Univerzita Karlova v Prahe
Matematicko - fyzikálna fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Slavka Ďurišová

MIERY RIZIKA

Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci diplomovej práce: **Doc.RNDr. Jan Hurt, CSc.**

Študijní obor: **Finančná a pojistná matematika**

Prehlasujem, že som diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce.

V Prahe dňa 20. apríla 2006 Slavka Ďurišová

Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať svojmu diplomovému vedúcemu Doc. RNDr. J. Hurtovi, CSc. za podnetné rady a návrhy, pomoc a čas, ktoré mi v priebehu písanie diplomovej práce poskytol.

Obsah

Názov práce: Miery rizika

Autor: Slavka Ďurišová

Katedra (ústav): Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

e-mail vedúceho: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Táto diplomová práca pojednáva o rôznych mierach rizika. Sú tu uvedené základné prístupy k výpočtu týchto rizík. Na začiatku je definované finančné riziko a jeho typy. V ďalšej kapitole sú samotné miery rizika. Ako prvá je spomínaná durácia a jej rôzne typy : Macaulayho durácia, modifikovaná durácia a dolárova durácia a s tým spojené konvexity. Ďalej práca pojednáva o miere zisku a volatilite, metóde VaR a jej základných prístupov k výpočtu: parametrická metóda, historická simulácia a Monte Carlo. Následovne ide CVaR a stress testing. Práca končí usporiadaním rizík a numerickým príkladom.

Kľúčová slová: finančné riziko, durácia, volatilita, VaR, CVaR , usporiadanie rizík

Title: Risk measures

Author: Slavka Ďurišová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Supervisor's e-mail address: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The main topic of the thesis is to study different measures of risk. It is mentioned here fundamental approach to calculation these risks. At the begining is defined financial risk and its types. Risk measurements are discussed in the next chapter. As first, it is mentioned duration and its diferent types: Macaulay duration, modified duration, and dollar duration and related deals convexity. Then the thesis deals about measure of return and volatility, method VaR and its fundamental approach to calculation: parametric method, historical simulation, and Monte Carlo. Following methods are CVaR and stress testing. Thesis ends with risks ordering and numerical example.

Keywords: financial risk, duration, volatility, VaR, CVaR, risks ordering

Kapitola 1

Úvod

Investície na finančnom trhu sú často sprevádzané určitými nedostatkami, medzi ktoré okrem iného patrí aj riziko. Existuje niekoľko hlavných rizík. Táto práca sa bude venovať rôznym druhom finančného rizika, ale predovšetkým rôznym mieram, ktoré finančné riziko kvantifikujú. Vzhľadom však na rozsiahlosť a veľké množstvo mier rizika sa obmedzím v tejto práci na najznámejšie a najviac používané miery riyika.

Cieľom tejto práce je zoznámiť čitateľa s teóriou a problematikou spájajúcou sa s jednotlivými mierami rizika. Zaoberám sa najmä základnými mierami a rôznymi druhmi daných mier. Rozoberajú sa základné vlastnosti, výhody a nevýhody jednotlivých postupov. Tam, kde nie je možné danú mieru použiť, je navrhnutá vhodná alternatíva.

Práca je rozdelená na niekoľko hlavných častí. V prvej kapitole sa čitateľ zoznámi s pojmom finančné riziko, ako aj s jeho delením. V druhej kapitole sú rozobrané jednotlivé miery. Začína sa s duráciou a konvexitou. Opísané sú rôzne typy durácií a konvexít a vzťahy medzi nimi. Čitateľ sa tiež zoznámi s imunizáciou. Kapitola pokračuje mierou zisku a volatilitou. Ďalej je zavedený pojem koherentnej a konvexnej miery rizika, ktorá sa využíva v nasledujúcich častiach práce. Pokračuje sa s veľmi známou mierou rizika VaR. Sú tu popísané metódy tohoto modelu ako aj základné vlastnosti. Úzko spojená s VaR, hoci o niečo lepšia, čo sa týka vlastností je miera CVaR, ktorá je popísaná ako ďalšia v poradí. Sú tu jej základné vlastnosti ako aj vzťah medzi VaR a CVaR. Kapitola o mierach rizika je ukončená časťou stress testing. Štvrtá kapitola pojednáva o úžitkovej funkcii a o usporiadaní rizík. Je spomínané stochastické a S–L usporiadanie. Práca končí numerickou časťou, kde sú názorne vypočítané miery rizika na reálnych dátach.

Kapitola 2

Finančné riziko

V tejto kapitole budem používať definície z [2] a [7]. Riziko je definované ako neistota spojená s výskytom určitej potencionálnej situácie. Finančné riziko (t.j. riziko na finančných trhoch) je definované ako potencionálna finančná strata daného subjektu (neočakávaná strata - *unexpected loss*). Už očakávaná strata (*expected loss*) sa za finančné riziko nepovažuje.

2.1 Typy rizík

Existuje niekoľko hlavných finančných rizík : tržné, úverové, likvidné, operačné a obchodné. Niekedy sa operačné a obchodné riziko medzi finančné riziká neuvažujú. Okrem už spomínaných existuje aj riziko systémové.

2.1.1 Tržné riziko

Tržné rizko (*market risk*) sa tiež označuje ako cenové riziko (*price risk*).
Tržné riziko je definované ako riziko straty zo zmien tržných cien. Ide o zmeny hodnôt finančných alebo komoditných inštrumentov (ďalej označované iba ako inštrumenty) v dôsledku vývoja úrokových mier, cien akcií a komodít alebo menových kurzov. Ďalej ho delíme na

Úrokové riziko (*interest - rate risk*)
: je riziko straty zo zmien cien inštrumentov citlivých na úrokové miery. Úrokové riziko sa ďalej delí na špecifické a obecné úrokové riziko.

- **Špecifické úrokové riziko** je riziko straty spôsobené zmenou finančnej situácie emitenta uvažovaného finančného inštrumentu. Špecifické úrokové riziko je často považované za úverové riziko.

- **Obecné úrokové riziko** je úrokové riziko v pravom slova zmysle, lebo sa nevzťahuje iba na inštrument určitého emitenta, ale je spojené s ekonomikou ako celkom.

Menové riziko (*foreign exchange risk, FX risk, currency risk*)
je riziko straty zo zmien cien inštrumentov citlivých na menové kurzy.

Akciové riziko (*equity risk*)
je riziko straty zo zmien cien citlivých na ceny akcií. Akciové riziko sa rovnako ako úrokové riziko delí na špecifické a obecné akciové riziko.

- **Špecifické akciové riziko** je riziko straty vyplývajúce zo zmeny finančnej situácie konkrétneho emitenta. Tiež sa niekedy považuje za úverové rizko.
- **Obecné akciové riziko** je akciové riziko v pravom slova zmysle, lebo sa nevzťahuje na daný inštrument emitenta, ale je spojené s celou ekonomikou.

Komoditné riziko (*commodity risk*)
je riziko straty zo zmien cien inštrumentov citlivých na ceny komodít.

Riziko úverového rozpätia (*credit expanse risk*)
je riziko straty zo zmeny rozpätia cien finančných inštrumentov rôzneho úverového hodnotenia.

Korelačné riziko (*correlation risk*)
je riziko straty z porušenia historickej korelácie medzi rizikovými kategóriami.

2.1.2 Úverové riziko

Úverové riziko, ktoré sa tiež nazýva kreditné riziko (*credit risk*) je riziko zlyhania (*default*) partnera tým, že nedostojí svojím záväzkom pri plnení podmienok daného kontraktu. Pri úverovom riziku sa využíva ako vonkajšie (špecializované agentúry) tak aj vnútorné (samotné inštitúcie) úverové hodnotenie (*credit rating*). Úverové riziko sa ďalej člení do niekoľkých kategórií:

Priame úverové riziko (*direct credit risk*)
je riziko straty zo zlyhania partnera u rozvahových položiek (napríklad úvery, pôžičky, dlhopisy).

Riziko úverových ekvivalentov (*credit ekvivalent exposure*)
je riziko straty zo zlyhania partnera u podrozvahových položiek (napríklad u poskytnutých úverových prísľuboch, poskytnutých zárukách).

Riziko zmeny úverového hodnotenia (*credit risk rating change*)
je riziko straty, keď v dôsledku zníženia úverového hodnotenia je možnosť získania finančných prostriedkov za prijateľné náklady zťažená.

Vyporiadacie riziko (*settlement risk*)
je riziko straty zlyhania finančnej transakcie vo fáze, kedy partnerovi bola dodaná hodnota, ale ešte nie je k dispozícii zmluvná protihodnota.

Riziko úverovej angažovanosti (*large credit exposure risk*)
je riziko straty z nadmernej úverovej expozície (angažovanosti) zameranej len na určitých partnerov, štáty, sektory.

2.1.3 Likvidné riziko

Likvidné riziko (*liquidity risk*) je riziko straty v dôsledku momentálneho nedostatku hotovosti.

Riziko tržnej likvidity (*market liquidity risk*)
je riziko straty v prípade, keď trh nie je dostatočne aktívny, čím spôsobí nedostatočne rýchlu likvidáciu finančných inštrumentov. V dôsledku toho sa obmedzí prístup k hotovým peňažným prostriedkom.

Riziko financovania (*funding risk*)
je riziko straty v prípade momentálnej platobnej neschopnosti. Je dôsledkom nesúladu vo finančných tokoch, kedy na platby daných splatností nie je možné zaistiť potrebnú hotovosť.

2.1.4 Operačné riziko

Operačné riziko (*operational risk*) je riziko straty z chýb vnútorných operačných systémov alebo ich obsluhy. Operačné riziko má 3 formy:

Transakčné riziko (*transation risk*)
je riziko straty z robených operácií v dôsledku chýb (chyby v ľudskom faktore, zložitosť systému, ...).

Riziko operačného riadenia (*operation control risk*)
je riziko straty z chýb manažmentu. Patrí medzi najvýznamnejšie typy z dôvodu nedostatočnej kontroly.

Riziko systému (*system risk*)
je riziko straty z chýb systémov podpory (chyby v prenose dát, nesprávne odhady parametrov v modeloch, ...).

2.1.5 Obchodné riziko

Obchodné riziko (*business risk*) sa člení na :

Právne riziko (*legal risk*)
: je riziko straty z právnej nepresaditeľnosti kontraktu alebo v dôsledku porušenia právnych požiadavkov.

Regulačné riziko (*regulatory risk*)
: je riziko straty z nemožnosti splniť regulačné opatrenia.

