Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Eliška Otčenášová

Vliv chyb měření nezávisle proměnných na odhady a testy v regresních modelech

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Michal Kulich, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie
Studijní plán:	Matematická statistika

Děkuji Mgr. Michalovi Kulichovi, Ph.D., za volbu zajímavého tématu, cenné rady a vstřícný přístup po celou dobu vedení mé diplomové práce. Dále děkuji svým rodičům a přátelům, neboť bez jejich podpory by tato práce nemohla vzniknout.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 11.4.2006 Eliška Otčenášová

Obsah

Název práce: Vliv chyb měření nezávisle proměnných na odhady a testy v regresních modelech
Autor: Eliška Otčenášová
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Mgr. Michal Kulich, Ph.D.
e-mail vedoucího: kulich@karlin.mff.cuni.cz
Abstrakt: Práce se zabývá vlivem chyby měření regresorů na odhady parametrů metodou nejmenších čtverců a na testy významnosti parametrů v regresních modelech. Poukazuje na nesplnění předpokladů lineárního modelu při použití regresorů měřených s chybou a na následný vliv na odhady a testy v regresních modelech. Zaměřuje se na zkoumání otázky konzistence odhadů lineárního a kvadratického členu v aditivním a multiplikativním modelu s jedním regresorem měřeným s chybou, která je buď homoskedastická nebo heteroskedastická. Teoretické výsledky jsou na závěr podloženy simulační studii.
Klíčová slova: model s regresory měřenými s chybou, odhad metodou nejmenších čtverců, multiplikativní model, heteroskedastická chyba

Title: Effect of covariate measurement error on estimates and tests in regression models
Author: Eliška Otčenášová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Michal Kulich, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: kulich@karlin.mff.cuni.cz
Abstract: The thesis concerns with effect of covariate measurement error on the least squares estimators and tests of importance of parameters in regression models. It refers to unsatisfied assumptions of linear model when using measurement error covariates and resulting effect on estimates and tests in regression models. It focuses mainly on investigation of consistence of estimates of linear and quadratic coefficient in additive and multiplicative model with one covariate with homoscedastic and heteroscedastic measurement error. In the final chapter teoretical results are grounded by simulation study.
Keywords: measurement error model, the least squares estimator, multiplicative model, heteroscedastic error

1 Úvod

V praxi se často stává, že regresory, jejichž vliv na odezvu nás zajímá, nemůžeme naměřit přesně. Místo nich můžeme naměřit jiné regresory, které jsou s původními úzce spojeny. Například, kdybychom zkoumali vliv množství NO_2 ve vzduchu na výskyt dýchacích problémů u dětí, potřebovali bychom zjistit celkové množství NO_2, kterému je dítě vystaveno, čehož nejsme schopni. Můžeme ale změřit množství NO_2 v dětském pokoji a kuchyni bytu, ve kterém dítě žije. Protože nemáme k dispozici regresory bez chyby, jsme nuceni naši analýzu provádět s regresory měřenými s chybou. Samozřejmě nás zajímá vliv na odhady parametrů modelu, dopad na hladinu a sílu testů a tvar regresní závislosti.

Problematika modelů s regresory měřenými s chybou je rozsáhlá a má praktický význam. Základní poznatky o této oblasti statistiky jsou popsány v knize Fuller [4]. Autor se zaměřil na situaci, kdy regresory pocházejí z normálního rozdělení. V knize Carroll a kol. [3] najdeme zobecnění pro nelineární modely s regresory měřenými s chybou. Autoři obou zmíněných knih upozorňují, že pouhá záměna regresorů měřených bez chyby za regresory měřené s chybou vede k vychýleným odhadům. Jejich cílem je získat nevychýlený odhad původních parametrů nepřímo pomocí modelu s regresory měřenými s chybou. To, čemu se ve svých publikacích nevěnují, je analýza tvaru regresní závislosti. Tuto mezeru by aspoň z malé části měla zaplnit tato diplomová práce.

Je rozdělena do sedmi kapitol. V úvodu je popsána zkoumaná situace a zavedeno použité značení. Teoretická část začíná druhou kapitolou, která se zabývá otázkou splnění, resp. nesplnění předpokladů lineárního modelu při použití regresorů měřených s homoskedastickou chybou a vlivem nesplnění těchto předpokladů na metodu nejmenších čtverců.

Jádrem práce jsou kapitoly tři až pět, které se věnují třem modelům, a to aditivnímu modelu s jedním regresorem měřeným s chybou, která je homoskedastická, příp. heteroskedastická, a multiplikativnímu modelu s homoskedastickou chybou. Každá z nich nejdříve popisuje analyzovaný model a potom se pro data pocházející z *lineárního* regresního modelu s přesným regresorem zabývá otázkou konzistence odhadu lineárního členu v *lineárním* regresním modelu s regresorem měřeným s chybou a otázkou nulovosti kvadratického členu v *kvadratickém* regresním modelu s regresorem měřeným s chybou. Třetí kapitola se navíc věnuje otázce konzistence odhadů v lineárním modelu s více regresory meřenými s chybou.

V šesté kapitole jsou popsány výsledky simulační studie tří modelů teoreticky analyzovaných v předcházejících kapitolách. Výsledky celé práce jsou shrnuty v závěru.

1.1 Značení

Nejčastěji jsou některé regresory měřeny přesně (např. pohlaví, věk, výška), jiné jsou zatíženy chybou měření (např. krevní tlak, hladina cholesterolu). Ty regresory, které jsou měřené přesně, budeme označovat $\boldsymbol{Z}$. Regresory, které nemůžeme naměřit přesně, a tedy jsou nezjistitelné, budeme označovat $\boldsymbol{X}$. Místo nich pozorujeme veličiny $\boldsymbol{W}$, které jsou v nějakém vztahu k veličinám $\boldsymbol{X}$. Tento vztah v praxi neznáme. Parametry modelu, který zahrnuje odezvu $\boldsymbol{Y}$ a regresory $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$ nemohou být samozřejmě odhadovány přímo. K odhadování těchto parametrů jsme nuceni použít model, který zahrnuje odezvu $\boldsymbol{Y}$ a regresory $(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{Z})$.

Pro další rozbor problému budeme považovat regresory $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Z}$ za náhodné veličiny, tedy budeme předpokládat, že pocházejí z nějakého rozdělení. Zkoumat budeme dva typy modelů, a to aditivní a multiplikativní model. Aditivní model pro regresory měřené s chybou můžeme psát ve tvaru

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u},$$

multiplikativní model analogicky ve tvaru

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{u}.$$

Přesný vztah mezi veličinami $\boldsymbol{W}$ a $\boldsymbol{X}$ neznáme, proto není známé ani přesné rozdělení náhodné chyby $\boldsymbol{u}$. Předpokládáme ale, že v aditivním modelu platí, že $\mathsf{E}(\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}) = 0$. Podmíněný rozptyl $\boldsymbol{u}$ při daných hodnotách regresorů $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}$ uvažujeme buď konstantní nebo závislý na hodnotách regresorů $\boldsymbol{X}$. V multiplikativním modelu předpokládáme, že $\mathsf{E}(\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}) = 1$ a $\mathsf{var}(\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$ je konstantní.

2 Základní teoretické úvahy

2.1 Splnění předpokladů

Analýzu problému začneme prozkoumáním platnosti přepokladů lineárního modelu. Lineárním modelem zde rozumíme model

$$Y_i = \boldsymbol{X}_i{}'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

kde $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ je odezva, $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1{}' \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_n{}' \end{pmatrix}$ regresní matice, $\boldsymbol{\beta}$ vektor parametrů a $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)'$ chyba modelu. V tomto modelu pro $i = 1, \ldots, n$ předpokládáme

(A1) $(Y_i, \boldsymbol{X}_i{}')$ jsou nezávislé,

(A2) $\mathsf{E}(Y_i | \, \boldsymbol{X}_i) = \boldsymbol{X}_i{}'\boldsymbol{\beta}$,

(A3) $\mathsf{var}(Y_i | \, \boldsymbol{X}_i) = \sigma_\varepsilon^2$,

což vztaženo na chybu modelu $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)'$ znamená, že

(A1) $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ jsou navzájem nezávislé,

(A2) $\mathsf{E}(\varepsilon_i | \, \boldsymbol{X}_i) = 0$,

(A3) $\mathsf{var}(\varepsilon_i | \, \boldsymbol{X}_i) = \sigma_\varepsilon^2$.

Mějme data pocházející z lineárního regresního modelu s jedním regresorem, který můžeme zapsat ve tvaru

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Předpokládejme, že pro tento model jsou splněny výše uvedené předpoklady. Regresory $X_1, \ldots, X_n$ nejsou pozovatelné, proto místo nich použijeme regresory $W_1, \ldots, W_n$. Pro $i = 1, \ldots, n$ závisí rozdělení regresoru W_i pouze na rozdělení regresoru X_i a chyby u_i. Předpokládejme, že trojice $(X_i, \varepsilon_i, u_i)$ jsou nezávislé pro $i = 1, \ldots, n$. Navíc ε_i je nezávislé na X_i a u_i (tedy i na W_i) a u_i je nezávislé na X_i. Vidíme, ža za těchto předpokladů jsou také dvojice (Y_i, W_i) nezávislé pro $i = 1, \ldots, n$. Podívejme se teď na $\mathsf{E}(Y_i | \, W_i)$ a $\mathsf{var}(Y_i | \, W_i)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(Y_i | \, W_i) &= \mathsf{E}\left[(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) | \, W_i\right] = \beta_0 + \beta_1 \, \mathsf{E}(X_i | \, W_i) + \mathsf{E}(\varepsilon_i | \, W_i) \\ &= \beta_0 + \beta_1 \, \mathsf{E}(X_i | \, W_i) + \mathsf{E}\,\varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1 \, \mathsf{E}(X_i | \, W_i) + \mathsf{E}\left[\mathsf{E}(\varepsilon_i | \, X_i)\right] \\ &= \beta_0 + \beta_1 \, \mathsf{E}(X_i | \, W_i), \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{var}(Y_i|\,W_i) &= \mathsf{var}\left[(\beta_0+\beta_1X_i+\varepsilon_i)|\,W_i\right] = \beta_1^2\,\mathsf{var}(X_i|\,W_i)+\mathsf{var}(\varepsilon_i|\,W_i)\\ &= \beta_1^2\,\mathsf{var}(X_i|\,W_i)+\mathsf{var}\,\varepsilon_i\\ &= \beta_1^2\,\mathsf{var}(X_i|\,W_i)+\mathsf{var}\left[\mathsf{E}(\varepsilon_i|\,X_i)\right]+\mathsf{E}\left[\mathsf{var}(\varepsilon_i|\,X_i)\right]\\ &= \beta_1^2\,\mathsf{var}(X_i|\,W_i)+\sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Dále potřebujeme vyjádřit $\mathsf{E}(X_i|\,W_i)$ a $\mathsf{var}(X_i|\,W_i)$. Nechť obecně $W_i = h(X_i, u_i)$, kde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce invertibilní v každé proměnné, tj. pro pevnou hodnotu u_i lze vyjádřit X_i jako funkci W_i a naopak, pro pevnou hodnotu X_i lze vyjádřit u_i jako funkci W_i. Zaveďme dále značení

$f_{X|W}(x|w)$ pro podmíněnou hustotu regresoru X_i při daném regresoru W_i,

$f_{X,W}(x,w)$ pro sdruženou hustotu regresorů X_i a W_i,

$f_X(x)$ pro marginální hustotu regresoru X_i,

$f_W(w)$ pro marginální hustotu regresoru W_i,

$f_u(u)$ pro marginální hustotu chyby u_i.

Můžeme psát

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X_i|\,W_i=w) &= \int x f_{X|W}(x|w)\,\mathrm{d}x = \int x\frac{f_{X,W}(x,w)}{f_W(w)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int x\frac{f_X(x)f_u(h^{-1}(x,w))|\mathsf{D}_\tau(x,w)|}{f_W(w)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{f_W(w)}\,\mathsf{E}\left[X_i f_u(h^{-1}(X_i,w))|\mathsf{D}_\tau(X_i,w)|\right],\end{aligned}$$

kde $\mathsf{D}_\tau(x,w)$ je jakobián zobrazení $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Zobrazení τ je inverzí k zobrazení, které dvojici (x,u) přiřazuje dvojici $(x, h(x,u))$. K vyjádření $f_{X,W}(x,w)$ jsme použili větu o transformaci, viz Anděl [1], strana 52 a 53. Podobně dále

$$\begin{aligned}\mathsf{var}(X_i|\,W_i=w) &= \mathsf{E}(X_i^2|\,W_i=w)-\left[\mathsf{E}(X_i|\,W_i=w)\right]^2\\ &= \int x^2 f_{X|W}(x|w)\,\mathrm{d}x-\left[\mathsf{E}(X_i|\,W_i=w)\right]^2\\ &= \int x^2\frac{f_{X,W}(x,w)}{f_W(w)}\,\mathrm{d}x-\left[\mathsf{E}(X_i|\,W_i=w)\right]^2\\ &= \int x^2\frac{f_X(x)f_u(h^{-1}(x,w))|\mathsf{D}_\tau(x,w)|}{f_W(w)}\,\mathrm{d}x-\left[\mathsf{E}(X_i|\,W_i=w)\right]^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{f_W(w)}\,\mathsf{E}\left[X_i^2 f_u(h^{-1}(X_i,w))|\mathsf{D}_\tau(X_i,w)|\right]\\
&- \frac{1}{f_W^2(w)}\left\{\mathsf{E}\left[X_i f_u(h^{-1}(X_i,w))|\mathsf{D}_\tau(X_i,w)|\right]\right\}^2.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(X_i|\,W_i) &= \frac{1}{f_W(W_i)}\,\mathsf{E}\left[X_i f_u(h^{-1}(X_i,W_i))|\mathsf{D}_\tau(X_i,W_i)|\right],\\
\mathsf{var}(X_i|\,W_i) &= \frac{1}{f_W(W_i)}\,\mathsf{E}\left[X_i^2 f_u(h^{-1}(X_i,W_i))|\mathsf{D}_\tau(X_i,W_i)|\right] \qquad (2.1.3)\\
&- \frac{1}{f_W^2(W_i)}\left\{\mathsf{E}\left[X_i f_u(h^{-1}(X_i,W_i))|\mathsf{D}_\tau(X_i,W_i)|\right]\right\}^2.
\end{aligned}
$$

V této práci budeme uvažovat dvě varianty funkce h, a to $W_i = h(X_i,u_i) = X_i + u_i$ a $W_i = h(X_i,u_i) = X_i \cdot u_i$. V prvním případě je $|\mathsf{D}_\tau(x,w)| = 1$, ve druhém je $|\mathsf{D}_\tau(x,w)| = \left|\frac{1}{x}\right|$. Dosadíme-li vyjádření (2.1.3) do výrazů (2.1.1) a (2.1.2), dostáváme

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(Y_i|\,W_i) &= \beta_0 + \beta_1\frac{1}{f_W(W_i)}\,\mathsf{E}\left[X_i f_u(h^{-1}(X_i,W_i))|\mathsf{D}_\tau(X_i,W_i)|\right],\\
\mathsf{var}(Y_i|\,W_i) &= \beta_1^2\frac{1}{f_W(W_i)}\,\mathsf{E}\left[X_i^2 f_u(h^{-1}(X_i,W_i))|\mathsf{D}_\tau(X_i,W_i)|\right]\\
&- \beta_1^2\frac{1}{f_W^2(W_i)}\left\{\mathsf{E}\left[X_i f_u(h^{-1}(X_i,W_i))|\mathsf{D}_\tau(X_i,W_i)|\right]\right\}^2 + \sigma_\varepsilon^2.
\end{aligned}
$$

Tyto výrazy jsou natolik složité, že můžeme říci, že předpoklady lineárního modelu obecně splněny nejsou. Platí předpoklad, že pro $i = 1,\dots,n$ jsou dvojice (Y_i, W_i) nezávislé, ale

- neexistují β_0 a β_1 tak, aby $\mathsf{E}(Y_i|\,W_i) = \beta_0 + \beta_1 W_i$,
- $\mathsf{var}(Y_i|\,W_i)$ není konstantní.

