mathbb{N}_0\}$, která není skoro jistě rovna nule, má *kladnou* střední hodnotu. Nezáporné celočíselné časové řady tedy nejsou centrované náhodné procesy.

Pro $p \in \mathbb{N}$ je $\text{GINAR}(p)$ (*zobecněný celočíselný nezáporný autoregresní řádu p , generalized integer autoregressive of order p*) náhodná posloupnost tvořená celočíselnými nezápornými náhodnými veličinami, která vyhovuje rovnici

$$X_t = \varphi_1(\alpha_1)_t \bullet X_{t-1} + \varphi_2(\alpha_2)_t \bullet X_{t-2} + \cdots + \varphi_p(\alpha_p)_t \bullet X_{t-p} + Z_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ jsou nezáporné konstanty a $\varphi_p \neq 0$.

Indikátor t u zobecněného operátoru vyjadřuje přirozený předpoklad, že čítací řada u daného operátoru je v novém čase nová, nezávislá na všech ostatních čítacích řadách operátorů v současnosti, v minulosti a samozřejmě i v budoucnosti.

Proces $\{Z_t\}$ je *inovační proces* tvořený nekorelovanými celočíselnými nezápornými náhodnými veličinami s rozdělením π , nezávislý na X_{t-1}, X_{t-2}, \dots a na náhodných operátorech. Označme $\mu_Z = \mathbb{E}[Z_t] > 0$ a $\sigma_Z^2 = \text{Var}[Z_t] < \infty$.

Základními vlastnostmi procesu $\text{GINAR}(p)$ se zabývá článek Latour [14], kde je uvedena následující podmínka existence slabě stacionárního řešení rovnice (4.1). V článku Latour [13] autor dokázal také tvrzení o existenci silně stacionárního vícerozměrného procesu $\text{GINAR}(p)$ s konečnými druhými momenty¹, jehož důsledkem je existence silně stacionárního jednorozměrného procesu $\text{GINAR}(p)$.

Věta 4.1. *Nechť je inovační proces $\{Z_t\}$ tvořen i.i.d. celočíselnými nezápornými náhodnými veličinami s rozdělením π a nechť platí $\varphi_1 + \cdots + \varphi_p < 1$. Potom existuje nezáporný celočíselný slabě stacionární proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vyhovující rovnici (4.1), pro který platí $\text{Cov}(X_s, Z_t) = 0$ pro $s < t$ (proces je kauzální).*

Důkaz. Latour [14, str. 443, Tvrzení 3.1]. □

¹Článek [14] z roku 1998 byl napsán dříve (už v roce 1995) než článek [13] z roku 1997.

V této práci se budeme zabývat pouze slabě stacionárními procesy GINAR(p) s nezávislými stejně rozdělenými inovacemi. Příklad silně stacionárního procesu GINAR(1) je uveden v [14, str. 447].

4.1 Střední hodnota a autokovarianční funkce

Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární proces GINAR(p) s i.i.d. inovacemi. Spočítáme jeho střední hodnotu a autokovarianční funkci (přitom využijeme tvrzení věty 3.6).

Střední hodnota :

$$\mu = E[X_t] = E[\varphi_1(\alpha_1)_t \bullet X_{t-1} + \cdots + \varphi_p(\alpha_1)_t \bullet X_{t-p} + Z_t] = (\varphi_1 + \cdots + \varphi_p)\mu + \mu_Z$$

Tedy

$$\mu = \frac{\mu_Z}{1 - \varphi_1 - \cdots - \varphi_p}. \quad (4.2)$$

Protože střední hodnota procesu GINAR(p) je nezáporná² a $\mu_Z > 0$, dostáváme, že pro každý stacionární proces GINAR(p) musí platit vztah $\varphi_1 + \cdots + \varphi_p < 1$. Tento vztah je ve větě 4.1 při i.i.d. inovacích zároveň jednou podmínkou pro existenci slabě stacionárního kauzálního řešení rovnice (4.1). Podmínku

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_p < 1. \quad (4.3)$$

budeme nazývat *podmínkou stacionarity* procesu GINAR(p). Jak bude dokázáno dále, podmínka stacionarity nám zaručuje také ergodicitu procesu GINAR(p).

Protože $1 - \varphi_1 - \cdots - \varphi_p \in (0, 1)$, dostáváme

$$\mu > \mu_Z, \quad (4.4)$$

tedy střední hodnota slabě stacionárního procesu GINAR(p) je vždy větší než střední hodnota jeho inovací.

Autokovarianční funkce:

Označme

$$R(h) := \text{Cov}[X_t, X_{t-h}]$$

Použitím vztahu $\mu = (\varphi_1 + \cdots + \varphi_p)\mu + \mu_Z$ dostáváme z (4.1)

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^p (\varphi_j(\alpha_j)_t \bullet X_{t-j} - \varphi_j\mu) + (Z_t - \mu_Z)$$

$$E(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu) = \sum_{j=1}^p E(\varphi_j(\alpha_j)_t \bullet X_{t-j} - \varphi_j\mu)(X_{t-h} - \mu) + E(Z_t - \mu_Z)(X_{t-h} - \mu)$$

² X_t jsou nezáporné náhodné veličiny, tedy musí platit $E[X_t] \geq 0$.

$$\text{Cov}[X_t, X_{t-h}] = \sum_{j=1}^p \text{Cov}[\varphi_j(\alpha_j)_t \bullet X_{t-j}, X_{t-h}] + \text{Cov}[Z_t, X_{t-h}] \quad (4.5)$$

Protože zobecněné operátory s indexem t a náhodné veličiny Z_t jsou nezávislé na veličinách X_{t-1}, X_{t-2}, \dots , platí pro $h > 0$ (použití $\text{Cov}[\alpha(\beta) \bullet X, Y] = \alpha \text{Cov}[X, Y]$)
 $\text{Cov}[\varphi_j(\alpha_j)_t \bullet X_{t-j}, X_{t-h}] = \varphi_j \text{Cov}[X_{t-j}, X_{t-h}] = \varphi_j R(h-j)$ a $\text{Cov}[Z_t, X_{t-h}] = 0$.
 Dosazením do (4.5) dostaneme vztah

$$R(h) = \sum_{j=1}^p \varphi_j R(h-j), \quad \text{pro } h > 0. \quad (4.6)$$

Použitím vztahu $\text{Var}[\alpha(\beta) \bullet X] = \beta \text{E}[X] + \alpha^2 \text{Var}[X]$ dostaneme

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\varphi_j(\alpha_j)_t \bullet X_{t-j}, X_t] &= \text{Cov}[\varphi_j(\alpha_j)_t \bullet X_{t-j}, \sum_{i=1}^p \varphi_i(\alpha_i)_t \bullet X_{t-i} + Z_t] = \\ &= \sum_{i=1}^p \text{Cov}[\varphi_j(\alpha_j)_t \bullet X_{t-j}, \varphi_i(\alpha_i)_t \bullet X_{t-i}] = \\ &= \text{Var}[\varphi_j(\alpha_j)_t \bullet X_{t-j}] + \sum_{i=1, i \neq j}^p \text{Cov}[\varphi_j(\alpha_j)_t \bullet X_{t-j}, \varphi_i(\alpha_i)_t \bullet X_{t-i}] = \\ &= \alpha_j \text{E}[X_{t-j}] + \varphi_j^2 \text{Var}[X_{t-j}] + \sum_{i=1, i \neq j}^p \varphi_j \varphi_i \text{Cov}[X_{t-j}, X_{t-i}] = \\ &= \alpha_j \mu + \varphi_j^2 R(0) + \sum_{i=1, i \neq j}^p \varphi_j \varphi_i R(i-j) = \alpha_j \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_j \varphi_i R(i-j) \end{aligned}$$

$$\text{Cov}[Z_t, X_t] = \text{Cov}[Z_t, \sum_{i=1}^p \varphi_i(\alpha_i)_t \bullet X_{t-i} + Z_t] = \text{Var}[Z_t] = \sigma_Z^2$$

Dosazením do (4.5) dostaneme vztah pro $h = 0$

$$\begin{aligned} R(0) &= \sum_{j=1}^p \text{Cov}[\varphi_j(\alpha_j)_t \bullet X_{t-j}, X_t] + \text{Cov}[Z_t, X_t] = \\ &= \sum_{j=1}^p [\alpha_j \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_j \varphi_i R(i-j)] + \sigma_Z^2 = \mu \sum_{j=1}^p \alpha_j + \sum_{i=1}^p \varphi_i \underbrace{\sum_{j=1}^p \varphi_j R(i-j)}_{R(i)} + \sigma_Z^2 = \\ &= \mu \sum_{j=1}^p \alpha_j + \sum_{i=1}^p \varphi_i R(i) + \sigma_Z^2 \end{aligned}$$

Proces GINAR(p) splňuje systém Yule–Walkerových rovnic:

$$R(0) = \varphi_1 R(1) + \dots + \varphi_p R(p) + \mu(\alpha_1 + \dots + \alpha_p) + \sigma_Z^2 \quad (4.7)$$

$$R(h) = \varphi_1 R(h-1) + \dots + \varphi_p R(h-p) \quad \text{pro } h \geq 1. \quad (4.8)$$

Tento systém se shoduje s Yule–Walkerovým systémem rovnic klasického procesu AR(p) splňujícího stochastickou diferenční rovnicí

$$Y_t = \sum_{k=1}^p \varphi_k Y_{t-1} + e_t,$$

kde e_t je bílý šum s rozptylem $\sigma_e^2 = \mu \sum_{j=1}^p \alpha_j + \sigma_Z^2$.

Protože GINAR(p) je reálný proces, platí $R(h) = R(-h)$ a rovnice (4.8) je pro $h = 1, \dots, p$ možné zapsat jako

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(p-1) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(p-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R(p-1) & R(p-2) & \cdots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(p) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Dále označme

$$\mathbf{\Gamma}_p := \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(p-1) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(p-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R(p-1) & R(p-2) & \cdots & R(0) \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\varphi} := (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)^\top \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\gamma}_p := (R(1), R(2), \dots, R(p))^\top. \quad (4.11)$$

Je zřejmé, že $\mathbf{\Gamma}_p = \text{Var}[X_1, \dots, X_p]$. Rovnici (4.9) můžeme zapsat jako $\mathbf{\Gamma}_p \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\gamma}_p$.

Věta 4.2. *Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je reálná stacionární posloupnost s autokovarianční funkcí R , pro kterou platí*

$$R(0) > 0 \quad \text{a} \quad R(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (4.12)$$

Potom je matice $\mathbf{\Gamma}_p$ regulární pro každé $n \in \mathbb{N}$ a platí $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{\Gamma}_p^{-1} \boldsymbol{\gamma}_p$.

Důkaz. Pro centrovanou posloupnost je důkaz uveden v Prášková, Lachout [19, str. 98, Věta 7.3]. Pro stacionární posloupnost s kladnou střední hodnotou μ se důkaz provede obdobně pro posloupnost $Y_t := X_t - \mu$. \square

Řešení Yule–Walkerových rovnic:

Nebudeme řešit přímo systém Yule–Walkerových rovnic (4.7) a (4.8), ale budeme hledat řešení diferenční rovnice pro autokorelace vzniklé vydělením původní diferenční rovnice (4.8) hodnotou $R(0)$ (předpokládáme, že $R(0) > 0$), $r(h) = R(h)/R(0)$, tedy

$$r(h) - \varphi_1 r(h-1) - \cdots - \varphi_p r(h-p) = 0 \quad \text{pro } h \geq 1. \quad (4.13)$$

$R(0)$ pak dopočítáme z rovnice (4.7) jako

$$R(0) = \frac{\mu(\alpha_1 + \cdots + \alpha_p) + \sigma_Z^2}{1 - \varphi_1 r(1) - \cdots - \varphi_p r(p)} = \frac{\sigma_e^2}{1 - \varphi_1 r(1) - \cdots - \varphi_p r(p)}. \quad (4.14)$$

Charakteristický polynom rovnice (4.13) je

$$\varphi(\lambda) = \lambda^p - \varphi_1 \lambda^{p-1} - \cdots - \varphi_{p-1} \lambda - \varphi_p. \quad (4.15)$$

Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ jsou kořeny polynomu $\varphi(\lambda)$, předpokládejme, že jsou všechny vzájemně různé. Z teorie diferenčních rovnic je známo, že obecné řešení této rovnice musí být tvaru

$$r(h) = c_1 \lambda_1^h + c_2 \lambda_2^h + \cdots + c_p \lambda_p^h. \quad (4.16)$$

Pokud mezi kořeny polynomu $\varphi(\lambda)$ existuje k stejných kořenů (BÚNO $\lambda_1 = \dots = \lambda_k$), nahradíme členy $c_1\lambda_1^h + c_2\lambda_2^h + \dots + c_k\lambda_k^h$ členy $c_1\lambda_1^h + c_2h\lambda_1^h + \dots + c_kh^{k-1}\lambda_1^h$. Podobně pro další vícenásobné kořeny.

Konstanty c_1, \dots, c_p určíme z p počátečních podmínek pro $r(0), r(1), \dots, r(p-1)$, které dostaneme vyřešením rovnic (4.13) pro $h = 1, \dots, p-1$ (připomeňme, že $r(h) = r(-h)$ a $r(0) = 1$). Tyto rovnice můžeme přepsat do tvaru soustavy lineárních rovnic pro neznámé $r(1), \dots, r(p)$.

$$\underbrace{\left[\begin{pmatrix} -\varphi_2 & \cdots & -\varphi_{p-1} & -\varphi_p \\ -\varphi_3 & \cdots & -\varphi_p & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\varphi_p & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\varphi_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varphi_{p-2} & -\varphi_{p-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right]}_{\mathbf{C}} \cdot \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(p-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{p-1} \end{pmatrix}$$

Matrice \mathbf{C} má na diagonále prvky $1 - \varphi_2, 1 - \varphi_4, \dots, 1 - \varphi_r, 1, \dots, 1$, kde $r = 2 \cdot \lfloor p/2 \rfloor$.

Definice 4.3. Čtvercová matice $\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ je *ostře diagonálně dominantní*, jestliže pro $i = 1, \dots, n$ platí

$$|m_{ii}| > \sum_{j \neq i} |m_{ij}|. \quad (4.17)$$

Věta 4.4. *Ostře diagonálně dominantní matice je regulární.*

Důkaz. Nechť je matice \mathbf{M} singularní, pak $\exists \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \neq \mathbf{0} : \mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Nechť $|x_k| = \max\{|x_i|, i = 1, \dots, n\}$, určitě $|x_k| \neq 0$ a

$$|m_{kk}| \cdot |x_k| = \left| \sum_{i \neq k} m_{ki} x_i \right| \leq \sum_{i \neq k} |m_{ki}| \cdot |x_i| \leq |x_k| \sum_{i \neq k} |m_{ki}|,$$

vydělením obou stran hodnotou $|x_k|$ dostáváme spor s ostrou dominantností matice \mathbf{M} . \square

Pro matici \mathbf{C} platí

$$|c_{ii}| = \begin{cases} 1 - \varphi_{2i}, & i = 1, \dots, r \\ 1, & i = r + 1, \dots, p \end{cases} \quad \sum_{j \neq i} |c_{ij}| = \begin{cases} \sum_{j \neq i, j \neq 2i} \varphi_j, & i = 1, \dots, r \\ \sum_{j \neq i} \varphi_j, & i = r + 1, \dots, p. \end{cases}$$

Z podmínky $1 > \varphi_1 + \dots + \varphi_p$ (4.3) je zřejmé, že matice \mathbf{C} je ostře diagonálně dominantní a podle věty 4.4 je regulární. Soustava lineárních rovnic má proto jednoznačně určené řešení dané

$$(r(1), \dots, r(p-1))^\top = \mathbf{C}^{-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{p-1})^\top. \quad (4.18)$$

Toto řešení společně s podmínkou $r(0) = 1$ určuje počáteční podmínky diferenční rovnice (4.13), která má potom jednoznačně dané řešení tvaru (4.16), případně upraveného tvaru, pokud existují vícenásobné kořeny polynomu $\varphi(\lambda)$.

4.2 Ergodicita

Definice 4.5. Stacionární posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ se střední hodnotou μ je *ergodická* (podle středu), jestliže pro $n \rightarrow \infty$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \mu. \quad (4.19)$$

Protože většinou máme k dispozici pouze jednu realizaci pozorování náhodného procesu $X_t(\omega)$, je ergodicita velmi důležitá vlastnost, která nám umožňuje použít všechna historická pozorování, která obecně nejsou nezávislá, pro inferenci vlastností každého pozorování.

Kdybychom měli k dispozici více nezávislých realizací náhodného procesu $\{X_t^{(i)}, t \in \mathbb{Z}\}, i = 1, \dots, m$, byl by průřezový průměr $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_t^{(i)}$ pro $\forall t \in \mathbb{Z}$ konzistentním odhadem střední hodnoty.

Věta 4.6. *Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární posloupnost se střední hodnotou μ a autokovarianční funkcí R . Pokud platí*

$$\sum_{t=0}^{\infty} |R(t)| < \infty, \quad (4.20)$$

pak pro $n \rightarrow \infty$ platí

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \mu \quad a \quad n \text{Var}[\bar{X}_n] \longrightarrow \sum_{t=-\infty}^{\infty} R(t) \quad (4.21)$$

Důkaz. Prášková [18, str. 80, Věta 6.2], pouze podmínka $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |R(t)| < \infty$ byla nahrazena ekvivalentní podmínkou (4.20) (ze symetrie $R(h)$). \square

Poznámka. Pokud $R(0) > 0$, můžeme podmínku (4.20) vyjádřit také pomocí autokorelací jako $\sum_{t=0}^{\infty} |r(t)| < \infty$.

Už víme, že pokud jsou všechny kořeny charakteristického polynomu (4.15) různé, je autokorelační funkce procesu GINAR(p) tvaru (4.16). Proto

$$\sum_{t=0}^{\infty} |r(t)| \leq |c_1| \sum_{t=0}^{\infty} |\lambda_1|^t + |c_2| \sum_{t=0}^{\infty} |\lambda_2|^t + \dots + |c_p| \sum_{t=0}^{\infty} |\lambda_p|^t. \quad (4.22)$$

Výraz na pravé straně je konečný, právě když jsou všechny kořeny charakteristického polynomu (4.15) uvnitř jednotkového kruhu.

V případě, že existuje k -násobný kořen λ_i , budou na pravé straně mimo jiné členy $|c_{i1}| \sum_{t=0}^{\infty} |\lambda_i|^t, |c_{i2}| \sum_{t=0}^{\infty} t |\lambda_i|^t, \dots, |c_{ik}| \sum_{t=0}^{\infty} t^{k-1} |\lambda_i|^t$. Tyto součty jsou také konečné v případě, že kořen $|\lambda_i|$ je uvnitř jednotkového kruhu.

Ergodicita procesu GINAR(p) je tedy zaručena, když charakteristický polynom (4.15) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu.

Pro proces GINAR(p) navíc dokážeme, že pro to, aby měl charakteristický polynom (4.15) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu stačí, aby byla splněna podmínka stacionarity pro GINAR(p) $\varphi_1 + \dots + \varphi_p < 1$ (4.3). K tomu ale budeme potřebovat následující větu z komplexní analýzy.

Věta 4.7 (Rouchého věta). *Nechť Γ je křivka v \mathbb{C} , $\langle \Gamma \rangle \subset \mathbb{C}$ označuje množinu bodů křivky. Pro funkci f komplexní proměnné definujeme:*

$N_f \dots$ počet kořenů funkce f v $\text{Int } \Gamma$, $P_f \dots$ počet pólů funkce f v $\text{Int } \Gamma$

Nechť platí

1. *f a g jsou meromorfní funkce na otevřené množině $\Omega \supset \text{Int } \Gamma$
(tj. spojitá zobrazení z \mathbb{S} do \mathbb{S} holomorfní na Ω s výjimkou izolovaných pólů,
 $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je Riemannova sféra komplexních čísel)*
2. *$\langle \Gamma \rangle$ neobsahuje kořeny ani póly funkcí f a g
(tj. $\forall z \in \langle \Gamma \rangle : f(z) \neq 0, g(z) \neq 0, f(z) \neq \infty, g(z) \neq \infty$)*
3. *f a g jsou "blízké" funkce na $\langle \Gamma \rangle$: $\forall z \in \langle \Gamma \rangle : |f(z) - g(z)| < |f(z)|$
(tj. $\forall z \in \langle \Gamma \rangle : g(z) \in U_{|f(z)|}(f(z))$)*

Pak

$$N_f - P_f = N_g - P_g \quad (4.23)$$

Poznámka. k -násobné kořeny (póly) se počítají za k kořenů (pólů)

Důkaz. Veselý [24, str. 165, Věta 8.2.5] □

Důsledek 4.8. *Nechť $\varphi_1 + \dots + \varphi_p < 1$, $\varphi_i \geq 0$ pro $i = 1, \dots, p-1$ a $\varphi_p > 0$. Pak polynom $\varphi(z) = z^p - \varphi_1 z^{p-1} - \dots - \varphi_p$ má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu ($\varphi(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1$).*

Důkaz. Použití Rouchého věty.