Reputačné riziko (*reputation risk*)
: je riziko straty z poklesu reputácie na trhu.

Daňové riziko (*taxation risk*)
: je riziko straty zo zmeny daňových zákonov alebo nepredvídateľných zdanení.

Riziko menovej konvertibility (*currency convertibility risk*)
: je riziko straty z nemožnosti konvertovať menu na inú v dôsledku zmeny ekonomickej alebo politickej situácie.

Riziko pohromy (*disaster risk*)
: je riziko straty z prírodných katastrof, vojen, ...

2.2 Regulácia finančných rizík

Vzhľadom k množstvu a významnosti finančných rizík dochádza na finančnom trhu k nestabilite. Práve táto nestabilita vedie k tomu, aby boli finančné riziká regulované. Regulácia znamená, že regulátor stanoví spôsob merania finančných rizík a limity. Snahou regulácie je zaistenie bezpečnosti finančného systému a taktiež chrániť užívateľov finančných služieb. Týka sa to najmä bánk a investičných firiem.

Bankový dohľad zastupuje vkladateľov, ktorí sami nedokážu odhadnúť, vzhľadom na informácie a znalosti, rizikovosť banky. Jeho úlohou je stanovenie minimálnej výšky regulačného kapitálu. Ide o výhradne vlastné zdroje banky, ktoré budú kryť prípadné neúspešné rizikové operácie. Úlohou dohľadu je odhadnúť budúce straty na základe rizikovosti aktivít alebo kontrolovať korektnosť metodiky, ktorú banka používa na stanovenie týchto odhadov.

V rôznych krajinách sú prítupy regulátorov rozlišné. Aby však mala regulácia zmysel a účinnosť pri dnešnej globalizácii, je potreba kooperácie regulátorov. Vzniká totiž možnosť *regulačnej arbitráže* (umelo vytvorená kapitálová primeranosť presunom kapitálu medzi členmi finančnej skupiny s pôsobením v rôznych častiach sveta). Z toho dôvodu vznikli doporučitelia finančných orgánov. Rešpektovanými orgánmi je Basilejský výbor pre bankový dohľad (Basle Committee on Banking Supervisior) a direktívy EU (European Union's Directives).

V roku 1988 vznikla prvá medzinárodná dohoda Basel I., ktorá regulovala úverové riziko. Ďalší návrh z roku 1993 zohľadňoval aj riziko tržné. Išlo o štandardnú metódu. Najprv sa stanovia požiadavky zvlášť pre každú pozíciu tržného rizika a potom sa jednoducho sumarizujú. (Tento prístup sa nazýva blokový prístup – *building block approach*). V roku 1995 došlo k revízii tohoto návrhu. Výpočet kapitálových požiadavkov pre úverové riziko sa doporučuje štandardnou metódou. Pre výpočet kapitálových požiadaviek pre tržné riziko sa doporučuje tzv. metóda vnútorných modelov, ktorá je založená prevažne na hodnote v riziku (*Value at Risk*, VaR). Ide o odhad maximálnej straty s danou pravdepodobnosťou v blízkej budúcnosti.

Kapitola 3

Miery rizika

3.1 Durácia a konvexita

V tejto kapitole budem používať definície z [3] a [12]. Durácia a konvexita sú mierami rizika obligácií. Na duráciu sa môžeme pozerať ako na citlivosť cenových zmien obligácie v závislosti na zmenách tržnej (hodnotiacej) úrokovej miery. Na druhej strane ju môžeme brať ako strednú dobu života obligácie. Držitelia obligácií sú vystavení rôznym rizikám. Sú vystavení riziku zmeny úrokovej miery, riziku nesplatenia (*default*),.... Dlhopisy s veľkou dobou do splatnosti majú väčšie riziko zmeny výnosu do splatnosti, pretože zmena ceny je väčšia ako pri krátkodobých dlhopisoch pri paralelnom posune výnosovej krivky. Ak je durácia naviac ovplyvnená rizikom nesplatenia, potom toto riziko musí byť zahrnuté v durácii, pretože na metóde durácií je založená najpoužívanejšia stratégia imunizácie. Imunizácia je investičná stratégia na chránenie portfólia dlhopisov proti riziku úrokovej miery. Jedná sa v nej o vyrovnávanie durácie aktív a pasív a súčasnej hodnoty aktív a pasív. V okamihu durácie pasív máme portfólio aktív potrebné pre splatenie záväzkov. Ukázalo sa, že optimálny výber imunizovaného portfólia záleží na časovej štruktúre úrokovej miery. Je niekoľko druhov durácií.

3.1.1 Macaulayho durácia

Macaulayho durácia je miera citlivosti súčasnej hodnoty na zmenu úrokovej miery r. Uvažujme ďalej peňažný tok v ekvidistantných časových intervaloch $S(0), S(1), \ldots, S(T)$. Definujme najprv základné pojmy: *Diskontný faktor* je definovaný ako

$$v = \frac{1}{1+r} \ , \tag{3.1.1}$$

kde r je úroková miera. *Súčasná hodnota* je definovaná ako

$$PV = \sum_{t=0}^{T} S(t)v^t \ . \tag{3.1.2}$$

Macaulayho durácia je potom definovaná ako

$$D_M = \frac{\sum_{t=1}^{T} tS(t)v^t}{PV} \ . \tag{3.1.3}$$

Je to vlastne vážený priemer časov t, kde váha t je súčasná hodnota finančného toku v čase t. Takto definovaná durácia nie je, na rozdiel od súčasnej hodnoty, lineárnou funkciou peňažných tokov.

Macaulayho durácia D_M portfólia N aktív s váhami $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, s Macaulayho duráciami $D_M^1, \ldots, D_M^N$ a súčasnými hodnotami $PV_1, \ldots, PV_N$ platí:

$$D_M = \sum_{j=1}^{N} D_M^j \cdot \frac{\alpha_j PV_j}{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k PV_k} \ . \tag{3.1.4}$$

Napriek tomu, že väčšinou budem hovoriť o obligáciách, výsledky tu prezentované zostávajú v platnosti pre takmer všetky aktíva. Vzťah medzi cenou obligácie PV a tržnou úrokovou mierou r je

$$\frac{\triangle PV}{PV} \approx -D_M \cdot \frac{\triangle r}{1+r} \ . \tag{3.1.5}$$

Táto aproximácia je odvodená z Taylorovho rozvoja odhadnutej ceny PV do prvého rádu, kde platí rovnosť:

$$D_M = -\frac{1+r}{PV(r)} \cdot \frac{dPV(r)}{dr} \ . \tag{3.1.6}$$

Alternatívne vyjadrenie pomocou diskontného faktoru je

$$D_M = \frac{v}{PV(v)} \cdot \frac{dPV(v)}{dv} \ . \tag{3.1.7}$$

Jedná sa vlastne o elasticitu ceny ku zmene úrokovej miery.

Konvexita je veličina, ktorá upresňuje informáciu, ktorú poskytuje durácia. *Macaulayho konvexita* je definovaná ako

$$C_M = \frac{\sum_{t=1}^{T} t(t+1)S(t)v^t}{PV} \ , \tag{3.1.8}$$

kde $S(t)$ je finančný tok v čase t, $t = 1 \ldots T$, T je doba do splatnosti a v je diskontný faktor. Potom vzťah medzi cenou obligácie PV a tržnou úrokovou mierou r je

$$\frac{\triangle PV}{PV} \approx -D_M \cdot \frac{\triangle r}{1+r} + \frac{1}{2}\, C_M \cdot \frac{(\triangle r)^2}{(1+r)^2} \ . \tag{3.1.9}$$

Pre Macaulayho konvexitu C_M portfólia N obligácií s Macaulayho konvexitami $C_M^1, \ldots, C_M^N$ a súčasnými hodnotami $PV_1, \ldots, PV_N$ platí:

$$C_M = \sum_{j=1}^{N} C_M^j \cdot \frac{PV_j}{\sum_{k=1}^{N} PV_k} \ . \tag{3.1.10}$$

3.1.2 Modifikovaná durácia

Modifikovaná durácia je definovaná tak, aby splňovala nasledujúcu podmienku:

$$\frac{\triangle PV}{PV} \approx -D_{Mod} \triangle r \ . \tag{3.1.11}$$

Teda pre modifikovanú duráciu platí:

$$D_{Mod} = vD_M \ . \tag{3.1.12}$$

Iný zápis modifikovanej durácie je

$$D_{Mod} = -\frac{1}{PV} \cdot \frac{dPV}{dr} \ . \tag{3.1.13}$$

Modifikovaná konvexita je definovaná ako

$$C_{Mod} = \frac{PV''}{PV} \ . \tag{3.1.14}$$

Potom vzťah medzi cenou obligácie PV a tržnou úrokovou mierou r je

$$\frac{\triangle PV}{PV} \approx -D_{Mod} \triangle r + \frac{1}{2} \ C_{Mod}(\triangle r)^2 \ . \tag{3.1.15}$$

3.1.3 Dolárová durácia

Dolárová durácia je definovaná, aby platil vzťah:

$$D_d = -\frac{dPV}{dr} \ . \tag{3.1.16}$$

Odstraňuje problém nelinearity Macaulayho durácie. Medzi spomínanými duráciami je zrejmý nasledovný vzťah:

$$D_d = PV.D_{Mod} = \frac{PV}{1+r} \cdot D_M \ . \tag{3.1.17}$$

Pre portfólio s N obligáciami, s váhami $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ a s dolárovými duráciami $D_d^1, \ldots, D_d^N$ platí:

$$D_d = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j D_d^j \, . \tag{3.1.18}$$

Všetky spomínané durácie boli durácie založené na pevne daných finančných tokoch. Avšak u niektorých druhoch obligácií (napríklad obligácie s rizikom nesplatenia, zvolateľné obligácie) nie sú budúce finančné toky známe. V takýchto prípadoch sa používajú na oceňovanie rôzne prístupy a modely. Modely sú najčastejšie založené na rôznych stochastických procesoch, ktoré modelujú časovú štruktúru úrokovej miery. Ako uvádza [17] zahrnutenie rizika nesplatenia má za následok, že predpoklady Macaulayho durácie o plochej časovej štruktúre su nerealistické. Podľa ich výsledkov durácia bezkupónových obligácií bez rizika nesplatenia je vo všeobecnosti kratšia ako čas splatnosti, obzvlášť pri dlhodobých obligáciách. Durácia obligácií s rizikom nesplatenia môže byť dlhšia alebo kratšia ako u ekvivalentnej obligácie bez rizika. Ak je vzťah medzi intenzitou nesplatenia a úrokovou mierou pozitívny, durácia obligácií s rizikom nesplatenia bude dlhšia ako obdobná obligácia bez rizika. Úroková miera pôsobí dvojako na pravdepodobnosť nesplatenia. Na jednej strane zníženie úrokovej miery spôsobí zmenšenie finančného zaťaženia firmy, čím sa pravdepodobnosť zníži. Na druhej strane je zníženie úrokovej miery často spojené s recesiou, čo pravdepodobnosť zvyšuje. V konečnom dôsledku záleží, ktorý efekt prevláda. Citlivosť dlhodobých obligácií na zmenu úrokovej miery je menšia ako u krátkodobých. To je v rozpore s Macaulayho duráciou, ktorá tieto citlivosti predpokladá rovnaké. V dôsledku toho môže dojsť k veľmi vysokému preceneniu durácie. Vzťah úrokovej miery a intenzity nesplatenia je nevýznamný u vysokohodnotených obligácií (AAA, AA). Avšak u nízkohodnotených je tento vzťah významne negatívny, čo skracuje duráciu. Tento vzťah silnie so skracujúcou sa dobou do splatnosti obligácie. Zvolateľnosť obligácie, ako uvádza [13], skracuje duráciu, okrem nízkohodnotených obligácií. V spojení s rizikom nesplatenia môže dôjsť k jej predĺženiu.