Poznamenejme ale, že existují speciální případy, kdy tyto předpoklady jsou splněny, například pro aditivní model $W_i = X_i + u_i$, kde $X_i \sim \mathsf{N}(\mu_x,\sigma_x^2)$ a $u_i \sim \mathsf{N}(0,\sigma_u^2)$, tedy $W_i \sim \mathsf{N}(\mu_x, \sigma_x^2 + \sigma_u^2)$, platí

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(Y_i|\,W_i) &= \beta_0 + \beta_1\left\{\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}W_i + \frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\mu_x\right\},\\
\mathsf{var}(Y_i|\,W_i) &= \beta_1^2\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2. \qquad (2.1.4)
\end{aligned}
$$

Lineární regresní model pro data (Y_i, W_i) je v praxi používán i přesto, že jeho předpoklady nejsou splněny, protože přesné regresory X_i nejsou k dispozici. Proto se budeme tímto modelem dále zabývat.

2.2 Metoda nejmenších čtverců

V následujících kapitolách budeme zkoumat chování odhadů metodou nejmenších čtverců. Podívejme se tedy, jak funguje metoda nejmenších čtverců v lineárním modelu, ve kterém nejsou splněny předpoklady (A2) a (A3).

Víme, že odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ metodou nejmenších čtverců získáme pomocí minimalizace výrazu $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta})^2$, kde $\boldsymbol{V}_i'$ značí i-tý řádek regresní matice, tedy

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta})^2.$$

Můžeme také psát

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\beta}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta})^2.$$

Z obecné teorie konzistence M-odhadů (viz Huber [5], kapitola 6.2) plyne

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\beta}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta})^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\beta}} \mathsf{E}(Y_i - \boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta})^2.$$

Výraz na pravé straně dále upravíme a dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(Y_i - \boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta})^2 &= \mathsf{E}\left([Y_i - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)] - [\boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta} - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)]\right)^2 \\
&= \mathsf{E}\left[Y_i - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)\right]^2 + \mathsf{E}\left[\boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta} - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)\right]^2 \\
&\quad - 2\,\mathsf{E}\left([Y_i - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)]\,[\boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta} - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)]\right) \\
&= \mathsf{E}\left[Y_i - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)\right]^2 + \mathsf{E}\left[\boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta} - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)\right]^2,
\end{aligned}$$

protože

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left([Y_i - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)]\,[\boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta} - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)]\right) = \\
&\qquad = \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left([Y_i - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)]\,[\boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta} - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)]\,|\,\boldsymbol{V}_i\right)\right\} = \\
&\qquad = \mathsf{E}\left\{[\boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta} - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)]\,\mathsf{E}\left([Y_i - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)]\,|\,\boldsymbol{V}_i\right)\right\} = \\
&\qquad = \mathsf{E}\left\{[\boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta} - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)]\,[\mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i) - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)]\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}} &\xrightarrow{\mathsf{P}} \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\beta}} \mathsf{E}(Y_i - \boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta})^2 = \\
&\qquad = \mathsf{E}\left[Y_i - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)\right]^2 + \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\beta}} \mathsf{E}\left[\boldsymbol{V}_i'\boldsymbol{\beta} - \mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)\right]^2.
\end{aligned}$$

Můžeme tedy říci, že metoda nejmenších čtverců dává nejlepší přiblížení k podmíněné střední hodnotě $\mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)$ ve tvaru $\boldsymbol{V}_i{}'\boldsymbol{\beta}$. Výše uvedená úvaha se neopírá o splnění předpokladů (A2) a (A3). Pokud platí $\mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i) = \boldsymbol{V}_i{}'\boldsymbol{\beta}$, pak metoda nejmenších čtverců dává přímo odhad podmíněné střední hodnoty $\mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{V}_i)$. Nesplnění předpokladu (A3) nemá na tento postup žádný vliv. Případná heteroskedasticita chyby modelu zahrnujícího regresory s chybou se projeví při testování hypotéz. Přestože v modelu s regresory $W_1, \dots, W_n$ měřenými s chybou obecně $\mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{W}_i) \neq \boldsymbol{W}_i{}'\boldsymbol{\beta}$, metoda nejmenších čtverců stále odhaduje nejlepší přiblížení tvaru $\boldsymbol{W}_i{}'\boldsymbol{\beta}$ k neznámé podmíněné střední hodnotě $\mathsf{E}(Y_i|\,\boldsymbol{W}_i)$, která má komplikovaný tvar.

3 Aditivní modely s homoskedastickou chybou

V této kapitole se budeme věnovat situaci, kdy $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}$ a $\mathsf{var}(\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{X})$ je konstantní. Podíváme se nejdříve na model s jedním regresorem a následně na obecnější model s více regresory. Je obecně známo, viz Carroll a kol. [3] a Fuller [4], že odhad metodou nejmenších čtverců v *lineárním* regresním modelu s regresory měřenými s chybou není konzistentním odhadem parametrů *lineárního* regresního modelu s regresory měřenými přesně. V uvedených publikacích však čtenář nenajde důkazy těchto tvrzení, proto jsou uvedeny zde. Pro data pocházející z *lineárního* regresního modelu s přesným regresorem se navíc budeme zabývat otázkou nulovosti kvadratického členu v *kvadratickém* regresním modelu s regresorem měřeným s chybou.

3.1 Model s jedním regresorem

3.1.1 Popis modelu

Mějme náhodné veličiny $Y_1, \dots, Y_n$, které se řídí lineárním regresním modelem

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{3.1.1}$$

kde $X_1, \dots, X_n$ jsou nepozorované náhodné regresory, β_0, β_1 parametry modelu a $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ náhodné chyby modelu. Místo veličin $X_1, \dots, X_n$ pozorujeme náhodné veličiny $W_1, \dots, W_n$, u kterých předpokládáme, že $W_i = X_i + u_i$, kde $u_1, \dots, u_n$ jsou náhodné chyby regresoru. Předpokládáme, že pro $i = 1, \dots, n$ platí

- trojice $(X_i, \varepsilon_i, u_i)$ jsou nezávislé a stejně rozdělené,
- ε_i je nezávislé na X_i a u_i, u_i je nezávislé na X_i,
- $\mathsf{E}\, X_i^4 < \infty$ a $\mathsf{E}\, X_i = \mu_x$, $\mathsf{var}\, X_i = \sigma_x^2 > 0$,
- $\mathsf{E}\, \varepsilon_i = 0$, $\mathsf{var}\, \varepsilon_i = \sigma_\varepsilon^2 > 0$,
- $\mathsf{E}\, u_i^4 < \infty$ a $\mathsf{E}\, u_i = 0$, $\mathsf{var}\, u_i = \sigma_u^2 > 0$.

3.1.2 Konzistence odhadu

Mějme data (Y_i, X_i) pocházející z modelu (3.1.1). Odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)'$ parametru $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)'$ metodou nejmenších čtverců je dán vztahem

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y},$$

kde $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$. Víme, že tento odhad je nestranným a konzistentním odhadem vektoru parametrů $(\beta_0, \beta_1)'$, viz Anděl [2], strana 194.

Jelikož nepozorujeme regresory X_i, použijeme model

$$Y_i = \beta_0^* + \beta_1^* W_i + \varepsilon_i^*, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ve kterém obecně $\mathsf{E}(\varepsilon_i^* | W_i) \neq 0$ a $\mathsf{var}(\varepsilon_i^* | W_i)$ není konstantní. Odhad vektoru parametrů $(\beta_0^*, \beta_1^*)'$ metodou nejmenších čtverců označme $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\widetilde{\beta}_0^*, \widetilde{\beta}_1^*)'$. Víme, že $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}$, kde $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & W_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & W_n \end{pmatrix}$. Podívejme se, jak souvisí parametr β_1^* s původním parametrem β_1.

Věta 3.1. *Odhad $\widetilde{\beta}_1^*$ konverguje v pravděpodobnosti k $\beta_1^* = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2}\beta_1$.*

Důkaz. Viz důkaz věty 3.6 na straně 20. □

Poznámka 3.2. Všimněme si, že zlomek $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2} < 1$, tedy $\beta_1^* < \beta_1$, což znamená, že směrnice regresní přímky je menší než směrnice v modelu (3.1.1).

Poznámka 3.3. Navíc platí

$$[\mathsf{cor}(W_i, Y_i)]^2 = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2} \cdot [\mathsf{cor}(X_i, Y_i)]^2.$$

Tedy i korelační koeficient mezi regresorem měřeným s chybou a odezvou je menší než korelační koeficient mezi původním regresorem a odezvou. Násobící koeficient je stejný jako ve větě 3.1.

3.1.3 Tvar regresní závislosti

V předcházejícím oddílu jsme ukázali, že $\widetilde{\beta}_1^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2}\beta_1$. Nás však zajímá, zda je model opravdu lineární. Data sice pocházejí z modelu, který je v X lineární, ale my máme k dispozici pouze W. Zkoumejme, za jakých předpokladů je model s regresorem měřeným s chybou lineární. Spokojíme se se zkoumáním nulovosti kvadratického koeficientu v kvadratickém regresním modelu s regresorem měřeným s chybou.

Mějme data pocházející z modelu (3.1.1). Můžeme také psát, že tato data pocházejí z modelu

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

kde parametr $\beta_2 = 0$. Odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)'$ parametru $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, 0)'$ metodou nejmenších čtverců je dán vztahem $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$, kde matice $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_n & X_n^2 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$. Víme, že tento odhad je nestranným a konzistentním odhadem vektoru parametrů $(\beta_0, \beta_1, 0)'$.

Uvažujme model

$$Y_i = \beta_0^* + \beta_1^* W_i + \beta_2^* W_i^2 + \varepsilon_i^*, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3.1.2}$$

(pro nějž obecně nejsou splněny předpoklady lineárního modelu). Označme $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\widetilde{\beta}_0^*, \widetilde{\beta}_1^*, \widetilde{\beta}_2^*)'$ odhad vektoru parametrů $(\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*)'$ metodou nejmenších čtverců. Víme, že $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}$, kde $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & W_1 & W_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_n & W_n^2 \end{pmatrix}$. Zkoumejme nyní chování odhadu kvadratického parametru β_2^*.

Věta 3.4. *Označíme-li*

$$a = \mathsf{E}\, X_i^3 + 3\sigma_u^2\, \mathsf{E}\, X_i + \mathsf{E}\, u_i^3,$$
$$b = \mathsf{E}\, X_i^4 + 6\sigma_u^2\, \mathsf{E}\, X_i^2 + 4\, \mathsf{E}\, X_i\, \mathsf{E}\, u_i^2 + \mathsf{E}\, u_i^4,$$

pak platí

$$\widetilde{\beta}_2^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \beta_2^* = \frac{\frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\, \mathsf{E}\,(X_i - \mathsf{E}\, X_i)^3 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\, \mathsf{E}\, u_i^3}{b - (\mathsf{E}\, X_i^2)^2 - 2\sigma_u^2\, \mathsf{E}\, X_i^2 - \sigma_u^4 - \frac{\left(a - \mathsf{E}\, X_i^2\, \mathsf{E}\, X_i - \sigma_u^2\, \mathsf{E}\, X_i\right)^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}}\beta_1.$$

Důkaz. Zaveďme značení

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & W_1 & W_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_n & W_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{V}_n' \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}_i' = (1, W_i, W_i^2),$$
$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_n & X_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_n' \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_i' = (1, X_i, X_i^2),$$
$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'.$$

Víme, že podle slabého zákona velkých čísel (viz Štěpán [6], strana 259) platí

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} (\mathsf{E}\, \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{V}_i')^{-1}(\mathsf{E}\, \boldsymbol{V}_i Y_i)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, W_i & \mathsf{E}\, W_i^2 \\ \mathsf{E}\, W_i & \mathsf{E}\, W_i^2 & \mathsf{E}\, W_i^3 \\ \mathsf{E}\, W_i^2 & \mathsf{E}\, W_i^3 & \mathsf{E}\, W_i^4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, W_i Y_i \\ \mathsf{E}\, W_i^2 Y_i \end{pmatrix}. \tag{3.1.3}$$

