Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta,
Katedra logiky

Bakalářská práce

Tereza Liepoldová

Skolemův paradox v teorii množin: Zrození Löwenheim-Skolemovy věty a její důsledek v podobě Skolemova paradoxu

Skolem Paradox in Set Theory: Birth of Löwenheim-Skolem Theorem and its Consequence in the Form of Skolem Paradox

2012 Mgr. Radek Honzík Ph.D.

Děkuji vedoucímu práce Mgr. Radku Honzíkovi Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, za jeho trpělivost a cenné rady, které mi posloužili k úspěšnému dokončení. Zároveň děkuji všem přátelům, kteří mi poskytli cenné rady, a mé rodině, která mě podpořila.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla všechny použité prameny a literaturu.

V Praze 18. srpna 2012

Tereza Liepoldová

Abstrakt

Práce se snaží zmapovat historický vývoj Löwenheim-Skolemovy věty od Ernsta Schrödera po Thoralfa Skolema s užitím původní matematické notace. Popisuje důsledek v podobě Skolemova paradoxu a jeho vliv na teorii množin a s tím spojenou problematiku řádovosti logiky.

Abstract

This works aims to map the development of the Löwenheim-Skolems theorem from Ernst Schröder to Thoralf Skolem using original mathematical notation. It describes its consequence in the form of the Skolem paradox and its influence on set theory and associated issues concerning orders of logic.

Obsah

1 Úvod

Logické paradoxy v průběhu dějin vždy rozviklávaly pevné pilíře matematické vědy. V raných stádiích vývoje každé vědy dochází k sáhodlouhým debatám nad zdánlivě smysluplnými výroky a pouhá anomálie tak může sloužit jako zdroj téměř nepřekonatelné krize v té či oné odborné disciplíně. V pozdějším vývoji, kdy věda stojí již na pevných základech, má již legitimně vymezený problém bádání a ověřené metodologické postupy, může takovýto paradox znamenat, použijme-li slova amerického filosofa vědy Thomase S. Kuhna, vědeckou revoluci v dané disciplíně. Některé podobné rysy, které Kuhn popisuje ve své práci *Struktura vědeckých revolucí*, můžeme nalézt i v případě hlubšího pozorování vývoje paradoxu, dnes známeho jako Skolemův.[1]

V průběhu pročítání odborné literatury, která se dotýkala problému Skolemova paradoxu a tedy, ať již přímo či nepřímo, Löwenheim-Skolemovy věty (*LST - Löwenheim-Skolem theorem*), ze které paradox vychází, jsem se pomalu dozvídala o postupném vývoji dané věty a tedy i s ní spojeného paradoxu. Protože jsem však nikde nenašla souhrnou monografii, která by se týkala historického vývoje takto úzce vymezeného tématu, tedy historie vývoje LST, který je dnes stěžejní pro teorii struktur nebo teorii množin obecně, rozhodla jsem se postupný vývoj Löwenheim-Skolemovy věty postupně zmapovat a jednotlivé kroky vývoje popsat.

Historie Löwenheim-Skolemovy věty je velmi působivá. Její počátek lze datovat do první poloviny 19. století. Prapůvodní základy LST začínáme spatřovat v době, kdy někteří matematici přestali matematiku chápat jako nauku o číslech a počítání a začali ji vnímat jako nauku o jednoduchých strukturách. Na počátku tohoto stál George Boole. Z důvodu rozsahu práce jsem se ale nemohla více zaobírat studiemi Boolea a De Morgana, kteří jsou vlastně prvními matematiky, kteří v oblasti struktur měli "průkopnické" poznatky. Důležitou a v podstatě stěžejní úlohu v mé práci sehrál německý logik Ernst Schröder, bez jehož matematických poznatků by Löwenheim svou slavnou větu nejspíše nepublikoval. Schröderovy nejcennější práce vycházejí na sklonku 19. století, tedy více jak dvacet let před prvním uveřejněním LST. Jeho logické postupy a především notace, kterou ve svých pracích používá, jsou však pro současnou logiku natolik neobvyklé a dnes již téměř zapomenuté, že je jím věnována většina stránek této práce. Týká se to především Schröderova relativního kalkulu, který Löwenheim použil jako základ pro své matematické poznatky a samotný termín *Relativ Kalkül* je použit v názvu článku, kde byl LST (tehdy pouze LT - *Löwenheim theorem*) poprvé v roce 1915 publikován. Bez poznání základů Schöderova relativního kalkulu by bylo pochopení Löwenheimovy formulace věty a jejího důkazu velmi složité. Především z tohoto důvodu a z důvodu omezeného rozsahu práce nebudou samotné věty, a to jak Löwenheimova formulace i další Skolemovy reformulace dané věty, popsány do přílišných detailů, ale bude uvedeno jejich originální znění a popis notace (v případě Löwenheimově se pokusím částečně nastínit i důkaz), které věty užívají, pro jejich jasnější pochopení.