3.1.4 Imunizácia

Imunizácia je stratégia, v ktorej zostavujeme portfólio aktív tak, aby sa súčasná hodnota pasív rovnala súčasnej hodnote aktív. Je to spôsob ako znížiť riziko nesolventnosti. Jednou z možností ako to dosiahnuť je metóda *absolute matching*. V tejto metóde ide o vytvorenie portfólia tak, aby sa hodnota aktív v čase t rovnala hodnote pasív v čase t pre každé t, $t = 0, \ldots, T$. Túto metódu je však v praxi veľmi ťažké realizovať. Ďalšia metóda je založená na durácii.

Predpokladajme, že máme plochú výnosovú krivku, kde je možný iba paralelný posun. Máme N aktív so súčasnými hodnotami $P_0^1,\dots,P_0^N$ a Macaulayho duráciami $D^1,\dots,D^N$. Úlohou imunizácie je nájsť počty týchto aktív $x_1,\dots,x_N$ tak, aby sa súčasná hodnota portfólia aj po zmene výnosnosti rovnala súčasnej hodnote pasíva so súčasnou hodnotou P_0^L a duráciou D^L. To je zabezpečené splnením nasledujúcich rovníc:

$$\sum_{j=1}^{N} x_j P_0^j = P_0^L$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j P_0^j D^j = D^L P_0^L \ . \tag{3.1.19}$$

Pri zahrnutí konvexít do podmienok má platiť:

$$\sum_{j=1}^{N} x_j P_0^j = P_0^L$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j P_0^j D^j = D^L P_0^L$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j P_0^j C^j \geq C^L P_0^L \ . \tag{3.1.20}$$

Nerovnosť je z toho dôvodu, že ak súčasná hodnota aktív vzrastie o viacej alebo klesne o menej ako súčasná hodnota pasív, je to pozitívny jav.

V súvislosti s imunizáciou je možné formulovať nasledujúce optimalizačné úlohy:

1. Označme $P^1,\dots,P^N$ ceny obligácií. Našou snahou je minimalizovať náklady na toto portfólio, a preto riešime úlohu lineárneho programovania:

$$\min \sum_{j=1}^{N} x_j P^j \tag{3.1.21}$$

   za vyššie uvedených podmienok (3.1.19) alebo (3.1.20), x_j nezáporné, x_j celé, $j = 1,\dots,N$.

2. Označme A^1, $\ldots$,A^N známe konštanty (napríklad tržná cena obligácie). Teraz sa snažíme určiť počty obligácií tak, aby $\sum x_j A_j$ bolo čo najväčšie. Teda riešime úlohu lineárneho programovania:

$$\max \sum_{j=1}^{N} x_j P^j \qquad (3.1.22)$$

za podmienok (3.1.19) alebo (3.1.20), x_j nezáporné, x_j celé, $j = 1, \ldots, N$.

Ako uvádza [12], optimálne portfólio sa skladá z obligácie s dlhou dobou splatnosti a z obligácie s krátkou dobou splatnosti. Ak by však došlo k zmene výnosovej krivky, ktorú durácia nepredpokladá, môže dôjsť k rozličným súčasným hodnotám aktív a pasív. Vezmime si jednoduchý príklad. Majme dve aktíva, krátkodobú a dlhodobú bezkupónovú obligáciu, splatné v čase t_1 a t_2, pričom t_1 je oveľa menšie ako t_2 a pasívum s jedinou platbou v čase t^*. Ak by došlo k rastom výnosnosti za dlhé obdobie (patrí tam t_2) a výnosnosti za krátke obdobie (patrí tam t_1) a stredne dlhé obdobie (patrí tam t^*) by sa nezmenili, súčasná hodnota aktív by klesla, ale na druhej strane súčasná hodnota pasív by sa nezmenila. Riešením tohoto problému je rozdeliť portfólio pasív a obligácie (z nich zostavujeme portfólio aktív) na viacero častí podľa dôb splatnosti. V každej teto časti sa potom imunizuje samostatne.

3.2 Volatilita

3.2.1 Miera zisku

V tejto časti budem postupovať podľa [10]. Označme P_t náhodnú veličinu predstavujúcu cenu finančného inštrumentu v čase t (t môže byť reprezentované v dňoch, mesiacoch, ...). My budeme ďalej používať dni.

Jednodenný časový horizont

Absolútna cenová zmena D_t finančného inštrumentu (výnos) medzi časom t a $t-1$ je definovaná ako

$$D_t = P_t - P_{t-1} \ . \tag{3.2.1}$$

Miera zisku (relatívna cenová zmena, diskrétna miera zisku) R_t finančného inštrumentu medzi časom t a $t-1$ je definovaná ako

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{D_t}{P_{t-1}} \ . \tag{3.2.2}$$

Odtiaľ priamo vyplýva, že

$$P_t = P_{t-1}(1 + R_t) \ . \tag{3.2.3}$$

Logaritmická miera zisku (logaritmická cenová zmena, miera zisku pri spojitom úročení) je potom definovaná ako

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = (p_t - p_{t-1}) \ , \tag{3.2.4}$$

kde $p_t = \ln(P_t)$. Odtiaľ priamo vyplýva, že

$$P_t = P_{t-1}e^{r_t} \ . \tag{3.2.5}$$

Viacdenný časový horizont

Definujme $R_t(k)$ ako *výnos za k dní* (časovo agregovanú diskrétnu mieru zisku)

$$R_t(k) = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}} \ . \tag{3.2.6}$$

Potom pre diskrétny prípad platí:

$$1 + R_t(k) = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k}) = \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{P_{t-k-1}}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-k}}. \tag{3.2.7}$$

Pre spojitý prípad je výnos za k dní (časovo agregovaná logaritmická miera zisku) definovaná ako

$$r_t(k) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right) . \tag{3.2.8}$$

Platí:

$$r_t(k) = \ln[1+R_t(k)] = \ln[(1+R_t)(1+R_{t-1})\cdots(1+R_{t-k})] = r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1} . \tag{3.2.9}$$

Miera zisku pre portfólio

V tejto časti a v časti (3.2.2) využívam [2]. Predpokladajme portfólio zložené z N finančných inštrumentov, pričom váha i– teho inštrumentu v čase t je $w_{i,t}$ a platí $\sum_{i=1}^{N} w_{i,t} = 1$. Označme cenu potrfólia v čase t ako $P_{p,t}$. Potom *portfóliovo agregovaná miera zisku* $R_{p,t}$ je

$$R_{p,t} = \frac{P_{p,t} - P_{p,t-1}}{P_{p,t-1}} . \tag{3.2.10}$$

Cena portfólia v čase t pre diskrétny prípad je

$$P_{p,t} = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} P_{p,t-1}(1 + R_{i,t}) . \tag{3.2.11}$$

Z rovníc (3.2.10) a (3.2.11) dostávame

$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} R_{i,t} . \tag{3.2.12}$$

Portfóliovo agregovaná logaritmická miera zisku je

$$r_{p,t} = \ln(1 + R_{p,t}) = \ln\left(\frac{P_{p,t}}{P_{p,t-1}}\right) . \tag{3.2.13}$$

Alternatívne:

$$P_{p,t} = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} P_{p,t-1} e^{r_{i,t}} . \tag{3.2.14}$$

Z rovníc (3.2.13) a (3.2.14) dostávame

$$r_{p,t} = \ln\left(\sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} e^{r_{i,t}}\right) . \tag{3.2.15}$$

Hodnoty R_t sú pre jednodenné miery zisku blízke nule, a tak môžeme pomocou Taylorovho rozvoja aproximovať

$$r_t = \ln(1 + R_t) \sim R_t \ , \tag{3.2.16}$$

a preto ich ďalej budeme označovať rovnako r_t. S využitím (3.2.1) a (3.2.5) dostávame

$$D_t = P_{t-1}(e^{r_t} - 1) = P_{t-1} r_t \ . \tag{3.2.17}$$

3.2.2 Volatilita

Ďalšou mierou rizika je práve volatilita. Keď sa volatilita uvažuje ako miera rizika, často sa nazýva jednoducho riziko. Volatilita σ_t je smerodatná odchylka miery zisku. Môžeme o nej takto uvažovať vzhľadom na to, že miera zisku r_t je náhodná veličina.

$$\sigma_t = \sigma(r_t) = \sqrt{\mathrm{var}(r_t)} \ . \tag{3.2.18}$$

Časovo agregovaná volatilita

Miery zisku sú v praxi väčšinou nekorelované, a tak je počítanie jednoduché.

$$\sigma_t(k) = \sqrt{\mathrm{var}(r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1})} = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \sigma_{t-k+1}^2} \ . \tag{3.2.19}$$

V prípade, že je potrebné zistiť volatilitu za T dní σ_t^T na základe jednodennej volatility, je možné použiť nasledujúcu aproximáciu

$$\sigma_t^T = \sqrt{T} \sigma_t \ . \tag{3.2.20}$$

Portfóliovo agregovaná volatilita

Tu už nie je možné zanedbať korelácie medzi výnosmi finančných inštrumentov. Predpokladajme, že portfólio sa skladá z N inštrumentov, pričom váha i–teho inštrumentu v portfóliu v čase t je $w_{i,t}$ a váhy splňujú podmienku $\sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} = 1$. Označme $\mathbf{w_t}$ vektor týchto váh a označme $\sum^t$ maticu kovariancií v čase t, kde

$$\sigma_{ijt} = \mathrm{cov}(r_{it}, r_{jt}) \ . \tag{3.2.21}$$

Potom portfóliovo agregovaná volatilita σ_{pt} je

$$\sigma_{pt} = \sqrt{\mathrm{var}\Big(\sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} r_{it}\Big)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_{i,t-1} w_{j,t-1} \sigma_{ijt}} = \sqrt{\mathbf{w'_{t-1}} \sum^t \mathbf{w_{t-1}}} \ . \tag{3.2.22}$$

Jednotlivé volatility budeme značiť

$$\sigma_{it} = \sqrt{\sigma_{iit}} = \sqrt{\mathrm{var}(r_{it})} \ . \tag{3.2.23}$$

Volatilita nie je monotónna (viď [6]). A z toho vyplýva, že nie je ani koherentnou mierou rizika (viď kapitola 3.3).