Výpočtem jednotlivých prvků matic ze vztahu (3.1.3) dostáváme

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\, W_i &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i|X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[\left(X_i+u_i\right)|X_i\right]\right) = \mathsf{E}\, X_i,\\
\mathsf{E}\, W_i^2 &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i^2|X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i+u_i)^2|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[\left(X_i^2+2X_iu_i+u_i^2\right)|X_i\right]\right) = \mathsf{E}\, X_i^2+\sigma_u^2,\\
\mathsf{E}\, W_i^3 &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i^3|X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i+u_i)^3|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[\left(X_i^3+3X_i^2u_i+3X_iu_i^2+u_i^3\right)|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left[X_i^3+3X_i\sigma_u^2+\mathsf{E}\left(u_i^3|X_i\right)\right]\\
&= \mathsf{E}\, X_i^3+3\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i+\mathsf{E}\, u_i^3 = a,\\
\mathsf{E}\, W_i^4 &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i^4|X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i+u_i)^4|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[\left(X_i^4+4X_i^3u_i+6X_i^2u_i^2+4X_iu_i^3+u_i^4\right)|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left[X_i^4+6X_i^2\sigma_u^2+4X_i\,\mathsf{E}\left(u_i^3|X_i\right)+\mathsf{E}\left(u_i^4|X_i\right)\right]\\
&= \mathsf{E}\, X_i^4+6\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2+4\,\mathsf{E}\, X_i\,\mathsf{E}\, u_i^3+\mathsf{E}\, u_i^4 = b,\\
\mathsf{E}\, W_iY_i &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_iY_i|X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i+u_i)(\beta_0+\beta_1X_i+\epsilon_i)|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left[X_i(\beta_0+\beta_1X_i)\right] = \mathsf{E}\, X_iY_i,\\
\mathsf{E}\, W_i^2Y_i &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i^2Y_i|X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i+u_i)^2(\beta_0+\beta_1X_i+\epsilon_i)|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left[X_i^2(\beta_0+\beta_1X_i)+\sigma_u^2\left(\beta_0+\beta_1X_i\right)\right] = \mathsf{E}\, X_i^2Y_i+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, Y_i.
\end{aligned}
$$

Dosazením do (3.1.3) získáme

$$
\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2+\sigma_u^2 \\ \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2+\sigma_u^2 & a \\ \mathsf{E}\, X_i^2+\sigma_u^2 & a & b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, X_iY_i \\ \mathsf{E}\, X_i^2Y_i+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, Y_i \end{pmatrix}.
$$

Označíme $\boldsymbol{X}_i{}' = (1, X_i, X_i^2)$ a vektor $\begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, X_iY_i \\ \mathsf{E}\, X_i^2Y_i+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, Y_i \end{pmatrix}$ ještě upravíme následujícím způsobem

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, X_iY_i \\ \mathsf{E}\, X_i^2Y_i+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, Y_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, X_iY_i \\ \mathsf{E}\, X_i^2Y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_u^2\,\mathsf{E}\, Y_i \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \mathsf{E}[\mathsf{E}(Y_i|\, X_i)] \\ \mathsf{E}[\mathsf{E}(X_iY_i|\, X_i)] \\ \mathsf{E}[\mathsf{E}(X_i^2Y_i|\, X_i)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_u^2\,\mathsf{E}[\mathsf{E}(Y_i|\, X_i)] \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \mathsf{E}\, \boldsymbol{X}_i{}'\boldsymbol{\beta} \\ \mathsf{E}(X_i\boldsymbol{X}_i{}')\boldsymbol{\beta} \\ \mathsf{E}(X_i^2\boldsymbol{X}_i{}')\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_u^2\,\mathsf{E}\, \boldsymbol{X}_i{}'\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathsf{E}\begin{pmatrix}1\\X_i\\X_i^2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\beta} + \mathsf{E}\begin{pmatrix}0\\0\\\sigma_u^2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\beta}\\
&= \mathsf{E}\begin{pmatrix}1\\X_i\\X_i^2+\sigma_u^2\end{pmatrix}(1, X_i, X_i^2)\boldsymbol{\beta}\\
&= \begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2\\ \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2 & \mathsf{E}\,X_i^3\\ \mathsf{E}\,X_i^2+\sigma_u^2 & \mathsf{E}\,X_i^3+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^4+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dohromady dostáváme

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{\mathsf{P}} &\begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2+\sigma_u^2\\ \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2+\sigma_u^2 & a\\ \mathsf{E}\,X_i^2+\sigma_u^2 & a & b\end{pmatrix}^{-1}\times\\
&\times\begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2\\ \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2 & \mathsf{E}\,X_i^3\\ \mathsf{E}\,X_i^2+\sigma_u^2 & \mathsf{E}\,X_i^3+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^4+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Po provedení několika úprav na řádky obou matic dostáváme tvar

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\widetilde{\beta}_0^*\\\widetilde{\beta}_1^*\\\widetilde{\beta}_2^*\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} &\begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2+\sigma_u^2\\ 0 & 1 & \frac{a-\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i-\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}^{-1}\times\\
&\times\begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2\\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2} & \frac{\mathsf{E}\,X_i^3-\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\\ 0 & d & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\\0\end{pmatrix}, \quad (3.1.4)
\end{aligned}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
c &= b-(\mathsf{E}\,X_i^2)^2-2\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2-\sigma_u^4-\frac{\left(a-\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i-\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i\right)^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2},\\
d &= \frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\left(\mathsf{E}\,X_i^3-\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i\right)-\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\left(2\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i+\mathsf{E}\,u_i^3\right)
\end{aligned}
$$

a symbolem $*$ je označen sice nenulový, ale pro další výpočet nepodstatný prvek. Pro odhad $\widetilde{\beta}_2^*$ platí

$$
\widetilde{\beta}_2^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \frac{\frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\left(\mathsf{E}\,X_i^3-\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i\right)-\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\left(2\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i+\mathsf{E}\,u_i^3\right)}{b-(\mathsf{E}\,X_i^2)^2-2\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2-\sigma_u^4-\frac{\left(a-\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i-\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i\right)^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}}\beta_1.
$$

S využitím toho, že $\mathsf{E}\,X_i^3 - \mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i = \mathsf{E}\,(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^3 + 2\sigma_x^2\,\mathsf{E}\,X_i$, čitatel zlomku ještě upravíme na tvar

$$\frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\,\mathsf{E}\,(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^3 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\,\mathsf{E}\,u_i^3. \tag{3.1.5}$$

A tím dostáváme tvrzení věty. □

Dále se zabývejme otázkou, kdy je parametr β_2^* nulový. Vidíme, že pokud $\frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\,\mathsf{E}\,(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^3 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\,\mathsf{E}\,u_i^3 = 0$ nebo $\beta_1 = 0$, pak $\beta_2^* = 0$. Proveďme diskuzi o tom, za jakých předpokladů je výraz (3.1.5) nulový. Předpokládáme-li, že chyba regresoru u_i pochází z rozdělení s nulovým 3. centrálním momentem (např. normální rozdělení), pak je výraz $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\,\mathsf{E}\,u_i^3$ nulový. Přidáme-li stejný předpoklad o rozdělení regresoru X_i, pak i výraz $\frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\,\mathsf{E}\,(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^3$ bude nulový. Předpoklad symetrie rozdělení chyby regresoru u_i a regresoru X_i je tedy postačující podmínkou k tomu, aby parametr β_2^* byl rovný nule. Mezi tato rozdělení patří spolu s normálním rozdělením i rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-a, a)$, $a > 0$, t-rozdělení a další.

Řešením rovnice

$$\frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\,\mathsf{E}\,(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^3 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\,\mathsf{E}\,u_i^3 = 0$$

dospějeme k podmínce

$$\frac{\mathsf{E}\,(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^3}{\mathsf{E}\,(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^2} = \frac{\mathsf{E}\,u_i^3}{\mathsf{E}\,u_i^2}, \tag{3.1.6}$$

která je nutná a postačující. Pokud tato podmínka není splněna, odhad koeficientu kvadratického členu v kvadratickém regresním modelu s regresorem měřeným s chybou bude konvergovat k nenulové hodnotě, přestože přesný regresor má lineární vztah k odezvě.

Věta 3.5. *Pocházejí-li data z modelu* (3.1.1)*, ve kterém je* $\beta_1 = 0$*, pak pro odhad* $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\widetilde{\beta}_0^*, \widetilde{\beta}_1^*, \widetilde{\beta}_2^*)'$ *platí*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_0^* \\ \widetilde{\beta}_1^* \\ \widetilde{\beta}_2^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Analogicky jako důkaz věty 3.4. Vztah (3.1.4) bude mít tvar

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_0^* \\ \widetilde{\beta}_1^* \\ \widetilde{\beta}_2^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2 + \sigma_u^2 \\ 0 & 1 & \frac{a - \mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i - \sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i}{\sigma_x^2+\sigma_u^2} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2} & \frac{\mathsf{E}\,X_i^3 - \mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i}{\sigma_x^2+\sigma_u^2} \\ 0 & d & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2} & \frac{\mathsf{E}\,X_i^3 - \mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i}{\sigma_x^2+\sigma_u^2} \\ 0 & d & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a také

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2 + \sigma_u^2 \\ 0 & 1 & \frac{a - \mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i - \sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i}{\sigma_x^2+\sigma_u^2} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $*$ značí nenulové prvky, jejichž hodnotu nepotřebujeme znát. Tedy

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_0^* \\ \widetilde{\beta}_1^* \\ \widetilde{\beta}_2^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Můžeme říci, že pokud střední hodnota odezvy $\boldsymbol{Y}$ nezávisí na přesných regresorech $\boldsymbol{X}$, pak nezávisí ani na regresorech $\boldsymbol{W}$ měřených s chybou. V tomto případě je $\widetilde{\beta}_0^*$ konzistentním odhadem parametru β_0.

3.2 Model s více regresory

3.2.1 Popis modelu

Mějme náhodné veličiny $Y_1, \ldots, Y_n$, které se řídí lineárním modelem

$$Y_i = \beta_0 + \boldsymbol{X}_i{}'\boldsymbol{\beta}_x + \boldsymbol{Z}_i{}'\boldsymbol{\beta}_z + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.2.1}$$

kde $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ jsou nepozorované náhodné regresory, $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n$ pozorované regresory, $\beta_0, \boldsymbol{\beta}_x, \boldsymbol{\beta}_z$ parametry modelu a $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ náhodné chyby modelu. Místo vektorů $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ pozorujeme vektory $\boldsymbol{W}_1, \ldots, \boldsymbol{W}_n$, u kterých předpokládáme, že $\boldsymbol{W}_i = \boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{u}_i$, kde $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ jsou náhodné chyby regresoru. Předpokládáme, že pro $i = 1, \ldots, n$ platí

- čtveřice $(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i, \varepsilon_i, \boldsymbol{u}_i)$ jsou nezávislé a stejně rozdělené,
- ε_i a $\boldsymbol{u}_i$ jsou nezávislé na $\boldsymbol{X}_i$ a $\boldsymbol{Z}_i$, $\mathsf{cov}(\boldsymbol{u}_i, \varepsilon_i) = \boldsymbol{\Sigma}_{u\varepsilon}$,
- $\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i^4 < \infty$ a $\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{\mu}_x$, $\mathsf{var}\,\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{\Sigma}_{xx}$, dále $\mathsf{var}\,\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{\Sigma}_{zz}$ a $\mathsf{cov}(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i) = \boldsymbol{\Sigma}_{xz}$,
- $\mathsf{E}\,\varepsilon_i = 0$, $\mathsf{var}\,\varepsilon_i = \sigma_\varepsilon^2$,
- $\mathsf{E}\,\boldsymbol{u}_i^4 < \infty$ a $\mathsf{E}\,\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$, $\mathsf{var}\,\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{\Sigma}_{uu}$.

Momenty uvažujeme po složkách. Varianční a kovarianční matice předpokládáme regulární.

3.2.2 Konzistence odhadů

Mějme data $(Y_i, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i)$ pocházející z modelu (3.2.1). Odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_x{}', \widehat{\boldsymbol{\beta}}_z{}')'$ vektoru parametrů $(\beta_0, \boldsymbol{\beta}_x', \boldsymbol{\beta}_z')'$ metodou nejmenších čtverců je dán vztahem

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y},$$

kde $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{X}_1{}' & \boldsymbol{Z}_1{}' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \boldsymbol{X}_n{}' & \boldsymbol{Z}_n{}' \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$. Víme, že tento odhad je nestranným a konzistentním odhadem vektoru parametrů $(\beta_0, \boldsymbol{\beta}_x', \boldsymbol{\beta}_z')'$.

Pro data pocházející z modelu (3.2.1) použijeme model

$$Y_i = \beta_0^* + \boldsymbol{\beta}_x^{*\prime}\boldsymbol{W}_i + \boldsymbol{\beta}_z^{*\prime}\boldsymbol{Z}_i + \varepsilon_i^*, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ve kterém obecně $\mathsf{E}(\varepsilon_i^* \,|\, \boldsymbol{W}_i, \boldsymbol{Z}_i) \neq 0$ a $\mathsf{var}(\varepsilon_i^* \,|\, \boldsymbol{W}_i, \boldsymbol{Z}_i)$ není konstantní. Označme $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\widetilde{\beta}_0^*, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_x^{*}{}', \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_z^{*}{}')'$ odhad $(\beta_0^*, \boldsymbol{\beta}_x^{*\prime}, \boldsymbol{\beta}_z^{*\prime})'$ metodou nejmenších čtverců. Víme, že $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}$, kde $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{W}_1{}' & \boldsymbol{Z}_1{}' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \boldsymbol{W}_n{}' & \boldsymbol{Z}_n{}' \end{pmatrix}$. Podívejme se teď na konzistenci odhadu $(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_x^{*}{}', \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_z^{*}{}')'$.