$\langle \Gamma \rangle = \{z : |z| = 1\}$ je jednotkový kruh, $f(z) = z^p$. Funkce f a φ jsou polynomy p -tého řádu, mají tedy každá celkem p -kořenů.

Dokážeme, že f a g jsou blízké funkce na $\langle \Gamma \rangle$:

$$\begin{aligned} |f(z) - \varphi(z)| &= |\varphi_1 z^{p-1} + \varphi_2 z^{p-2} + \dots + \varphi_p| \leq \\ &\leq \varphi_1 |z|^{p-1} + \varphi_2 |z|^{p-2} + \dots + \varphi_p = \\ &= \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p < \\ &< 1 = |z|^p = |f(z)| \end{aligned}$$

Funkce f a φ jsou holomorfní na \mathbb{C} , tedy $P_f = P_\varphi = 0$. Protože pro $z \in \langle \Gamma \rangle$ platí³ $|\varphi(z)| = |z^p - \varphi_1 z^{p-1} - \dots - \varphi_p| \geq |z^p| - |\varphi_1 z^{p-1}| - \dots - |\varphi_p| = 1 - \varphi_1 - \dots - \varphi_p > 0$, nemá funkce φ na jednotkovém kruhu žádné kořeny stejně jako funkce f . Všechny předpoklady Rouchéovy věty jsou splněny a platí $N_f = N_\varphi$. Funkce f má jeden p -násobný kořen 0, který je uvnitř jednotkového kruhu, tedy platí $N_f = p$. Z Rouchéovy věty plyne, že funkce φ má právě p kořenů uvnitř jednotkového kruhu, tedy funkce φ má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. □

³Použili jsme vztah $|a + b| \geq |a| - |b|$, neboli
 $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \geq |a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}| - |a_n| \geq |a_1| - |a_2| - \dots - |a_n|$

Stacionární proces GINAR(p) s i.i.d. inovacemi musí splňovat podmínku stacionarity $\varphi_1 + \dots + \varphi_p < 1$. Použitím důsledku 4.8 dostaneme, že charakteristický polynom (4.15) má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Tato podmínka je velmi dobře známá podmínka stacionarity pro klasický model AR(p).⁴ Platí tedy, že podmínka stacionarity procesu GINAR(p) implikuje podmínku stacionarity procesu AR(p).

Důsledek 4.9. *Stacionární proces GINAR(p) s i.i.d. inovacemi je vždy ergodický.*

Důkaz. Zřejmý důsledek předchozích výsledků. □

Poznámka. Rozptyl průměru \bar{X}_n v procesu GINAR(p) můžeme spočítat přesně. Připomeňme, že $\text{Var}[(X_1, \dots, X_n)^\top] = \mathbf{\Gamma}_n = (R(i-j))_{i,j=1,\dots,p}$.

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{X}_n] &= \text{Var}\left[\frac{1}{n}\mathbf{1}_n^\top(X_1, \dots, X_n)\right] = \frac{1}{n^2}\mathbf{1}_n^\top\mathbf{\Gamma}_n\mathbf{1}_n = \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p R(i-j) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1-n}^{n-1} (n-|i|)R(i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1-n}^{n-1} \left(1-\frac{|i|}{n}\right)R(i) = \\ &= \frac{R(0)}{n}\sum_{i=1-n}^{n-1} \left(1-\frac{|i|}{n}\right)r(i) \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.3 AR(p) reprezentace procesu GINAR(p)

Předpokládejme, že $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární proces GINAR(p) s i.i.d. inovacemi.

Nechť $\mathcal{F}_{t-1} := \sigma\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$ je σ -algebra generovaná náhodnými veličinami X_{t-1}, X_{t-2}, \dots , která vyjadřuje známou minulost procesu v čase t . Potom

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^p \varphi_i(\alpha_i)_t \bullet X_{t-i} + Z_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] = \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} + \mu_Z \quad (4.25)$$

Definujme chybu předpovědi veličiny X_t v čase t na základě známé minulosti \mathcal{F}_{t-1}

$$e_t := X_t - \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = X_t - \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} - \mu_Z \in \mathcal{F}_t. \quad (4.26)$$

Věta 4.10 (Vlastnosti e_t). *Pro všechna $t, s \in \mathbb{Z}$ platí*

$$i) \mathbb{E}[e_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0 \text{ (} e_t \text{ jsou martingalové difference); } \mathbb{E}[e_t] = 0$$

$$ii) \mathbb{E}[e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sigma_Z^2; \quad \mathbb{E}[e_t^2] = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mu + \sigma_Z^2 = \sigma_e^2$$

⁴Častěji se uvádí v ekvivalentním tvaru, že polynom $1 - \varphi_1 z - \dots - \varphi_p z^p$ musí mít všechny kořeny vně jednotkového kruhu.

iii) $E[e_t e_s] = 0$ pro $s \neq t$ ($\{e_t\}$ jsou nekorelované)

Důkaz.

$$E[e_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E[X_t - E[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] | \mathcal{F}_{t-1}] = E[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] - E[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$$

$$E[e_t] = E[E[e_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = 0$$

$$\begin{aligned} E[e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] &= E[(X_t - E[X_t | \mathcal{F}_{t-1}])^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \text{Var}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \\ &= \text{Var}\left[\sum_{i=1}^p \varphi_i(\alpha_i)_t \bullet X_{t-i} + Z_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] = \\ &= \text{Cov}\left[\sum_{i=1}^p \varphi_i(\alpha_i)_t \bullet X_{t-i}, \sum_{j=1}^p \varphi_j(\alpha_j)_t \bullet X_{t-j} | \mathcal{F}_{t-1}\right] + \sigma_Z^2 = \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \text{Cov}[\varphi_i(\alpha_i)_t \bullet X_{t-i}, \varphi_j(\alpha_j)_t \bullet X_{t-j} | X_{t-i}, X_{t-j}] + \sigma_Z^2 = \\ &= \sum_{i=1}^p \text{Var}[\varphi_i(\alpha_i)_t \bullet X_{t-i} | X_{t-i}] + \sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sigma_Z^2 \end{aligned}$$

$$E[e_t^2] = E[E[e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]] = E\left[\sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sigma_Z^2\right] = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mu + \sigma_Z^2 = \sigma_e^2 < \infty$$

Pro $s < t$ platí $e_s \in \mathcal{F}_{t-1}$

$$E[e_t e_s] = E[E[e_t e_s | \mathcal{F}_{t-1}]] = E[e_s E[e_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = E[e_s \cdot 0] = 0, \text{ podobně pro } s > t.$$

□

Proces GINAR(p) tedy splňuje stochastickou diferenční rovnici

$$X_t = \mu_Z + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} + e_t, \quad (4.27)$$

kde $E[e_t] = 0$, $\text{Var}[e_t] = \sigma_e^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mu + \sigma_Z^2$, $\text{Cov}[e_s, e_t] = 0$ pro $s \neq t$.

Martingalové diference e_t tvoří nekorelovaný bílý šum se střední hodnotou 0 a rozptylem σ_e^2 . Na rozdíl od inovací Z_t už ale e_t nejsou nezávislé.

Rovnici (4.27) můžeme použitím vztahu $\mu = (\varphi_1 + \dots + \varphi_p)\mu + \mu_Z$ zapsat jako

$$X_t - \mu = \sum_{i=1}^p \varphi_i (X_{t-i} - \mu) + e_t. \quad (4.28)$$

Proces GINAR(p) je tedy možné vyjádřit jako klasický AR(p) proces pro náhodné veličiny $\tilde{X}_t := X_t - \mu$.

Protože podmínka stacionarity (4.3) procesu GINAR(p) implikuje podmínku stacionarity procesu AR(p) splňující rovnici (4.28), má polynom $a(z) = 1 - \varphi_1 z - \dots - \varphi_p z^p$ všechny kořeny vně jednotkového kruhu a $\{\tilde{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je kauzální lineární proces ([19, str. 61, Věta 5.5]), tj. platí

$$\tilde{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e_{t-j}, \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z}, \quad (4.29)$$

kde koeficienty c_j jsou určeny vztahem $c(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j = \frac{1}{a(z)} < \infty$ pro $|z| \leq 1$.

Označíme-li $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_p$ kořeny polynomu $a(z)$, pak platí, že polynom $c(z)$ má poloměr konvergence $R = z_1 > 1$. Platí tedy, že $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$ (posloupnost $\{c_j\}$ je absolutně sčitatelná).

Pro původní proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ platí

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} c_j e_{t-j}, \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z}. \quad (4.30)$$

4.3.1 CLV pro martingalové difference

Věta 4.11 (CLV pro martingalové difference, Brown 1971).

Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je dáno $k_n \in \mathbb{N}$. Uvažujme trojúhelníkové schéma náhodných veličin $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{k_n,n}$ a σ -algeber $\mathcal{F}_{0,n} \subset \mathcal{F}_{1,n} \subset \dots \subset \mathcal{F}_{k_n,n} \subset \mathcal{A}_n$.

Nechť jsou splněny následující předpoklady

i) $\forall n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, k_n$: $X_{k,n}$ je $\mathcal{F}_{k-1,n}$ -měřitelná a $\mathbb{E}[X_{k,n} | \mathcal{F}_{k-1,n}] = 0$

ii) Podmíněná Feller–Lindebergova podmínka

$$\forall \varepsilon > 0: \quad PFL(\varepsilon, n) := \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}[X_{k,n}^2 \mathbf{I}_{\{|X_{k,n}| > \varepsilon\}} | \mathcal{F}_{k-1,n}] \xrightarrow{P} 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty \quad (4.31)$$

iii) $V_n = \sum_{k=1}^{k_n} \text{Var}[X_{k,n} | \mathcal{F}_{k-1,n}] = \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}[X_{k,n}^2 | \mathcal{F}_{k-1,n}] \xrightarrow{P} 1 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty$.

Pak

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{N}(0, 1) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Důkaz. Lachout [11, str. 33, Věta 4.18] □

Věta 4.12 (Ljapunovovy podmínky).

Pro podmíněnou Feller–Lindebergovu podmínku z věty 4.11 je postačující podmíněná Ljapunovova podmínka

$$\exists \delta > 0: \quad PL(\delta, n) := \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}[|X_{k,n}|^{2+\delta} | \mathcal{F}_{k-1,n}] \xrightarrow{P} 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty, \quad (4.32)$$

i nepodmíněná Ljapunovova podmínka

$$\exists \delta > 0: \quad L(\delta, n) := \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}[|X_{k,n}|^{2+\delta}] \longrightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty. \quad (4.33)$$

Důkaz. Nejdříve si odvodíme jeden pomocný vztah. Uvažujme libovolnou náhodnou veličinu Y a σ -algebru \mathcal{F} . Pak platí

$$\forall \delta > 0, \forall c > 0: \quad Y^2 \mathbf{I}_{\{|Y| \geq c\}} c^\delta \leq |Y|^{2+\delta},$$

z čehož plyne

$$\mathbb{E}[Y^2 \mathbf{I}_{\{|Y| \geq c\}} | \mathcal{F}] \leq \frac{1}{c^\delta} \mathbb{E}[|Y|^{2+\delta} | \mathcal{F}]. \quad (4.34)$$

Dále s použitím odvozeného pomocného vztahu (4.34) dokážeme, že splnění podmíněné Ljapunovovy podmínky (4.32) implikuje splnění podmíněné Feller-Lindebergovy podmínky (4.31).

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}[X_{k,n}^2 \mathbf{I}_{\{|X_{k,n}| > \varepsilon\}} | \mathcal{F}_{k-1,n}] \leq \sum_{k=1}^{k_n} \frac{1}{\varepsilon^\delta} \mathbb{E}[|X_{k,n}|^{2+\delta} | \mathcal{F}_{k-1,n}]$$

$$PFL(\varepsilon, n) \leq \frac{1}{\varepsilon^\delta} PL(\delta, n) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{pro všechna } \varepsilon > 0 \text{ a pro } n \rightarrow \infty.$$

Nakonec dokážeme, že splnění Ljapunovovy podmínky (4.33) implikuje splnění podmíněné Ljapunovovy podmínky (4.32) a tedy i splnění podmíněné Feller-Lindebergovy podmínky (4.31).

$$\mathbb{E}|PL(\delta, n)| = \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_{k,n}|^{2+\delta} | \mathcal{F}_{k-1,n}]] = \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}[|X_{k,n}|^{2+\delta}] = L(\delta, n),$$

Protože konvergence v \mathcal{L}_1 implikuje konvergenci v pravděpodobnosti, platí pro $n \rightarrow \infty$

$$L(\delta, n) \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad PL(\delta, n) \xrightarrow{\mathcal{L}_1} 0 \quad \Rightarrow \quad PL(\delta, n) \xrightarrow{P} 0.$$

□

Věta 4.13. *Uvažujme filtraci $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ a \mathcal{F}_t -adaptovaný proces $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tvořený martingalovými diferencemi se stejným rozptylem $\sigma_e^2 < \infty$. Tj. pro každé $t \in \mathbb{Z}$ platí $\mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}_t$, $e_t \in \mathcal{F}_t$, $\mathbb{E}[e_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ a $\mathbb{E}[e_t^2] = \sigma_e^2$. Nechť existuje $\delta > 0$, pro které platí*

$$n^{-\frac{2+\delta}{2}} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[|e_t|^{2+\delta} | \mathcal{F}_{t-1}] \xrightarrow{P} 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty,$$

pak

$$\sqrt{n} \bar{e}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n e_t \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_e^2) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Poznámka. Vzhledem k tomu, že konvergence v \mathcal{L}_1 implikuje konvergenci v pravděpodobnosti, stačí, aby byla splněna podmínka

$$\exists \delta > 0 : \quad n^{-\frac{2+\delta}{2}} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[|e_t|^{2+\delta}] \longrightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

Důkaz. Pro náhodné veličiny $y_{t,n} := \frac{e_t}{\sqrt{n}\sigma_e}$ ověříme předpoklady věty 4.11 ($k_n := n$, $X_{k,n} = y_{t,n}$).

Podmínka i) $E[y_{t,n}|\mathcal{F}_{t-1}] = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_e}E[e_t|\mathcal{F}_{t-1}] = 0$

Podmínka ii) $PL(\delta, n) := \sum_{t=1}^n E[|y_{t,n}|^{2+\delta}|\mathcal{F}_{t-1}] =$
 $= \sigma_e^{-(2+\delta)} n^{-\frac{2+\delta}{2}} \sum_{t=1}^n E[|e_t|^{2+\delta}|\mathcal{F}_{t-1}] \xrightarrow{P} 0$ pro $n \rightarrow \infty$

Podmínka iii) $E|V_n| = E[\sum_{t=1}^n E[y_{t,n}^2|\mathcal{F}_{t-1}]] = \frac{1}{n\sigma_e^2} \sum_{t=1}^n E[e_t^2] = \frac{n\sigma_e^2}{n\sigma_e^2} = 1,$

tj. $V_n \xrightarrow{\mathcal{L}_1} 1 \implies V_n \xrightarrow{P} 1.$

Podmínky věty 4.11 jsou splněny, proto pro $n \rightarrow \infty$ platí

$$\sum_{t=1}^n y_{t,n} = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_e} \sum_{t=1}^n e_t \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1),$$

tedy

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n e_t \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_e^2).$$

□

4.3.2 Asymptotické rozdělení průměru

Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární kauzální proces GINAR(p) s i.i.d. inovacemi $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ splňující (4.1), tedy

$$X_t = \varphi_1(\alpha_1)_t \bullet X_{t-1} + \varphi_2(\alpha_2)_t \bullet X_{t-2} + \cdots + \varphi_p(\alpha_p)_t \bullet X_{t-p} + Z_t,$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ jsou nezáporné konstanty, $\varphi_p \neq 0$ a $\varphi_1 + \cdots + \varphi_p < 1$.

Jak bylo dokázáno, je tento proces zároveň kauzální lineární proces splňující (4.30), tedy

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} c_j e_{t-j} \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z},$$

kde $e_t = X_t - E[X_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ jsou martingalové difference s vlastnostmi $E[e_t] = 0$, $\text{Var}[e_t] = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mu + \sigma_Z^2 = \sigma_e^2$, $\text{Cov}[e_s, e_t] = 0$ pro $s \neq t$ a koeficienty c_j jsou určeny vztahem $c(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j = \frac{1}{a(z)} < \infty$ pro $|z| \leq 1$, $a(z) = 1 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p$. Posloupnost $\{c_j\}$ je absolutně sčitatelná.

Asymptotickou normalitu průměru \bar{X}_n dokážeme podobně jako v Prášková [19, str. 83, Důkaz věty 6.7], ale využijeme centrální limitní větu pro martingalové difference. Také použijeme dvě následující lemmata.

Lemma 4.14 (Cramérova-Sluckého věta). *Nechť pro náhodné veličiny $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$, $\{Y_t, t \in \mathbb{N}\}$ a X platí $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ a $Y_n \xrightarrow{P} 0$. Potom $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.*

Důkaz. Brockwell, Davis [4, str. 205, Tvrzení 6.3.3].

□

Lemma 4.15. *Nechť $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{S_{k,n}, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\psi_k, k \in \mathbb{N}\}$ a ψ jsou náhodné veličiny, pro které platí*

- i) $\forall k \in \mathbb{N}: S_{k,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi_k$ pro $n \rightarrow \infty$
- ii) $\psi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$ pro $k \rightarrow \infty$
- iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\xi_n - S_{k,n}| > \varepsilon) = 0$ pro každé $\varepsilon > 0$

Pak

$$\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi \quad \text{pro } n \rightarrow \infty \quad (4.35)$$

Důkaz. Brockwell, Davis [4, str. 207, Tvrzení 6.3.9]. \square

Věta 4.16. *Nechť pro slabě stacionární proces $\text{GINAR}(p)$ s i.i.d. inovacemi existuje $\delta > 0$ tak, že pro $e_t = X_t - \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ platí pro $n \rightarrow \infty$ podmínka*

$$n^{-\frac{2+\delta}{2}} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[|e_t|^{2+\delta} | \mathcal{F}_{t-1}] \xrightarrow{P} 0. \quad (4.36)$$

Pak pro průměr $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$ platí

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{N}\left(0, \frac{\sum_{i=1}^p \alpha_i \mu + \sigma_Z^2}{(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i)^2}\right).$$

Důkaz. Martingalové diference e_t splňují předpoklady věty 4.13, proto platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n e_t \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{N}(0, \sigma_e^2). \quad (4.37)$$

Definujme náhodné veličiny $U_{k,t} := \sum_{j=0}^k c_j e_{t-j}$ a

$$\begin{aligned} S_{k,n} &:= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n U_{k,t} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \sum_{j=0}^k c_j e_{t-j} = \sum_{j=0}^k \frac{c_j}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n e_{t-j} = \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{c_j}{\sqrt{n}} \left[\sum_{t=1-j}^{n-j} e_t \right] = \sum_{j=0}^k \frac{c_j}{\sqrt{n}} \left[\sum_{t=1}^n e_t + \sum_{t=1-j}^0 e_t - \sum_{t=n-j+1}^n e_t \right] =^5 \\ &= \left(\sum_{j=0}^k c_j \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n e_t + \underbrace{\sum_{j=0}^k \frac{c_j}{\sqrt{n}} \left[\sum_{t=1-j}^0 e_t - \sum_{t=n-j+1}^n e_t \right]}_{=: \zeta_{k,n}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Podle (4.37) a pro pevné k konverguje první člen (4.38) v distribuci k náhodné veličině $\psi_k \sim \mathbb{N}(0, (\sum_{j=0}^k c_j)^2 \sigma_e^2)$. Druhý člen (4.38) označme jako $\zeta_{k,n}$. Protože martingalové

⁵Prázdné součty $(\sum_{t=n+1}^n, \sum_{t=1}^0)$ definujeme jako 0.

diference e_t jsou nekorelované, platí pro všechna $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\zeta_{k,n}| > \varepsilon) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}|\zeta_{k,n}|^2 = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^k c_j \left(\sum_{t=1-j}^0 e_t - \sum_{t=n-j+1}^n e_t \right) \right]^2 = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2 n} \sum_{j=0}^k c_j^2 \left(\sum_{t=1-j}^0 \mathbb{E}[e_t]^2 + \sum_{t=n-j+1}^n \mathbb{E}[e_t]^2 \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2 n} \sum_{j=0}^k c_j^2 \left(\sum_{t=1-j}^0 \sigma_e^2 + \sum_{t=n-j+1}^n \sigma_e^2 \right) = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \sum_{j=0}^k c_j^2 (2j\sigma_e^2) \leq \\ &\leq \frac{2k\sigma_e^2}{\varepsilon^2 n} \sum_{j=0}^k c_j^2 \longrightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že pro $n \rightarrow \infty$ konverguje $\zeta_{k,n}$ v pravděpodobnosti k nule a podle lemmatu 4.14 tedy platí

$$S_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n U_{k,t} \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi_k \sim \mathbb{N} \left(0, \left(\sum_{j=0}^k c_j \right)^2 \sigma_e^2 \right).$$

Z absolutní sčitatelnosti posloupnosti $\{c_j\}$ ($\sum_{j=0}^{\infty} c_j = c(1) = 1/a(1) < \infty$) dostaneme pro $k \rightarrow \infty$

$$\psi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi \sim \mathbb{N} \left(0, \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j \right)^2 \sigma_e^2 \right) = \mathbb{N} \left(0, \frac{\sigma_e^2}{a(1)^2} \right) = \mathbb{N} \left(0, \frac{\sum_{i=1}^p \alpha_i \mu + \sigma_Z^2}{(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i)^2} \right).$$

Náhodné veličiny X_t můžeme rozložit jako

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} c_j e_{t-j} = \mu + \underbrace{\sum_{j=0}^k c_j e_{t-j}}_{= U_{k,t}} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{\infty} c_j e_{t-j}}_{=: V_{k,t}} = \mu + U_{k,t} + V_{k,t}.$$

Dále definujeme náhodné veličiny ξ_n

$$\begin{aligned} \xi_n &:= \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (X_t - \mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n U_{k,t} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n V_{k,t} = \\ &= S_{k,n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n V_{k,t} \end{aligned}$$

Zbývá nám ověřit třetí podmínku lemmatu 4.15. Platí

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\xi_n - S_{k,n}| > \varepsilon) &= \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n V_{k,t} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n V_{k,t} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2 n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \mathbb{E}[V_{k,t} V_{k,s}] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Dříve, než budeme pokračovat v úpravě výrazu (4.39), odvodíme vztah pro $\mathbb{E}[V_{k,t} V_{k,s}]$.