3.3 Koherentná a konvexná miera rizika

Tu použijem definíciu ako je uvedené v [8]. Označme G množinu všetkých rizík, $\rho : G \rightarrow R$. Miera rizika ρ sa na nazýva *koherentnou* ak $X, Y \in G$ splňuje nasledujúce vlastnosti:

1. monotónnosť:
$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(X) \tag{3.3.1}$$

2. subaditivita:
$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \tag{3.3.2}$$

3. pozitívna homogénnosť:
$$\forall h \geq 0 : \rho(hX) = h\rho(X) \tag{3.3.3}$$

4. invariantnosť voči posunutiu:
$$\rho(X + c) = \rho(X) + c \ , \tag{3.3.4}$$

kde c je konštanta.

Označme G množinu všetkých rizík, $\rho : G \rightarrow R$. Miera rizika ρ sa na nazýva *konvexnou* ak pre $X, Y \in G$ splňuje následujúcu vlastnosť (konvexitu):

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y) \ , \tag{3.3.5}$$

kde $\lambda \in [0, 1]$.

3.4 VaR

Model VaR (*Value at Risk*) je modelom hodnoty v riziku, ktorý slúži ku kvantifikácii rizika veľkých portfólií, k výpočtu regulačného kapitálu, ... Používa sa predovšetkým na meranie tržného rizika. V budúcnosti by sa mohol rozšíriť aj na úverové či operačné riziko. Hoci je to pomerne používaná metóda, má aj svoje nedostatky. Napríklad nezahrňuje možnosť, že by k extrémnej strate mohlo dôjsť aj v priebehu obdobia a nie iba na jeho konci. Ďalším nedostatkom je, že tiež nezahrňuje možnosť, že by sa extrémne straty mohli kumulovať do časových intervalov, ktoré idú po sebe.

VaR je maximálna možná strata, ktorá nastane s určitou pravdepodobnosťou behom budúceho časového horizontu na základe určitého historického časového horizontu. Vyžaduje si stanovenie dvoch parametrov. Je to časový horizont a spoľahlivosť. Zaujímame sa napríklad o maximálnu jednodennú možnú stratu s pravdepodobnosťou 95 % na základe historického časového horizontu jeden rok.

Časový horizont je dĺžka obdobia, behom ktorého uvažujeme stratu. Záleží na požiadavkách investora, likvidite portfólia, ... V prípade vysokej likvidity sa používa jednodenný časový horizont. V prípade kratšieho časového horizontu je menšia náročnosť na historické dáta, ktorá so zväčšovaním časového horizontu narastá. Jednodenný časový interval používajú finančné inštitúcie. Dôvodom je veľká rozmanitosť držaného portfólia a teda veľká dynamickosť. Na druhej strane investiční manažéri a podniky používajú väčší časový horizont (mesiac, štvrťrok, rok,...). Pre kapitálovú primeranosť sa používa štrnásťdenný (desať pracovných dní). Ďalším dôvodom pre krátku dobu, okrem menšej náročnosti na historické dáta je fakt, že iba u veľmi krátkych dôb držania možno predpokladať normálne rozdelenie výnosov. Pri väčších dobách je normalita ťažko použiteľná.

Spoľahlivosť v tomto modele má význam pravdepodobnosti s akou bude skutočná strata menšia ako vypočítaná hodnota v riziku. Pre kapitálovú primeranosť sa používa 99 % – ná hladina, finančné inštitúcie používajú 95 – 99 % – nú hladinu. Kvôli overovaniu modelu by nemala byť hladina významnosti príliš vysoká. So zvyšujúcou sa hladinou významnosti sa zmenšuje pravdepodobnosť prekročenia vypočítanej hodnoty VaR a to má za následok predlžovanie doby na zhromaždenie dostatočného množstva dát.

Je samozrejme pre finančné inštitúcie nevyhnutné overovať správnosť modelu, aby odchylky vypočítanej hodnoty v riziku a skutočnej hodnoty neboli príliš vysoké. Po zhromaždení dostatočného množstva dát sú porovnané skutočné straty a vypočítaná VaR. Počet strát vyšších než hodnota VaR by mal odpovedať hladine spoľahlivosti. Pokiaľ model dobre nepredpovedá hodnoty VaR, je nutné ho upraviť. Problémom je však časová náročnosť na pozorované dáta (časovou náročnosťou tu rozumieme dlhé trvanie nazhromaždenia dát). Riešením je dostatočne dlhé testovacie obdobie modelu pred jeho zavedením do praxe.

3.4.1 Definícia VaR

V tejto časti budem používať značenia a výsledkov z podkapitoly (3.2). Na hodnotu v riziku sa môžeme pozerať z dvoch pohľadov. Z pohľadu ziskov a z pohľadu strát. My sa teraz budeme zaoberať modelom VaR z pohľadu ziskov. VaR je defininovaná ako 100(1– c) % – ný kvantil rozdelenia budúcich ziskov behom určitého časového horizontu so spoľahlivosťou 100c % (na hladine 100c%). Poznáme dva druhy hodnoty v riziku: absolútnu a relatívnu.
Absolútna hodnota v riziku je definovaná ako

$$P(D_t \geq -\mathrm{VaR}^{abs}) = c \ . \tag{3.4.1}$$

$$P(D_t < -\mathrm{VaR}^{abs}) = 1 - c \ . \tag{3.4.2}$$

A *relatívna hodnota v riziku* je definovaná ako

$$P(D_t - \mathrm{E}D_t \geq -\mathrm{VaR}^{rel}) = c \ , \tag{3.4.3}$$

kde D_t je náhodná veličina, ktorá predstavuje zisk v čase t, ktorý nastal behom časového horizontu a E predstavuje strednú hodnotu. Potom platí:

$$\mathrm{VaR}^{abs} = -q_{1-c}^{D_t} \tag{3.4.4}$$

a

$$\mathrm{VaR}^{rel} = -(q_{1-c}^{D_t} - \mathrm{E}D_t) \ , \tag{3.4.5}$$

kde $q_{1-c}^{D_t}$ je 100(1– c) % – ný kvantil náhodnej veličiny D_t. Keby sme namiesto náhodnej veličiny D_t, ktorá predstavuje zisk v čase t, uvažovali náhodnú veličinu Y_t, ktorá predstavuje stratu v čase t, ktorá nastala behom časového horizontu a hladinu spoľahlivosti α, potom môžeme hodnotu v riziku zapísať ako

$$\mathrm{VaR}^{abs} = q_{\alpha}^{Y_t} \tag{3.4.6}$$

a

$$\mathrm{VaR}^{rel} = q_{\alpha}^{Y_t} + \mathrm{E}Y_t \ , \tag{3.4.7}$$

kde $q_{\alpha}^{Y_t}$ je 100α % – ný kvantil náhodnej veličiny Y_t .

Teraz sa vrátime k definícii podľa ziskov a odvodíme vzťahy medzi VaR a mierou zisku. Dosadením (3.2.17) do (3.4.1) dostávame

$$P\Big(r_t \geq -\frac{\mathrm{VaR}^{abs}}{P_{t-1}}\Big) = c \tag{3.4.8}$$

a dosadením (3.2.17) do (3.4.3) dostávame

$$P\Big(r_t \geq \frac{-\text{VaR}^{rel} + P_{t-1}\mu}{P_{t-1}}\Big) = c\ , \tag{3.4.9}$$

kde $\mu = Er_t$. Pre zjednodušenie a prehľadnosť zápisu nebudem ďalej písať časové indexy u cien inštrumentov. Potom platí:

$$\text{VaR}^{abs} = -Pq_{1-c}^{r_t} \tag{3.4.10}$$

a

$$\text{VaR}^{rel} = -P(q_{1-c}^{r_t} - \mu)\ , \tag{3.4.11}$$

kde $q_{1-c}^{r_t}$ je 100(1– c) % – ný kvantil náhodnej veličiny r_t. Z praktických dôvodov sa väčšinou pracuje iba s relatívnou hodnotou v riziku VaR^{rel}.

3.4.2 Metódy modelu VaR

Používajú sa 3 hlavné metódy modelu VaR

1. Parametrická metóda
2. Metóda historickej simulácie
3. Metóda Monte Carlo

Parametrická metóda

Táto metóda je založená na odhade potencionálnych budúcich strát na základe volatilít mier zisku a korelácií medzi mierami zisku v minulosti. Tieto volatility a korelácie sa stanovujú z historických údajov. Najjednoduchší prípad parametrickej metódy predpokladá normálne rozdelenie budúcich mier zisku.

Pri odhade budúcich volatilít a korelácií sú 2 možné prístupy.

1. Údajom z minulsti sa priradia rovnaké váhy.
2. Novším údajom sa priradia väčšie váhy ako starším.

Výhoda druhého prístupu je rýchlejšie reagovanie na krízy, pretože najväčšiu váhu majú najnovšie údaje. Pre parametrickú metódu máme dva predpoklady:

- rozdelenie ziskov a strát je normálne
- rozklad portfólia na základné finančné toky alebo inštrumenty je lineárny. (Súčasná hodnota portfólia je lineárnou funkciou súčasných hodnôt jednotlivých inštrumentov.)