Věta 3.6. *Platí*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_x^* \\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_z^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} + \boldsymbol{\Sigma}_{uu} & \boldsymbol{\Sigma}_{xz} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{zx} & \boldsymbol{\Sigma}_{zz} \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{zy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{u\epsilon} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\}.$$

Důkaz. Nejdříve zaveďme značení

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{W}_1' & \boldsymbol{Z}_1' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \boldsymbol{W}_n' & \boldsymbol{Z}_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1' & \boldsymbol{Z}_1' \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{V}_n' & \boldsymbol{Z}_n' \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}_i{}' = (1, \boldsymbol{W}_i{}'), \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

Víme, že odhad metodou nejmenších čtverců je dán vztahem

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* &= (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W})^{-1}\, \boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y} = \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1} \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}\right), \text{ kde} \\
\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{V}_i\boldsymbol{V}_i' & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{V}_i\boldsymbol{Z}_i' \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{V}_i' & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i' \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{V}_i' & \mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{Z}_i' \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{V}_i' & \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i' \end{pmatrix}, \\
\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{V}_iY_i \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{Z}_iY_i \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_iY_i \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_iY_i \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

podle slabého zákona velkých čísel. Tedy

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{V}_i' & \mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{Z}_i' \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{V}_i' & \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_iY_i \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_iY_i \end{pmatrix}. \tag{3.2.2}$$

Vyjádříme postupně jednotlivé složky výrazu (3.2.2) a dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{V}_i' &= \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,\boldsymbol{W}_i' \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{W}_i & \mathsf{E}\,\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{W}_i' \end{pmatrix}, \text{kde} \\
\mathsf{E}\,\boldsymbol{W}_i &= \mathsf{E}\,[\mathsf{E}(\boldsymbol{W}_i|\, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i)] = \mathsf{E}\,(\mathsf{E}\,[(\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{u}_i)|\, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i]) = \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i, \\
\mathsf{E}\,\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{W}_i' &= \mathsf{E}\,[\mathsf{E}(\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{W}_i'|\, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i)] = \mathsf{E}\,(\mathsf{E}\,[(\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{u}_i)'|\, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i]) \\
&= \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i' + \boldsymbol{\Sigma}_{uu}, \text{ dále} \\
\mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{Z}_i' &= \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_i' \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{Z}_i' \end{pmatrix}, \text{kde} \\
\mathsf{E}\,\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{Z}_i' &= \mathsf{E}\,[\mathsf{E}(\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{Z}_i'|\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i)] = \mathsf{E}\,(\mathsf{E}[(\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{Z}_i'|\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i]) = \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{Z}_i'
\end{aligned}$$

a nakonec

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_iY_i \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_iY_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,Y_i \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{W}_iY_i \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_iY_i \end{pmatrix}, \text{kde} \\
\mathsf{E}\,\boldsymbol{W}_iY_i &= \mathsf{E}\,[\mathsf{E}(\boldsymbol{W}_iY_i|\, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i)] \\
&= \mathsf{E}\,(\mathsf{E}\,[(\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{u}_i)(\beta_0 + \boldsymbol{\beta}_x'\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{\beta}_z'\boldsymbol{Z}_i + \varepsilon_i)|\, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i]) \\
&= \mathsf{E}\,[\boldsymbol{X}_i(\beta_0 + \boldsymbol{\beta}_x'\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{\beta}_z'\boldsymbol{Z}_i) + \mathsf{E}(\boldsymbol{u}_i\varepsilon_i|\, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i)] = \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_iY_i + \boldsymbol{\Sigma}_{u\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_0^* \\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_x^* \\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_z^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i' & \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_i' \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i & \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i' + \boldsymbol{\Sigma}_{uu} & \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{Z}_i' \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_i & \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{X}_i' & \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i' \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,Y_i \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i Y_i \\ \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_i Y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\Sigma}_{u\varepsilon} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i' & \mathsf{E}\,\boldsymbol{Z}_i' \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{xx} + \boldsymbol{\Sigma}_{uu} & \boldsymbol{\Sigma}_{xz} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{zx} & \boldsymbol{\Sigma}_{zz} \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,Y_i \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\Sigma}_{u\varepsilon} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\}.$$

Odtud je již vidět, že

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_x^* \\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_z^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} + \boldsymbol{\Sigma}_{uu} & \boldsymbol{\Sigma}_{xz} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{zx} & \boldsymbol{\Sigma}_{zz} \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{zy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{u\varepsilon} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Vidíme, že pokud jsou přesné regresory $\boldsymbol{Z}$ korelované s regresory $\boldsymbol{X}$, tj. $\boldsymbol{\Sigma}_{zx} \neq \mathbf{0}$, pak chyba měření regresorů $\boldsymbol{X}$ vychýlí nejen odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}_x$, ale i odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}_z$.

4 Aditivní model s heteroskedastickou chybou

V této kapitole se budeme věnovat situaci, kdy $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}$ a podmíněný rozptyl chyby regresorů $\boldsymbol{u}$ při daných hodnotách regresorů $\boldsymbol{X}$ závisí na hodnotách regresorů $\boldsymbol{X}$. Pro data pocházející z *lineárního* regresního modelu s přesnými regresory $\boldsymbol{X}$ se nejdříve budeme zabývat otázkou konzistence odhadu metodou nejmenších čtverců v *lineárním* regresním modelu s regresory $\boldsymbol{W}$ měřenými s chybou. Potom přejdeme k otázce nulovosti kvadratického členu v *kvadratickém* regresním modelu s regresory $\boldsymbol{W}$ měřenými s chybou použitého opět pro data pocházející z *lineárního* regresního modelu s přesnými regresory $\boldsymbol{X}$. Tento problém vyřešíme pouze v jednom konkrétním případě, kdy podmíněný rozptyl $\boldsymbol{u}$ při daných hodnotách regresorů $\boldsymbol{X}$ závisí na druhé mocnině hodnoty regresorů $\boldsymbol{X}$.

4.1 Popis modelu

Mějme náhodné veličiny $Y_1, \ldots, Y_n$, které se řídí lineárním regresním modelem

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4.1.1}$$

kde $X_1, \ldots, X_n$ jsou nepozorované náhodné regresory, β_0, β_1 parametry modelu a $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ náhodné chyby modelu. Místo veličin $X_1, \ldots, X_n$ pozorujeme náhodné veličiny $W_1, \ldots, W_n$, u kterých předpokládáme, že $W_i = X_i + u_i$, kde $u_1, \ldots, u_n$ jsou náhodné chyby regresoru. Předpokládáme, že pro $i = 1, \ldots, n$ platí, že trojice $(X_i, \varepsilon_i, u_i)$ jsou nezávislé a stejně rozdělené, ε_i je nezávislé na X_i a u_i, $\mathsf{E}\, X_i^4 < \infty$ a $\mathsf{E}\, X_i = \mu_x$, $\mathsf{var}\, X_i = \sigma_x^2 > 0$, $\mathsf{E}\, \varepsilon_i = 0$, $\mathsf{var}\, \varepsilon_i = \sigma_\varepsilon^2 > 0$, $\mathsf{E}\, u_i^4 < \infty$ a $\mathsf{E}(u_i | X_i) = 0$. Navíc

$$\mathsf{var}(u_i | X_i) = \sigma_u^2 \cdot f(X_i) > 0,$$

kde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ je funkce.

4.2 Konzistence odhadu

Mějme data (Y_i, X_i) pocházející z modelu (4.1.1). Odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)'$ vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)'$ metodou nejmenších čtverců je dán vztahem

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y},$$

kde $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$. Víme, že tento odhad je nestranným a konzistentním odhadem vektoru parametrů $(\beta_0, \beta_1)'$.

Pro data pocházející z modelu (4.1.1) použijeme model

$$Y_i = \beta_0^* + \beta_1^* W_i + \varepsilon_i^*, \qquad i = 1, \dots, n,$$

ve kterém obecně $\mathsf{E}(\varepsilon_i^* | W_i) \neq 0$ a $\mathsf{var}(\varepsilon_i^* | W_i)$ není konstantní. Odhad vektoru parametrů $(\beta_0^*, \beta_1^*)'$ metodou nejmenších čtverců označme $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\widetilde{\beta}_0^*, \widetilde{\beta}_1^*)'$. Víme, že $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}$, kde $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & W_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & W_n \end{pmatrix}$. Podívejme se, jak souvisí parametr β_1^* s původním parametrem β_1.

Věta 4.1. *Odhad $\widetilde{\beta}_1^*$ konverguje v pravděpodobnosti k* $\beta_1^* = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2 \mathsf{E} f(X_i)} \beta_1$.

Důkaz. Pro odhad $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^*$ platí

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1} \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}\right) &\xrightarrow{\mathsf{P}} (\mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_i \boldsymbol{V}_i')^{-1} (\mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_i Y_i) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,W_i \\ \mathsf{E}\,W_i & \mathsf{E}\,W_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,Y_i \\ \mathsf{E}\,W_i Y_i \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

kde $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & W_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{V}_n' \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{V}_i' = (1, W_i)$ a $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$. Konvergence v pravděpodobnosti vyplývá ze slabého zákona velkých čísel. Spočteme teď jednotlivé složky výrazu (4.2.1). Postupně máme

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\,W_i &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i | X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i + u_i)\,|X_i\right]\right) = \mathsf{E}\,X_i, \\ \mathsf{E}\,W_i^2 &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i^2 | X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i + u_i)^2 | X_i\right]\right) \\ &= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[\left(X_i^2 + 2X_i u_i + u_i^2\right) |X_i\right]\right) = \mathsf{E}\,X_i^2 + \sigma_u^2\,\mathsf{E}\,f(X_i), \\ \mathsf{E}\,W_i Y_i &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i Y_i | X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i + u_i)(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) | X_i\right]\right) \\ &= \mathsf{E}\left[X_i(\beta_0 + \beta_1 X_i)\right] = \mathsf{E}\,X_i Y_i. \end{aligned}$$

To tedy znamená, že

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,X_i \\ \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2 + \sigma_u^2\,\mathsf{E}\,f(X_i) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,Y_i \\ \mathsf{E}\,X_i Y_i \end{pmatrix}.$$

Pokud označíme $\boldsymbol{X}_i' = (1, X_i)$, pak

$$\begin{pmatrix} \mathsf{E}\,Y_i \\ \mathsf{E}\,X_i Y_i \end{pmatrix} = \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i Y_i = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}(\boldsymbol{X}_i Y_i | X_i)\right] = \mathsf{E}(\boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i')\boldsymbol{\beta}.$$

A tedy

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\beta}_0^* \\ \widetilde{\beta}_1^*\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\, X_i \\ \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2 + \sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, f(X_i)\end{pmatrix}^{-1} \mathsf{E}(\boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i{}')\boldsymbol{\beta}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\, X_i \\ \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2 + \sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, f(X_i)\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\, X_i \\ \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2\end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\, X_i \\ 0 & \sigma_x^2 + \sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, f(X_i)\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\, X_i \\ 0 & \sigma_x^2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\beta_0 \\ \beta_1\end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme, že

$$\widetilde{\beta}_1^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, f(X_i)} \beta_1.$$

□

4.3 Tvar regresní závislosti

V tomto oddílu se budeme zabývát otázkou nulovosti kvadratického členu v kvadratickém regresním modelu s regresory $W_1, \ldots, W_n$ měřenými s chybou při pevné volbě funkce $f(x) = x^2$. Máme $\mathsf{var}(u_i |\, X_i) = \sigma_u^2 X_i^2 > 0$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Mějme data pocházející z modelu (4.1.1). Můžeme také psát, že tato data pocházejí z modelu

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

kde parametr $\beta_2 = 0$. Odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)'$ vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, 0)'$ metodou nejmenších čtverců je dán vztahem $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$, kde matice $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}1 & X_1 & X_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_n & X_n^2\end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$. Víme, že tento odhad je nestranným a konzistentním odhadem vektoru parametrů $(\beta_0, \beta_1, 0)'$.

Pro tato data použijeme model

$$Y_i = \beta_0^* + \beta_1^* W_i + \beta_2^* W_i^2 + \varepsilon_i^*, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4.3.1}$$

pro nějž nejsou splněny předpoklady lineárního modelu. Odhad vektoru parametrů $(\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*)'$ metodou nejmenších čtverců označme $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\widetilde{\beta}_0^*, \widetilde{\beta}_1^*, \widetilde{\beta}_2^*)'$. Víme, že $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}$, kde $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix}1 & W_1 & W_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_n & W_n^2\end{pmatrix}$. Zkoumejme teď chování odhadu kvadratického parametru β_2^*.

Věta 4.2. *Označíme-li*

$$a = \left(1 + 3\sigma_u^2\right) \mathsf{E}\, X_i^3 + \mathsf{E}\, u_i^3,$$
$$b = \left(1 + 6\sigma_u^2\right) \mathsf{E}\, X_i^4 + 4\, \mathsf{E}\left(X_i u_i^3\right) + \mathsf{E}\, u_i^4,$$

pak platí

$$\widetilde{\beta}_2^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \beta_2^* = \frac{\frac{\sigma_u^2 \mathsf{E}\, X_i^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2 \mathsf{E}\, X_i^2} \mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}\, X_i)^3 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2 \mathsf{E}\, X_i^2} \mathsf{E}\, u_i^3}{b - [(1+\sigma_u^2)\, \mathsf{E}\, X_i^2]^2 - \frac{\left[a - (1+\sigma_u^2)\, \mathsf{E}\, X_i^2\, \mathsf{E}\, X_i\right]^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2 \mathsf{E}\, X_i^2}} +$$
$$+ \frac{\frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2 \mathsf{E}\, X_i^2} \left[\mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}\, X_i)^3 + 2\sigma_x^2\, \mathsf{E}\, X_i\right] (\sigma_u^2\, \mathsf{E}\, X_i^2 - 2\sigma_x^2)}{b - [(1+\sigma_u^2)\, \mathsf{E}\, X_i^2]^2 - \frac{\left[a - (1+\sigma_u^2)\, \mathsf{E}\, X_i^2\, \mathsf{E}\, X_i\right]^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2 \mathsf{E}\, X_i^2}} \beta_1.$$

Důkaz. Zaveďme značení

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & W_1 & W_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_n & W_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{V}_n' \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}_i' = (1, W_i, W_i^2),$$
$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_n & X_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_n' \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_i' = (1, X_i, X_i^2),$$
$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'.$$

Víme, že podle slabého zákona velkých čísel platí

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1} \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} \left(\mathsf{E}\, \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{V}_i'\right)^{-1} \left(\mathsf{E}\, \boldsymbol{V}_i Y_i\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, W_i & \mathsf{E}\, W_i^2 \\ \mathsf{E}\, W_i & \mathsf{E}\, W_i^2 & \mathsf{E}\, W_i^3 \\ \mathsf{E}\, W_i^2 & \mathsf{E}\, W_i^3 & \mathsf{E}\, W_i^4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, W_i Y_i \\ \mathsf{E}\, W_i^2 Y_i \end{pmatrix}. \quad (4.3.2)$$

Výpočtem jednotlivých prvků matic ze vztahu (4.3.2) dostáváme

$$\mathsf{E}\, W_i = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i | X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i + u_i)\, | X_i\right]\right) = \mathsf{E}\, X_i,$$
$$\mathsf{E}\, W_i^2 = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i^2 | X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i + u_i)^2 | X_i\right]\right)$$
$$= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[\left(X_i^2 + 2X_i u_i + u_i^2\right) | X_i\right]\right) = \mathsf{E}\left(X_i^2 + \sigma_u^2 X_i^2\right) = \left(1 + \sigma_u^2\right) \mathsf{E}\, X_i^2,$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\, W_i^3 &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i^3|X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i+u_i)^3|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[\left(X_i^3+3X_i^2u_i+3X_iu_i^2+u_i^3\right)|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left[X_i^3+3X_i\sigma_u^2X_i^2+\mathsf{E}\left(u_i^3|X_i\right)\right]\\
&= \left(1+3\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\, X_i^3+\mathsf{E}\, u_i^3 = a,\\
\mathsf{E}\, W_i^4 &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i^4|X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i+u_i)^4|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[\left(X_i^4+4X_i^3u_i+6X_i^2u_i^2+4X_iu_i^3+u_i^4\right)|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left[X_i^4+6X_i^2\sigma_u^2X_i^2+4\,\mathsf{E}\left(X_iu_i^3|X_i\right)+\mathsf{E}\left(u_i^4|X_i\right)\right]\\
&= \left(1+6\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\, X_i^4+4\,\mathsf{E}\left(X_iu_i^3\right)+\mathsf{E}\, u_i^4 = b,\\
\mathsf{E}\, W_iY_i &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_iY_i|X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i+u_i)(\beta_0+\beta_1X_i+\varepsilon_i)|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left[X_i(\beta_0+\beta_1X_i)\right] = \mathsf{E}\, X_iY_i,\\
\mathsf{E}\, W_i^2Y_i &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i^2Y_i|X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i+u_i)^2(\beta_0+\beta_1X_i+\varepsilon_i)|X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left[X_i^2(\beta_0+\beta_1X_i)+\sigma_u^2X_i^2\left(\beta_0+\beta_1X_i\right)\right] = \mathsf{E}\, X_i^2Y_i+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2Y_i\\
&= \left(1+\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\, X_i^2Y_i.
\end{aligned}$$