Nechť $t \geq s$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{k,t} V_{k,s}] &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=k+1}^{\infty} c_j e_{t-j} \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i e_{s-i} \right] = \sum_{j=k+1}^{\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} c_j c_i \mathbb{E}[e_{t-j} e_{s-i}] = \\ &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} c_j c_i \delta_{t-j, s-i} \sigma_e^2 = \sum_{i=k+1}^{\infty} c_{t-s+i} c_i \sigma_e^2 = \sigma_e^2 \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i c_{i+t-s}. \end{aligned}$$

Podobně pro $t \leq s$ dostaneme $\mathbb{E}[V_{k,t} V_{k,s}] = \sigma_e^2 \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i c_{i+s-t}$.

Tedy můžeme psát $E[V_{k,t}V_{k,s}] = \sigma_e^2 \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i c_{i+|t-s|}$.

Dále budeme pokračovat v úpravě výrazu (4.39)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2 n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n E[V_{k,t}V_{k,s}] &= \frac{1}{\varepsilon^2 n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \sigma_e^2 \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i c_{i+|t-s|} = \\ &= \frac{\sigma_e^2}{\varepsilon^2 n} \sum_{m=1-n}^{n-1} (n - |m|) \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i c_{i+|m|} \leq \frac{\sigma_e^2}{\varepsilon^2} \sum_{m=1-n}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i c_{i+|m|} \leq \\ &= \frac{\sigma_e^2}{\varepsilon^2} \sum_{m=1-n}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} |c_i| |c_{i+|m|}| \leq \frac{\sigma_e^2}{\varepsilon^2} 2 \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} |c_i| |c_{i+m}| = \\ &= \frac{2\sigma_e^2}{\varepsilon^2} \sum_{i=k+1}^{\infty} |c_i| \sum_{j=i}^{i+n-1} |c_j| \leq \frac{2\sigma_e^2}{\varepsilon^2} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} |c_i| \right)^2 \end{aligned}$$

Protože $\sum_{i=k+1}^{\infty} |c_i|$ je zbytek konvergentní řady, konverguje pravá strana pro všechna $\varepsilon > 0$ a $k \rightarrow \infty$ k nule.

Z lemmatu 4.15 dostáváme, že pro $n \rightarrow \infty$

$$\xi_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{N} \left(0, \frac{\sum_{i=1}^p \alpha_i \mu + \sigma_Z^2}{(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i)^2} \right).$$

□

Věta 4.17. *Nechť existuje konstanta $\kappa < \infty$ tak, že pro všechna $t \in \mathbb{Z}$ platí $E|X_t|^4 \leq \kappa$. Pak je splněna podmínka (4.36) věty 4.16.*

Důkaz. Podle definice jsou X_t a tedy i $E[X_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ nezáporné náhodné veličiny.

$$\begin{aligned} E|e_t|^3 &= E|X_t - E[X_t|\mathcal{F}_{t-1}]|^3 \leq E(X_t + E[X_t|\mathcal{F}_{t-1}])^3 = \\ &= E(X_t^3 + 3X_t^2 E[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] + 3X_t (E[X_t|\mathcal{F}_{t-1}])^2 + (E[X_t|\mathcal{F}_{t-1}])^3) = \\ &= E(X_t^3 + 3X_t^2(\mu_Z + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i}) + 3X_t(\mu_Z + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i})^2 + (\mu_Z + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i})^3) \end{aligned}$$

Výraz na pravé straně je lineární funkcí momentů typu $E[X_s^3]$, $E[X_s^2 X_r]$, $E[X_s X_r]$ a $E[X_s]$.

Ze známých nerovností pro náhodné veličiny X a Y (viz např. [12, str. 27, Důsledky Jensenovy nerovnosti])

$$\sqrt[3]{E[|X|^3]} \leq \sqrt[4]{E[|X|^4]} \quad (4.40)$$

a

$$E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]} \quad (4.41)$$

dostaneme následující vztahy:

$$\begin{aligned} E[X_s^3] &\leq \kappa^{\frac{3}{4}} < \infty, \quad E[X_s^2 X_r] \leq \sqrt{E[X_s^4]E[X_r^2]} \leq \sqrt{\kappa(R(0) + \mu^2)} < \infty \\ E[X_s X_r] &= R(s-t) + \mu^2 < \infty, \quad E[X_s] = \mu < \infty. \end{aligned}$$

Tedy existuje konstanta $\lambda < \infty$, že $E|e_t|^3 < \lambda$.

Z poznámky za větou 4.13 plyne, že pro platnost podmínky (4.36) stačí, aby platilo

$$n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}|e_t|^3 \longrightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

Tedy dostaneme

$$n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}|e_t|^3 < n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n \lambda = n^{-\frac{3}{2}} n \lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

4.3.3 Spektrální hustota procesu GINAR(p)

Vzhledem k uvedené reprezentaci (4.28) procesu GINAR(p) jako AR(p) proces je spektrální hustota podle [18, str. 61, Věta 5.5] dána vztahem

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma_e^2}{2\pi |1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j e^{-ij\lambda}|^2} = \frac{\mu \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sigma_Z^2}{2\pi |1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j e^{-ij\lambda}|^2} \quad \text{pro } \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (4.42)$$

Spektrální hustotu (4.42) můžeme rozložit na součet $p+1$ spektrálních hustot, kde každá je spektrální hustotou AR(p) procesu se stejným autoregresním operátorem a rozptylem bílého šumu rovným postupně $\mu\alpha_1, \dots, \mu\alpha_p$ a σ_Z^2 .

Na proces GINAR(p) se tedy můžeme dívat jako na součet $p+1$ nezávislých AR(p) procesů⁶ se stejnými autoregresními operátory, ale různými rozptyly bílých šumů rovnými $\mu\alpha_1, \dots, \mu\alpha_p$ a σ_Z^2 .

4.4 INAR(p)

Pro $p \in \mathbb{N}$ je proces INAR(p) (celočíslný nezáporný autoregresní řádu p , integer autoregressive of order p) speciálním případem procesu GINAR(p), kde je zobecněný van Harnův operátor nahrazen binomickým operátorem. INAR(p) je tedy nezáporná celočíselná náhodná posloupnost, která vyhovuje stochastické diferenční rovnici

$$X_t = (\varphi_1)_t \circ X_{t-1} + (\varphi_2)_t \circ X_{t-2} + \dots + (\varphi_p)_t \circ X_{t-p} + Z_t, \quad (4.43)$$

kde $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in [0, 1]$ jsou konstanty.

Vzhledem k tomu, že binomický operátor je speciální případ zobecněného van Harnova operátoru, platí pro proces INAR(p) všechny vlastnosti odvozené pro proces GINAR(p).

Proces INAR(p) je speciální případ procesu GINAR(p), kde platí $\alpha_i = \varphi_i(1 - \varphi_i)$ $i = 1, \dots, p$, parametry α_i jsou tedy nejmenší možné (plyne z definičního oboru pro zobecněný operátor a toho, že $\varphi_i < 1$ pro $i = 1, \dots, p$ (důsledek nerovnosti (4.3)).

Výhodou binomického operátoru je, že náhodná veličina $\varphi \circ X | X$ má binomické rozdělení $\text{Bi}(X, \varphi)$, kde můžeme jednoduše spočítat pravděpodobnostní rozdělení pro všechna $X \in \mathbb{N}_0$. V případě zobecněného operátoru nemusí být obecně spočítání

⁶Pro vzájemně nezávislé slabě stacionární posloupnosti X_t a Y_t se spektrálními hustotami f_X a f_Y platí, že spektrální hustota jejich součtu je $f_{X+Y} = f_X + f_Y$.

pravděpodobností rozdělení součtu náhodných veličin jednoduchou záležitostí. Znalost rozdělení umožňuje použití například metody maximální věrohodnosti nebo metod MCMC (viz. například [17]).

Kapitola 5

Odhady parametrů procesu GINAR

V této části se budeme zabývat odhady parametrů $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \mu_Z, \sigma_Z$ slabě stacionárního procesu GINAR(p) splňujícím (4.1). Protože slabě stacionární procesy jsou charakterizovány hlavně střední hodnotou μ a autokovarianční funkcí $R(h)$, budou odhady μ a $R(h)$ hrát hlavní roli při odhadu parametrů procesu.

Předpokládejme, že máme řadu X_1, \dots, X_n pozorování slabě stacionárního procesu GINAR(p) s i.i.d. inovacemi, kde n je mnohem větší než p .

5.1 Odhad střední hodnoty procesu μ

Přirozeným odhadem střední hodnoty μ je výběrový průměr

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t. \quad (5.1)$$

Jak bylo dokázáno, je slabě stacionární proces GINAR(p) s i.i.d. inovacemi vždy ergodický (podle středu). Proto platí $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \mu$ pro $n \rightarrow \infty$.

Rozptyl průměru je $\text{Var}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2} \mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Gamma}_n \mathbf{1}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{|i|}{n}\right) R(i)$, kde $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)^\top$, $\mathbf{\Gamma}_n = \text{Var}[\mathbf{X}_n] = (R(i-j))_{i,j=1,\dots,n}$.

Také jsme dokázali, že pokud existuje konstanta $\kappa < \infty$ tak, že pro všechna $t \in \mathbb{Z}$ platí $E|X_t|^4 \leq \kappa$, pak je asymptotické rozdělení průměru normální a platí

$$\bar{X}_n \stackrel{as.}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sum_{i=1}^p \alpha_i \mu + \sigma_Z^2}{n(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i)^2}\right). \quad (5.2)$$

Výběrový průměr ale není nejlepší nestranný lineární odhad (NNLO nebo BLUE z anglického *best linear unbiased estimator*) střední hodnoty μ . Nejlepším nestranným lineárním odhadem průměru je totiž odhad

$$\hat{\mu}_n = (\mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Gamma}_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Gamma}_n^{-1} \mathbf{X}_n \quad (5.3)$$

s rozplyem $\text{Var}[\hat{\mu}_n] = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1}$.

Nevýhodou tohoto odhadu je, že závisí na neznámé matici Γ_n . Nahradíme-li matici Γ_n jejím odhadem, ztratí odhad $\hat{\mu}_n$ svoje původní dobré vlastnosti. Navíc podle [4] odhadem $\hat{\mu}_n$ asymptoticky moc nezískáme, ani kdybychom matici Γ_n znali, protože pro velká n platí $n\text{Var}(\bar{X}_n) \approx n\text{Var}(\hat{\mu}_n)$.

5.2 Odhad autokovariancí $R(h)$ a autokorelací $r(h)$

Doporučené odhady autokovariancí $R(h)$ a autokorelací $r(h)$ slabě stacionárních procesů jsou podle [4] pro $0 \leq h \leq n-1$ odhady

$$\hat{R}_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+h} - \bar{X}_n) \quad (5.4)$$

a

$$\hat{r}_n(h) = \frac{\hat{R}_n(h)}{\hat{R}_n(0)}. \quad (5.5)$$

5.2.1 Asymptotické vlastnosti odhadu $\hat{R}_n(h)$

Připomeňme, že slabě stacionární proces $\text{GINAR}(p)$ s i.i.d. inovacemi je možné zapsat jako kauzální lineární proces (4.30), neboli

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} c_j e_{t-j}, \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z},$$

kde e_t jsou (nekorelované) martingalové diference a $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$.

Využijeme následující větu.

Věta 5.1. *Uvažujme proces $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} c_j e_{t-j}$, kde $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$ a $E[e_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$.*

1. *Nechť existuje n.v. X s $E[X^2] < \infty$ taková, že pro nějaké $c \in (0, \infty)$ a všechna $t \geq 1$ a $x \geq 0$ platí*

$$P(|e_t| > x) \leq c \cdot P(|X| > x). \quad (5.6)$$

Pak $\bar{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mu$.

Nechť je navíc splněna podmínka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E[e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma^2 > 0, \quad (5.7)$$

pak $\hat{R}_n(h) \xrightarrow{P} R(h)$ (tj. $\hat{R}_n(h)$ je konzistentním odhadem $R(h)$).

2. *Pokud je proces $\{X_t\}$ silně stacionární, pak $\bar{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mu$.*

Pokud navíc platí podmínka (5.7), pak $\hat{R}_n(h) \xrightarrow{s.j.} R(h)$.

Důkaz. Hall, Heyde [6, str. 184, Věta 6.6]. □

Důsledek 5.2. *Pokud je pro slabě stacionární proces GINAR(p) s i.i.d. inovacemi splněna podmínka (5.6), pak $\bar{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mu$ a $\hat{R}_n(h) \xrightarrow{P} R(h)$.*

Důkaz.

Nechť platí (5.6), potom podle věty 5.1 $\bar{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mu$. Stačí tedy ověřit podmínku (5.7).

Podle věty 4.10 platí $E[e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sigma_Z^2$, tedy

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E[e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sigma_Z^2) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-i} \right) + \sigma_Z^2.$$

Podle [23, str. 185, podmínka (3)] je pro posloupnost náhodných veličin Y_n podmínka

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) \text{ pro každé } \varepsilon > 0$$

postačující podmínkou pro $Y_n \xrightarrow{s.j.} 0$.

Protože pro libovolné $s \in \mathbb{Z}$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{X_s}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[X_s]^2}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{R(0) + \mu^2}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

konvergují náhodné veličiny $\frac{X_0}{n}, \frac{X_{-1}}{n}, \dots, \frac{X_{1-i}}{n}, \frac{X_n}{n}, \frac{X_{n-1}}{n}, \dots, \frac{X_{n-i}}{n}$ k nule skoro jistě. Těchto náhodných veličin je konečný počet (celkem dvakrát i), proto i jejich součet konverguje skoro jistě k nule.

Protože $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \xrightarrow{s.j.} \mu$, platí také $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-i} \xrightarrow{s.j.} \mu$ pro $i = 1, \dots, p$, neboť $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-i} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t + \frac{1}{n} [X_0 + X_{-1} + \dots + X_{1-i} - X_n - X_{n-1} - \dots - X_{n-i+1}]$.

Zároveň tedy musí platit

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E[e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{i=1}^p \alpha_i \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-i} \right) + \sigma_Z^2 \xrightarrow{s.j.} \sum_{i=1}^p \alpha_i \mu + \sigma_Z^2 = \sigma_e^2 > 0.$$

□

5.3 Parciální autokorelační funkce

Definice 5.3. *Parciální autokorelační funkce slabě stacionární posloupnosti $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je definována jako*

$$a(k) := \begin{cases} r(k) & \text{pro } k = 0 \text{ a } k = 1, \\ \text{Corr}[X_1 - \tilde{X}_1, X_{1+k} - \tilde{X}_{1+k}] & \text{pro } k > 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

kde \tilde{X}_1 a \tilde{X}_{1+k} jsou nejlepší lineární předpovědi veličin X_1 a X_{1+k} na základě veličin X_2, \dots, X_k .

Poznámka. Hodnota $a(k)$ je parciální korelační koeficient mezi veličinami X_1 a X_{1+k} při pevném $(X_2, \dots, X_k)^\top$.

Věta 5.4. *Pokud je $R(0) > 0$ a $R(t) \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$, platí pro $k \geq 1$*

$$a(k) = \frac{\det(\mathbf{\Gamma}_k^*)}{\det(\mathbf{\Gamma}_k)}, \quad (5.9)$$

kde prvních $k - 1$ sloupců matice $\mathbf{\Gamma}_k^*$ je stejných jako v matici $\mathbf{\Gamma}_k$ a poslední sloupec je nahrazen vektorem $\boldsymbol{\gamma}_k$. Matice $\mathbf{\Gamma}_k$ a vektor $\boldsymbol{\gamma}_k$ jsou definovány v (4.10) a (4.11).

Důkaz. Prášková [18, str. 133, Věta 9.2] □

Poznámka. Vzorec (5.9) se nezmění, když místo matic $\mathbf{\Gamma}_k$ a $\mathbf{\Gamma}_k^*$ budeme uvažovat matice příslušných autokorelací.

Odhad $\hat{a}_n(k)$ parciálních autokorelací $a(k)$ dostaneme tak, že v (5.9) nahradíme $\mathbf{\Gamma}_k$ a $\boldsymbol{\gamma}_k$ za odhady $\hat{\mathbf{\Gamma}}_k$ a $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_k$ (v $\mathbf{\Gamma}_p$ a $\boldsymbol{\gamma}_p$ nahradíme $R(h)$ za $\hat{R}_n(h)$, příp. $r(h)$ za $\hat{r}_n(h)$).

Protože GINAR(p) je kauzální AR(p) proces, platí pro jeho parciální autokorelační funkci $a(k) = 0$ pro $k > p$ [18, str. 132, Poznámka 9.2]. Bod useknutí parciální autokorelační funkce tedy může být vodítkem při určování řádu modelu p stejně jako je tomu u AR(p) modelů.

5.4 Odhady φ

5.4.1 Yule–Walkerův odhad

Připomeňme, že platí $\mathbf{\Gamma}_p \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\gamma}_p$, kde $\mathbf{\Gamma}_p$, $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\gamma}_p$ jsou definovány v (4.10) a (4.11). Tedy za regularity matice $\mathbf{\Gamma}_p$ platí $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{\Gamma}_p^{-1} \boldsymbol{\gamma}_p$. Yule–Walkerův odhad parametru $\boldsymbol{\varphi}$ definujeme jako

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{YW} := \hat{\mathbf{\Gamma}}_p^{-1} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p. \quad (5.10)$$

Protože vektor $\hat{\mathbf{\Gamma}}_p^{-1} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p$ nemusí být nezáporný, upravíme odhad na

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{YW} := \max\{\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{YW}, \mathbf{0}_p\}. \quad (5.11)$$

Poznámka. Pro vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ definujeme jejich maximum jako vektor maxim jednotlivých složek, neboli $\max\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} := (\max\{a_1, b_1\}, \dots, \max\{a_n, b_n\})^\top$.

5.4.2 Odhad metodou nejmenších čtverců

Jak bylo dokázáno, splňuje proces GINAR(p) stochastickou diferenční rovnicí

$$X_t = \mu_Z + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + e_t, \quad (5.12)$$

neboli

$$X_t - \mu = \varphi_1 (X_{t-1} - \mu) + \varphi_2 (X_{t-2} - \mu) + \dots + \varphi_p (X_{t-p} - \mu) + e_t. \quad (5.13)$$

Pro pozorování X_1, X_2, \dots, X_n budeme na základě rovnice (5.13) uvažovat model

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_{p+1} - \bar{X}_n \\ X_{p+2} - \bar{X}_n \\ \vdots \\ X_n - \bar{X}_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} X_p - \bar{X}_n & X_{p-1} - \bar{X}_n & \cdots & X_1 - \bar{X}_n \\ X_{p+1} - \bar{X}_n & X_p - \bar{X}_n & \cdots & X_2 - \bar{X}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n-1} - \bar{X}_n & X_{n-2} - \bar{X}_n & \cdots & X_{n-p} - \bar{X}_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varphi}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_{p+1} \\ \epsilon_{p+2} \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\epsilon}}.$$

Odhad metodou nejmenších čtverců definujeme jako

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{OLS} := (\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^\top \mathbf{y}. \quad (5.14)$$

Záporné prvky opět opravíme na

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{OLS} := \max\{\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{OLS}, \mathbf{0}_p\}. \quad (5.15)$$

Protože matice \mathbf{Z} není deterministická ale náhodná, nejedná se o klasický model lineární regrese. Přesto (viz dále) platí, že $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{OLS}$ je konzistentním odhadem parametru $\boldsymbol{\varphi}$.

Podobným způsobem bychom mohli sestavit model na základě rovnice (5.12) a odhadovat parametr $(\mu_Z, \boldsymbol{\varphi}^\top)^\top$, ale ze simulací plyne, že tímto odhadem dostáváme horší odhady parametru $\boldsymbol{\varphi}$, než když proces nejdříve centrujeme už odhadnutým průměrem \bar{X}_n . Odhad $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{OLS}$ se také v praxi používá při odhadování necentrováných AR procesů nejčastěji.