Hodnota VaR pre jeden finančný inštrument (tok):

Predpokladajme, že r_t má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2, $r_t \sim N(\mu;\sigma^2)$. Uvažujme jednodenný časový horizont, r_t je jednodenná budúca miera zisku v čase t. Potom

$$q_{1-c}^{r_t} = \mu + \sigma q_{1-c} \ , \tag{3.4.12}$$

kde $q_{1-c}^{r_t}$ je 100(1– c) % – ný kvantil náhodnej veličiny r_t , 100(1– c) % je hladina spoľahlivosti a q_{1-c} je 100(1– c) % – ný kvantil $N(0;1)$. Potom dosadením do (3.4.10) a (3.4.11) dostávame

$$\mathrm{VaR}^{abs} = -P(\mu + \sigma q_{1-c}) \tag{3.4.13}$$

a

$$\mathrm{VaR}^{rel} = \mathrm{VaR} = -P\sigma q_{1-c} \ , \tag{3.4.14}$$

kde P je súčasná hodnota finančného inštrumentu (toku), pričom k oceňovaniu došlo v čase odhahu VaR.

Hodnota VaR pre portfólio:

Pre portfólio skladajúce sa z N finančných inštrumentov (tokov) určíme VaR z nasledujúceho vzťahu.

$$\mathrm{VaR} = \sqrt{x'Rx} \ , \tag{3.4.15}$$

kde

$$x = (\mathrm{VaR}_1, \ldots, \mathrm{VaR}_N)' \ , \tag{3.4.16}$$

$$\mathrm{VaR}_i = -P_i\sigma_i q_{1-c} \ , \tag{3.4.17}$$

$$R = (\rho_{i,j})_{i,j=1}^{N} \ , \tag{3.4.18}$$

pričom $\rho_{i,j}$ je korelačný koeficient i–teho a j–teho finančného inštrumentu (toku), $i, j = 1, \ldots, N$, R je korelačná matica, σ_i je volatilita miery zisku i–teho finančného inštrumentu (toku) a P_i je súčasná hodnota i–teho finančného inštrumentu (toku) v čase odhadu VaR.

Prechod od jednodenného k T-dennému časovému horizontu zmení vzťah (3.4.15) na

$$\mathrm{VaR} = \sqrt{x'Rx}\sqrt{T} \ . \tag{3.4.19}$$

Výhodou tejto metódy je jednoduchosť a názornosť. V prípade nesplnenia predpokladov metódy (linearita a normalita), parametrická metóda nie je vhodná na určenie VaR. Napríklad pri nelinearite, normálny prístup spôsobuje rýchle strácanie presnosti. Je možné použiť delta – gamma metódu. Vzhľadom však na jej pomerne veľkú nepresnosť sa v praxi veľmi nepoužíva. A tak sa ani my metódou delta – gamma v tejto práci nebudeme viacej zaoberať. Namiesto nej sa používajú neparametrické metódy.

Metóda historickej simulácie

Táto metóda je založená na počítaní potencionálnej straty portfólia na základe strát, ktoré by nastali u daného portfólia v minulosti. Ide teda o odhad VaR súčasného portfólia s použitím historických údajov jednotlivých finančných inštrumentov za predpokladu, že zloženie portfólia by bolo rovnaké ako to súčasné. Algoritmus, ktorý bude ďalej popísaný je prevzatý z [2].

Majme portfólio s N finančnými inštrumentami v čase T (súčasnosť). Váhu i–teho inštrumentu v portfóliu označme w_{iT}, $i = 1, \ldots, N$ a jeho mieru zisku r_{iT}. Metóda historickej simulácie môže byť popísaná nasledovne:

1. Vezmeme pozorované miery zisku r_{iT} jednotlivých finančných inštrumentov i ($i = 1, \ldots, N$) a za hypotetického predpokladu, že zloženie portfólia v čase t ($t = 1, \ldots, T$) bolo rovnaké ako zloženie súčasného portfólia (v čase T), simulujeme mieru zisku portfólia r_{pt}

$$r_{pt} = \sum_{i=1}^{N} w_{iT} r_{it} \ . \tag{3.4.20}$$

2. Zo získaného výberu mier zisku, za predpokladu dostatočného rozsahu výberu T, odhadneme charakteristiky ich pravdepodobnostného rozdelenia (zaujíma nás najmä kvantil).

3. Podľa (3.4.10) a (3.4.11) stanovíme hľadanú hodnotu v riziku cez budúci časový horizont za predpokladu, že odhadnuté pravdepodobnostné rozdelenie mier zisku portfólia je cez tento časový horizont použiteľnou aproximáciou.

Táto metóda ma radu výhod, a preto je v praxi často používanou. Najväčšou výhodou je, že okrem predpokladu o stálosti portfólia nemá žiadne ďalšie predpoklady na rozdelenie mier zisku. K tomu netreba odhadovať žiadne parametre ako volatilita či korelácia. Ďalšou výhodou je jej použitelnosť aj pre nelineárne finančné inštrumenty.

Nevýhodou je silná závislosť na použitých dátach. Problém môže nastať pri zriedkavých javoch (ako napríklad krízach), ktoré môžu spôsobiť nadhodnotenie alebo podhodnotenie hodnoty v riziku. Ak v zahrnutých dátach bola kríza a žiadna sa neočakáva, dochádza k nadhodnoteniu rizika. Naopak po kľudnom období, s očakávaním krízy v budúcnosti, dochádza touto metódou k podhodnoteniu rizika. Avšak pri rozumnom zaobchádzaní s dátami, má viac výhod ako nevýhod, a preto patrí medzi veľmi rozšírené.

Metóda Monte Carlo

Táto metóda je založená na veľkom počte simulácií, na základe ktorých sa vypočíta príslušná hodnota v riziku. Simulujú sa procesy, ktoré predstavujú cenu finančných inšrumentov v čase na základe rôznych modelov. Postupuje sa nasledovne:

1. Ako prvý krok sa vyberie vhodný model pre vývoj ceny a odhadnú sa potrebné parametre ako volatilita či jednotlivé korelácie inštrumentov (tzv. korelačná štruktúra), poprípade ďalšie parametre. Záleží na zvolenom modele.

2. Generujú sa jednotlivé scenáre vývoja ceny. Jednotlivé generovania musia byť nezávislé a je potrebný veľký počet generovaní. Na ich základe sa získa pravdepodobnostné rozdelenie ceny portfólia.

3. Z tohoto pravdepodobnostného rozdelenia sa určí hľadaná hodnota v rizku.

Výhodou tejto metódy je jej použiteľnosť ako pri lineárnych, tak aj pri nelineárnych finančných inštrumentoch. Ďalšou výhodou je flexibilita metódy. Najväčšou nevýhodou je veľká časová náročnosť.

Metóda historickej simulácie a metóda Monte Carlo sú si v podstate podobné. Obe generujú scenáre, prvá na základe histórie, druhá na základe zvoleného modelu. Obe sú použiteľné pre nelineárne finančné inštrumenty. Ak sú však výsledky parametrickej metódy dobré, doporučuje sa jej použitie vzhľadom na jednoduchosť a malú časovú náročnosť.

3.4.3 Základné vlastnosti VaR

V tejto časti budem využívať poznatky z [11]. Označme Y náhodnú veličinu popisujúcu stratu a α pevnú hladinu. Označme potom pre jasnosť zápisu hodnotu v riziku ako $\mathrm{VaR}_\alpha(Y)$. Zavedme však najprv pojem komonotónosť. Y_1, Y_2 sa nazývajú *komonotónne*, ak existuje Z a neklesajúce funkcie f, h tak, že (X,Y) má rovnaké rozloženie ako $(f(Z),h(Z))$.

Miera rizika $\mathrm{VaR}_\alpha(Y)$ má potom nasledujúce základné vlastnosti:

1. VaR je invariantná voči posunutiu:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(Y + a) = \mathrm{VaR}_\alpha(Y) + a \tag{3.4.21}$$

2. VaR je pozitívne homogénna:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(aY) = a\mathrm{VaR}_\alpha(Y), \quad a > 0 \tag{3.4.22}$$

3. $\mathrm{VaR}_\alpha(Y) = -\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(-Y)$

4. VaR je komonotónne aditívna, teda ak sú Y_1 a Y_2 komonotónne, tak platí:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(Y_1 + Y_2) = \mathrm{VaR}_\alpha(Y_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y_2) \tag{3.4.23}$$

Nevýhodou modelu VaR je, že nesplňuje subaditivitu ako je uvedené napríklad v [15]. To znamená, že hodnota v riziku portfólia zloženého z dvoch inštrumentov môže byť väčšia ako súčet jednotlivých hodnôt v riziku. VaR taktiež nesplňuje konvexitu. VaR nie je koherentnou mierou. U niektorých to vedie k záverom, že VaR nie je mierou rizika ako takou. Jej výhodou je však jednoduchosť a ľahká interpretácia. Vzhľadom na to, že výsledkom je číslo, je ľahko aplikovateľná pri porovnávaní rôznych finančných inštrumentov či portfólií. V praxi je to veľmi používaná miera rizika, ktorá sa napríklad používa aj pri stanovení kapitálovej primeranosti.

3.5 CVaR

Podmienená hodnota v riziku (*Conditional Value at Risk,*), tiež nazývaná *Mean Excess Loss, Mean Shortfall, Tail VaR* sa označuje ako CVaR. Poznatky tejto časti som získala z [15]. CVaR má lepšie vlastnosti ako VaR. Splňuje subaditivitu a tiež je konvexná. Spravidla hodnota podmienenej hodnoty v riziku je väčšia alebo rovná hodnote v rizku.