Dosazením do (4.3.2) získáme

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 \\ \mathsf{E}\, X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 & a \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 & a & b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, X_iY_i \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2Y_i \end{pmatrix}.$$

Označíme $\boldsymbol{X}_i{}' = (1, X_i, X_i^2)$ a vektor $\begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, X_iY_i \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2Y_i \end{pmatrix}$ ještě upravíme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, X_iY_i \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2Y_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, X_iY_i \\ \mathsf{E}\, X_i^2Y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2Y_i \end{pmatrix}\\
&= \mathsf{E}\begin{pmatrix} 1 \\ X_i \\ X_i^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}_i{}'\boldsymbol{\beta} + \mathsf{E}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_u^2X_i^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}_i{}'\boldsymbol{\beta}\\
&= \mathsf{E}\begin{pmatrix} 1 \\ X_i \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 \end{pmatrix}(1, X_i, X_i^2)\boldsymbol{\beta}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2 \\ \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2 & \mathsf{E}\, X_i^3 \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^3 & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dohromady dostáváme

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 \\ \mathsf{E}\, X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 & a \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 & a & b \end{pmatrix}^{-1} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2 \\ \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2 & \mathsf{E}\, X_i^3 \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^3 & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Po provedení několika úprav na řádky obou matic dostáváme tvar

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 \\ 0 & 1 & \frac{a-\left(1+\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\, X_i^2\,\mathsf{E}\, X_i}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2} & \frac{\mathsf{E}\, X_i^3-\mathsf{E}\, X_i^2\,\mathsf{E}\, X_i}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2} \\ 0 & d & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.3)$$

kde

$$c = b - \left[\left(1+\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\, X_i^2\right]^2 - \frac{\left[a-(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2\,\mathsf{E}\, X_i\right]^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2},$$
$$d = \left(1+\sigma_u^2\right)\left(\mathsf{E}\, X_i^3 - \mathsf{E}\, X_i^2\,\mathsf{E}\, X_i\right) - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2}\left[a-\left(1+\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\, X_i^2\,\mathsf{E}\, X_i\right]$$

a symbolem $*$ je označen sice nenulový, ale pro další výpočet nepodstatný prvek. Vztah pro d ještě upravíme. Použijeme

$$\mathsf{E}\, X_i^3 - \mathsf{E}\, X_i^2\,\mathsf{E}\, X_i = \mathsf{E}\,(X_i - \mathsf{E}\, X_i)^3 + 2\sigma_x^2\,\mathsf{E}\, X_i$$

a provedením několika úprav dostaneme tvar

$$d = \frac{\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2}\,\mathsf{E}(X_i-\mathsf{E}\, X_i)^3 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2}\,\mathsf{E}\, u_i^3 +$$
$$+ \frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2}\left[\mathsf{E}(X_i-\mathsf{E}\, X_i)^3 + 2\sigma_x^2\,\mathsf{E}\, X_i\right](\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2 - 2\sigma_x^2).$$

Pro odhad $\widetilde{\beta}_2^*$ tedy dostáváme

$$\widetilde{\beta}_2^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \frac{\frac{\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2} \,\mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}\, X_i)^3 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2} \,\mathsf{E}\, u_i^3}{b - [(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2]^2 - \frac{\left[a-(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 \,\mathsf{E}\, X_i\right]^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2}} + \\ + \frac{\frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2} \left[\mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}\, X_i)^3 + 2\sigma_x^2 \,\mathsf{E}\, X_i\right] (\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2 - 2\sigma_x^2)}{b - [(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2]^2 - \frac{\left[a-(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 \,\mathsf{E}\, X_i\right]^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2}} \beta_1.$$

□

Podívejme se nyní na vztah z věty 4.2. Odhad $\widetilde{\beta}_2^*$ bude konvergovat k nule, pokud budou regresory $\boldsymbol{X}$ a chyby $\boldsymbol{u}$ pocházet z rozdělení ne nutně stejných, symetrických kolem své *nulové* střední hodnoty. Tyto předpoklady se dají ještě zeslabit. Místo nulové střední hodnoty stačí, aby platilo, že $\mathsf{E}\, X_i = -\frac{\mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}\, X_i)^3}{2\sigma_x^2}$ nebo $(\mathsf{E}\, X_i)^2 = \frac{\sigma_x^2(2-\sigma_u^2)}{\sigma_u^2}$. Tyto dvě podmínky dostaneme řešením rovnice

$$\left[\mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}\, X_i)^3 + 2\sigma_x^2 \,\mathsf{E}\, X_i\right] (\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2 - 2\sigma_x^2) = 0. \tag{4.3.4}$$

Věta 4.3. *Pocházejí-li data z modelu* (4.1.1), *ve kterém je* $\beta_1 = 0$, *pak pro odhad* $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\widetilde{\beta}_0^*, \widetilde{\beta}_1^*, \widetilde{\beta}_2^*)'$ *platí*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_0^* \\ \widetilde{\beta}_1^* \\ \widetilde{\beta}_2^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Analogicky jako důkaz věty 4.2. Vztah (4.3.3) bude mít tvar

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_0^* \\ \widetilde{\beta}_1^* \\ \widetilde{\beta}_2^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 \\ 0 & 1 & \frac{a-\left(1+\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\, X_i^2 \,\mathsf{E}\, X_i}{\sigma_x^2+\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2} & \frac{\mathsf{E}\, X_i^3 - \mathsf{E}\, X_i^2 \,\mathsf{E}\, X_i}{\sigma_x^2+\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2} \\ 0 & d & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2} & \frac{\mathsf{E}\, X_i^3 - \mathsf{E}\, X_i^2 \,\mathsf{E}\, X_i}{\sigma_x^2+\sigma_u^2 \,\mathsf{E}\, X_i^2} \\ 0 & d & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a také

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 \\ 0 & 1 & \frac{a-\left(1+\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\, X_i^2\,\mathsf{E}\, X_i}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\, X_i^2} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $*$ značí nenulové prvky, jejichž hodnotu nepotřebujeme znát. Tedy

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_0^* \\ \widetilde{\beta}_1^* \\ \widetilde{\beta}_2^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Můžeme opět říci, že pokud střední hodnota odezvy $\boldsymbol{Y}$ nezávisí na regresorech $\boldsymbol{X}$, pak nezávisí ani na regresorech $\boldsymbol{W}$. I zde je $\widetilde{\beta}_0^*$ konzistentním odhadem parametru β_0.

5 Multiplikativní model s homoskedastickou chybou

V této kapitole se budeme věnovat situaci, kdy $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{u}$ a podmíněný rozptyl $\boldsymbol{u}$ při daných hodnotách regresoru $\boldsymbol{X}$ je konstantní. Pro data pocházející z *lineárního* regresního modelu se podíváme nejdříve na konzistenci odhadu lineárního členu v *lineárním* regresním modelu s regresory $\boldsymbol{W}$ měřenými s chybou. Potom přejdeme k otázce nulovosti kvadratického členu v *kvadratickém* regresním modelu s regresory $\boldsymbol{W}$ měřenými s chybou použitého opět pro data pocházející z *lineárního* regresního modelu s přesnými regresory $\boldsymbol{X}$.

5.1 Popis modelu

Mějme náhodné veličiny $Y_1, \ldots, Y_n$, které se řídí lineárním regresním modelem

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.1.1}$$

kde $X_1, \ldots, X_n$ jsou nepozorované náhodné regresory, β_0, β_1 parametry modelu a $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ náhodné chyby modelu. Místo veličin $X_1, \ldots, X_n$ pozorujeme náhodné veličiny $W_1, \ldots, W_n$, u kterých předpokládáme, že $W_i = X_i \cdot u_i$, kde $u_1, \ldots, u_n$ jsou náhodné chyby regresoru. Předpokládáme, že pro $i = 1, \ldots, n$ platí

- trojice $(X_i, \varepsilon_i, u_i)$ jsou nezávislé a stejně rozdělené,
- ε_i je nezávislé na X_i a u_i, u_i je nezávislé na X_i,
- $\mathsf{E}\, X_i^4 < \infty$ a $\mathsf{E}\, X_i = \mu_x$, $\mathsf{var}\, X_i = \sigma_x^2 > 0$,
- $\mathsf{E}\, \varepsilon_i = 0$, $\mathsf{var}\, \varepsilon_i = \sigma_\varepsilon^2 > 0$,
- $\mathsf{E}\, u_i^4 < \infty$ a $\mathsf{E}\, u_i = 1$, $\mathsf{var}\, u_i = \sigma_u^2 > 0$.

5.2 Konzistence odhadu

Mějme data (Y_i, X_i) pocházející z modelu (5.1.1). Odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)'$ vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)'$ metodou nejmenších čtverců je dán vztahem

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y},$$

kde $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$. Víme, že tento odhad je nestranným a konzistentním odhadem vektoru parametrů $(\beta_0, \beta_1)'$.

Pro data pocházející z modelu (5.1.1) použijeme model

$$Y_i = \beta_0^* + \beta_1^* W_i + \varepsilon_i^*, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{5.2.1}$$

ve kterém obecně $\mathsf{E}(\varepsilon_i^* | W_i) \neq 0$ a $\mathsf{var}(\varepsilon_i^* | W_i)$ není konstantní. Odhad vektoru parametrů $(\beta_0^*, \beta_1^*)'$ metodou nejmenších čtverců označme $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\widetilde{\beta}_0^*, \widetilde{\beta}_1^*)'$. Víme, že $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}$, kde $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & W_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & W_n \end{pmatrix}$. Podívejme se, jak souvisí parametr β_1^* s původním parametrem β_1.

Věta 5.1. *Odhad $\widetilde{\beta}_1^*$ konverguje v pravděpodobnosti k $\beta_1^* = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2 \mathsf{E} X_i^2} \beta_1$.*

Důkaz. Pro odhad $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^*$ podle slabého zákona velkých čísel platí

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1} \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}\right) &\xrightarrow{\mathsf{P}} (\mathsf{E}\, \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{V}_i')^{-1} (\mathsf{E}\, \boldsymbol{V}_i Y_i) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, W_i \\ \mathsf{E}\, W_i & \mathsf{E}\, W_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, W_i Y_i \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

kde $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & W_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{V}_n' \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{V}_i' = (1, W_i)$ a $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$. Nyní spočítáme jednotlivé složky výrazu (5.2.2). Postupně máme

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\, W_i &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i | X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(X_i \cdot u_i | X_i\right)\right] = \mathsf{E}\, X_i, \\ \mathsf{E}\, W_i^2 &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i^2 | X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i \cdot u_i)^2 | X_i\right]\right) = \mathsf{E}\left[X_i^2 \cdot \mathsf{E}\left(u_i^2 | X_i\right)\right] \\ &= \mathsf{E}\left[X_i^2 \cdot \left(\mathsf{var}\left(u_i | X_i\right) + \left[\mathsf{E}\left(u_i | X_i\right)\right]^2\right)\right] = \left(1 + \sigma_u^2\right) \mathsf{E}\, X_i^2, \\ \mathsf{E}\, W_i Y_i &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i Y_i | X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i \cdot u_i)(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) | X_i\right]\right) \\ &= \mathsf{E}\left[X_i(\beta_0 + \beta_1 X_i)\, \mathsf{E}\left(u_i | X_i\right)\right] = \mathsf{E}\, X_i Y_i. \end{aligned}$$

To tedy znamená, že

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i \\ \mathsf{E}\, X_i & (1 + \sigma_u^2)\, \mathsf{E}\, X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, X_i Y_i \end{pmatrix}.$$

Pokud označíme $\boldsymbol{X}_i' = (1, X_i)$, pak

$$\begin{pmatrix} \mathsf{E}\, Y_i \\ \mathsf{E}\, X_i Y_i \end{pmatrix} = \mathsf{E}\, \boldsymbol{X}_i Y_i = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}(\boldsymbol{X}_i Y_i | X_i)\right] = \mathsf{E}(\boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i')\boldsymbol{\beta}.$$

A tedy

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\beta}_0^*\\ \widetilde{\beta}_1^*\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\,X_i\\ \mathsf{E}\,X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2\end{pmatrix}^{-1} \mathsf{E}(\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i')\boldsymbol{\beta}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\,X_i\\ \mathsf{E}\,X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\,X_i\\ \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2\end{pmatrix}\boldsymbol{\beta}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\,X_i\\ 0 & \sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1 & \mathsf{E}\,X_i\\ 0 & \sigma_x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme, že

$$\widetilde{\beta}_1^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}\beta_1.$$

□

5.3 Tvar regresní závislosti

Mějme data pocházející z modelu (5.1.1). Můžeme také psát, že tato data pocházejí z modelu

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \varepsilon_i, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{5.3.1}$$

kde parametr $\beta_2 = 0$. Odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)'$ parametru $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, 0)'$ metodou nejmenších čtverců je dán vztahem $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$, kde matice $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}1 & X_1 & X_1^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & X_n & X_n^2\end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{Y} = (Y_1,\dots,Y_n)'$. Víme, že tento odhad je nestranným a konzistentním odhadem vektoru parametrů $(\beta_0, \beta_1, 0)'$.

Pro tato data použijeme model

$$Y_i = \beta_0^* + \beta_1^* W_i + \beta_2^* W_i^2 + \varepsilon_i^*, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{5.3.2}$$

pro nějž nejsou splněny předpoklady lineárního modelu. Odhad vektoru parametrů $(\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*)'$ metodou nejmenších čtverců označme $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\widetilde{\beta}_0^*, \widetilde{\beta}_1^*, \widetilde{\beta}_2^*)'$. Víme, že $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}$, kde $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix}1 & W_1 & W_1^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & W_n & W_n^2\end{pmatrix}$. Zkoumejme teď chování odhadu kvadratického parametru β_2^*.