Poznámka. Nevýhodou všech zmíněných odhadů parametru $\boldsymbol{\varphi}$ je, že pro odhadnuté hodnoty není zaručeno splnění podmínky (4.3), i když pro původní hodnoty tato podmínka splněná je. Jak ale bude ukázáno dále v simulacích, vychází odhady spíše menší, než je skutečná hodnota parametrů.

5.4.3 Konzistence odhadů

Matici \mathbf{Z} zapíšeme ve tvaru $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_{(1)}, \mathbf{z}_{(2)}, \dots, \mathbf{z}_{(p)})$, kde $\mathbf{z}_{(i)} = (X_{p+1-i}, \dots, X_{n-i})^\top$. Pak

$$\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{(1)}^\top \mathbf{z}_{(1)} & \cdots & \mathbf{z}_{(1)}^\top \mathbf{z}_{(p)} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{z}_{(p)}^\top \mathbf{z}_{(1)} & \cdots & \mathbf{z}_{(p)}^\top \mathbf{z}_{(p)} \end{pmatrix}.$$

Pokud je splněna podmínka (5.6), dostaneme z konzistence odhadu $R_n(h)$

$$\frac{\mathbf{z}_{(i)}^\top \mathbf{z}_{(j)}}{n-p} = \frac{1}{n-p} \sum_{k=1}^{n-p} (X_{p+k-i} - \bar{X}_n)(X_{p+k-j} - \bar{X}_n) \xrightarrow{P} R(i-j) \quad \text{při } n \rightarrow \infty$$

$$\frac{\mathbf{z}_{(i)}^\top \mathbf{y}}{n-p} = \frac{1}{n-p} \sum_{k=1}^{n-p} (X_{p+k-i} - \bar{X}_n)(X_{p+k} - \bar{X}_n) \xrightarrow{P} R(i) \quad \text{při } n \rightarrow \infty,$$

tedy při $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z}}{n-p} \xrightarrow{P} \mathbf{\Gamma}_p \quad a \quad \frac{\mathbf{Z}^\top \mathbf{y}}{n-p} \xrightarrow{P} \boldsymbol{\gamma}_p. \quad (5.16)$$

Protože $\mathbf{\Gamma}_p$ a $\boldsymbol{\gamma}_p$ jsou matice a vektor konstant (viz (4.10) a (4.11)), platí

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{OLS} = (\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^\top \mathbf{y} = \left(\frac{\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z}}{n-p} \right)^{-1} \frac{\mathbf{Z}^\top \mathbf{y}}{n-p} \xrightarrow{P} \mathbf{\Gamma}_p^{-1} \boldsymbol{\gamma}_p = \boldsymbol{\varphi}. \quad (5.17)$$

Podobně pro momentový odhad platí

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_M = \hat{\mathbf{\Gamma}}_p^{-1} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p \xrightarrow{P} \mathbf{\Gamma}_p^{-1} \boldsymbol{\gamma}_p = \boldsymbol{\varphi}. \quad (5.18)$$

Protože je vektor $\boldsymbol{\varphi}$ nezáporný, musí také platit $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{OLS} \xrightarrow{P} \boldsymbol{\varphi}$ a $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_M \xrightarrow{P} \boldsymbol{\varphi}$.

5.5 Odhad μ_Z

Pro odhad střední hodnoty inovačního procesu μ_Z použijeme vztah (4.2), podle kterého platí

$$\mu_Z = (1 - \varphi_1 - \dots - \varphi_p)\mu = (1 - \mathbf{1}_p^\top \boldsymbol{\varphi})\mu. \quad (5.19)$$

Parametr μ_Z odhadneme jako ($\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ je některý z konzistentních odhadů $\boldsymbol{\varphi}$)

$$\hat{\mu}_Z = \left(1 - \sum_{i=1}^p \hat{\varphi}_i \right) \bar{X}_n = (1 - \mathbf{1}_p^\top \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \bar{X}_n. \quad (5.20)$$

5.6 Odhad σ_e^2

Protože $\sigma_e^2 = \mu \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sigma_Z^2$, platí podle (4.7)

$$\sigma_e^2 = R(0) - \varphi_1 R(1) - \dots - \varphi_p R(p) = R(0) - \boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{\gamma}_p. \quad (5.21)$$

Parametr $\hat{\sigma}_e^2$ tedy odhadneme jako

$$\hat{\sigma}_e^2 = \hat{R}_n(0) - \hat{\boldsymbol{\varphi}}^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p. \quad (5.22)$$

5.7 Odhad $\boldsymbol{\alpha}$

Střední hodnota μ procesu GINAR(p) na parametru $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^\top$ nezávisí a autokovarianční funkce závisí pouze na $\sum_{i=1}^p \alpha_i = \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{1}_p$ v bodě $h = 0$ vztahem

$$R(0) = \boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{\gamma}_p + \mu \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{1}_p + \sigma_Z^2 = \boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{\gamma}_p + \sigma_e^2.$$

Z uvažovaných parametrů ovlivňují parametry $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ pouze svým součtem parametr σ_e^2 a následně také rozptyl procesu $R(0)$. Parametry σ_e^2 a $R(0)$ můžeme odhadnout

už dříve zmíněnými odhady. Tato skutečnost už naznačuje určité problémy při hledání odhadů parametru α , který ale naštěstí výsledný proces ovlivňuje velmi málo.

Jednou z možností hledání aspoň přibližných odhadů pro α je využití následujících vztahů pro martingalové diference e_t . Podle věty 4.10 ii) platí

$$\mathbb{E}[e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sigma_Z^2 \quad \text{a} \quad \mathbb{E}[e_t^2] = \sigma_e^2. \quad (5.23)$$

Definujme $w_t := e_t^2 - \mathbb{E}[e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = e_t^2 - \sigma_Z^2 - \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}$. Stejným způsobem jako ve větě 4.10 se dá dokázat, že w_t jsou nekorelované martingalové diference. Pro všechna $t, s \in \mathbb{Z}$ tedy platí $\mathbb{E}[w_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ a $\mathbb{E}[w_t w_s] = 0$ pro $s \neq t$.

Odečtením $\sigma_e^2 = \mu \alpha^\top \mathbf{1}_p + \sigma_Z^2$ od rovnice $e_t^2 = \mathbb{E}[e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] + w_t$ dostaneme

$$e_t^2 - \sigma_e^2 = \mathbb{E}[e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] - \mu \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sigma_Z^2 + w_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i (X_{t-i} - \mu) + w_t. \quad (5.24)$$

Na základě vztahu (5.24) budeme uvažovat model

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{e}_{p+1}^2 - \hat{\sigma}_e^2 \\ \hat{e}_{p+2}^2 - \hat{\sigma}_e^2 \\ \vdots \\ \hat{e}_n^2 - \hat{\sigma}_e^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} X_p - \bar{X}_n & X_{p-1} - \bar{X}_n & \cdots & X_1 - \bar{X}_n \\ X_{p+1} - \bar{X}_n & X_p - \bar{X}_n & \cdots & X_2 - \bar{X}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n-1} - \bar{X}_n & X_{n-2} - \bar{X}_n & \cdots & X_{n-p} - \bar{X}_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}}_{\alpha} + \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_{p+1} \\ \omega_{p+2} \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}}_{\omega},$$

kde $\hat{e}_t := X_t - \sum_{i=1}^p \hat{\varphi}_i X_{t-i}$ pro $t = p+1, \dots, n$ je odhad martingalových diferencí e_t na základě některého z odhadů parametru φ . Dále budeme uvažovat $\hat{\varphi} = \tilde{\varphi}_{OLS}$.

Definujme následující odhady parametru α :

$$\hat{\alpha}_0 := (\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^\top \mathbf{v}, \quad (5.25)$$

$$\tilde{\alpha} := \max\{\hat{\alpha}_0, \mathbf{0}_p\}, \quad (5.26)$$

$$\tilde{\alpha}^* := \max\{\hat{\alpha}_0, \hat{\varphi} * (1 - \hat{\varphi})\}, \quad (5.27)$$

kde $\hat{\varphi} * (1 - \hat{\varphi}) = (\hat{\varphi}_1(1 - \hat{\varphi}_1), \dots, \hat{\varphi}_p(1 - \hat{\varphi}_p))^\top$.

V uvažovaném modelu se opět nejedná o klasický model lineární regrese, protože matice \mathbf{Z} je náhodná, dokonce vektor \mathbf{v} je tvořen pouze odhadnutými veličinami e_t (odhady jsou navíc provedeny na základě stejného procesu X_t). Rozptyl veličin w_t z (5.24) závisí na třetích a čtvrtých momentech X_t a protože předpokládáme pouze stacionaritu prvních a druhých momentů, nemusí být rozptyl w_t ani rozptyl ω_t konstantní.

Teoretickými vlastnostmi těchto odhadů se nebudeme zabývat, pouze v numerické části ukážeme na simulacích, jaké dávají výsledky.

Odhady $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\alpha}^*$ jsou určitým vylepšením odhadu $\hat{\alpha}_0$. Odhad $\tilde{\alpha}$ totiž využívá informaci o nezápornosti parametrů α . Odhad $\tilde{\alpha}^*$ zas využívá minimální hodnoty α při daném φ (viz definiční obor zobecněného operátoru, když víme, že $\varphi_i < 1$). Tato

informace je ale zkreslená tím, že skutečnou hodnotu φ neznáme a nejdříve ji musíme odhadnout.

Proces GINAR je zobecněním procesu INAR, založeném na binomickém operátoru. Pro proces INAR platí $\alpha = \varphi * (1 - \varphi)$ a $\varphi \circ X|X$ má binomické rozdělení $\text{Bi}(X, \varphi)$ se známým vzorcem pro určení pravděpodobností. Rozdělení veličiny $\varphi(\alpha) \bullet X|X$ je obecně mnohem složitější (součet X i.i.d. nezáporných celočíselných veličin). Dále také platí, že proces $\text{INAR}(p)$ je speciální případ procesu $\text{GINAR}(p)$, kde jsou parametry $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ nejmenší možné.

Vzhledem k jednoduchosti procesu INAR a toho, že struktura tohoto procesu vzniká často přirozeně (například při pozorování některých systémů hromadné obsluhy), budeme tomuto procesu dávat přednost, pokud odhady parametrů $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ nebudou významně velké.

Parametry $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ budeme považovat za významně velké, pokud bude pro odhady splněna podmínka

$$\sum_{i=1}^p \tilde{\alpha}_i \geq c \cdot \sum_{i=1}^p \hat{\varphi}_i (1 - \hat{\varphi}_i), \quad (5.28)$$

kde c je vhodná konstanta. Při simulacích se nejvíce osvědčilo $2 \leq c \leq 3$. Na základě těchto úvah definujme finální odhad parametru $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^\top$ jako

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} \tilde{\alpha}^* = \max\{\hat{\alpha}_0, \hat{\varphi} * (1 - \hat{\varphi})\} & \text{pokud platí podmínka (5.28),} \\ \hat{\varphi} * (1 - \hat{\varphi}) & \text{jinak.} \end{cases} \quad (5.29)$$

Ukazuje se, že tento odhad má ze všech uvažovaných odhadů nejlepší vlastnosti.

5.8 Odhad σ_Z^2

Na základě vztahu $\sigma_e^2 = \sigma_Z^2 + \mu \sum_{i=1}^p \alpha_i$ odhadneme σ_Z^2 jako

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \hat{\sigma}_e^2 - \bar{X}_n \cdot \sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i. \quad (5.30)$$

Vzhledem k tomu, že odhady parametru α mohou být velmi nepřesné, může se stát, že $\hat{\sigma}_Z^2$ vyjde záporné.

Protože odhady $\hat{\sigma}_e^2$ a \bar{X}_n mají mnohem lepší vlastnosti než $\hat{\alpha}$, bude vhodné v případě, kdy vyjde $\hat{\sigma}_Z^2 < 0$, odhady $\hat{\alpha}_i$ uměle zmenšit na rozumnou hodnotu. V tomto případě se nejčastěji stává, že jedna složka odhadu $\hat{\alpha}_0$ je oproti ostatním složkám několikanásobně větší.

Při simulacích procesů GINAR druhého a třetího řádu se ukázalo, že složky odhadu $\hat{\alpha}_0$ jsou výrazně záporně korelované (korelační koeficienty se pohybovaly kolem hodnoty -0.5). Proto je při úpravě odhadů, kdy se jedna složka zmenší, zároveň dobré ostatní složky zvětšit (například největší složku odhadu vydělit nějakou konstantou větší než jedna a ostatní složky touto konstantou vynásobit).

Kapitola 6

Numerické studie

V této kapitole budeme na základě simulací zkoumat vlastnosti odhadů parametrů procesu GINAR uvedených v minulé kapitole. Nejdříve se budeme zabývat způsobem generování procesu GINAR. Potom vyzkoušíme vlastnosti uvedených odhadů parametrů na 1000 realizacích procesů INAR a GINAR s různě rozdělenými inovacemi.

Nechť $\hat{\theta}$ je odhad parametru θ na základě pozorování X_1, \dots, X_n . Vlastnosti odhadů budeme posuzovat podle *střední čtvercové chyby (mean squared error) odhadu $\hat{\theta}$* , definované jako

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{\theta} - \theta)^2. \quad (6.1)$$

Střední čtvercová chyba podle (6.1) je odhadem *teoretické střední čtvercové chyby* definované jako $E[\hat{\theta} - \theta]^2$, pro kterou platí

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta} - \theta]^2 &= E[\hat{\theta} - E[\hat{\theta}]]^2 + 2 \cdot E[\hat{\theta} - E[\hat{\theta}]] [E[\hat{\theta}] - \theta] + E[E[\hat{\theta}] - \theta]^2 = \\ &= E[\hat{\theta} - E[\hat{\theta}]]^2 + (E[\hat{\theta}] - \theta)^2 = \text{Var}[\hat{\theta}] + (\text{Bias}[\hat{\theta}])^2 \end{aligned}$$

$\text{Bias}[\hat{\theta}] = E[\hat{\theta}] - \theta$ je *vychýlení odhadu $\hat{\theta}$* .

Střední čtvercová chyba tedy posuzuje kvalitu odhadu jak z hlediska rozptylu, tak i z hlediska vychýlení odhadu. Pokud střední čtvercová chyba při $n \rightarrow \infty$ konverguje k nule, pak je odhad konzistentní, tedy platí $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$.

Místo MSE budeme u odhadů uvádět $\sqrt{\text{MSE}}$, která se dá interpretovat jako odchylka odhadu (podobně jako odmocnina z rozptylu).

6.1 Generování procesu GINAR(p)

Generovat pozorování procesu GINAR(p) můžeme pomocí funkce `simGINAR(phi, alpha, z, mz, burn)` uvedené v dodatku D. Kromě parametrů `phi` a `alpha` jsou dalšími vstupními parametry této funkce vektor inovací `z` tvořený nezávislými pozorováními vygenerovanými z nějakého celočíselného nezáporného rozdělení, skutečná střední hodnota tohoto rozdělení `mz` a parametr `burn` určující počet vynechaných pozorování (viz níže). Výstupem je vektor vygenerovaného procesu `x` a teoretická střední

hodnota tohoto procesu \mathbf{mx} .

Ke generování procesu budeme používat už dříve zmíněnou funkci `goper()` také uvedenou v dodatku D. K vygenerování nového pozorování procesu $\text{GINAR}(p)$ je potřeba znát p minulých hodnot. Pokud tyto hodnoty ještě nejsou k dispozici, nahradíme chybějící pozorování vygenerováním hodnoty z Poissonova rozdělení se střední hodnotou $\mu = \mu_Z / (1 - \sum \varphi_i)$ (= teoretická střední hodnota procesu, \mathbf{mx}). Nakonec vynecháme několik prvních pozorování vygenerované řady (= `burn`), abychom snížili vliv tohoto začátku generování procesu.

6.1.1 Inovace

Abychom zjistili, jaký vliv mají různá rozdělení inovací $\{Z_t\}$, budeme používat tři druhy různých rozdělení se stejnou střední hodnotou $\mu_Z = 5$.

1. *Poissonovo rozdělení* $\text{Po}(5)$:

Poissonovo rozdělení má stejnou střední hodnotu a rozptyl rovnou 5.

2. *Negativně binomické rozdělení* $\text{NBi}(1.667, 0.25)$:

Parametry negativně binomického rozdělení jsou $r = \frac{5}{3} = 1,667$ a $p = 0,25$. Střední hodnota tohoto rozdělení je $\frac{r(1-p)}{p} = 5$ a rozptyl je $\frac{r(1-p)}{p^2} = 20$.

3. *Speciální rozdělení*:

Poslední rozdělení bylo zvoleno tak, aby se vzhledem co nejvíce lišilo od prvních dvou rozdělení. Definice rozdělení je uvedena v následující tabulce. Střední hodnota tohoto rozdělení je 5 a rozptyl 31,8.

k	0	1	2	3	4	5	13	14	15
$P(Z = k)$	0,19	0,16	0,15	0,12	0,09	0,04	0,02	0,09	0,14

Tato rozdělení jsou znázorněna na obrázku 6.1. Detaily Poissonova a negativně binomického rozdělení jsou uvedena v dodatku A.

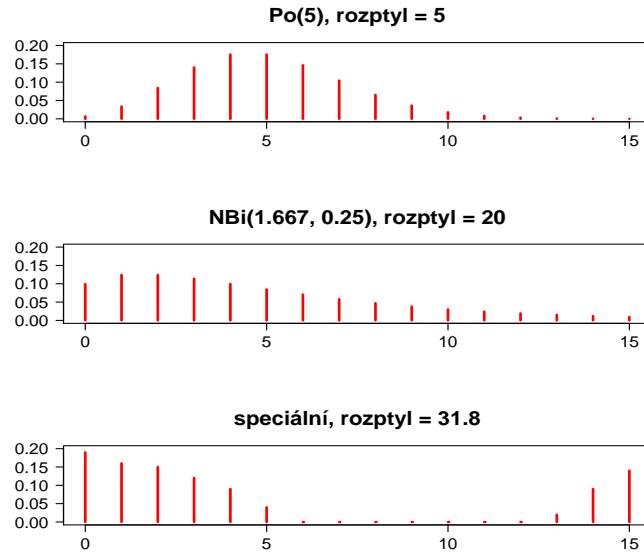
6.1.2 Ukázky procesů

Na obrázcích 6.2(a) a 6.2(b) jsou ukázky vygenerovaných procesů $\text{INAR}(2)$ a $\text{GINAR}(2)$ při použití zmíněných rozdělení inovací a následujících parametrů.

Pro všechny procesy byl použit stejný parametr $\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,28 \end{pmatrix}$ a střední hodnota inovací $\mu_Z = 5$. Skutečná střední hodnota všech procesů je tedy $\mu = \frac{\mu_Z}{1 - \varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{0,27} = 18,519$.

V procesu INAR platí $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \varphi_1(1-\varphi_1) \\ \varphi_2(1-\varphi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2475 \\ 0,2016 \end{pmatrix}$. V procesu GINAR použijeme $\boldsymbol{\alpha} = \binom{3}{3}$.¹ Parametr σ_e^2 dopočítáme ze vztahu $\sigma_e^2 = \mu \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sigma_Z^2$.

¹Přestože je proces INAR speciálním případem procesu GINAR , budeme dále pod pojmem GINAR vždy označovat proces, který není zároveň INAR .



Obrázek 6.1: Použitá rozdělení inovací. Všechna rozdělení mají střední hodnotu 5.

$r(1)$	$r(2)$	$r(3)$	$r(4)$	$r(5)$	$r(6)$	$r(7)$	$r(8)$	$r(9)$	$r(10)$
0,625	0,561	0,428	0,350	0,277	0,223	0,178	0,142	0,114	0,091
$a(1)$	$a(2)$	$a(3)$	$a(4)$	$a(5)$	$a(6)$	$a(7)$	$a(8)$	$a(9)$	$a(10)$
0,625	0,280	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabulka 6.1: Hodnoty autokorelační funkce $r(k)$ a parciální autokorelační funkce $a(k)$ pro $k = 1, \dots, 10$.