3.5.1 Definícia CVaR

Definujeme podľa [11]. Uvažujme náhodnú veličinu Y predstavujúcu straty. Potom *podmienenú hodnotu v riziku* na hladine spoľahlivosti α (CVaR_α) môžeme definovať ako

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) = \mathrm{E}(Y|Y \geq \mathrm{VaR}_\alpha(Y)) \ . \tag{3.5.1}$$

Iná možnosť ako definovať podmienenú hodnotu v riziku je

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) = \inf\{a + \frac{1}{1-\alpha}\mathrm{E}[Y-a]^+ : a \in R\} \ , \tag{3.5.2}$$

kde $[z]^+ = \max(z, 0)$. Pre podmienenú hodnotu v riziku platí:

$$\begin{aligned}\mathrm{CVaR}_{(1-\alpha)}(-Y) &= \mathrm{E}(-Y|-Y \geq \mathrm{VaR}_{(1-\alpha)}(-Y)) = \mathrm{E}(-Y|-Y \geq -\mathrm{VaR}_{(\alpha)}(Y)) = \\ &= -\mathrm{E}(Y|Y \leq \mathrm{VaR}_\alpha(Y)) \ . \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Iný spôsob ako možno podmienenú hodnotu v riziku vyjadriť je:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) = \mathrm{E}[Y|Y \geq q_\alpha] = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u \mathrm{d}u \ . \tag{3.5.4}$$

3.5.2 Základné vlastnosti CVaR

V tejto časti budem využívať poznatky z [11]. Miera rizika CVaR má nasledujúce vlastnosti:

1. $\mathrm{CVaR}_\alpha(Y)$ je invariantná voči posunutiu:
$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y + a) = \mathrm{CVaR}_\alpha(Y) + a \tag{3.5.5}$$
2. $\mathrm{CVaR}_\alpha(Y)$ je pozitívne homogénna:
$$\mathrm{CVaR}_\alpha(aY) = a\ \mathrm{CVaR}_\alpha(Y) \ , \ a > 0 \ . \tag{3.5.6}$$
3. Ak Y má symetrickú hustotu, potom platí:
$$\mathrm{E}(Y) = (1-\alpha)\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) - \alpha\ \mathrm{CVaR}_{(1-\alpha)}(-Y) \tag{3.5.7}$$
4. $\mathrm{CVaR}_\alpha(Y)$ je konvexná:
$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2) \leq \lambda \mathrm{CVaR}_\alpha(Y_1) + (1-\lambda)\mathrm{CVaR}_\alpha(Y_2) \ , \tag{3.5.8}$$

kde Y_1, Y_2 a Y sú náhodné veličiny a $\lambda \in [0, 1]$. Dôkaz možno nájsť v [11].

3.5.3 Vzťah medzi VaR a CVaR

Označme $[Y]^c = \min(Y, c)$. Potom platí:

1. Ak $c = \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$, tak $\mathrm{CVaR}_\alpha([Y]^c) = \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$
2. $\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) \geq \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$
3. $\mathrm{VaR}_\alpha(Y) = \sup\{\nu : \mathrm{CVaR}_\alpha([Y]^\nu) = \nu\}$

[5] vo svojej diplomovej práci píše, že určitú stratu je možné považovať za bankrot. To vedie k rozdielnym pohľadom firiem a veriteľov na mieru rizika, pretože práve s pravdepodobosťou prekročenia určitej hodnoty súvisí hodnota v riziku. Na druhej strane miera podmienená hodnota v riziku vo svojej podstate pravdepodobosť prekročenia síce nezachycuje, ale dáva predstavu o veľkosti straty, keď už k prekročeniu dôjde. Z toho vypýva, že firmy preferujú ako mieru rizika hodnotu v riziku. (Chcú predísť bankrotu a to keď už bankrot nastane ich až tak veľmi nezaujíma, pretože to už aj tak nebudú schopní platiť.) Na druhej strane veritelia preferujú podmienenú hodnotu v riziku, pretože táto miera zahŕňa v sebe horšie scenáre a veľkosť straty veriteľov, keď takýto scenár nastane.

Výhodou metódy CVaR na meranie rizika je jej jednoduchosť v prezentácii. Výsledkom je podobne ako pri VaR číslo, takže nespôsobuje žiadne problémy pri rozhodovaní. Je aplikovateľná aj pre nesymetrické rozdelenia. Ďalšou výhodou, ktorú už VaR nespĺňa, je konvexita a tiež subaditivita. Je to koherentná miera ako uvádza [11]. V [16] je spomínané, že CVaR je stabilnejšia oproti VaR, čo sa týka štatistických odhadov. Metóda VaR je v podstatne väčšej miere závislá na svojich charakteristikách, ktoré môže značne pozmeniť jediný scenár. CVaR je spojitou funkciou hladiny spoľahlivosti na rozdiel od VaR, ktorá môže byť nespojitou funkciou. V [6] je ukázané, že každá koherentná miera sa dá napísať ako konvexná kombinácia CVaR s rozličnými hladinami spoľahlivosti. Vzhľadom k jej jednoduchosti a malej časovej náročnosti je ľahko použiteľná ako pri kontrole, tak pri optimalizácii. Čo sa týka lineárneho programovania, je použitelná pre rozsiahle dáta. Hoci má podmienená hodnota v riziku lepšie vlastnosti ako hodnota v riziku, napriek tomu nie je až tak často samostatne používanou mierou rizika. Skôr sa používa ako doplnok k známejšej metóde VaR.

3.6 Stress testing

Stress testing je metóda používaná k meraniu zraniteľnosti portfólia voči extrémnym situáciam. Pomocou nej je možné získať predstavu o veľkosti skutočnej straty, ktorá by mohla nastať v budúcnosti. Je založená na konštrukcii scenárov, ktoré v sebe zahrňujú túto extrémnu udalosť.

Na začiatku musíme vybrať scenár vzhľadom ku ktorému chceme portfólio testovať. Spočíta sa miera zisku pre jednotlivé finančné inštrumenty vzhľadom k scenáru a nakoniec sa vypočíta miera zisku celého portfólia. Je možné zahrnúť aj pravdepodobnosti jednotlivých scenárov.

Výber scenára je založený na histórii alebo je to scenár teoretický. Scenáre založené na histórii sú skutočné scenáre kopirujúce nejakú krízu, ktorá nastala v minulosti alebo takzvané hypotetické jednorázové scenáre (teroristický útok, živelná pohroma,...). Druhým prístupom je teoretický scenár. Ten je založený na odporúčaní rôznych inštitúcií, napríklad Derivatives Policy Group. Tá doporučuje ako je uvedené v [4] nasledovné smernice:

- zmena úrokovej miery o ± 100 bázických bodov (b.p.)
- paralelný posun výnosovej krivky o ± 100 b.p.
- zmena zakrivenia výnosovej krivky o ± 25 b.p.
- zmena menového kurzu o ± 6 %
- zmena akciového indexu o ± 10 %
- zmena volatility o ± 20 %

Inou možnosťou je mechanický prístup, v ktorom sa kombinujú parametre tak, aby výsledok bol čo najhorší.

Nevýhodou stress testingu je veľká náročnosť na počet scenárov. Tento problém sa rieši výberom len určitých scenárov (najlepší, najhorší,...) alebo náhodným výberom scenárov.

Kapitola 4

Usporiadanie rizík

4.1 Kritérium očakávaného úžitku

Pomocou úžitkových funkcií možno vyjadriť preferencie investora. Predpokladá sa, že investor preferuje vyšší výnos a má averziu k rizku (vysvetlené nižšie). V tejto časti vychádzam z [9]. Predpokladajme, že X, Y sú riziká, nezáporné náhodné veličiny vyjadrujúce veľkosť straty. Potom $u(x)$ je *úžitková funkcia*, ktorá meria úžitok z prírastku majetku veľkosti x. Hovoríme, že X sa preferuje pred Y, ak

$$\mathrm{E}u(-X) \geq \mathrm{E}u(-Y) \ . \tag{4.1.1}$$

Niekedy sa tiež hovorí, že Y majorizuje X. Ako sme už spomínali, zohľadňujeme averziu k riziku investora. *Averziou k riziku* rozumieme preferovanie pevnej čiastky straty pred náhodnou stratou s rovnakou strednou hodnotou. Teda platí:

$$\mathrm{E}(u(-X)) \leq u(-\mathrm{E}X) \ . \tag{4.1.2}$$

Pre úžitkovú funkciu predpokladáme tieto vlastnosti:

1. Úžitková funkcia je neklesajúca.

2. Úžitková funkcia je konkávna.

Pri úžitkových funkciách sa stretávame s lokálnym koeficientom averzie k riziku úžitkovej funkcie $u(x)$, ktorý je tiež niekedy označovaný ako miera absolútnej averzie k riziku a je definovaný ako

$$R_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \ . \tag{4.1.3}$$

Tento koeficient (viď [5]) pri známej hodnote dosiahnutého výnosu odpovedá požiadavkám investora na výšku kompenzácie za prijatie veľmi malého rizika, ktoré je určené náhodnou veličinou s nulovou strednou hodnotou. Často sa používa logaritmická úžitková funkcia $u(x) = \ln(1+x)$. Tá splňuje predpoklady (1) a (2). Hodnotu $u(R) = \ln(1+R)$ budeme aproximovať pomocou prvých štyroch členov Taylerovho rozvoja:

$$u(R) = u(ER) + u'(ER)(R-ER) + \frac{u^{(2)}(ER)}{2!}(R-ER)^2 + \\ + \frac{u^{(3)}(ER)}{3!}(R-ER)^3 + \frac{u^{(4)}(ER)}{4!}(R-ER)^4 \ . \tag{4.1.4}$$

A teda platí:

$$\ln(1+R) = \ln(1+ER) + \frac{(R-ER)}{1+ER} - \frac{(R-ER)^2}{2(1+ER)^2} + \frac{(R-ER)^3}{3(1+ER)^3} - \frac{(R-ER)^4}{4(1+ER)^4} \ . \tag{4.1.5}$$

Aproximovaná očakávaná hodnota úžitku je teda na základe Taylerovho rozvoja určená prvými štyrmi momentami. V prípade, keď sa investor rozhoduje na základe tejto úžitkovej funkcie a porovnáva dve investície s rovnakou strednou hodnotou a rozptylom, rozhodne sa pre tú investíciu, ktorá má väčšiu šikmosť a menšiu špičatosť.

Inou možnosťou úžitkovej funkcie je exponenciálna úžitková funkcia, ktorá má tvar $u(x) = -\exp(-ax)$. V tomto prípade tu vystupuje parameter a, ktorý reprezentuje averziu k riziku. Čím väčšia je hodnota tohoto parametra, tým je averzia k rizku väčšia. Exponenciálna úžitková funkcia taktiež splňuje predpoklady (1) a (2) o úžitkových funkciách. Očakávaný úžitok je vždy záporný, a teda investor preferuje tú alternatívu, ktorej očakávaná hodnota je bližšie k nule.

V tejto práci som ukázala dva prístupy na základe ktorých sa investor môže rozhodovať. Prvou bola miera rizika a druhou úžitková funkcia. Vhodná miera rizika by nemala dávať iný výsledok rozhodnutia ako úžitková funkcia. Pri rozhodovaní o portfóliu by nemalo dôjsť k situácii, kedy výsledok závisí od toho, či sa rozhoduje na základe miery rizika alebo či je to na základe úžitkovej funkcie. Z toho dôvodu by mali miery rizika brať na zreteľ preferencie investorov.