Věta 5.2. *Platí*

$$\widetilde{\beta}_2^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \beta_2^* = \frac{(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^3 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}\,\mathsf{E}(X_i^3u_i^3)}{\mathsf{E}\,(X_i^4u_i^4) - [(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2]^2 - \frac{\left[\mathsf{E}\left(X_i^3u_i^3\right)-(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i\right]^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}} +$$
$$+ \frac{(1+\sigma_u^2)\sigma_x^2\,\mathsf{E}\,X_i\left[2+\frac{1}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}\,\mathsf{E}\,X_i^2\right]}{\mathsf{E}\,(X_i^4u_i^4) - [(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2]^2 - \frac{\left[\mathsf{E}\left(X_i^3u_i^3\right)-(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i\right]^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}}\beta_1.$$

Důkaz. Zaveďme opět značení

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & W_1 & W_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_n & W_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{V}_n' \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}_i' = (1, W_i, W_i^2),$$
$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_n & X_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_n' \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_i' = (1, X_i, X_i^2),$$
$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'.$$

Víme, že podle slabého zákona velkých čísel platí

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Y}\right) &\xrightarrow{\mathsf{P}} (\mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{V}_i')^{-1}\,(\mathsf{E}\,\boldsymbol{V}_iY_i) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,W_i & \mathsf{E}\,W_i^2 \\ \mathsf{E}\,W_i & \mathsf{E}\,W_i^2 & \mathsf{E}\,W_i^3 \\ \mathsf{E}\,W_i^2 & \mathsf{E}\,W_i^3 & \mathsf{E}\,W_i^4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mathsf{E}\,Y_i \\ \mathsf{E}\,W_iY_i \\ \mathsf{E}\,W_i^2Y_i \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Výpočtem jednotlivých prvků matic ze vztahu (5.3.3) dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,W_i &= \mathsf{E}\,[\mathsf{E}\,(W_i|\,X_i)] = \mathsf{E}\,(\mathsf{E}\,[(X_i\cdot u_i)\,|\,X_i]) = \mathsf{E}\,X_i,\\
\mathsf{E}\,W_i^2 &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i^2|\,X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i\cdot u_i)^2|\,X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left[X_i^2\cdot\left(\mathsf{var}\,(u_i|\,X_i) + [\mathsf{E}\,(u_i|\,X_i)]^2\right)\right] = \left(1+\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\,X_i^2,\\
\mathsf{E}\,W_i^3 &= \mathsf{E}\left(X_i^3u_i^3\right),\\
\mathsf{E}\,W_i^4 &= \mathsf{E}\left(X_i^4u_i^4\right),\\
\mathsf{E}\,W_iY_i &= \mathsf{E}\,[\mathsf{E}\,(W_iY_i|\,X_i)] = \mathsf{E}\,(\mathsf{E}\,[(X_i\cdot u_i)(\beta_0+\beta_1X_i+\varepsilon_i)|\,X_i])\\
&= \mathsf{E}\,[X_i(\beta_0+\beta_1X_i)] = \mathsf{E}\,X_iY_i,\\
\mathsf{E}\,W_i^2Y_i &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(W_i^2Y_i|\,X_i\right)\right] = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left[(X_i\cdot u_i)^2(\beta_0+\beta_1X_i+\varepsilon_i)|\,X_i\right]\right)\\
&= \mathsf{E}\left[X_i^2(\beta_0+\beta_1X_i)\,\mathsf{E}(u_i^2|\,X_i)\right] = \mathsf{E}\left[X_i^2(\beta_0+\beta_1X_i)(1+\sigma_u^2)\right]\\
&= \left(1+\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\,X_i^2Y_i.
\end{aligned}$$

Dosazením do (5.3.3) získáme

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 \\ \mathsf{E}\,X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 & \mathsf{E}\,(X_i^3 u_i^3) \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 & \mathsf{E}\,(X_i^3 u_i^3) & \mathsf{E}\,(X_i^4 u_i^4) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,Y_i \\ \mathsf{E}\,X_i Y_i \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 Y_i \end{pmatrix}.$$

Označíme $\boldsymbol{X}_i{}' = (1, X_i, X_i^2)$ a vektor $\begin{pmatrix} \mathsf{E}\,Y_i \\ \mathsf{E}\,X_i Y_i \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 Y_i \end{pmatrix}$ ještě upravíme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathsf{E}\,Y_i \\ \mathsf{E}\,X_i Y_i \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 Y_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathsf{E}\,Y_i \\ \mathsf{E}\,X_i Y_i \\ \mathsf{E}\,X_i^2 Y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2 Y_i \end{pmatrix} \\
&= \mathsf{E}\begin{pmatrix} 1 \\ X_i \\ X_i^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}_i{}'\boldsymbol{\beta} + \mathsf{E}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_u^2 X_i^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}_i{}'\boldsymbol{\beta} \\
&= \mathsf{E}\begin{pmatrix} 1 \\ X_i \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 \end{pmatrix} (1, X_i, X_i^2)\boldsymbol{\beta} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2 \\ \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2 & \mathsf{E}\,X_i^3 \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^3 & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{\mathsf{P}} &\begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 \\ \mathsf{E}\,X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 & \mathsf{E}\,(X_i^3 u_i^3) \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 & \mathsf{E}\,(X_i^3 u_i^3) & \mathsf{E}\,(X_i^4 u_i^4) \end{pmatrix}^{-1} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2 \\ \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2 & \mathsf{E}\,X_i^3 \\ (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^3 & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Po provedení několika úprav na řádky obou matic dostáváme tvar

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* \xrightarrow{\mathsf{P}} &\begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2 \\ 0 & 1 & \frac{\mathsf{E}\left(X_i^3 u_i^3\right) - \left(1+\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\,X_i & \mathsf{E}\,X_i^2 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2} & \frac{\mathsf{E}\,X_i^3 - \mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2} \\ 0 & d & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (5.3.4)
\end{aligned}$$

kde

$$
\begin{aligned}
c &= \mathsf{E}\left(X_i^4 u_i^4\right) - \left[\left(1+\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\,X_i^2\right]^2 - \frac{\left[\mathsf{E}\left(X_i^3 u_i^3\right) - \left(1+\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i\right]^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2},\\
d &= \left(1+\sigma_u^2\right)\left(\mathsf{E}\,X_i^3 - \mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i\right) - \\
&\qquad - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}\left[\mathsf{E}\left(X_i^3 u_i^3\right) - \left(1+\sigma_u^2\right)\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i\right]
\end{aligned}
$$

a symbolem $*$ je označen sice nenulový, ale pro další výpočet nepodstatný prvek. Vztah pro d ještě upravíme. Použitím rovnosti

$$
\mathsf{E}\,X_i^3 - \mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i = \mathsf{E}\,(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^3 + 2\sigma_x^2\,\mathsf{E}\,X_i
$$

a provedením několika úprav dostaneme tvar

$$
\begin{aligned}
d = (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^3 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}\,\mathsf{E}(X_i^3 u_i^3) + \\
+ (1+\sigma_u^2)\sigma_x^2\,\mathsf{E}\,X_i\left[2 + \frac{1}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}\,\mathsf{E}\,X_i^2\right].
\end{aligned}
$$

Pro odhad $\widetilde{\beta}_2^*$ tedy dostáváme

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_2^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \frac{(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^3 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}\,\mathsf{E}(X_i^3 u_i^3)}{\mathsf{E}\,(X_i^4 u_i^4) - [(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2]^2 - \frac{\left[\mathsf{E}\left(X_i^3 u_i^3\right) - (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i\right]^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}} + \\
+ \frac{(1+\sigma_u^2)\sigma_x^2\,\mathsf{E}\,X_i\left[2 + \frac{1}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}\,\mathsf{E}\,X_i^2\right]}{\mathsf{E}\,(X_i^4 u_i^4) - [(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2]^2 - \frac{\left[\mathsf{E}\left(X_i^3 u_i^3\right) - (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\,X_i^2\,\mathsf{E}\,X_i\right]^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}}\beta_1.
\end{aligned}
$$

□

Podíváme-li se na výraz ve větě 5.2, všimneme si, že pokud regresory $\boldsymbol{X}$ pocházejí z rozdělení symetrického kolem své střední hodnoty, pak je výraz $(1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^3 = 0$, protože šikmost takového rozdělení je nulová. Přidáme-li předpoklad nulové střední hodnoty tohoto rozdělení, dostaneme, že i $(1+\sigma_u^2)\sigma_x^2\,\mathsf{E}\,X_i\left[2 + \frac{1}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}\,\mathsf{E}\,X_i^2\right] = 0$. Pak díky nezávislosti chyby regresoru u_i na hodnotě regresoru X_i je $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}\,\mathsf{E}(X_i^3 u_i^3) = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2\,\mathsf{E}\,X_i^2}\,\mathsf{E}\,X_i^3\,\mathsf{E}\,u_i^3 = 0$, protože $\mathsf{E}\,X_i^3 = \mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}\,X_i)^3 = 0$. Za těchto předpokladů tedy platí, že $\widetilde{\beta}_2^* \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$.

Věta 5.3. *Pocházejí-li data z modelu* (5.1.1)*, ve kterém je* $\beta_1 = 0$*, pak pro odhad* $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (\widetilde{\beta}_0^*, \widetilde{\beta}_1^*, \widetilde{\beta}_2^*)'$ *platí*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_0^* \\ \widetilde{\beta}_1^* \\ \widetilde{\beta}_2^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Analogicky jako důkaz věty 5.2. Vztah (5.3.4) bude mít tvar

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}^* = \begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_0^* \\ \widetilde{\beta}_1^* \\ \widetilde{\beta}_2^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 \\ 0 & 1 & \frac{\mathsf{E}\left(X_i^3 u_i^3\right) - \left(1+\sigma_u^2\right) \mathsf{E}\, X_i^2\, \mathsf{E}\, X_i}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\, \mathsf{E}\, X_i^2} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\, \mathsf{E}\, X_i^2} & \frac{\mathsf{E}\, X_i^3 - \mathsf{E}\, X_i^2\, \mathsf{E}\, X_i}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\, \mathsf{E}\, X_i^2} \\ 0 & d & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3.5)$$

Odtud vyplývá, že

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & \mathsf{E}\, X_i^2 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\, \mathsf{E}\, X_i^2} & \frac{\mathsf{E}\, X_i^3 - \mathsf{E}\, X_i^2\, \mathsf{E}\, X_i}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\, \mathsf{E}\, X_i^2} \\ 0 & d & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a také

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathsf{E}\, X_i & (1+\sigma_u^2)\,\mathsf{E}\, X_i^2 \\ 0 & 1 & \frac{\mathsf{E}\left(X_i^3 u_i^3\right) - \left(1+\sigma_u^2\right) \mathsf{E}\, X_i^2\, \mathsf{E}\, X_i}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2\, \mathsf{E}\, X_i^2} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $*$ značí nenulové prvky, jejichž hodnotu nepotřebujeme znát. Tedy vynásobením matic dostáváme

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_0^* \\ \widetilde{\beta}_1^* \\ \widetilde{\beta}_2^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Můžeme opět říci, že pokud střední hodnota odezvy $\boldsymbol{Y}$ nezávisí na přesných regresorech $\boldsymbol{X}$, pak nezávisí ani na regresorech $\boldsymbol{W}$ měřených s chybou. I zde je $\widetilde{\beta}_0^*$ konzistentním odhadem parametru β_0.

6 Simulace

V této kapitole prozkoumáme, jak se chyba regresoru projevuje v konkrétních praktických situacích. Stejně jako v teoretické části práce se budeme věnovat aditivnímu modelu s homoskedastickou a heteroskedastickou chybou a multiplikativnímu modelu s homoskedastickou chybou. V těchto třech modelech se podíváme na nulovost odhadu kvadratického členu v *kvadratickém* regresním modelu s regresory $\boldsymbol{W}$ měřenými s chybou použitém pro data pocházející z *lineárního* regresního modelu s přesnými regresory $\boldsymbol{X}$.

Data pro simulační studii byla generována z modelu

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ve kterém bylo zvoleno $\beta_0 = 1$ a $\beta_1 = 10$. Chyba modelu $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ byla generována ze standardního normálního rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$. Regresory $X_1, \ldots, X_n$ byly generovány ze spojitého rozdělení. Pro jednotlivé modely byla použita různá rozdělení regresorů, která budou přesně specifikována níže. Rozsah dat n byl pro celou studii zvolen 500. K regresorům $X_1, \ldots, X_n$ byly přidány chyby regresoru $u_1, \ldots, u_n$, a to buď aditivně nebo multiplikativně. Chyby regresoru $u_1, \ldots, u_n$ byly generovány ze spojitého rozdělení, které se lišilo pro jednotlivé modely. Takto byly získány regresory $W_1, \ldots, W_n$ měřené s chybami $u_1, \ldots, u_n$. Na těchto regresorech byla založena analýza dat, která byla nagenerována výše uvedeným způsobem.

Celá simulační studie byla prováděná programem R, verze 2.1.1. Pro analýzu dat byly použity funkce `lm` a `anova`. Pomocí funkce `lm` byly získány odhady metodou nejmenších čtverců. Tyto odhady byly postupně počítány pro různé hodnoty σ_u v rozmezí od 0 do 5. Počet opakování simulací pro každou hodnotu σ_u byl 1000. Takto vznikly jednotlivé simulační sady. Případ $\sigma_u = 0$ je speciální, protože potom ve všech uvažovaných modelech platí, že $W_i = X_i$ skoro jistě, $i = 1, \ldots, n$. Tento pouze teoretický případ slouží k porovnávání. Funkce `anova` byla použita na F-test submodelů na 5% hladině, nejčastěji na test kvadratického regresního modelu proti lineárnímu regresnímu modelu, tedy na test významnosti kvadratického členu. Při použití F-testu si však musíme uvědomit, že pokud v lineárním modelu není splněn předpoklad homoskedasticity chyby modelu, nemáme zaručenou 5% hladinu testu. Přejděme nyní k jednotlivým modelům, které byly uvažovány v teoretické části této práce.