Protože mají všechny uvažované procesy stejné parametry $\varphi_1 = 0,45$ a $\varphi_2 = 0,28$, musí mít také stejnou autokorelační funkci vyhovující pro $h \geq 1$ diferenční rovnici

$$r(h) - \varphi_1 r(h-1) - \varphi_2 r(h-2) = 0, \quad (6.2)$$

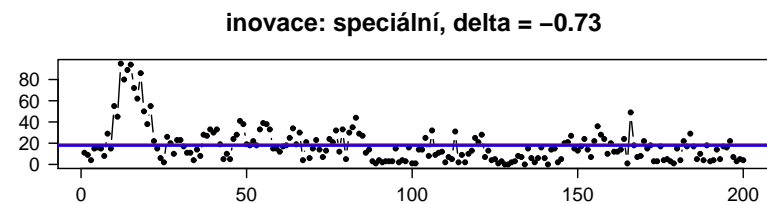
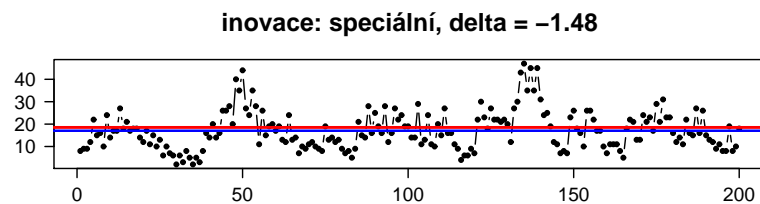
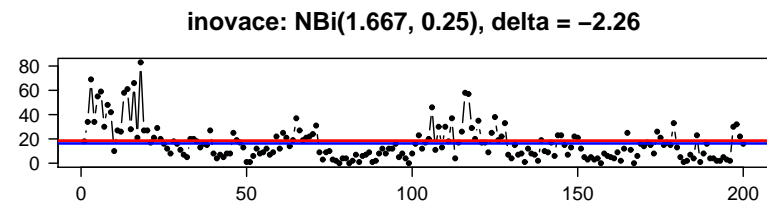
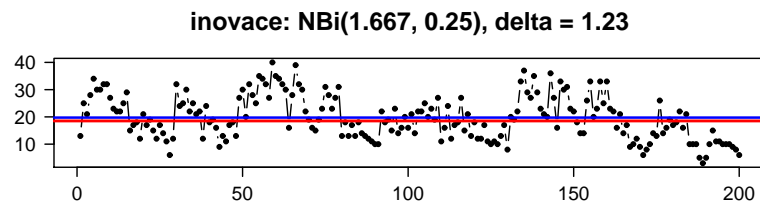
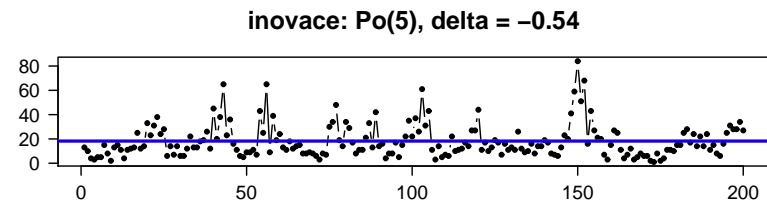
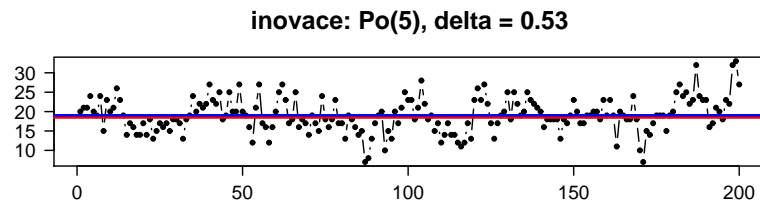
s počátečními podmínkami $r(0) = 1$ a $r(1) - \varphi_1 - \varphi_2 r(1) = 0$. Charakteristický polynom rovnice (6.2) je

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \varphi_1 \lambda - \varphi_2 = \lambda^2 - 0,45 \cdot \lambda - 0,28 = (\lambda - 0,8)(\lambda + 0,35)$$

s kořeny $\lambda_1 = 0,8$ a $\lambda_2 = -0,35$. Řešení rovnice (6.2) tedy musí být tvaru

$$r(h) = c_1 \lambda_1^h + c_2 \lambda_2^h = c_1 \cdot 0,8^h + c_2 \cdot (-0,35)^h.$$

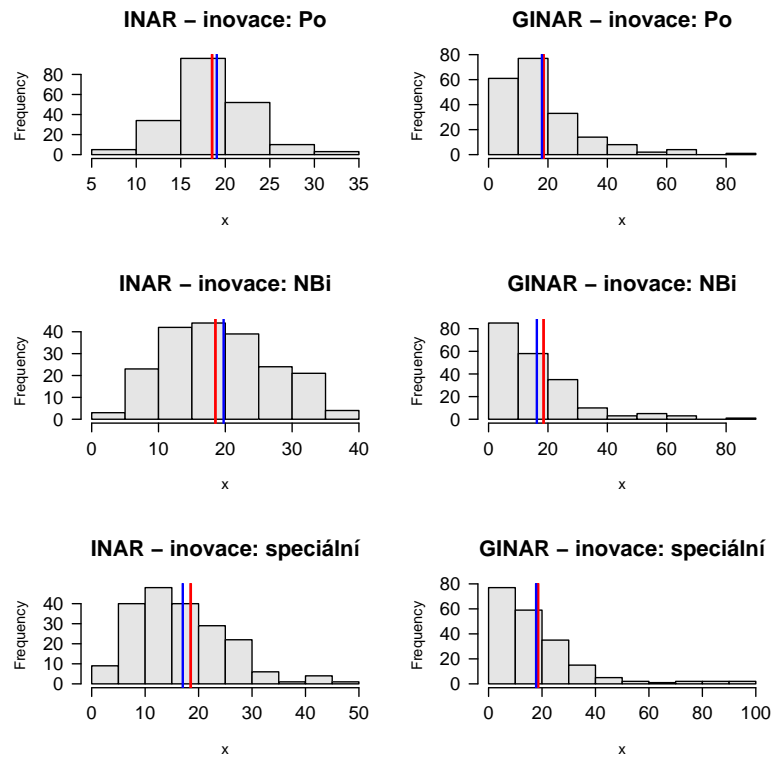
Z počátečních podmínek dopočítáme konstanty c_1 a c_2 :
 $r(0) = c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1 - c_1$



(a) INAR

(b) GINAR

Obrázek 6.2: Ukázky vygenerovaných procesů INAR a GINAR. Červeně je vyznačena skutečná hodnota průměru μ , modře je vyznačen odhad průměru \bar{X}_{200} na základě vygenerované realizace procesu, $\text{delta} = \bar{X}_{200} - \mu$.



Obrázek 6.3: Histogramy vygenerovaných hodnot jedné realizace procesu o délce 200 pozorování. Červeně je vyznačena skutečná střední hodnota procesu μ , modře je vyznačen průměr \bar{X}_{200} na základě vygenerované realizace procesu.

$$r(1) = c_1 \cdot 0,8 + c_2 \cdot (-0,35) = c_1 \cdot 1,15 - 0,35 = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2} = \frac{0,45}{1-0,28} = \frac{5}{8} = 0,625$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{39}{46} = 0,848 \quad \text{a} \quad c_2 = \frac{7}{46} = 0,152.$$

Pro autokorelace tedy platí $r(h) = \frac{39}{46} \cdot 0,8^h + \frac{7}{46} \cdot (-0,35)^h$. Pro spočítání partiálních autokorelací použijeme vzorec (5.9) (matice $\mathbf{\Gamma}_p$ a $\mathbf{\Gamma}_p^*$ nahradíme maticemi příslušných autokorelací). Hodnoty autokorelační a partiální autokorelační funkce pro $k = 1, \dots, 10$ jsou uvedeny v tabulce 6.1.

Podle (4.14) dopočítáme rozptyl procesu jako

$$R(0) = \frac{\sigma_e^2}{1 - \varphi_1 r(1) - \varphi_2 r(2)} = \frac{625}{351} \cdot \sigma_e^2 = 1,781 \cdot \sigma_e^2. \quad (6.3)$$

Hodnoty všech parametrů jsou uvedeny v tabulkách 6.2. Na obrázcích 6.2(a) a 6.2(b) jsou vygenerované realizace o délce 200 pozorování procesů INAR a GINAR s různě rozdělenými inovacemi. Na obrázku 6.3 jsou histogramy těchto realizací procesů.

Hlavní vizuální rozdíl mezi procesy INAR a GINAR je, že zatímco hodnoty procesu INAR leží blízko kolem průměru, je rozdělení hodnot procesu GINAR hodně zešíkmené doprava (většina hodnot leží nalevo od průměru). Je to proto, že proces GINAR má při stejně rozdělených inovacích obecně větší rozptyl plynoucí z větší variability v čí-

μ	18,519		
μ_Z	5,000		
φ_1	0,450		
φ_2	0,280		
		INAR	GINAR
		α_1	0,2475 3,000
		α_2	0,2016 3,000
		$\sum \alpha_i$	0,4491 6,000

inovace	INAR				GINAR			
	σ_Z^2	σ_e^2	$R(0)$	$\sqrt{R(0)}$	σ_Z^2	σ_e^2	$R(0)$	$\sqrt{R(0)}$
Po	5,000	13,317	23,707	4,869	5,000	116,111	206,756	14,379
NBi	20,000	28,317	50,424	7,101	20,000	131,111	233,448	15,279
speciální	31,800	40,117	71,436	8,452	31,800	142,911	254,466	15,952

Tabulka 6.2: Přehled skutečných hodnot parametrů vygenerovaných procesů.

tacích řadách (větší parametry α_i). U procesu INAR jsou parametry α_i pro dané φ_i nejmenší možné. Vzhledem k volbě $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$ v uvažovaných procesech GINAR (několikanásobně větší než v procesech INAR), je tento rozdíl hodně zřetelný.

U obou typů procesů také dochází ke změně tvaru rozdělení na více zešíkmené při zvětšování rozptylu inovací.

6.2 Odhady parametrů μ , $R(0)$, $r(h)$ a $a(h)$

Protože \bar{X}_n je nestranný odhad μ , platí $\text{Var}[\bar{X}_n] = \text{teor. MSE}[\bar{X}_n]$. Pomocí vztahu pro rozptyl \bar{X}_n tedy můžeme spočítat teoretickou MSE podle (4.24) jako

$$\text{teor. MSE}[\bar{X}_{200}] = R(0) \cdot \frac{1}{200} \sum_{i=-199}^{199} \left(1 - \frac{|i|}{200}\right) r(i) \doteq 0,0377 \cdot R(0).$$

inovace	odhad	INAR			GINAR		
		\bar{X}_{200}	$R(0)$	$\hat{R}_{200}(0)$	\bar{X}_{200}	$R(0)$	$\hat{R}_{200}(0)$
Po	průměr	18,492	23,712	22,775	18,663	206,751	202,582
	$\sqrt{\text{MSE}}$	0,935		4,629	2,867		83,461
NBi	průměr	18,527	50,421	48,632	18,435	233,460	222,805
	$\sqrt{\text{MSE}}$	1,379		11,185	2,947		91,548
spec.	průměr	18,498	71,433	68,845	18,499	254,471	244,847
	$\sqrt{\text{MSE}}$	1,667		13,272	3,113		96,383

Tabulka 6.3: Vlastnosti odhadu střední hodnoty $\mu = 18,518$ a rozptylu $R(0)$ na základě simulací (červeně jsou uvedeny skutečné hodnoty). U všech odhadů vychází medián velmi blízko průměru, proto je uveden pouze průměr odhadů.

proces	inovace	odhad	$r(1)$	$r(2)$	$r(3)$	$a(1)$	$a(2)$	$a(3)$
			$\hat{r}_{200}(1)$	$\hat{r}_{200}(2)$	$\hat{r}_{200}(3)$	$\hat{a}_{200}(1)$	$\hat{a}_{200}(2)$	$\hat{a}_{200}(3)$
			0,625	0,561	0,428	0,625	0,280	0,000
INAR	Po	průměr	0,593	0,526	0,383	0,593	0,262	-0,008
		$\sqrt{\text{MSE}}$	0,084	0,085	0,105	0,084	0,068	0,070
	NBi	průměr	0,596	0,527	0,386	0,596	0,259	-0,006
		$\sqrt{\text{MSE}}$	0,083	0,089	0,108	0,083	0,074	0,072
	spec.	průměr	0,597	0,528	0,385	0,597	0,261	-0,010
		$\sqrt{\text{MSE}}$	0,082	0,087	0,109	0,082	0,071	0,073
GINAR	Po	průměr	0,582	0,511	0,366	0,582	0,251	-0,010
		$\sqrt{\text{MSE}}$	0,104	0,112	0,132	0,104	0,090	0,086
	NBi	průměr	0,580	0,511	0,366	0,580	0,252	-0,009
		$\sqrt{\text{MSE}}$	0,104	0,108	0,128	0,104	0,088	0,085
	spec.	průměr	0,580	0,512	0,368	0,580	0,256	-0,009
		$\sqrt{\text{MSE}}$	0,103	0,109	0,126	0,103	0,086	0,076

Tabulka 6.4: Vlastnosti odhadu autokorelací $r(h)$ a parciálních autokorelací $a(h)$ na základě simulací (červeně jsou uvedeny skutečné hodnoty). U všech odhadů vychází medián velmi blízko průměru, proto je uveden pouze průměr odhadů.

Tedy platí, že čtvercová chyba odhadu \bar{X}_{200} v uvažovaných procesech je přímo úměrná rozptylu procesu $R(0)$. Tomu odpovídají i výsledky v tabulce 6.3, kde jsou uvedeny výsledky simulací pro odhady \bar{X}_{200} a $\hat{R}_{200}(0)$ na základě 1000 realizací zmíněných procesů o délce 200 pozorování.

Průměry odhadů \bar{X}_{200} jsou blízko svým skutečným hodnotám, odhad $\hat{R}_{200}(0)$ je záporně vychýlený a dává častěji menší odhady, než je skutečná hodnota rozptylu procesu. Protože jsou oba tyto odhady ovlivněny skutečným rozptylem $R(0)$, závisí jejich čtvercová chyba jak na typu procesu (na parametrech α), tak i na rozdělení inovací (na μ_Z a σ_Z^2). V následující tabulce jsou uvedeny průměrné počty odhadů menších než skutečné hodnoty parametrů (bez ohledu na rozdělení inovací).

	μ	$\hat{R}_{200}(0)$
INAR	50,4%	61,7%
GINAR	53,2%	61,8%

Vlastnosti odhadů $\hat{r}_{200}(h)$ a $\hat{a}_{200}(h)$ pro $h = 1, 2, 3$ jsou uvedeny v tabulce 6.4. Všech 6 procesů má stejnou autokorelační i parciální autokorelační funkci. Všechny průměry odhadů jsou menší než skutečné hodnoty parametrů, odhady tedy mají záporné vychýlení. Je zajímavé, že toto vychýlení je větší u procesů typu GINAR. V následující tabulce jsou uvedeny průměrné počty odhadů menších než je skutečná hodnota parametru v závislosti na typu procesu v 1000 simulacích (bez ohledu na rozdělení simulací). Ve všech případech je ve více než 50% případů odhad parametru pod svojí skutečnou hodnotou, odhady tedy velikosti parametrů $r(h)$ a $a(h)$ spíše podceňují.

	$\hat{r}_{200}(1)$	$\hat{r}_{200}(2)$	$\hat{r}_{200}(3)$	$\hat{a}_{200}(1)$	$\hat{a}_{200}(2)$	$\hat{a}_{200}(3)$
INAR	62,7%	64,8%	66,2%	62,7%	60,2%	54,4%
GINAR	66,8%	68,7%	70,3%	66,8%	63,0%	55,0%

Průměr ani $\sqrt{\text{MSE}}$ odhadů nejsou moc ovlivněny různými rozděleními inovací, pro všechny procesy INAR a i pro všechny procesy GINAR vychází totiž velmi podobně. Drobný rozdíl je v přesnosti odhadů mezi procesy typu INAR a GINAR, pro GINAR vychází u všech odhadů trochu větší čtvercová chyba, což je pravděpodobně způsobeno tím, že uvažované procesy GINAR mají větší rozptyl a tedy dochází k větším nepřesnostem při odhadování průměru, který se v těchto odhadech vyskytuje.

Odhady parametru $a(3)$ se pohybují velmi blízko kolem nuly, jejich čtvercové chyby jsou až na jednu výjimku v porovnání s ostatními parametry v tabulce nejmenší. Podle parciální autokorelační funkce je tedy ve většině případů identifikace druhého řádu modelu velmi dobrá.

6.3 Odhady parametrů φ , μ_Z a σ_e^2

V tabulce 6.5 jsou uvedeny vlastnosti odhadů parametrů φ , μ_Z a σ_e^2 podle použitého odhadu pro φ (Yule–Walkerův odhad (YW) = $\tilde{\varphi}_{YW}$ (5.11) nebo odhad metodou nejmenších čtverců (OLS) = $\tilde{\varphi}_{OLS}$ (5.15)).

Oba dva odhady odhadují parametr φ stejně kvalitně, průměry odhadů i MSE jsou u všech uvažovaných procesů pro YW i OLS odhad skoro stejné. Oba odhady mají záporné vychýlení, v následující tabulce jsou uvedeny průměrné počty odhadů menších než skutečné hodnoty parametrů (bez ohledu na rozdělení inovací).

	$\tilde{\varphi}_{YW_1}$	$\tilde{\varphi}_{YW_2}$	$\tilde{\varphi}_{OLS_1}$	$\tilde{\varphi}_{OLS_2}$
INAR	55,6%	60,2%	55,6%	57,7%
GINAR	58,7%	63,0%	59,0%	61,2%

Ve všech případech je více než 50% odhadů pod svojí skutečnou hodnotou, oba dva odhady tedy velikosti parametrů φ_1 a φ_2 spíše podceňují. Vychýlení odhadů, počet odhadů menších než je skutečná hodnota parametrů i MSE jsou opět větší u procesů typu GINAR. Jsou patrné i malé rozdíly v závislosti na rozdělení inovací.

U všech procesů nedošlo ani jednou v provedených simulacích k tomu, že by některý odhadnutý parametr byl záporný, ani se nestalo, že by byl součet odhadnutých parametrů φ_i větší než jedna.

U odhadů parametrů μ_Z a σ_e^2 je už znatelný i rozdíl podle použitých odhadů parametru φ , při použití OLS odhadu mají odhady $\hat{\mu}_Z$ a $\hat{\sigma}_e^2$ (až na jednu výjimku) menší čtvercovou chybu. Odhad $\hat{\mu}_Z$ má kladné vychýlení a $\hat{\sigma}_e^2$ má záporné vychýlení, v následující tabulce jsou uvedeny průměrné počty odhadů menších než skutečné hodnoty parametrů (bez ohledu na rozdělení inovací).

	$\hat{\mu}_{ZYW}$	$\hat{\mu}_{ZOLS}$	$\hat{\sigma}_{eYW}^2$	$\hat{\sigma}_{eOLS}^2$
INAR	31,9%	34,1%	56,2%	56,7%
GINAR	36,3%	38,8%	53,6%	55,2%

proces	inovace	typ odhadu φ	odhad	φ_1	φ_1	μ_Z	$\hat{\sigma}_e^2$	σ_e^2
				0,450	0,280	5,000		
INAR	Po	YW	průměr	0,438	0,262	5,548	13,250	13,317
			$\sqrt{\text{MSE}}$	0,071	0,068	1,268	1,451	
		OLS	průměr	0,437	0,266	5,472	13,200	13,317
			$\sqrt{\text{MSE}}$	0,072	0,067	1,245	1,446	
	NBi	YW	průměr	0,441	0,259	5,532	28,100	28,317
			$\sqrt{\text{MSE}}$	0,073	0,074	1,338	4,207	
		OLS	průměr	0,441	0,264	5,456	27,992	28,317
			$\sqrt{\text{MSE}}$	0,073	0,073	1,320	4,189	
spec.	YW	průměr	0,441	0,261	5,508	39,789	40,117	
		$\sqrt{\text{MSE}}$	0,070	0,071	1,353	4,127		
		OLS	průměr	0,440	0,265	5,441	39,651	40,117
			$\sqrt{\text{MSE}}$	0,071	0,071	1,338	4,130	
GINAR	Po	YW	průměr	0,436	0,251	5,752	116,816	116,111
			$\sqrt{\text{MSE}}$	0,087	0,090	1,546	34,055	
		OLS	průměr	0,435	0,255	5,677	116,398	116,111
			$\sqrt{\text{MSE}}$	0,088	0,090	1,514	33,881	
	NBi	YW	průměr	0,434	0,252	5,681	128,855	131,111
			$\sqrt{\text{MSE}}$	0,090	0,088	1,450	35,638	
		OLS	průměr	0,434	0,256	5,618	128,447	131,111
			$\sqrt{\text{MSE}}$	0,092	0,088	1,434	35,537	
spec.	YW	průměr	0,432	0,256	5,672	141,265	142,911	
		$\sqrt{\text{MSE}}$	0,085	0,086	1,469	35,947		
		OLS	průměr	0,431	0,260	5,600	140,775	142,911
			$\sqrt{\text{MSE}}$	0,085	0,085	1,441	35,763	

Tabulka 6.5: Vlastnosti odhadů parametrů φ , μ_Z a σ_e^2 na základě simulací (červeně jsou uvedeny skutečné hodnoty). U všech odhadů vychází medián velmi blízko průměru, proto je uveden pouze průměr odhadů.

Použití odhadů YW a OLS vede k velmi podobným výsledkům (tento výsledek odpovídá tomu, že oba dva odhady mají stejné asymptotické rozdělení a jsou si strukturou velmi podobné, jak byl ukázáno v teoretické části o odhadech). Odhad OLS se ale v některých situacích ukazuje o něco lepší, proto budeme dále vždy pro odhad parametru φ používat odhad $\tilde{\varphi}_{OLS}$.