4.2 Stochastické usporiadanie

Náhodné veličiny vyjadrujúce stratu možno porovnávať na základe stochastického usporiadania. $X \prec_{stoch} Y$, ak pre neklesajúcu funkciu w platí:

$$Ew(X) \leq Ew(Y) \ . \tag{4.2.1}$$

Predpokladajme, že náhodná veličina X ma distribučnú funkciu F_X a náhodná veličina Y má distribučnú funkciu F_Y. Potom $X \prec_{stoch} Y$ práve vtedy, keď

$$F_X(x) \geq F_Y(y) \ , \ x \in (-\infty, \infty) \ . \tag{4.2.2}$$

Predpokladajme, že náhodná veličina X ma hustotu f_X a náhodná veličina Y má hustotu f_Y. Ak pre nejaké c platí:

$$f_X(x) \geq f_Y(x) \text{ ak } x < c$$

$$f_X(x) \leq f_Y(x) \text{ ak } x > c \; , \tag{4.2.3}$$

potom $X \prec_{stoch} Y$. Predpokladajme, že $X \prec_{stoch} Y$ a Z je riziko nezávislé na X a nezávislé na Y. Potom platí následujúci vzťah:

$$X + Z \prec_{stoch} Y + Z \; . \tag{4.2.4}$$

4.3 S–L usporiadanie

X je pred Y, $X \prec_{sl} Y$, ak

$$E(X-d)_+ \leq E(Y-d)_+ \tag{4.3.1}$$

pre $d \geq 0$, $EX < \infty$, $EY < \infty$. $X \prec_{sl} Y$ práve vtedy, keď X je preferované pred Y všetkými osobami s averziou k riziku. Majme X a Y náhodné veličiny predstavujúce stratu a nech existuje c tak, že

$$F_X(x) \leq F_Y(x) \text{ pre } x < c$$

$$F_X(x) \geq F_Y(x) \text{ pre } x \geq c$$

a

$$EX \leq EY \; , \tag{4.3.2}$$

potom $X \prec_{sl} Y$. Teraz popíšem niektoré z vlastností S–L usporiadania.
Ak $X \prec_{sl} Y$, potom

$$EX^\alpha \leq EY^\alpha \text{ pre } \alpha \geq 1 \; . \tag{4.3.3}$$

Ak $X \prec_{sl} Y$ a Z je nezávislé na X aj Y, potom platí:

$$X + Z \prec_{sl} Y + Z \; . \tag{4.3.4}$$

Ak $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sú vzájomne nezávislé a $X_i \prec_{sl} Y_i$ pre $i = 1, \ldots, n$ potom platí:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \prec_{sl} \sum_{i=1}^{n} Y_i \; . \tag{4.3.5}$$

Predpokladajme , že F_i, G_i sú distribučné funkcie rizík $i = 1, \ldots, n$. Máme pravdepodobnosti $p_i \in [0,1]$, $\sum_i p_i = 1$. Potom platí:

$$\sum_i p_i F_i \prec_{sl} \sum_i p_i G_i \; . \tag{4.3.6}$$

Majme $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ postupnosti vzájomne nezávislých rovnako rozložených náhodných veličín. N, N' sú načítacie veličiny a $X_i \prec_{sl} Y_i$, $N \prec_{sl} N'$. Potom platí:

$$1.\ \sum_{i=1}^{N} X_i \prec_{sl} \sum_{i=1}^{N} Y_i \tag{4.3.7}$$

$$2.\ \sum_{i=1}^{N} X_i \prec_{sl} \sum_{i=1}^{N'} X_i\ . \tag{4.3.8}$$

4.3.1 S–L usporiadanie vyšších radov

X predchádza Y v S–L usporiadaní rádu n, $X \prec_{sl(n)} Y$, ak

$$EX^k \leq EY^k \text{ pre } k = 1, \ldots, n-1 \text{ a}$$

$$E(X-d)_+^n \leq E(Y-d)_+^n\ \forall\ d \geq 0 \tag{4.3.9}$$

(má zmysel pri $EX^n < \infty$, $EY^n < \infty$).
Predpokladajme, že $m > n$, $X \prec_{sl(n)} Y$ a $EX^n < \infty$, $EY^n < \infty$. Potom

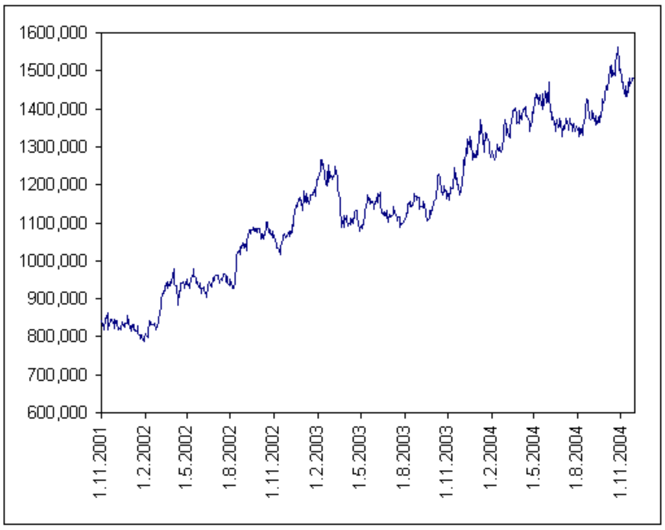
$$X \prec_{sl(m)} Y\ .$$

Kapitola 5

Numerická časť

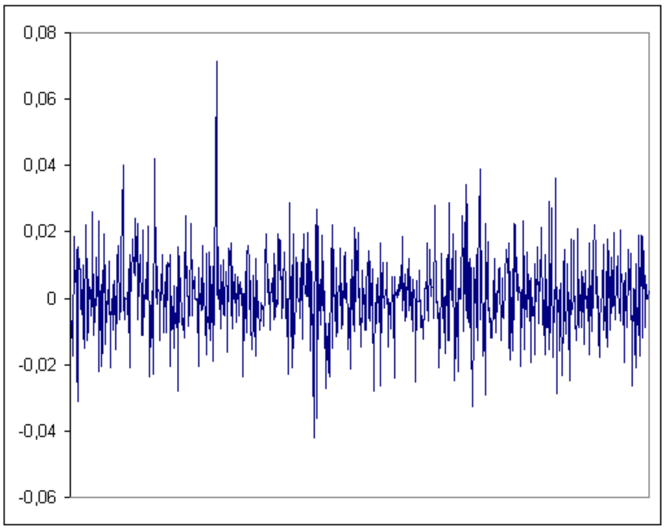
V tejto časti bude numerická analýza reálnych dát. Bude počítaná volatilita, hodnota v riziku a podmienená hodnota v rizku. Dáta som získala z [14]. Jedná sa o SPCI – PI (The Standard & Poor's Comodity Index – Price index). Na výpočty som používala údaje z obdobia 1.11.2001 až 29.11.2004, čo je celkom 800 údajov. Údaje boli spracované pomocou Microsoft Excel.

Vývoj cenového indexu počas niečo vyše troch rokov nám ukazuje nasledovný graf. Podľa podkapitoly (3.2) sme postupne vypočítali absolútnu cenovú zmenu



Obrázek 5.1: Vývoj SPCI – PI

D_t, mieru zisku R_t a logaritmickú mieru zisku r_t. Vývoj miery zisku a logaritmickej miery zisku je znázornený na grafoch (5.2) a (5.3). Podľa vzorca (3.2.18)



Obrázek 5.2: Miera zisku

potom už ľahko určíme volatilitu a analogicky (podľa výnosov za 10 a 20 dní) dvojtýždennú volatilitu (10 pracovných dní) a mesačnú volatilitu (20 pracovných dní). Výsledky sú uvedené v tabulke (5.1). Ako vidíme, volatilita závisí na období,

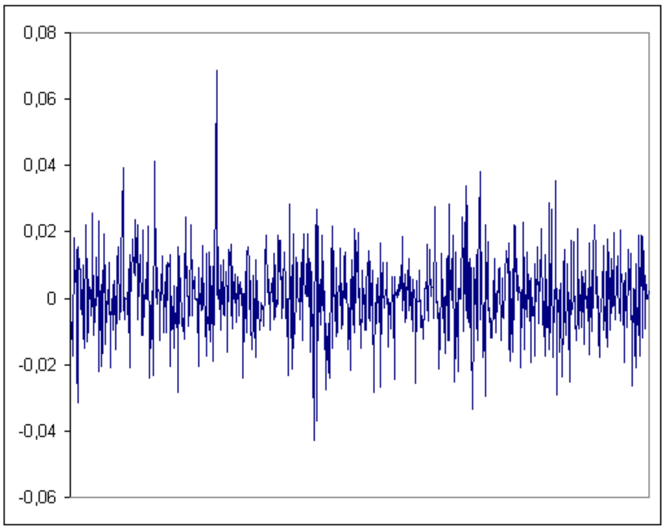
σ	$\sigma(10)$	$\sigma(20)$
0,011623	0,034401	0,045541

Tabulka 5.1: Volatility

za ktoré ju počítame (deň, dva týždne, mesiac) a so zväčšujúcim sa obdobím sa volatilita zvyšuje.

Teraz sa budeme zaoberať výpočtom hodnoty v riziku. VaR budeme počítať pre tri časové horizonty 1 deň, 10 dní a 20 dní a na troch hladinách spoľahlivosti a to 95%, 97% a 99%. Ukážeme vplyv hladiny spoľahlivosti na hodnotu VaR. Histogramy (5.4), (5.5) a (5.6) ukazujú rozdelenie pravdepodobnosti absolútnej cenovej zmeny, miery zisku a logaritmickej miery zisku.