6.1 Aditivní model s homoskedastickou chybou

Začneme nejjednodušším z těchto modelů, a to aditivním modelem s jedním regresorem a homoskedastickou chybou. Pro tento případ byly regresory $X_1, \dots, X_n$ generovány nejdříve z rozdělení definovaného na celé reálné přímce a symetrického kolem své střední hodnoty. Nemá smysl uvažovat rozdělení regresoru s konečným nosičem, protože přidáním aditivní chyby bychom se dostali mimo tento nosič. Jako reprezentant této třídy rozdělení bylo zvoleno normální rozdělení $\mathsf{N}(5,1)$. Nenulová střední hodnota byla použita proto, abychom viděli, že v tomto modelu není předpoklad nulové střední hodnoty nutný k tomu, aby zlomek ve větě 3.4, viz strana 14, byl roven nule. Regresory $X_1, \dots, X_n$ byly také generovány z rozdělení definovaného na celé reálné přímce, ale nesymetrického kolem své střední hodnoty. Jako reprezentant této třídy rozdělení bylo použito Gumbelovo rozdělení $\mathsf{Gum}(\alpha, \delta)$ s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\delta} \exp\left\{\frac{-(x-\alpha)}{\delta}\right\} \exp\left\{-\exp\left\{\frac{-(x-\alpha)}{\delta}\right\}\right\},$$

kde α je parametr polohy a δ je disperzní parametr. Střední hodnota Gumbelova rozdělení je $(\alpha - \gamma \cdot \delta)$, kde $\gamma \doteq -0{,}577216$ je Eulerova konstanta. Jeho rozptyl je $\frac{(\delta \cdot \pi)^2}{6}$. Parametry α a δ byly zvoleny tak, aby $\mathsf{E}\, X_i \doteq 0$ a $\mathsf{var}\, X_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, tedy $\alpha = -0{,}577216 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\pi}$ a $\delta = \frac{\sqrt{6}}{\pi}$. K regresorům $X_1, \dots, X_n$ byly přičteny chyby $u_1, \dots, u_n$, čímž vznikly regresory $W_1, \dots, W_n$. Chyby $u_1, \dots, u_n$ byly generovány, podobně jako regresory, z normálního (tedy symetrického) rozdělení $\mathsf{N}(0, \sigma_u^2)$ nebo z Gumbelova (tedy asymetrického) rozdělení $\mathsf{Gum}(\alpha_u, \delta_u)$, kde parametry α_u a δ_u byly zvoleny tak, aby $\mathsf{E}\, u_i \doteq 0$ a $\mathsf{var}\, u_i = \sigma_u^2$, $i = 1, \dots, n$, tedy $\alpha_u = -0{,}577216 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot \sigma_u$ a $\delta_u = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot \sigma_u$.

Průměry odhadů $\widetilde{\beta_2^*}$ parametru β_2^* z modelu (3.1.2), viz strana 14, počítané z 1000 hodnot najdeme v tabulce 1 na straně 41. První řádek tabulky odpovídá případu, kdy je rozptyl chyby regresoru σ_u^2 nulový, tedy $W_i = X_i$ skoro jistě, $i = 1, \dots, n$, a slouží k porovnání. V situaci, kdy regresory $X_1, \dots, X_n$ i chyby regresoru $u_1, \dots, u_n$ pocházely ze symetrických rozdělení (viz druhý sloupec tabulky), jsou hodnoty průměrů $\widetilde{\beta_2^*}$ prakticky nulové (srovnej s případem $\sigma_u = 0$). V dalších situacích, kdy buď regresory $X_1, \dots, X_n$ nebo chyby regresoru $u_1, \dots, u_n$ pocházely z asymetrického rozdělení (viz třetí až pátý sloupec tabulky) jsou průměry $\widetilde{\beta_2^*}$ výrazně nenulové ve srovnání s případem $\sigma_u = 0$. Speciálním případem je situace, kdy regresory $X_1, \dots, X_n$ a chyby regresoru $u_1, \dots, u_n$ pocházely ze stejného rozdělení, tj. z Gumbelova rozdělení s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Hodnota průměru $\widetilde{\beta_2^*}$ je v tomto případě (viz zvýrazněné číslo ve čtvrtém sloupci tabulky, v řádku odpovídajícímu $\sigma_u = 1$) v absolutní hodnotě o dva řády menší než ostatní hodnoty v daném sloupci (kromě první hodnoty) a od hodnoty v prvním řádku se prakticky neliší. Tato skutečnost je ve shodě s teoretickými výsledky, protože v tomto případě je splněna podmínka (3.1.6), viz strana 17. Všimněme si také, že v situaci, kdy regresory pocházely z normálního rozdělení a chyby regresorů z Gumbelova rozdělení (viz třetí sloupec) jsou všechny průměry $\widetilde{\beta_2^*}$ záporné. Naopak v situaci, kdy regresory pocházely z Gumbelova rozdělení a chyby regresorů z normálního rozdělení (viz čtvrtý sloupec), jsou všechny průměry $\widetilde{\beta_2^*}$ kladné.

Na obrázcích 1 a 2 na straně 43 je pak znázorněna závislost průměrů odhadů $\widetilde{\beta_2^*}$ na směrodatné odchylce chyby regresoru $\boldsymbol{u}$. Na prvním z těchto grafů není patrná žádná funkční závislost, což potvrzuje, že tyto odhady nejsou významně nenulové. Na druhém grafu je funkční závislost zřejmá, což potvrzuje, že tyto odhady jsou významně nenulové. Pro model, ve kterém regresory $X_1, \ldots, X_n$ pocházely z Gumbelova rozdělení a chyby regresoru $u_1, \ldots, u_n$ z $\mathsf{N}(0, \sigma_u^2)$, znázorňuje obrázek 3 na straně 44 rozdíly mezi skutečnou regresní závislostí a regresními závislostmi odhadnutými pro některé hodnoty σ_u. Je vidět, že pro vetší hodnoty σ_u je odlišnost větší.

V případě, kdy jak regresory $X_1, \ldots, X_n$, tak chyby regresoru $u_1, \ldots, u_n$ pocházely z normálních rozdělení (ne nutně se stejnými parametry), má chyba modelu s regresory $W_1, \ldots, W_n$ konstantní rozptyl (viz vyjádření (2.1.4) na straně 9). Máme tedy zaručenou 5% hladinu F-testu. Otestujeme hypotézu, že $\beta_2^* = 0$ proti oboustanné alternativě. Na obrázku 4 na straně 44 je znázorněna závislost chyby 1. druhu tohoto testu na směrodatné odchylce chyby regresoru $\boldsymbol{u}$. Hodnoty chyby 1. druhu se pohybují od 3,5 % do 6,4 % a z grafu není patrná funkční závislost. I tyto výsledky potvrzují, že parametr β_2^* je nulový.

6.2 Aditivní model s heteroskedastickou chybou

Přejděme teď k složitějšímu aditivnímu modelu, a to k aditivnímu modelu s heteroskedastickou chybou. Pro tento model byly regresory $X_1, \ldots, X_n$ generovány z normálního rozdělení $\mathsf{N}(5, 1)$ a $\mathsf{N}(0, 1)$, chyby regresoru u_i pro $i = 1, \ldots, n$ z rozdělení $\mathsf{N}(0, \sigma_u^2 X_i^2)$. Regresory $W_1, \ldots, W_n$ byly opět počítány podle vztahu $W_i = X_i + u_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Průměry odhadů $\widetilde{\beta_2^*}$ parametru β_2^* z modelu (4.3.1), viz strana 24, jsou uvedeny v tabulce 2 na straně 42. První řádek opět odpovídá případu, kdy je rozptyl chyby regresoru $\boldsymbol{u}$ nulový, tedy platí, že $W_i = X_i$ skoro jistě, $i = 1, \ldots, n$, a slouží k porovnávání. Vidíme, že v případě, kdy regresory $X_1, \ldots, X_n$ pocházely z $\mathsf{N}(5, 1)$, jsou absolutní hodnoty průměrů $\widetilde{\beta_2^*}$ nejdříve o dva řády větší než v případě $\sigma_u = 0$ a pak se postupně blíží k hodnotě uvedené v prvním řádku tabulky. Výjimkou je okolí bodu $\frac{1}{\sqrt{13}} \doteq 0{,}28$, který je řešením rovnice (4.3.4), viz strana 28. V tomto bodě je hodnota průměru $\widetilde{\beta}_2^*$ v absolutní hodnotě řádově stejná jako v případě $\sigma_u = 0$. Všimněme si také, že průměry $\widetilde{\beta}_2^*$ jsou pro menší hodnoty σ_u záporné a od hodnoty $\sigma_u = 0{,}3$ jsou všechny kladné. V případě, kdy regresory $X_1, \ldots, X_n$ pocházely z $\mathsf{N}(0,1)$, se absolutní hodnoty průměrů $\widetilde{\beta}_2^*$ liší od hodnoty v prvním řádku maximálně o řád a znaménka se střídají náhodně.

Podíváme-li se na obrázky 5 a 6 na straně 45, vidíme, že v případě, kdy regresory $X_1, \ldots, X_n$ pocházely z $\mathsf{N}(5,1)$, je patrná funkční závislost průměrů $\widetilde{\beta}_2^*$ na směrodatné odchylce chyby regresoru $\boldsymbol{u}$, a v případě, kdy regresory $X_1, \ldots, X_n$ pocházely z $\mathsf{N}(0,1)$, patrná není. Tyto výsledky potvrzují, že pokud regresory $X_1, \ldots, X_n$ pocházejí ze symetrického rozdělení s *nenulovou* střední hodnotou, potom je parametr β_2^* nenulový a pokud regresory $X_1, \ldots, X_n$ pocházejí ze symetrického rozdělení s *nulovou* střední hodnotou, potom $\beta_2^* = 0$.

Abychom ukázali, jak ovlivní heteroskedasticita chyby modelu (4.3.1), viz strana 24, hladinu F-testu hypotézy $\beta_2^* = 0$ proti oboustranné alternativě, provedeme tento test pro model s regresory $X_1, \ldots, X_n$ pocházející z $\mathsf{N}(0,1)$. Na obrázku 7 na straně 46 je znázorněna závislost pravděpodobnosti chyby 1. druhu tohoto testu na směrodatné odchylce chyby regresoru $\boldsymbol{u}$. Vidíme, že kromě případu $\sigma_u = 0$ je tato pravděpodobnost daleko větší než 5 %.

6.3 Multiplikativní model s homoskedastickou chybou

Podívejme se teď na multiplikativní model s homoskedastickou chybou. Regresory $X_1, \ldots, X_n$ byly generovány z gamma rozdělení $\mathsf{Ga}(1,2)$ a chyby regresoru $u_1, \ldots, u_n$ z gamma rozdělení $\mathsf{Ga}(\frac{1}{\sigma_u^2}, \frac{1}{\sigma_u^2})$, kde parametry byly zvoleny tak, aby platilo $\mathsf{E}\, u_i = 1, \mathsf{var}\, u_i = \sigma_u^2$ pro $i = 1, \ldots, n$. Regresory $W_1, \ldots, W_n$ byly počítány podle vztahu $W_i = X_i \cdot u_i$, $i = 1, \ldots, n$.

V tabulce 3 na straně 42 jsou uvedeny průměry odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$ parametru β_2^* z modelu (5.3.2), viz strana 32. V prvním řádku je uveden případ, kdy je rozptyl chyby regresoru $\boldsymbol{u}$ nulový a tedy platí $W_i = X_i$ skoro jistě pro $i = 1, \ldots, n$. Tuto skutečnost jsme využili pro nasimulování této situace, která opět slouží k porovnávání. Vidíme, že hodnoty průměrů $\widetilde{\beta}_2^*$ jsou pro menší ale nenulové hodnoty σ_u v absolutní hodnotě o tři až čtyři řády větší než v případě $\sigma_u = 0$. Se zvětšujícím se σ_u se postupně tyto hodnoty přibližují hodnotě pro nulové σ_u. Velké hodnoty rozptylu se však v praxi nevyskytují. Všimněme si také, že všechny průměry $\widetilde{\beta}_2^*$ jsou záporné.

Podívejme se teď na graf 8 na straně 46, kde jsou znázorněny průměry odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$ v závislosti na směrodatné odchylce chyby regresoru $\boldsymbol{u}$. Vidíme zřetelnou funkční závislost, což také potvrzuje nenulovost parametru β_2^*.

Tabulka 1: Průměry odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$ v aditivním modelu s homoskedastickou chybou s regresorem $\boldsymbol{X}$ s normálním rozdělením $\mathsf{N}(5,1)$ a Gumbelovým rozdělením s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem a s chybou regresoru $\boldsymbol{u}$ s normálním rozdělením $\mathsf{N}(0,\sigma_u^2)$ a Gumbelovým rozdělením s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ_u^2.

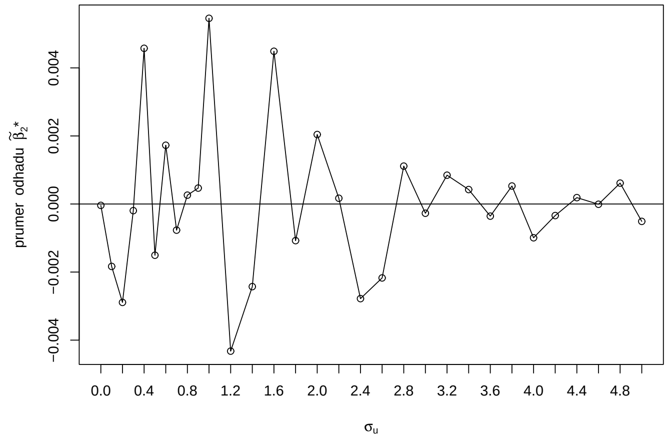
σ_u	průměry odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$			
	$\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}(5,1)$		$\boldsymbol{X} \sim \mathsf{Gum}(\alpha,\delta)$	
	$\boldsymbol{u} \sim \mathsf{N}(0,\sigma_u^2)$	$\boldsymbol{u} \sim \mathsf{Gum}(\alpha_u,\delta_u)$	$\boldsymbol{u} \sim \mathsf{N}(0,\sigma_u^2)$	$\boldsymbol{u} \sim \mathsf{Gum}(\alpha_u,\delta_u)$
0	*−0,000041*	*−0,001794*	*0,000911*	*−0,000065*
0,1	−0,001835	−0,006562	0,039614	0,034295
0,2	−0,002891	−0,038390	0,145054	0,113900
0,3	−0,000195	−0,120536	0,275102	0,198768
0,4	0,004575	−0,225159	0,421937	0,253203
0,5	−0,001506	−0,343757	0,529064	0,257740
0,6	0,001726	−0,453121	0,608422	0,233036
0,7	−0,000768	−0,543314	0,654973	0,197791
0,8	0,000250	−0,579527	0,646230	0,123245
0,9	0,000468	−0,587618	0,626741	0,061646
1	0,005456	−0,584547	0,578824	**−0,000791**
2	0,002041	−0,267571	0,173200	−0,135100
3	−0,000272	−0,111735	0,052209	−0,075334
4	−0,000992	−0,052308	0,017395	−0,038737
5	−0,000511	−0,028548	0,008225	−0,022241

Tabulka 2: Průměry odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$ v aditivním modelu s heteroskedastickou chybou s regresorem $\boldsymbol{X}$ s rozdělením $\mathsf{N}(5,1)$ a $\mathsf{N}(0,1)$ a s chybou regresoru $\boldsymbol{u}$ s rozdělením $\mathsf{N}(0,\sigma_u^2\boldsymbol{X}^2)$.