6.4 Odhady parametrů α a σ_Z^2

V tabulce 6.6 jsou pro srovnání uvedeny průměrné $\sqrt{\text{MSE}}$ složek odhadů $\hat{\alpha}_0$, $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\alpha}^*$ definovaných v (5.25)-(5.27) a součtů složek těchto parametrů, tučně jsou zvýrazněny nejmenší z těchto tří hodnot. Modře jsou uvedeny průměrné $\sqrt{\text{MSE}}$ složek finálního odhadu $\hat{\alpha}$ definovaného v (5.29), kde $c = 2, 5$.

proces	inovace	$\hat{\alpha}_0$	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\alpha}^*$	$\hat{\alpha}$	$\sum \hat{\alpha}_{0i}$	$\sum \tilde{\alpha}_i$	$\sum \tilde{\alpha}_i^*$	$\sum \hat{\alpha}_i$
INAR	Po	0,360	0,286	0,252	<i>0,080</i>	0,327	0,305	0,364	<i>0,126</i>
	NBi	0,694	0,487	0,464	<i>0,352</i>	0,652	0,584	0,663	<i>0,506</i>
	spec.	0,559	0,387	0,358	<i>0,197</i>	0,510	0,430	0,505	<i>0,278</i>
GINAR	Po	2,317	2,131	2,102	<i>2,105</i>	2,335	2,287	2,274	<i>2,287</i>
	NBi	2,279	2,127	2,097	<i>2,099</i>	2,410	2,353	2,335	<i>2,344</i>
	spec.	2,257	2,080	2,048	<i>2,050</i>	2,279	2,218	2,200	<i>2,207</i>

Tabulka 6.6: Průměrné $\sqrt{\text{MSE}}$ pro různé odhady α a $\sum \alpha_i$ na základě simulací.

Zajímavé je, že v případě odhadů jednotlivých složek má u všech uvažovaných procesů nejlepší vlastnosti odhad $\tilde{\alpha}^*$, kde jsou hodnoty odhadů $\hat{\alpha}_0$ upraveny s využitím odhadnuté minimální hodnoty těchto parametrů. Pokud je cílem odhad $\sum_{i=1}^p \alpha_i$, ukazuje se v případě procesu INAR lepším odhadem $\sum_{i=1}^p \tilde{\alpha}_i$ než $\sum_{i=1}^p \tilde{\alpha}_i^*$ (proto byl právě tento součet použit v podmínce (5.28)).

U všech odhadů vychází MSE součtu mnohem menší součet MSE jednotlivých složek. Důvodem je záporná korelace mezi složkami odhadů parametru α (v případě nekorelovanosti by platila rovnost). Korelace složek $\hat{\alpha}_{01}$ a $\hat{\alpha}_{02}$ odhadu $\hat{\alpha}_0$ jsou uvedeny v následující tabulce.

inovace	INAR	GINAR
Po	-0,59	-0,57
NBi	-0,57	-0,51
Spec.	-0,60	-0,58

Odhad $\hat{\alpha}$ má v uvažovaných procesech typu INAR mnohem menší $\sqrt{\text{MSE}}$ než ostatní odhady, přitom v procesech GINAR není jeho $\sqrt{\text{MSE}}$ o mnoho větší než $\sqrt{\text{MSE}}$ odhadu $\tilde{\alpha}^*$. Jeho další výhodou je, že pokud tomu data dostatečně odpovídají, upřednostňuje jednodušší model INAR.

V následující tabulce jsou uvedeny počty případů, kdy byl proces na základě podmínky (5.28) s konstantou $c = 2, 5$ odhadnut jako INAR. Připomeňme, že výsledky jsou založeny na 1000 simulacích všech procesů o délce 200 pozorování.

inovace	Po	NBi	Spec.
INAR	97,2%	89,6%	95,2%
GINAR	1,1%	1,1%	0,9%

			α_1	α_1	$\sum \alpha_i$			
		INAR	0.248	0.202	0.449			
		GINAR	3.000	3.000	6.000			
proces	inovace	odhad	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\sum \hat{\alpha}_i$	$\hat{\sigma}_Z^2$	σ_Z^2	$\hat{\sigma}_Z^2 < 0$
INAR	Po	průměr	0,249	0,198	0,447	4,928		
		medián	0,246	0,195	0,436	5,122	5,000	1,4%
		$\sqrt{\text{MSE}}$	0,081	0,079	0,126	2,602		
	NBi	průměr	0,339	0,266	0,605	16,750		
		medián	0,246	0,197	0,443	18,781	20,000	8,5%
		$\sqrt{\text{MSE}}$	0,361	0,343	0,506	9,620		
	spec.	průměr	0,280	0,216	0,496	30,496		
		medián	0,246	0,196	0,440	31,272	31,800	0%
		$\sqrt{\text{MSE}}$	0,205	0,188	0,278	6,024		
GINAR	Po	průměr	2,600	2,594	5,194	17,769		
		medián	2,243	2,287	4,902	19,529	5,000	24,7%
		$\sqrt{\text{MSE}}$	2,107	2,103	2,287	36,479		
	NBi	průměr	2,550	2,635	5,185	30,788		
		medián	2,271	2,301	4,870	32,291	20,000	12,6%
		$\sqrt{\text{MSE}}$	2,007	2,191	2,344	33,982		
	spec.	průměr	2,558	2,561	5,118	44,433		
		medián	2,289	2,263	4,815	46,011	31,800	6,6%
		$\sqrt{\text{MSE}}$	2,028	2,071	2,207	33,919		

Tabulka 6.7: Vlastnosti odhadu parametrů α a σ_Z^2 na základě simulací (červeně jsou uvedeny skutečné hodnoty).

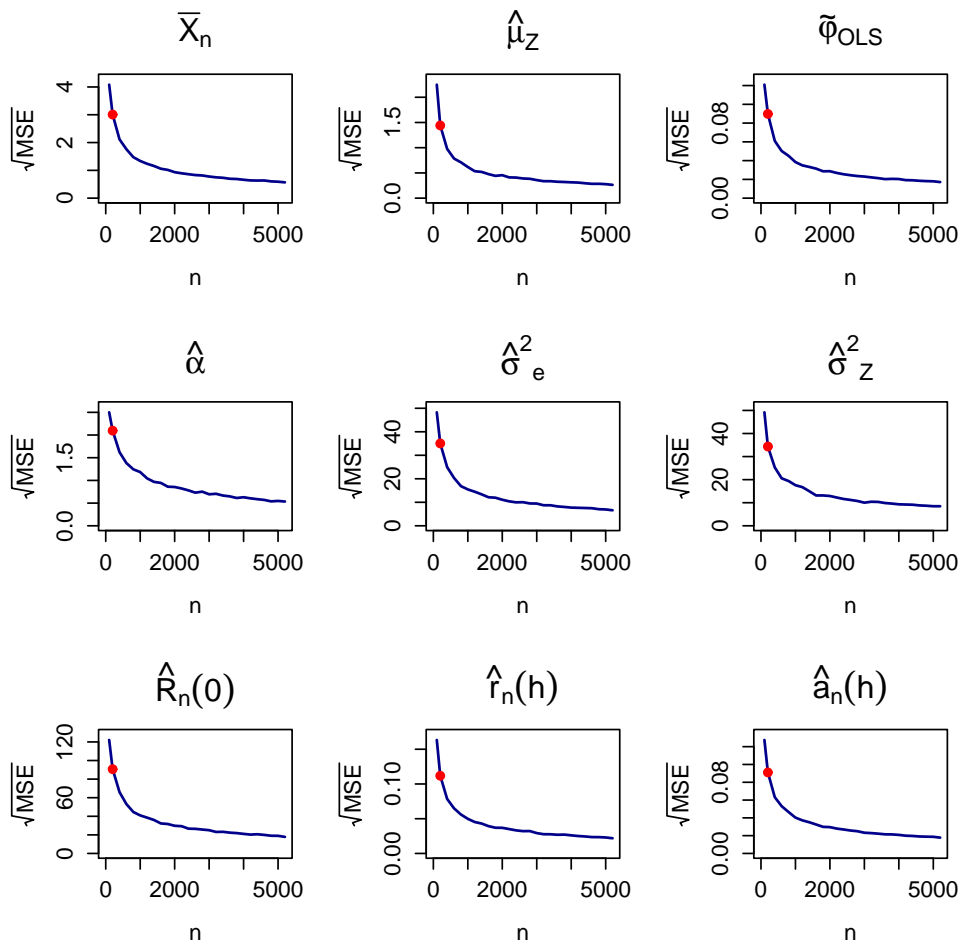
Detailní vlastnosti vlastnosti odhadů parametrů α (pouze pro odhad $\hat{\alpha}$) a σ_Z^2 jsou uvedeny v tabulce 6.7. Na rozdíl od předchozích tabulek je zde uveden i medián odhadů, který je u odhadů $\hat{\alpha}_i$ mnohem menší než průměr.

Přestože jsme odhadem $\hat{\alpha}$ podstatně vylepšili čtvercovou chybu odhadů (viz tabulka 6.6), je $\sqrt{\text{MSE}}$ pořád hodně vysoká a odhady jsou velmi nepřesné (výjimkou je proces INAR s Poissonovými inovacemi, kde je $\sqrt{\text{MSE}}$ mnohem menší než u ostatních procesů). Dokonce dochází poměrně často k tomu, že je odhad $\hat{\sigma}_Z^2$ menší než nula (viz poslední sloupec tabulky 6.7).

Jak už bylo poznamenáno v teoretické části odhadů, je parametry α a σ_Z^2 těžké odhadnout, protože proces ovlivňují jen přeneseně přes $\sigma_e^2 = \sigma_Z^2 + \mu \sum_{i=1}^p \alpha_i$. Pokud bychom se na tyto procesy dívali jako na AR procesy, je σ_e^2 rozptyl bílého šumu. Pokud vyjdou záporné nebo i těžce intepretovatelné výsledky (například když je jeden odhad blízko nuly a druhý řádově jednotky nebo desítky), bude určitě lepší za parametry α a σ_Z^2 zvolit nějaké rozumnější hodnoty tak, aby platily vztahy $\hat{\sigma}_e^2 = \sigma_Z^2 + \mu \sum_{i=1}^p \alpha_i$ a $\sigma_Z^2 > 0$.

6.5 Závislost $\sqrt{\text{MSE}}$ na počtu pozorování

Na obrázku 6.4 je zobrazena závislost $\sqrt{\text{MSE}}$ na počtu pozorování n . Hodnoty byly získány tak, že pro různá n bylo vygenerováno 1000 realizací² procesu GINAR s negativně binomickým rozdělením inovací. Kvůli možnosti srovnání byly zachovány všechny parametry uvažované v předchozích simulacích. V grafech jsou červeně zobrazeny hodnoty pro délku procesu $n = 200$ použitou u předchozích simulací. U vícerozměrných parametrů jako φ , α jsou uvažovány průměry $\sqrt{\text{MSE}}$ jednotlivých složek, u autokorelací a parciálních autokorelací jsou uvedeny průměry $\sqrt{\text{MSE}}$ odhadu funkcí v bodech $h = 1, 2, 3$. Z grafů je vidět, že závislost MSE na počtu pozorování n je u všech odhadů klesající. Tento pokles je velmi výrazný do cca $n = 1000$, dále už zvětšení počtu pozorování n nemá na snížení $\sqrt{\text{MSE}}$ velký vliv.



Obrázek 6.4: Závislost $\sqrt{\text{MSE}}$ na počtu pozorování n . Červeně jsou vyznačeny výsledky pro $n = 200$.

²Pro n byly použity hodnoty 100, 200, 400, 600, ..., 5000, 5200.

Kapitola 7

Analýza reálných dat

7.1 Popis dat

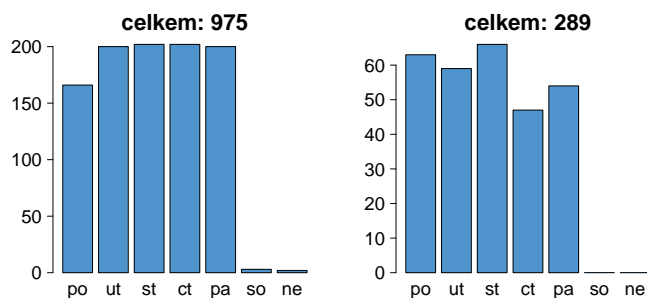
Použitá data pocházejí ze speciální aplikace České spořitelny sloužící pro sběr dat o operačním riziku¹. Mezi operační riziko spadá velké množství různých událostí, jako například různé chyby zaměstnanců (špatně vyplacená hotovost klientovi, peníze poslané na jiný účet), selhání či výpadky systémů (i nefunkční internet může způsobit zavření pobočky, která potom utrpí ztrátu rovnou ušlému zisku), podvody klientů, zničení bankomatu, přepadení pobočky, soudní výlohy atd. .

Každý zaměstnanec, který se setká s nějakou událostí operačního rizika, má povinnost o této události ve zmíněné aplikaci vytvořit hlášení. V tomto hlášení je zaměstnanec povinen vyplnit všechny požadované údaje a přiložit veškeré dokumenty, aby mohla být oddělením operačního rizika, které zároveň sleduje správnost a kompletnost vyplněných údajů, vyčíslena příslušná ztráta. Nově založené hlášení je v aplikaci evidováno jako rozpracované do doby, než je ve finálním stavu se všemi povinnými přílohami připraveno na další zpracování. Doba od vytvoření hlášení do finálního uložení k dalšímu zpracování trvá někdy i několik dní.

Poskytnutá data jsou z časového rozmezí od 1.1.2006 do 2.7.2007 a tvoří je tabulka s údaji: identifikační číslo hlášení, datum změny stavu a identifikační číslo stavu. Cílem analýzy bude modelovat denní počty aktuálně vytvářených hlášení, tj. počty hlášení, které se na konci dne nachází ve stavu rozpracované. V této skupině se objeví pouze hlášení, jejichž příprava zabere více než jeden den, většinou se tedy jedná o závažnější události operačního rizika, u kterých se dá i následně předpokládat větší časová náročnost při dalším zpracování.

Na obrázcích 7.1(a) a 7.1(b) jsou četnosti vytváření nových hlášení v závislosti na dni v týdnu. Na obrázku 7.1(a) jsou všechna nová hlášení ze sledovaného období, na obrázku 7.1(b) jsou pouze nová hlášení, jejichž příprava zabrala více než jeden den (tato hlášení se objeví v další analýze). Na základě dat byla vytvořena časová

¹Definice operačního rizika v České spořitelně (uvedená ve Výroční zprávě 2006):
Operační riziko je riziko ztráty vlivem nepřiměřenosti či selhání vnitřních procesů, lidského faktoru nebo systémů, či riziko ztráty vlivem vnějších událostí včetně rizika ztráty banky v důsledku porušení či nenaplnění právní normy.



(a) Všechna hlášení.

(b) Pouze hlášení vytvářená déle než jeden den.

Obrázek 7.1: Četnosti vytváření hlášení podle dne v týdnu v době od 1.1.2006 do 2.7.2007.

řada počtů hlášení v pracovních dnech od 1.1.2006 do 2.7.2007, které se na konci dne nachází ve stavu rozpracované. Na modelování této časové řady se velmi dobře hodí proces INAR, příp. GINAR, protože se jedná o celočíselná nezáporná pozorování, která určitě závisí na hodnotách z předchozích dnů. Výhodou této časové řady je, že můžeme zároveň analyzovat také rozdělení inovačního procesu tvořeného nově vytvořenými hlášeními a výsledky porovnat s odhadnutými parametry procesu GINAR. Výsledná časová řada a její autokorelační a parciální autokorelační funkce jsou zobrazeny na obr. 7.2.

7.2 Odhad parametrů procesu GINAR

Na základě tvaru parciální autokorelační funkce useknuté v bodě 1 (viz. obr. 7.2) budeme řadu modelovat procesem GINAR prvního řádu ($p = 1$). Pro odhad použijeme funkci `ginar.est(x, p, c)` uvedenou v dodatku D (funkce byla naprogramována na základě předchozích výsledků). Vstupy této funkce jsou časová řada x , řád modelu p a konstanta c z odhadu parametru α (viz. (5.28)). Pro odhad použijeme $c = 2, 5$.

Délka časové řady je $n = 378$ pozorování. V následující tabulce jsou uvedeny odhadnuté hodnoty parametrů.

\bar{X}_n	$\tilde{\varphi}_{YW}$	$\tilde{\varphi}_{OLS}$	$\hat{\sigma}_e^2$	$\hat{R}(0)$	$\hat{\mu}_Z$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}_Z^2$	INAR
1,9418	0,6778	0,6783	1,5475	2,8643	0,6246	0,2182	1,1238	ano

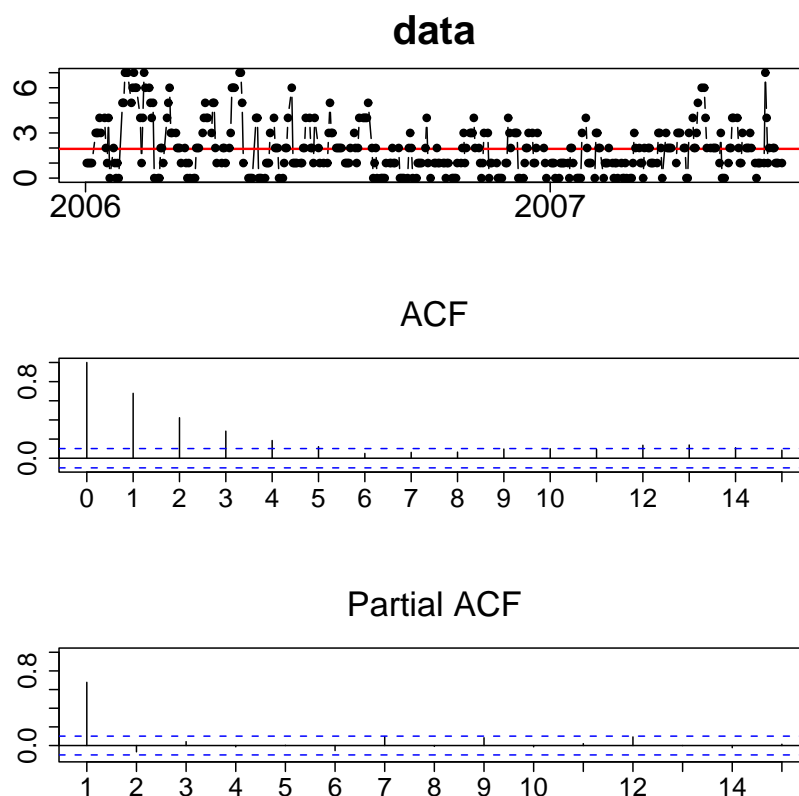
Protože $\tilde{\alpha} = 0,3243$, dostaneme podle podmínky (5.28):

$$\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\varphi}_{OLS}(1 - \tilde{\varphi}_{OLS})} = \frac{0,3243}{0,6783 \cdot (1 - 0,6783)} \doteq 1,4863 < c = 2,5.$$

Pro časovou řadu tedy můžeme použít jednodušší model INAR(1) tvaru

$$X_t = 0,6783 \circ X_{t-1} + Z_t,$$

kde $E[Z_t] = 0,6246$ a $\text{Var}[Z_t] = 1,1238$.



Obrázek 7.2: Denní počty hlášení, které se na konci dne nachází ve stavu rozpracované.

7.3 Rozdělení inovací

Budeme předpokládat, že *inovace*, neboli denní počty (uvažujeme pouze pracovní dny) nově vytvořených formulářů, jejichž zpracování trvá déle než jeden den, jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Naším cílem bude určit rozdělení inovací.

Statistické vlastnosti inovací:

Počet pozorování $n = 378$, průměr = 0,7646, rozptyl = 1,0187 (Pro srovnání: odhadnuté parametry procesu GINAR jsou $\hat{\mu}_Z = 0,6246$ a $\hat{\sigma}_Z^2 = 1,1238$).