Aby sme mohli použiť parametrickú metódu, musíme najprv overiť normalitu



Obrázek 5.3: Logaritmická miera zisku

výberu r_t. Normalitu overujem pomocou testu normality na základe šikmosti uvedeného v [1], ktorý hovorí, že ak platí hypotéza, že výber $\xi_1,\ldots,\xi_n$ je z normálneho rozdelenia, potom a_3 (šikmosť) a a_4 (špicatosť) majú asymptoticky normálne rozdelenie s parametrami

$$\mathrm{E}a_3 = 0\ , \tag{5.0.1}$$

$$\mathrm{var}\ a_3 = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}\ , \tag{5.0.2}$$

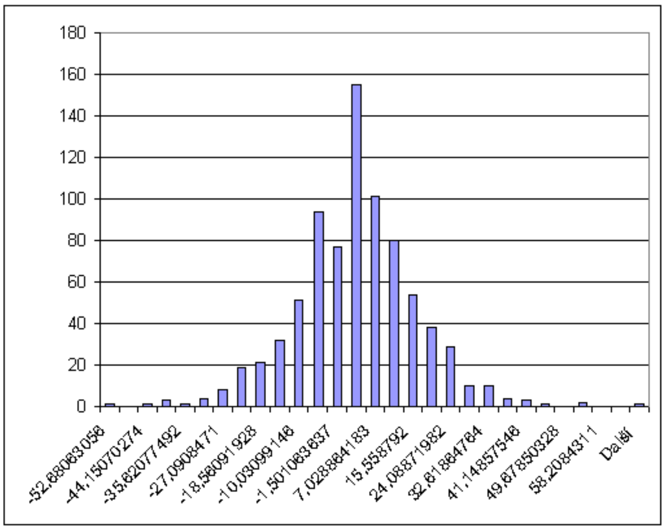
$$\mathrm{E}a_4 = 3 - \frac{6}{n+1}\ , \tag{5.0.3}$$

$$\mathrm{var}\ a_4 = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}\ . \tag{5.0.4}$$

Pričom a_3, a_4 sú asymptoticky nekorelované. Test proti alternatíve, že výber pochádza z nejakého nesymetrického rozdelenia sa založí na šikmosti a_3. Pre veľké n (v praxi pre $n \geq 200$) sa dá využiť asymptotická normalita. Vypočíta sa veličina

$$U_3 = \frac{a_3}{\sqrt{\mathrm{var}\ a_3}}\ . \tag{5.0.5}$$

Pokiaľ je $|U_3| \geq u(\frac{\alpha}{2})$, kde $u(\alpha)$ je α – kvantil normálneho rozdelenia $N(0,1)$, zamieta sa hypotéza, že ide o výber z normálneho rozdelenia. V našom prípade som skúmala normalitu na hladine 95%. Vzhľadom na to, že hodnota U_3 vyšla 2,299



Obrázek 5.4: Histogram absolútnej cenovej zmeny

a $u(0,025) = 1,96$ zamietame hypotézu o normalite výberu. Teda na počítanie VaR treba použiť neparametrickú metódu. Hodnotu v riziku určíme podľa vzorca (3.4.4) a (3.4.5). Výsledky sú zhrnuté v tabulkách (5.2), (5.3) a (5.4). Ako vidíme

1 – deň	95%	97%	99%
VaR^{abs}	22,2006	26,42441	32,96696
VaR^{rel}	22,98454	27,21654	33,75909

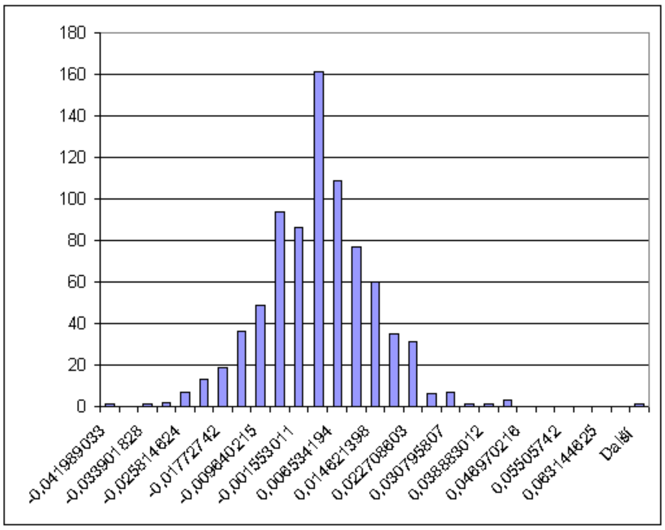
Tabulka 5.2: 1 – dňová VaR

10 – dní	95%	97%	99%
VaR^{abs}	47,59296	65,82655	92,34214
VaR^{rel}	55,58499	73,81857	100,3342

Tabulka 5.3: 10 – dňová VaR

hodnota v riziku rastie s hladinou spoľahlivosti ako aj s časovým horizontom pre ktorý VaR určujeme.

Podmienenú hodnotu v riziku určíme na základe (3.5.1). Hodnoty sú uvedené v tabulke (5.5). Ľahko vidieť, že podmienená hodnota v riziku rastie s hladinou spoľahlivosti ako aj s časovým horizontom pre ktorý CVaR určujeme. Tiež

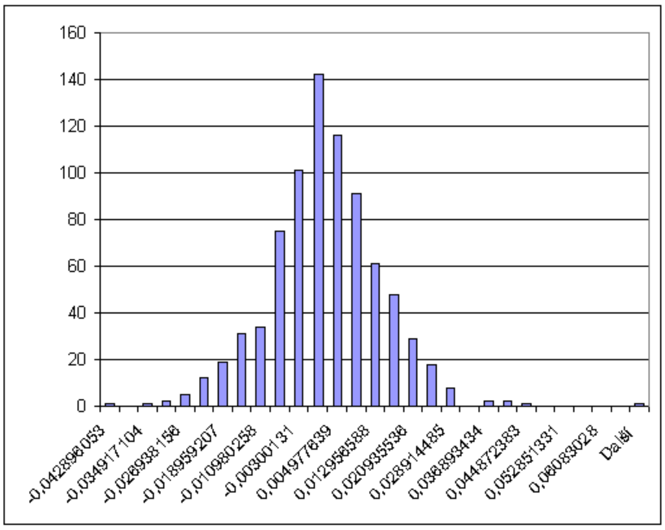


Obrázek 5.5: Histogram miery zisku

20 – dní	95%	97%	99%
VaR^{abs}	68,10751	89,74532	120,633
VaR^{rel}	84,06041	105,6982	136,5859

Tabulka 5.4: 20 – dňová VaR

vidíme, že podmienená hodnota v riziku je vždy väčšia ako príslušná hodnota v riziku.



Obrázek 5.6: Histogram logaritmickej miery zisku

čas.horizont	95%	97%	99%
1 – deň	30,06147	35,43247	42,39563
10 – dní	86,23019	108,1274	131,668443
20 – dní	112,71221	129,68679	145,08299

Tabulka 5.5: CVaR

Kapitola 6

Záver

V súčasnej dobe je téma miery rizika veľmi populárna. Svedčí o tom aj veľké množstvo literatúry, ktorá sa touto témou zaoberá. Skúmajú a porovnávajú sa miery z hľadiska jednoduchosti, časovej náročnosti na ich výpočet ako aj ich vlastností.

Začiatok tejto práce sa venoval finančnému riziku ako takému. Boli opísané rôzne typy finančného rizika a ich regulácia. V tretej kapitole sa práca venovala už jednotlivým mieram rizika. Bola popísaná durácia a jej podoby. V súvislosti s tým sa pojednávalo o konvexite. Bola vysvetlená stratégia imunizácie, ktorá s využitím durácie a konvexity znižuje riziko nesolventnosti. Ďalej práca pokračovala mierou zisku a volatilitou. Hoci je volatilita na počítanie jednoduchá, nespĺňa základnú vlastnosť monotónnosť. Lepšie vlastnosti má VaR. Hodnota v riziku je známou a v praxi často používanou mierou rizika. Popísali sme tri prístupy na výpočet VaR a to parametrickú metódu, metódu historickej simulácie a metódu Monte Carlo. Taktiež boli uvedené základné vlastnosti. Nevýhodou tejto miery rizika je, že nesplňuje subaditivitu. Subaditivitu však spĺňa CVaR. Naviac je konvexnou mierou rizika. Z toho dôvodu je CVaR považovaná za lepšiu mieru rizika ako VaR. Boli popísané základné vlastnosti CVaR ako aj vzťah hodnoty v rizku a podmienenej hodnoty v rizku. Na záver kapitoly bol opísaný stress testing. Štvrtá kapitola sa venovala úžitkovej funkcii a usporiadaniu rizika. Podrobnejšie sa práca venovala stochastickému a S–L usporiadaniu.

Numerická časť tejto práca sa venovala názornému výpočtu jednotlivých mier rizika na reálnych dátach. Na cenovom indexe SPCI za obdobie zhruba troch rokov sa počítala volatilita, hodnota v riziku pre rôzne hladiny spoľahlivosti ako aj pre rôzne časové horizonty. Na záver bola spočítaná podmienená hodnota v riziku pre rôzne hladiny spoľahlivosti a časové horizonty a porovnaná s hodnotou v riziku.

Literatura

[1] Anděl, J. (2003): Statistické metody. Matfyzpress, Praha.

[2] Cipra, T. (2002): Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví. Ekopress, Praha.

[3] Cipra, T. (2005): Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. Ekopress, Praha.

[4] Derivatives policy group (1995): Framework for Voluntary Oversight. www.riskinstitute.ch/137790.html.

[5] Fuchs, K.(2003): Hodnocení portfolia opcí. Diplomová práca, UK MFF, Praha.

[6] Inui, K., Masaaki, K. (2003): On the Significance of Expected Shortfall as a Coherent Risk Measure. Journal of Banking & Finance 29, 853–864.

[7] Jílek, J. (2002): Finanční rizika. Grada Publishing, Praha.

[8] Mayers, G. (2001): Coherent Measures of Risk, www.casact.org/pubs/forum/00sforum/mayers/Coherent Measures of Risk.pdf.

[9] Mandl, P. (2005): Teória rizika, prednáška UK MFF, Praha.

[10] Morgan, J.P., Reuters (1996): RiskMetrics^{TM}–Technical Document, 4th ed., Morgan Guaranty Trust Company, New York.

[11] Pflug, G.Ch. (2000): Some remarks on value at risk and conditional value at risk, in Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Application, Uryasev, S., ed., Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA .

[12] Řežábková, J. (2001): Durace jako míra rizika trhu obligací. Rigorózna práca, UK MFF, Praha.

[13] Sarkar, S., Gwangheon, H. (2004): Effective duration of callable corporate bonds: Theory and evidence, Journal of Banking & Finance 28, 499–521.

[14] www.standardandpoors.com.

[15] Uryasev, S. (2000): Conditional Value at Risk: Optimization Algorithms and Applications, Financial Engineering News 14.

[16] Uryasev, S.(2000): Conditional Value at Risk (CVaR): Algorithms and Applications, Risk Management and Financial Engineering Lab, University of Florida.

[17] Xie, A. Y., Liu, S., Wu, CH. (2002): Estimating Duration for Bonds with Default Risk. Syracuse University, Syracuse NY.