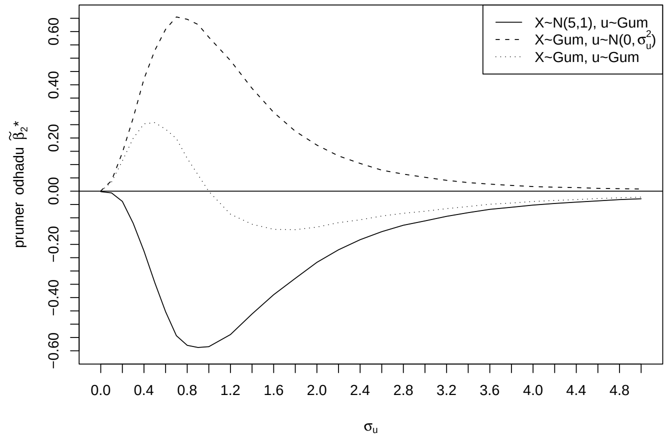
σ_u	průměry odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$	
	$\boldsymbol{u} \sim \mathsf{N}(0,\sigma_u^2\boldsymbol{X}^2)$	
	$\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}(5,1)$	$\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}(0,1)$
0	*0,001541*	*0,000035*
0,1	−0,413564	−0,002644
0,2	−0,219337	−0,002291
$\frac{1}{\sqrt{13}}$	**−0,004366**	−0,005219
0,3	0,044712	−0,003313
0,4	0,115873	0,003971
0,5	0,121121	0,003162
0,6	0,105111	0,001380
0,7	0,087992	−0,003383
0,8	0,073881	−0,001206
0,9	0,062115	0,004005
1	0,051620	−0,000511
2	0,014729	0,001735
3	0,006710	−0,001341
4	0,003798	0,000049
5	0,002410	0,000159

Tabulka 3: Průměry odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$ v multiplikativním modelu s homoskedastickou chybou s regresorem $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{Ga}(1,2)$ a s chybou regresoru $\boldsymbol{u}$ s gama rozdělením s jednotkovou střední hodnotou a rozptylem σ_u^2.

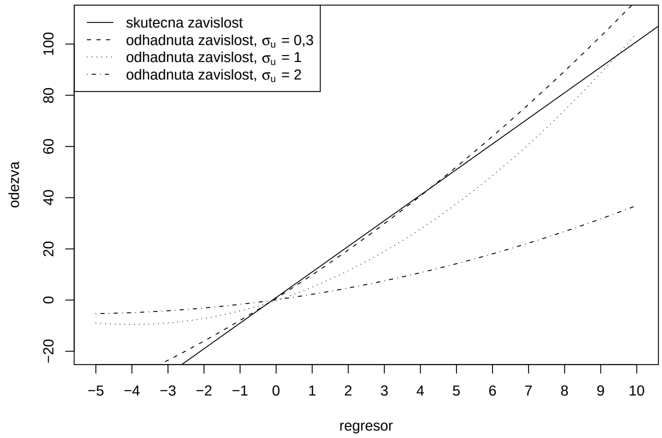
σ_u	*0*	0,1	0,2	0,3
průměry odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$	*−0,000080*	−0,083257	−0,260293	−0,358034
σ_u	0,4	0,5	0,6	0,7
průměry odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$	−0,386264	−0,341688	−0,285461	−0,228093
σ_u	0,8	0,9	1	2
průměry odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$	−0,179143	−0,137000	−0,105711	−0,015528
σ_u	3	4	5	
průměry odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$	−0,004168	−0,001789	−0,000778	



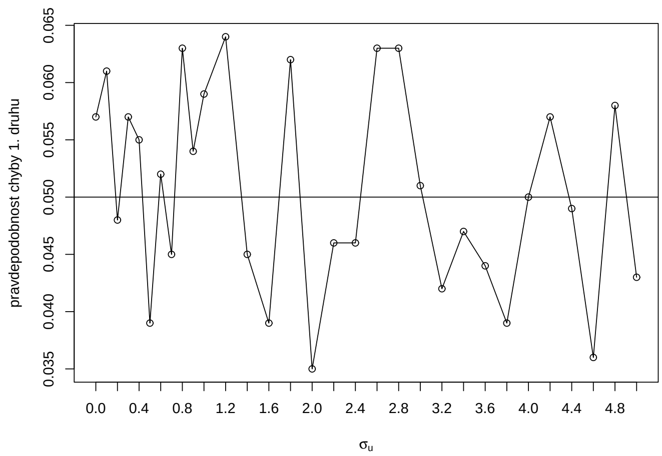
Obrázek 1: Závislost průměru odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$ na směrodatné odchylce chyby regresoru $\boldsymbol{u}$ v aditivním modelu s homoskedastickou chybou, kde $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}(5, 1)$ a $\boldsymbol{u} \sim \mathsf{N}(0, \sigma_u^2)$.



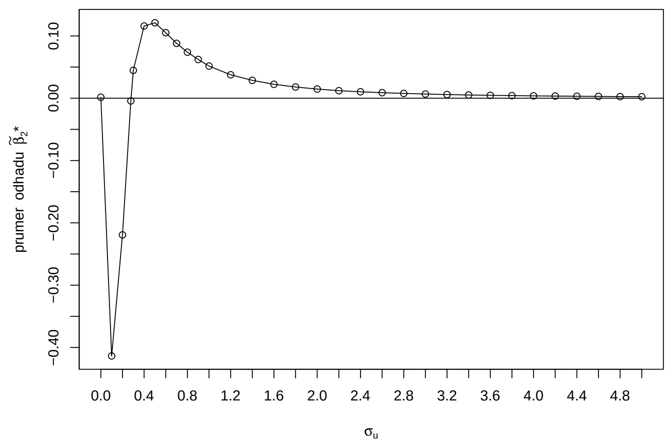
Obrázek 2: Závislost průměru odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$ na směrodatné odchylce chyby regresoru $\boldsymbol{u}$ v aditivním modelu s homoskedastickou chybou.



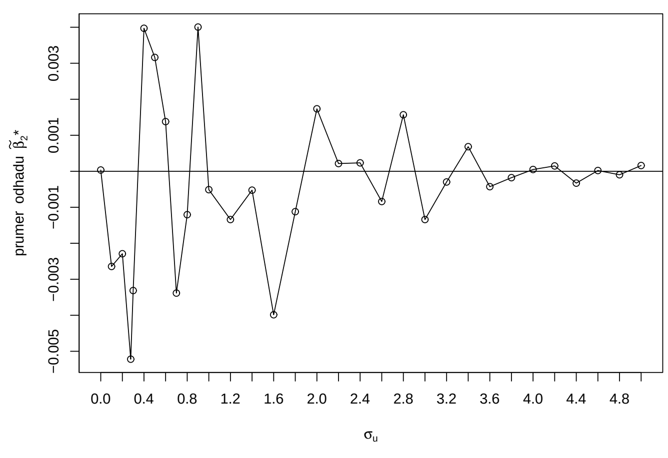
Obrázek 3: Závislost odezvy $\boldsymbol{Y}$ na hodnotě regresoru $\boldsymbol{X}$, resp. $\boldsymbol{W}$ v aditivním modelu s homoskedastickou chybou. Regresor $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{Gum}(\alpha, \delta)$ a chyba regresoru $\boldsymbol{u} \sim \mathsf{N}(0, \sigma_u^2)$, kde σ_u je postupně 0,3, 1, 2.



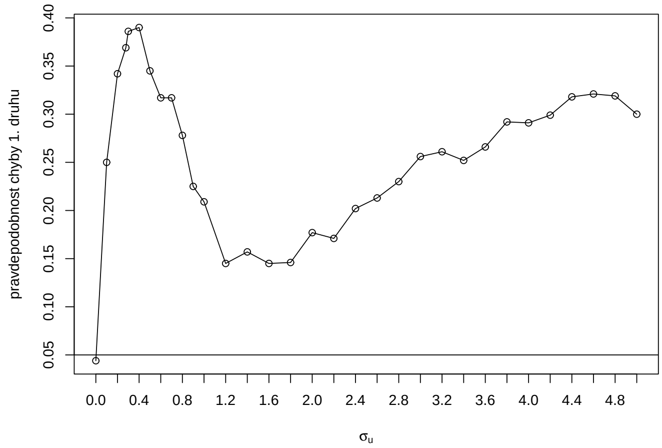
Obrázek 4: Závislost pravděpodobnosti chyby 1. druhu na směrodatné odchylce chyby regresoru $\boldsymbol{u}$ v aditivním modelu s homoskedastickou chybou, kde $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}(5, 1)$ a $\boldsymbol{u} \sim \mathsf{N}(0, \sigma_u^2)$.



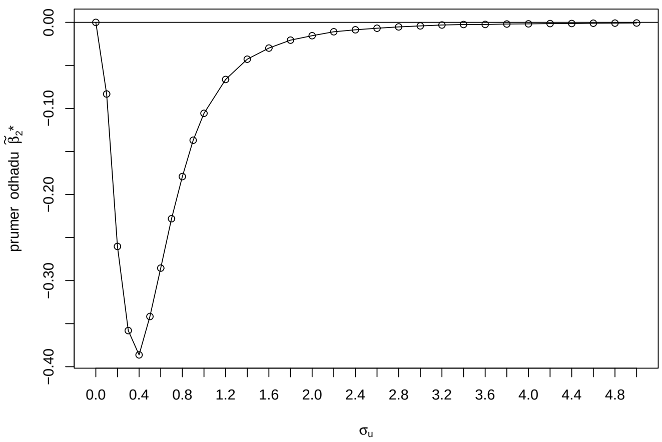
Obrázek 5: Závislost průměru odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$ na směrodatné odchylce chyby regresoru $\boldsymbol{u}$ v aditivním modelu s heteroskedastickou chybou, kde $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}(5, 1)$ a $\boldsymbol{u} \sim \mathsf{N}(0, \sigma_u^2 \boldsymbol{X}^2)$.



Obrázek 6: Závislost průměru odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$ na směrodatné odchylce chyby regresoru $\boldsymbol{u}$ v aditivním modelu s heteroskedastickou chybou, kde $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}(0, 1)$ a $\boldsymbol{u} \sim \mathsf{N}(0, \sigma_u^2 \boldsymbol{X}^2)$.



Obrázek 7: Závislost pravděpodobnosti chyby 1. druhu na směrodatné odchylce chyby regresoru $\boldsymbol{u}$ v aditivním modelu s heteroskedastickou chybou, kde $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}(0, 1)$ a $\boldsymbol{u} \sim \mathsf{N}(0, \sigma_u^2 \boldsymbol{X}^2)$.



Obrázek 8: Závislost průměru odhadů $\widetilde{\beta}_2^*$ na směrodatné odchylce chyby regresoru $\boldsymbol{u}$ v multiplikativním modelu s homoskedastickou chybou, kde $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{Ga}(1, 2)$ a $\boldsymbol{u}$ má gama rozdělení s jednotkovou střední hodnotou a rozptylem σ_u^2.

7 Závěr

Předmětem zkoumání této diplomové práce byly odhady metodou nejmenších čtverců v modelech s regresory měřenými s chybou. Cílem bylo poukázat na vychýlení odhadů, které se může objevit v analýze dat založené na regresorech měřených s chybou. Nešlo o to najít v nějakém smyslu optimální metodu, ale prozkoumat chování běžně používané metody nejmenších čtverců. Pro jiné metody, např. robustní, by bylo nutné provést podobný rozbor.

V úvodu teoretické části je poukázáno na to, že chyba měření regresorů způsobuje porušení předpokladů lineárního modelu. I přes porušení těchto předpokladů však metoda nejmenších čtverců dává nejlepší přiblížení k podmíněné střední hodnotě odezvy při daných hodnotách přesných regresorů, a tedy má smysl se dále odhady metodou nejmenších čtverců zabývat.

Další teoretická i simulační analýza byla omezena na tři vybrané modely, a to aditivní model s homoskedastickou a heteroskedastickou chybou a multiplikativní model s homoskedastickou chybou. Pro data pocházející z *lineárního* regresního modelu s přesnými regresory byla zkoumána otázka konzistence odhadu parametru u lineárního členu v *lineárním* regresním modelu s regresory měřenými s chybou. Bylo dokázano, že tento odhad není konzistentním odhadem lineárního členu v modelu s přesnými regresory a jeho vychýlení závisí na rozdělení přesných regresorů a chyby regresorů. Dále byla zkoumána otázka nulovosti parametru u kvadratického členu v *kvadratickém* regresním modelu s regresory měřenými s chybou použitého opět pro data pocházející z *lineárního* regresního modelu s přesnými regresory. Bylo ukázáno, že použitím regresorů měřených s chybou dochází velmi často ke změně tvaru odhadované regresní funkce (z přímky se stává křivka). Druh a velikost zakřivení se nedá předpovědět bez znalosti rozdělení přesných regresorů a chyby měření regresorů. Pokud ale přesné regresory nemají vliv na střední hodnotu odezvy, pak chyba měření regresorů nezpůsobí vznik neexistujícího regresního vztahu. Tyto teoretické výsledky potvrdila i simulační studie.

Analýzu chování odhadů metodou nejmenších čtverců pro modely s regresory měřenými s chybou lze dále rozšířit na třídu zobecněných lineárních modelů, to však již přesahuje rámec této diplomové práce.

Literatura

[1] Anděl, J. (2003): Statistické metody. Matfyzpress, Praha.

[2] Anděl, J. (2005): Základy matematické statistiky. Matfyzpress, Praha.

[3] Carroll, R. J. and Ruppert, D. and Stefanski, L. A. (1995): Measurement Error in Nonlinear Models. Chapman & Hall, London.

[4] Fuller, W. A. (1987): Measurement Error Models. John Wiley & Sons Inc., New York.

[5] Huber, P.J. (1981): Robust Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York.

[6] Štěpán, J. (1987): Teorie pravděpodobnosti. Academia, Praha.