Pozorované hodnoty:

hodnota	0	1	2	3	4	5	6
četnost	195	114	43	18	6	1	1

Pro určení rozdělení použijeme funkci `goodfit(x, type, method)` z R-knihovny `library(vcd)`, která provádí testy dobré shody pro binomické, Poissonovo a negativně binomické rozdělení. U této funkce můžeme zvolit buď χ^2 -testy dobré shody, nebo testy založené na metodě maximální věrohodnosti. Protože v případě malého průměru nemusí být aproximace χ^2 -rozdělením velmi dobrá (doporučuje se průměr větší než 5), použijeme metodu maximální věrohodnosti.

```

> summary(gf.po <- goodfit(z, type="poisson", method="ML") )
Goodness-of-fit test for poisson distribution

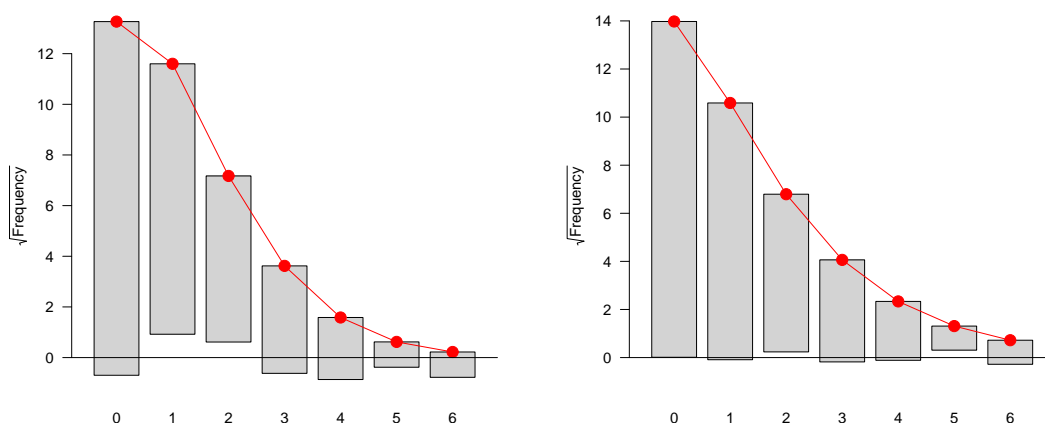
                X^2 df    P(> X^2)
Likelihood Ratio 16.71912  5 0.005064484
> summary(gf.nbi <- goodfit(z, type="nbinomial", method="ML") )
Goodness-of-fit test for nbinomial distribution

                X^2 df    P(> X^2)
Likelihood Ratio  1.567692  4 0.8145869
> gf.nbi$par
$size
[1] 2.300427
$prob
[1] 0.7505428

```

Na základě provedených testů zamítáme na hladině 5% hypotézu, že inovace pocházejí z Poissonova rozdělení (p-hodnota 0,005). Hypotézu, že inovace pocházejí z negativně binomického rozdělení na hladině 5% nemůžeme zamítnout (p-hodnota 0,815). Odhadnuté parametry negativně binomického rozdělení jsou $r = 2,3004$ (parametr `size`) a $p = 0,7505$ (parametr `prob`) (viz dodatek A). Shoda pozorování s Poissonovým a negativně binomickým rozdělením je dobře vidět na obrázcích 7.3(a) a 7.3(b), kde jsou porovnány očekávané četnosti při uvažovaném rozdělení (červený graf) a pozorované četnosti (šedé obdélníky). Místo četností jsou pro lepší přehlednost uvažovány odmocniny z četností.

V případě použití χ^2 -testu dobré shody (`method="MinChisq"`) vychází p-hodnota v případě Poissonova rozdělení 0,000 a v případě negativně binomického 0,937.



(a) Poissonovo rozdělení.

(b) Negativně binomické rozdělení.

Obrázek 7.3: Srovnání pozorovaných a očekávaných četností v případě daného rozdělení (hodnoty na ose y jsou odmocniny z četností).

Kapitola 8

Vektorové GINAR procesy

Pomocí zobecněných maticových operátorů můžeme definovat vícerozměrnou verzi procesu GINAR(p), proces VGINAR(p) (*vector generalized integer autoregressive of order p*), jako posloupnost k -rozměrných nezáporných celočíselných náhodných vektorů vyhovujících rovnici

$$\mathbf{X}_t = \sum_{i=1}^p \Phi_i(\mathbf{A}_i)_t \bullet \mathbf{X}_{t-i} + \mathbf{Z}_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (8.1)$$

kde $\Phi_1, \dots, \Phi_p, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$ jsou $k \times k$ matice nezáporných konstant a $\Phi_p \neq \mathbf{0}_{k \times k}$.

Indikátor t u zobecněného maticového operátoru opět vyjadřuje předpoklad, že všechny čítací řady všech maticových operátorů jsou v novém čase nové, nezávislé na všech ostatních čítacích řadách operátorů v současnosti, v minulosti a samozřejmě i v budoucnosti.

Proces $\{\mathbf{Z}_t\}$ je *inovační proces* tvořený nekorelovanými celočíselnými nezápornými k -rozměrnými vektory s rozdělením $\boldsymbol{\pi}$, nezávislý na $\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{X}_{t-2}, \dots$ a náhodných operátorech. Označme $\boldsymbol{\mu}_Z = \mathbb{E}[\mathbf{Z}_t] > \mathbf{0}_k$ a $\boldsymbol{\Sigma}_Z = \text{Var}[\mathbf{Z}_t] < \infty^1$.

Nechť $\mathbf{Y}_t := (\mathbf{X}_t^\top, \dots, \mathbf{X}_{t-p+1}^\top)^\top \in \mathbb{N}_0^{kp}$, $\mathbf{W}_t := (\mathbf{Z}_t^\top, \mathbf{0}_k^\top, \dots, \mathbf{0}_k^\top)^\top \in \mathbb{N}_0^{kp}$ a

$$\Phi(\mathbf{A})_\bullet := \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{A}_1) & \Phi_2(\mathbf{A}_2) & \cdots & \Phi_{p-1}(\mathbf{A}_{p-1}) & \Phi_p(\mathbf{A}_p) \\ \mathbf{I}_k(\mathbf{0}_{k \times k}) & \mathbf{0}_{k \times k}(\mathbf{0}_{k \times k}) & \cdots & \mathbf{0}_{k \times k}(\mathbf{0}_{k \times k}) & \mathbf{0}_{k \times k}(\mathbf{0}_{k \times k}) \\ \mathbf{0}_{k \times k}(\mathbf{0}_{k \times k}) & \mathbf{I}_k(\mathbf{0}_{k \times k}) & \cdots & \mathbf{0}_{k \times k}(\mathbf{0}_{k \times k}) & \mathbf{0}_{k \times k}(\mathbf{0}_{k \times k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{k \times k}(\mathbf{0}_{k \times k}) & \mathbf{0}_{k \times k}(\mathbf{0}_{k \times k}) & \cdots & \mathbf{I}_k(\mathbf{0}_{k \times k}) & \mathbf{0}_{k \times k}(\mathbf{0}_{k \times k}) \end{pmatrix}}_{\text{matice } kp \times kp} \bullet$$

Rovnici (8.1) můžeme zapsat jako kp -rozměrný proces VGINAR(1) (připomeňme vztahy $\mathbf{I}_k(\mathbf{0}_{k \times k}) \bullet \mathbf{X} = \mathbf{X}$ a $\mathbf{0}_{k \times k}(\mathbf{0}_{k \times k}) \bullet \mathbf{X} = \mathbf{0}_k$, viz. věta 3.7)

$$\mathbf{Y}_t = \Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{W}_t. \quad (8.2)$$

¹Pro vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ znamená, že pro všechny složky vektorů platí vztah $a_i \geq b_i$ a aspoň pro jednu složku je nerovnost ostrá.

Označení $\boldsymbol{\Sigma} < \infty$ znamená, že matice $\boldsymbol{\Sigma}$ má všechny prvky konečné.

Podobně jako v případě vektorových AR procesů (viz. [15, str.11]) i v případě vektorového procesu GINAR platí, že všechny výsledky stačí odvodit pro proces prvního řádu [13, str. 232]. Původní rovnici (8.1) dostaneme z (8.2) vynásobením obou stran zleva maticí $(\mathbf{I}_k, \mathbf{0}_{k \times k}, \dots, \mathbf{0}_{k \times k})$.

Dále budeme uvažovat proces (8.1) pro $p = 1$. Místo matic Φ_1 a \mathbf{A}_1 budeme psát pouze Φ a \mathbf{A} .

Věta 8.1. *Nechť je inovační proces $\{\mathbf{Z}_t\}$ v procesu VGINAR(1) tvořen i.i.d. celočíselnými nezápornými náhodnými vektory s rozdělením π a nechť má polynom $\det(\mathbf{I} - \Phi z)$ všechny kořeny vně jednotkového kruhu. Potom existuje nezáporný celočíselný silně stacionární proces s konečnými druhými momenty splňující $\mathbf{X}_t = \Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t, t \in \mathbb{Z}$, pro který platí $\text{Cov}(\mathbf{X}_s, \mathbf{Z}_t) = \mathbf{0}$ pro $s < t$ (proces je kauzální). Tento proces je určen jednoznačně skoro jistě.*

Důkaz. Latour [13, str. 236, Tvrzení 3.1]. □

Poznámka. Polynom $\det(\lambda \mathbf{I} - \Phi)$ je charakteristickým polynomem matice Φ , kořeny tohoto polynomu jsou vlastní čísla matice Φ , označme je $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Kořeny polynomu $\det(\mathbf{I} - \Phi z)$ označme z_1, \dots, z_k , platí $|z_i| > 1, i = 1, \dots, k$. Protože $\det(\mathbf{I} - \Phi z) = z^k \det(\frac{1}{z} \mathbf{I} - \Phi)$, platí pro vlastní čísla matice Φ vztahy $\lambda_i = \frac{1}{z_i}, i = 1, \dots, k$. Z $|z_i| > 1$ dostáváme, že $|\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, k$.

8.1 Střední hodnota a autokorelační funkce

Nechť $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární k -rozměrný proces VGINAR(1) s i.i.d. inovacemi. Spočítáme jeho střední hodnotu a autokovarianční funkci. Budeme používat tvrzení věty 3.7.

Střední hodnota :

Protože je proces $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nezáporný, musí být nezáporný také vektor střední hodnoty $\boldsymbol{\mu}$. Zřejmě

$$\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{X}_t] = E[\Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t] = \Phi \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}_Z$$

Tedy

$$(\mathbf{I} - \Phi) \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_Z. \tag{8.3}$$

Hledání nezáporného vektoru $\boldsymbol{\mu}$ vyhovujícímu (8.3) spadá do teorie řešení soustav tvaru

$$(\rho \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{x} \geq 0, \tag{8.4}$$

kde \mathbf{A} je nezáporná čtvercová matice, \mathbf{c} je nezáporný vektor a $\rho \in [0, \infty)$. Teorie řešitelnosti těchto soustav je popsána například v [25, str. 46-63].

Věta 8.2. *Nechť λ je v absolutní hodnotě největší vlastní číslo nezáporné čtvercové matice \mathbf{A} ($|\lambda|$ = spektrální poloměr matice \mathbf{A}) a $\rho = 1$. Potom platí, že λ je největší nezáporné číslo matice \mathbf{A} . Následující podmínky jsou ekvivalentní*

- i) $\lambda < 1$
- ii) *Soustava (8.4) je řešitelná pro libovolný nezáporný vektor \mathbf{c} .*
- iii) *Existuje kladný vektor \mathbf{c} (tj. všechny složky c_i jsou kladné), tak že je (8.4) řešitelná.*
- iv) *Matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ je nezáporně invertibilní (tj. je regulární a prvky inverzní matice jsou nezáporné) a platí*

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n$$

Důkaz. Zimmermann [25, str. 58, Poznámka 9.6 (shrnutí předchozích vět pro $\rho = 1$)]. □

Vraťme se k rovnici (8.3). Matice Φ je nezáporná. Předpokládejme, že polynom $\det(\mathbf{I} - \Phi z)$ má všechny kořeny vně jednotkového kruhu. Potom podle věty 8.1 existuje slabě stacionární (dokonce striktně stacionární) kauzální proces VGINAR(1) a podle poznámky za větou 8.1 platí, že všechna vlastní čísla matice Φ jsou v absolutní hodnotě menší než 1. Podle věty 8.2 tedy pro všechny nezáporné pravé strany μ_Z existuje nezáporný vektor

$$\mu = (\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \mu_Z. \quad (8.5)$$

Autokovarianční funkce:

$$\mathbf{R}(h) := \text{Cov}[\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-h}] = \mathbb{E} \left[(\mathbf{X}_t - \mathbb{E}[\mathbf{X}_t]) (\mathbf{X}_{t-h} - \mathbb{E}[\mathbf{X}_{t-h}])^\top \right] \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

Použitím vztahu $\mu = \Phi \mu + \mu_Z$ dostáváme z (8.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t - \mu &= (\Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1} - \Phi \mu) + (\mathbf{Z}_t - \mu_Z) \\ \mathbb{E} \left[(\mathbf{X}_t - \mu) (\mathbf{X}_{t-h} - \mu)^\top \right] &= \mathbb{E} \left[(\Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1} - \Phi \mu) (\mathbf{X}_{t-h} - \mu)^\top \right] + \\ &\quad + \mathbb{E} \left[(\mathbf{Z}_t - \mu_Z) (\mathbf{X}_{t-h} - \mu)^\top \right] \\ \text{Cov}[\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-h}] &= \text{Cov}[\Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{X}_{t-h}] + \text{Cov}[\mathbf{Z}_t, \mathbf{X}_{t-h}] \end{aligned} \quad (8.6)$$

Protože zobecněné operátory s indexem t a náhodné vektory \mathbf{Z}_t jsou nezávislé na vektorech $\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{X}_{t-2}, \dots$, platí pro $h > 0$: $\text{Cov}[\mathbf{Z}_t, \mathbf{X}_{t-h}] = 0$ a

$$\text{Cov}[\Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{X}_{t-h}] = \text{Cov}[\Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{I}(0) \bullet \mathbf{X}_{t-h}] = \Phi \text{Cov}[\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{X}_{t-h}].$$

Tedy dosazením do (8.6) dostaneme pro $h > 0$

$$\mathbf{R}(h) = \Phi \mathbf{R}(h-1) = \Phi^h \mathbf{R}(0). \quad (8.7)$$

Pro $h = 0$ platí (pro vektor \mathbf{v} je $\text{diag}(\mathbf{v})$ diagonální matice s diagonálou \mathbf{v})

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{X}_t] &= \text{Cov}[\Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1}, \Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t] = \\ &= \text{Var}[\Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1}] = \text{diag}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}) + \Phi \text{Var}[\mathbf{X}_{t-1}] \Phi^\top = \text{diag}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}) + \Phi \mathbf{R}(0) \Phi^\top \\ \text{Cov}[\mathbf{Z}_t, \mathbf{X}_t] &= \text{Cov}[\mathbf{Z}_t, \Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t] = \text{Var}[\mathbf{Z}_t] = \boldsymbol{\Sigma}_Z \end{aligned}$$

Tedy

$$\mathbf{R}(0) = \text{diag}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}) + \Phi \mathbf{R}(0) \Phi^\top + \boldsymbol{\Sigma}_Z. \quad (8.8)$$

Autokorelační funkce má stejný tvar jako autokorelační funkce procesu VAR(1) (vektorový autoregresní) s varianční maticí bílého šumu rovnou $\boldsymbol{\Sigma}_e := \text{diag}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\Sigma}_Z$. Stejným způsobem jako u VAR(1) v [15, str. 22] můžeme psát

$$\text{vec}(\mathbf{R}(0)) = \text{vec}(\Phi \mathbf{R}(0) \Phi^\top) + \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_e) = (\Phi \otimes \Phi) \text{vec}(\mathbf{R}(0)) + \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_e).$$

Pro rozptyl tedy platí

$$\text{vec}(\mathbf{R}(0)) = (\mathbf{I}_{k^2} - \Phi \otimes \Phi)^{-1} \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_e) = (\mathbf{I}_{k^2} - \Phi \otimes \Phi)^{-1} \text{vec}(\text{diag}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\Sigma}_Z), \quad (8.9)$$

kde definice a vlastnosti Kroneckerova součinu \otimes a operátoru vec jsou uvedeny v dodatku C.

Matice $\Phi \otimes \Phi$ má vlastní čísla rovny součinům vlastních čísel matice Φ . Pokud má tedy polynom $\det(\mathbf{I} - \Phi z)$ všechny kořeny vně jednotkového kruhu, jsou vlastní čísla matice Φ a tedy i matice $\Phi \otimes \Phi$ v absolutní hodnotě menší než jedna a matice $\mathbf{I}_{k^2} - \Phi \otimes \Phi$ je regulární, neboť $\det(\mathbf{I}_{k^2} - \Phi \otimes \Phi) \neq 0$.

8.2 VAR(1) reprezentace procesu VGINAR(1)

Uvažujme slabě stacionární k -rozměrný proces VGINAR(1) $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ s i.i.d. inovacemi. Podobně jako u procesu GINAR(p) můžeme dokázat, že VGINAR(1) je k -rozměrný VAR(1) (vektorový autoregresní) proces.

$$\text{E}[\mathbf{X}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \text{E}[\Phi(\mathbf{A})_t \bullet \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \Phi \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\mu}_Z, \quad (8.10)$$

kde $\mathcal{F}_{t-1} := \sigma\{\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{X}_{t-2}, \dots\}$. Definujme chybu předpovědi veličiny \mathbf{X}_t v čase t na základě známé minulosti \mathcal{F}_{t-1} jako (připomeňme $\boldsymbol{\mu}_Z = \boldsymbol{\mu} - \Phi \boldsymbol{\mu}$)

$$\mathbf{e}_t := \mathbf{X}_t - \text{E}[\mathbf{X}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbf{X}_t - \Phi \mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_Z = (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) - \Phi(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}). \quad (8.11)$$

Podobně jako ve větě 4.10 platí

$$\text{E}[\mathbf{e}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \text{E}[\text{E}[\mathbf{X}_t | \mathcal{F}_{t-1}] - \Phi \mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_Z] = \mathbf{0}_k \quad \text{E}[\mathbf{e}_t] = \mathbf{0}_k.$$

Pro $s < t$

$$\text{E}[\mathbf{e}_s \mathbf{e}_t^\top | \mathcal{F}_{t-1}] = \text{E}[\mathbf{e}_s \text{E}[\mathbf{e}_t^\top | \mathcal{F}_{t-1}]] = \mathbf{0}_{k \times k}, \text{ podobně pro } t > s.$$

Použitím (8.8) a $\mathbf{R}(1) = \Phi \mathbf{R}(0)$ dostaneme vztah pro rozptyl \mathbf{e}_t

$$\text{Var}[\mathbf{e}_t] = \text{E}[\mathbf{e}_t \mathbf{e}_t^\top] = \text{E}[(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) - \Phi(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu})][(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) - \Phi(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu})]^\top =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{R}(0) - \mathbf{R}(1)\Phi^\top - \Phi\mathbf{R}(1)^\top + \Phi\mathbf{R}(0)\Phi^\top = \mathbf{R}(0) - \Phi\mathbf{R}(0)\Phi^\top = \\
&= \text{diag}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\Sigma}_Z = \boldsymbol{\Sigma}_e.
\end{aligned}$$

Slabě stacionární VGINAR(1) tedy vyhovuje rovnici VAR(1) procesu

$$(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) = \Phi(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{e}_t, \quad (8.12)$$

kde $\mathbb{E}[\mathbf{e}_t] = \mathbf{0}$ a $\text{Var}[\mathbf{e}_t] = \text{diag}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\Sigma}_Z = \boldsymbol{\Sigma}_e$.

8.3 Proces GINAR(p) jako VGINAR(1)

Na proces GINAR(p) se můžeme dívat jako na p -rozměrný proces VGINAR(1). S použitím dříve zavedeného značení dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_t &:= (X_t, \dots, X_{t-p+1})^\top \in \mathbb{N}_0^p, & \mathbf{W}_t &:= (Z_t, \mathbf{0}_{p-1}^\top)^\top \in \mathbb{N}_0^p, \\
\Phi &= \begin{pmatrix} & \boldsymbol{\varphi}^\top & \\ \mathbf{I}_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1} & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad \text{a} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{\alpha}^\top & \\ \mathbf{0}_{(p-1) \times p} & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}.
\end{aligned}$$

Předpokládejme, že $\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}$ je slabě stacionární proces VGINAR(1) a že polynom $\det(\mathbf{I} - \Phi z)$ má tedy všechny kořeny vně jednotkového kruhu, nebo ekvivalentně že má charakteristický polynom $\det(\lambda \mathbf{I} - \Phi)$ všechny kořeny nenulové a uvnitř jednotkového kruhu.

$$\text{Nechť } \mathbf{\Lambda}_k := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ je } k \times k \text{ matice,} \quad \text{pak } \det(\mathbf{\Lambda}_k) = \lambda^k \quad \text{a}$$

$$\begin{aligned}
|\lambda \mathbf{I} - \Phi| &= \left| \begin{pmatrix} \lambda - \varphi_1 & -(\varphi_2, \dots, \varphi_p) \\ \mathbf{0}_{p-1} & \mathbf{\Lambda}_{p-1} \end{pmatrix} \right| = (\lambda - \varphi_1)\lambda^{p-1} + \left| \begin{pmatrix} -\varphi_2 & -(\varphi_3, \dots, \varphi_p) \\ \mathbf{0}_{p-2} & \mathbf{\Lambda}_{p-2} \end{pmatrix} \right| = \\
&= \dots = \lambda^p - \varphi_1\lambda^{p-1} - \dots - \varphi_{p-1}\lambda - \varphi_p,
\end{aligned}$$

tedy $\det(\lambda \mathbf{I} - \Phi)$ se rovná charakteristickému polynomu (4.15).

Podle věty 8.2 existuje nezáporný vektor $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^\top$ vyhovující rovnici $(\mathbf{I} - \Phi)\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_Z$, kde $\boldsymbol{\mu}_Z = \mathbb{E}[\mathbf{W}_t] = (\mu_Z, \mathbf{0}_{p-1}^\top)^\top$. Tedy platí

$$\begin{pmatrix} 1 - \varphi_1 & -\varphi_2 & \cdots & -\varphi_{p-1} & -\varphi_p \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_Z \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

Z posledních $p - 1$ řádků (8.13) dostáváme, že musí platit $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p =: \mu$. Z první rovnice dostaneme $(1 - \varphi_1 - \dots - \varphi_p)\mu = \mu_Z$, tedy

$$\mu = \frac{\mu_Z}{1 - \varphi_1 - \dots - \varphi_p}.$$

Aby byl vektor $\boldsymbol{\mu}$ nezáporný, musí platit $\mu \geq 0$. Tedy musí platit $\varphi_1 + \dots + \varphi_p < 1$, což je už dříve uvažovaná podmínka stacionarity (4.3) procesu GINAR(p).

V důsledku 4.8 jsme dokázali, že splnění podmínky stacionarity (4.3) v procesu GINAR(p) je postačující podmínkou pro to, aby měl polynom (4.15) všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Teď jsme právě dokázali, že podmínka (4.3) je také podmínkou nutnou. Tvrzení zformulujeme do následující věty.

Věta 8.3. *Nechť $\varphi_i \geq 0$ pro $i = 1, \dots, p$. Pak polynom $\varphi(\lambda) = \lambda^p - \varphi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \varphi_p$ má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu ($\varphi(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1$) právě tehdy, když platí $\varphi_1 + \dots + \varphi_p < 1$.*

Poznámka. Na základě výše uvedeného jsme ukázali, že z věty 8.1 o existenci silně stacionárního kauzálního procesu VGINAR(1) s konečnými druhými momenty plyne existence silně stacionárního kauzálního procesu VGINAR(p) s konečnými druhými momenty (srov. s větou 4.1).

Kapitola 9

Závěr

V této práci jsme nejdříve představili několik možností pro popis celočíselných časových řad, dále jsme se soustředili na zobecněný nezáporný celočíselný autoregresní proces $\text{GINAR}(p)$ a odhady jeho parametrů, nakonec jsme uvedli vektorovou verzi tohoto procesu a ukázali souvislost mezi procesem $\text{GINAR}(p)$ a $\text{VGINAR}(1)$.

Hlavním cílem této práce bylo shrnout a rozvinout dosavadní výsledky o procesu GINAR , popsané zejména v článcích [14] a [13], představit odhady parametrů a na základě simulací vyzkoušet jejich vlastnosti.

Přínosem této práce je ucelený popis teorie zobecněných náhodných operátorů včetně jejich maticových verzí. V literatuře jsou například vztahy pro maticové náhodné operátory v mnohem menší míře uvedeny pouze v [13] a navíc s několika tiskovými chybami. Tyto operátory budou určitě hrát velkou roli při dalším výzkumu vektorových celočíselných procesů. Zároveň byl poprvé uvažován definiční obor zobecněného operátoru a bylo dokázáno, že binomický operátor je vlastně zobecněný operátor $\alpha(\beta) \bullet$ s $\alpha \in [0, 1]$ a minimální hodnotou $\beta = \alpha(1 - \alpha)$. Také byl představen jeden z možných postupů konstrukce zobecněného náhodného operátoru pro všechna α a β z definičního oboru zobecněného operátoru. Na základě tohoto postupu byla naprogramována funkce v programu R, která je spolu s dalšími funkcemi sloužícími pro simulaci a odhad parametrů procesu $\text{GINAR}(p)$ uvedena dodatku D.

Dále jsme se detailně věnovali vlastnostem procesu $\text{GINAR}(p)$ a pomocí martingalových diferencí jsme ukázali, že proces $\text{GINAR}(p)$ je vlastně $\text{AR}(p)$ proces. Aplikací centrální limitní věty pro martingalové diference jsme dokázali asymptotickou normalitu rozdělení průměru. Spektrální hustota procesu $\text{GINAR}(p)$ nám umožnila nahlédnout do stochastické struktury procesu $\text{GINAR}(p)$, na který se můžeme dívat jako na součet $p + 1$ nezávislých $\text{AR}(p)$ procesů se stejnými autoregresními operátory, ale různými rozptyly bílých šumů.

Také jsme zkoumali teoretické asymptotické vlastnosti odhadů parametrů μ , μ_Z , φ , σ_e^2 procesu $\text{GINAR}(p)$ a vlastnosti odhadů autokorelací a parciálních autokorelací. Zároveň zavedli metodu aspoň přibližných odhadů parametrů α a σ_Z^2 , které proces ovlivňují jen velmi málo a odhady pro ně se konstruují hůře. Součástí práce jsou numerické studie těchto odhadů pro různě rozdělené inovace (vzhledem k stejným náhodným operátorům tedy i pro různá marginální rozdělení). V těchto simulacích bylo

ukázáno, že vlastnosti odhadů (tj. velikost MSE) ovlivňuje nejvíce rozptyl bílého šumu $AR(p)$ reprezentace σ_e^2 . Zároveň byly provedeny simulace, které ukazují, že s rostoucí velikostí výběru klesá MSE u všech uvažovaných odhadů.

Nakonec jsme se krátce věnovali teorii vektorových nezáporných celočíselných procesů VGINAR. Ukázali jsme, že podmínka na existenci slabě stacionárního procesu VGINAR je ekvivalentní podmínce na existenci nezáporného vektoru μ splňujícího $(\mathbf{I} - \Phi)\mu = \mu_Z$, kde Φ resp. μ_Z je nezáporná matice resp. vektor. Díky tomuto vztahu se nám povedlo dokázat, že podmínka stacionarity procesu GINAR(p) je ekvivalentní podmínce stacionarity odpovídajícího procesu $AR(p)$. Důsledkem toho je, že pro každý proces $AR(p)$ s nezápornými autoregresními parametry existuje slabě stacionární proces GINAR(p) se stejnými autoregresními parametry.

Na závěr tedy můžeme říct, že uvažované autoregresní operátory poskytují velmi dobrý aparát pro modelování autoregresních nezáporných celočíselných posloupností. Vzhledem k jejich $AR(p)$ ($VAR(p)$) reprezentaci je zároveň k dispozici spousta už vytvořených programů, které se dají použít na analýzu těchto řad. Použití náhodných operátorů umožňuje jednoduchou simulaci těchto časových řad.

Nevýhodou zmíněné $AR(p)$ ($VAR(p)$) reprezentace je fakt, že bílý šum této reprezentace není tvořen nezávislými náhodnými veličinami, ale pouze nekorelovanými martingalovými diferencemi. Spousta teoretických výsledků pro klasické časové řady je odvozena za předpokladu nezávislosti bílého šumu a je proto vždy nutné pečlivě zvážit, zdali a za jakých předpokladů platí uvažované výsledky také pro bílý šum martingalových diferencí.

Dodatky

A Některá diskrétní rozdělení

Vlastnosti různých rozdělení jsou přehledně popsány např. v Anděl [3, str. 20-22].

Diskrétní rovnoměrné rozdělení $\text{Ro}(\{1, \dots, n\})$

$n \in \mathbb{N}$

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{A1})$$

$$E[X] = \frac{n+1}{2} \quad \text{Var}[X] = \frac{n^2-1}{12} = E[X] \cdot \frac{n-1}{6} \quad (\text{A2})$$

Použití rozdělení $\text{Ro}(\{1, \dots, n\})$ v čítací řadě definuje operátor $\frac{n+1}{2} \left(\frac{n^2-1}{12} \right) \bullet$.

Alternativní rozdělení $\text{Alt}(p)$

$p \in [0, 1]$

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p \quad (\text{A3})$$

$$E[X] = p \quad \text{Var}[X] = p(1-p) \leq E[X] \quad (\text{A4})$$

Použití rozdělení $\text{Alt}(p)$ v čítací řadě definuje operátor $p(p(1-p)) \bullet = p \circ$.

Binomické rozdělení $\text{Bi}(n, p)$

$n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n \quad (\text{A5})$$

$$E[X] = np \quad \text{Var}[X] = np(1-p) = E[X](1-p) \leq E[X] \quad (\text{A6})$$

Použití rozdělení $\text{Bi}(n, p)$ v čítací řadě definuje operátor $np(np(1-p)) \bullet$.
 $\text{Bi}(1, p) = \text{Alt}(p)$

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$ $\lambda \geq 0$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{A7})$$

$$E[X] = \lambda \quad \text{Var}[X] = \lambda = E[X] \quad (\text{A8})$$

Použití rozdělení $Po(\lambda)$ v čítecí řadě definuje operátor $\lambda(\lambda)$ •.

Geometrické rozdělení $Ge(p)$ $p \in (0, 1)$

$$P(X = k) = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{A9})$$

$$E[X] = \frac{1 - p}{p} \quad \text{Var}[X] = \frac{1 - p}{p^2} = \frac{E[X]}{p} > E[X] \quad (\text{A10})$$

Použití rozdělení $Ge(p)$ v čítecí řadě definuje operátor $\frac{1-p}{p} \left(\frac{1-p}{p^2} \right)$ •.

Negativně binomické rozdělení $NBi(r, p)$ $r > 0, p \in (0, 1)$

$$P(X = k) = \frac{\Gamma(r + k)}{k! \Gamma(r)} p^r (1 - p)^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{A11})$$

$$E[X] = \frac{r(1 - p)}{p} \quad \text{Var}[X] = \frac{r(1 - p)}{p^2} = \frac{E[X]}{p} > E[X] \quad (\text{A12})$$

Použití rozdělení $NBi(r, p)$ v čítecí řadě definuje operátor $\frac{r(1-p)}{p} \left(\frac{r(1-p)}{p^2} \right)$ •.
 $NBi(1, p) = Ge(p)$

Hypergeometrické rozdělení $HGe(N, A, n)$ $N \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, A < N, n < N$

$$P(X = k) = \frac{\binom{A}{k} \binom{N-A}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, A + n - N) \leq k \leq \min(A, n) \quad (\text{A13})$$

$$E[X] = \frac{nA}{N} \quad (\text{A14})$$

$$\text{Var}[X] = \frac{nA(N-A)(N-n)}{N^2(N-1)} = E[X] \frac{(N-A)(N-n)}{N(N-1)} < E[X] \quad (\text{A15})$$

Použití rozdělení $HGe(N, A, n)$ v čítecí řadě definuje operátor $\frac{nA}{N} \left(\frac{nA(N-A)(N-n)}{N^2(N-1)} \right)$ •.

B Vytvořující funkce pravděpodobnosti

Vytvořující funkce pravděpodobnosti (probability generating function, p.g.f.) celočíselné nezáporné náhodné veličiny X je definována jako

$$P_X(s) := E s^X = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) \cdot s^n. \quad (\text{B1})$$

Platí

$$P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) \leq 1,$$

kde rovnost nastává, pokud $P(X < \infty) = 1$ (říkáme, že X je vlastní náhodná veličina). Mocninná řada z (B1) je tedy konvergentní minimálně na jednotkovém kruhu (poloměr konvergence je větší nebo roven 1).

Věta B.1. Pro momenty vlastní náhodné celočíselné nezáporné veličiny platí

- 1) $E[X] = P'_X(1) := \lim_{s \rightarrow 1^-} P'_X(s)$
- 2) k -tý faktoriální moment $\mu^{[k]} := E[X(X-1)\dots(X-k+1)] = P^{(k)}(1)$
- 3) $\text{Var}[X] = P''_X(1) + P'_X(1) - (P'_X(1))^2$, pokud $P'_X(1) < \infty$.

Důkaz. Prášková, Lachout [19, str. 136, Věta A.1.] □

C Kroneckerův součin a operátor vec()

Tato část byla převzata z Lütkepohl [15, Dodatek A.11 a A.12], kde jsou uvedeny odkazy na příslušné zdroje s důkazy tvrzení.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ jsou $m \times n$ a $p \times q$ matice. Kroneckerův součin matic \mathbf{A} a \mathbf{B} je definován jako

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \text{matice } mp \times nq$$

Přehled pravidel pro počítání s Kroneckerovým součinem:

U všech matic předpokládáme vhodnou dimenzi.

1. Obecně $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$.
2. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top \otimes \mathbf{B}^\top$.
3. $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$.
4. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$.

5. Pro \mathbf{A}, \mathbf{B} regulární: $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$.
6. Pro \mathbf{A}, \mathbf{B} čtvercové: Nechť λ_A, λ_B jsou vlastní čísla a $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ jsou příslušné vlastní vektory popořadě matic \mathbf{A} a \mathbf{B} . Pak $\lambda_A \lambda_B$ je vlastní číslo a $\mathbf{v}_A \otimes \mathbf{v}_B$ je příslušný vlastní vektor matice $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$.
7. Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\det(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})^n \det(\mathbf{B})^m$.
8. Pro \mathbf{A}, \mathbf{B} čtvercové: $\text{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A})\text{tr}(\mathbf{B})$ ($\text{tr}(\mathbf{A})$ je stopa matice, neboli součet diagonály matice \mathbf{A}).

Nechť $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ je $m \times n$ matice se sloupci $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Operátor `vec` je definován jako

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \quad \dots \quad \text{vektor } mn \times 1$$

Přehled pravidel pro počítání s operátorem `vec`:

U všech matic předpokládáme vhodnou dimenzi.

1. $\text{vec}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{vec}(\mathbf{A}) + \text{vec}(\mathbf{B})$
2. $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^\top \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B})$.
3. $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{vec}(\mathbf{A}^\top)^\top \text{vec}(\mathbf{B})$.

D R funkce a programy

Pro výpočty bylo použito programové prostředí R [20].

Zobecněný operátor

```
goper = function( x, alpha, beta ){
# zobecneny Steuteluv van Harnuv operator
# input: alpha je stredni hodnota velicin ve scitaci rade
#       beta je rozptyl velicin ve scitaci rade
# output: res = vysledna realizace operatoru
#         sim = realiza scitaci rady operatoru

A = floor(alpha); a = alpha - A; sim = NULL

if ( alpha<0 ) return("NA - not defined")
if ( beta < a*(1-a) ) return("NA - not defined")
if ( alpha==0 & beta!=0 ) return("NA - not defined")
if ( alpha==0 ) return( list( res = 0 , sim = 0 ) )
if ( x!=round(x) || x < 0 ) return("NA - not defined")

if ( beta==a*(1-a) ){sim = sample( c(A,A+1), x, replace=TRUE, c(1-a, a))}
```

```

if ( beta>a*(1-a) ){
  if ( a>0 ){
    y = ceiling(a+beta/a); c = y-(a+beta/a)
    p1 = a*c/(y-1)
    p2 = (beta+a^2-a)/(y*(y-1))
    sim = sample( c(A,A+1,A+y), x, replace=TRUE, c(1-p1-p2, p1, p2) )
  } else {
    y = ceiling(beta)
    p1 = beta/(y+1)
    p2 = beta/(y*(y+1))
    sim = sample( c(A-1,A,A+y), x, replace=TRUE, c(p1, 1-beta/y, p2) )
  }
}
if ( beta>alpha ){
  sim = (rnbinom(x, size=alpha^2/(beta-alpha), mu = alpha))
}
return( list( res = sum(sim) , sim = sim))
}

```

Binomický operátor

```

oper = function( x, alfa ){
# binomický thinning
# input: alfa je stredni hodnota velicin ve scitaci rade
# output: vysledna realizace operatoru

if ( alfa<0 || alfa>1 ) return("NA - not defined")
if ( x!=round(x) || x < 0 ) return("NA - not defined")

rbinom(1, size=x, prob = alfa)}

```

Simulace procesu GINAR(p)

```

simGINAR = function(phi, alpha, z, mz = mean(z), burn){
# generovani procesu GINAR
# input: phi, alpha - parametry procesu
# z - inovace, mz - stredni hodnota inovaci
# burn - pocatecni delka simulace
# output: x - simulace procesu
# mx - teoreticky prumer procesu
# burn - odseknuta cast

N = length(z)
p = length(phi) # stupen procesu
mx = mz/(1-sum(phi)) # prumer procesu
x = NULL
for (i in 1:N){
  x[i]=0
  for (j in 1:p){
# nacitani jen od zacatku casove rady
if (i-j>0) {
  x[i] = x[i] + goper(x[i-j],phi[j], alpha[j])$res

```

```

    } else {
      x[i] = x[i] + goper(rpois(1,mx),phi[j], alpha[j])$res
    }
  }
  x[i] = x[i] + z[i]
} # konec i
return( list( x = x[(1+burn):N], mx = mx, xburn = x[1:burn]) )
}

```

Odhad procesu GINAR(p)

```

ginar.est = function(x, p, c){
  # odhad parametru procesu GINAR
  # input: x casova rada, p rad modelu, c konstatna z odhadu alpha
  # output: odhady vseh parametru
  # kons = sum(alpha)/sum(phi*(1-phi)), konst < c -> INAR=TRUE

  n = length(x) # delka procesu
  m = mean(x) # prumer
  RR = drop(acf(x, plot=FALSE, type="cov")$acf)
  gamma = RR[1:p+1]
  G = matrix(nrow = p, ncol=p)
  for (i in 1:p){for (j in 1:p){ G[i,j] = RR[abs(i-j)+1] }}
  R = RR[1] # rozptyl
  y = x[(p+1):n]
  Z = NULL; for (i in 1:p){ Z = cbind(Z,x[(p+1):n-i]) }
  D = drop(solve(t(Z-m)%*(Z-m))%*%t(Z-m))
  phi = pmax( drop(D%*(y-m)), 0)
  phi.YW = pmax( drop( solve(G)%*%gamma ), 0)
  mz = m*(1-sum(phi))
  s2e = R - sum(phi*gamma)
  rez = drop((y-m)-(Z-m)%*%phi)^2
  alf = pmax(drop(D%*(rez-s2e)),0)
  konst = sum(alf)/sum(phi*(1-phi))
  if ( konst < c ) { alpha = phi*(1-phi); inar = TRUE
} else { alpha = pmax(alf, phi*(1-phi)); inar = FALSE}
  s2z = s2e - m*sum(alpha)

  return(list( length = n,mean.x = m, mean.z = mz,
  phi.YW = phi.YW, phi.OLS=phi, alpha = alpha, alpha0 = alf, is.inar = inar,
  sigma2e = s2e, sigma2z = s2z, var = R, konst = konst))
}

```


Literatura

- [1] Alzaid, A. A. and Al-Osh, M. First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process. *J. Time Ser. Anal.*, 8:261–275, 1987.
- [2] Alzaid, A. A. and Al-Osh, M. An integer-valued p th-order autoregressive structure (INAR(p)) process. *J. Appl. Prob.*, 27(2):314–324, 1990.
- [3] Anděl, J. *Základy matematické statistiky*. Matfyzpress, 2005.
- [4] Brockwell, P. J. and Davis, R. A. *Time Series: Theory and Methods*. Springer, 1991.
- [5] Du, J. and Li, Y. The integer-valued autoregressive (INAR(p)) model. *J. Time Ser. Anal.*, 12(2):129–142, 1991.
- [6] Hall, P. and Heyde, C. *Martingale Limit Theory and its Application*. New York: Academic Press, 1980.
- [7] Jacobs, P. A. and Lewis, P. A. W. Discrete time series generated by mixtures I: correlational and runs properties. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 40(1):94–105, 1978.
- [8] Jacobs, P. A. and Lewis, P. A. W. Discrete time series generated by mixtures II: asymptotic properties. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 40(2):222–228, 1978.
- [9] Jacobs, P. A. and Lewis, P. A. W. Discrete time series generated by mixtures III: autoregressive processes (DAR(p)). Technical Report ADA062208, Naval Postgraduate School Monterey California, 1978.
- [10] Kedem, B. and Fokianos, K. *Regression Models for Time Series Analysis*. Wiley-Interscience, 2002.
- [11] Lachout, P. Diskrétní martingaly. Pracovní text přednášky Teorie pravděpodobnosti 2, verze 12.4.2005.
- [12] Lachout, P. *Teorie pravděpodobnosti*. Karolinum, 2004.
- [13] Latour, A. The multivariate GINAR(p) process. *Adv. Appl. Prob.*, 29(1):228–248, 1997.

- [14] Latour, A. Existence and stochastic structure of a non-negative integer-valued autoregressive process. *J. Time Ser. Anal.*, 19(4):439–455, 1998.
- [15] Lütkepohl, H. *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer, 1991.
- [16] McKenzie, E. *Handbook of Statistics 21: Stochastic Processes: Modelling and Simulation.*, chapter Discrete variate time series, pages 573–606. Elsevier Science, 2005.
- [17] Neal, P. and Rao, T. S. MCMC for integer-valued ARMA processes. *J. Time Ser. Anal.*, 28(1):92–110, 2007.
- [18] Prášková, Z. *Základy náhodných procesů II*. Karolinum, 2004.
- [19] Prášková, Z. a Lachout, P. *Základy náhodných procesů*. Karolinum, 2005.
- [20] R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2006. ISBN 3-900051-07-0.
- [21] Raftery, A. E. A model for high-order Markov chains. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 47:528–539, 1985.
- [22] Steutel, F. W. and van Harn, K. Discrete analogues of self-decomposability and stability. *Ann. Probab.*, 7:893–899, 1979.
- [23] Štěpán, J. *Teorie pravděpodobnosti*. Academia, 1987.
- [24] Veselý, J. *Komplexní analýza pro učitele*. Karolinum, 2000.
- [25] Zimmermann, K. *Úvod do matematické ekonomie*. Karolinum, 2002.