To, co provází celou historii Löwenheim-Skolemovy věty a co v podstatě

[1]KUHN, Thomas Samuel. *Struktura vědeckých revolucí.* Oikoymenh, Praha, 2008.

částečně provázelo i Schröderův *kalkul relativů*, je problematika prvořádového a víceřádového počtu. Na konci 19. a do konce 20. let 20. století nebyla jasně vymezena prvořádová logika tak, jak ji známe dnes. Schröder, Peirce, Frege ani Löwenheim neměli jednoznačně stanovené hranice prvořádové logiky.

V podstatě až Löwenheim díky publikaci svého článku v roce 1915 a uvedením své věty dal podnět k oddělenému zkoumání prvořádového a víceřádového logického počtu. V tomto ohledu, i když až o pár let později, na něj navázal Thoralf Skolem. Skolem se s Löwenheimůvým článkem seznámil velmi brzy po jeho vydání, ale problematika prvořádové a druhořádové logiky mu v té chvíli nepřišla důležitá, aby se jí musel více zabývat. Zlom přišel později roku 1922 na skandinávském kongresu matematiků a následnou publikací další verze LST v roce 1923, kde je věta "vložena" do systému teorie množin a problematika řádovosti logiky a teorie množin dostává jiné rozměry.

Každá z kapitol této práce by si zasloužila samostatné zpracování. Pokusím se v této práci alespoň částečně načrtnout výše nahlédnutou "historii" věty, jejích základů v oblasti Schröderova kalkulu relativů a problematiku spojenou s prvořádovým a druhořádovým počtem a souvislosti s teorií množin. Ve své práci jsem se snažila čerpat především z orginálních článků a monografií. U Ernsta Schrödera jsem použila jím vydané publikace týkající se algebry logiky. U Leopolda Löwenheima jsem využila především anglického překladu článku publikovaného v souboru článku od Jeana van Heijenoorta[2]. Všechny důležité články týkající se LST od Thoralfa Skolema jsou publikovány v originálním znění v knize *Selected Works in Logic*[3].

[2]VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879 - 1931.* Harward University Press, Cambridge, 1967.

[3]FENSTAD, Jens Erik (ed.). *Selected Works in Logic by Th. Skolem.* Universitetsforlaget, Oslo, 1970.

2 Od Peirce k Löwenheimovi

Löwenheim-Skolemova věta se dnes, pomineme-li na čas filozofické aspekty a důsledky této věty, zkoumá především v teroii modelů. Základ a obecně podnět pro založení matematické disciplíny teorie modelů je především zásluhou německého matematika Leopolda Löwenheima, který v roce 1915 ve svém článku "Über Möglichleiten in Relativkalkül" popsal a dokázal větu, dnes známou jako Löwenheim-Skolemova věta, a zavdal tak podnět pro zrod matematických zkoumání v této oblasti. Tento pro teorii modelů stěžejní článek a v něm obsažený důkaz ale upadl na téměř pět let v zapomnění, než ho oživil a reformuloval Thoralf Skolem. Většina matematiků, kteří navazovali na tradici Peirce a Schrödera Löwenheimův článek znala, avšak nepřikládala mu patřičnou důležitost. Jednou z příčin opomenutí této zásadní věty byla relativně složitá notace, která se výrazněji odchylovala od té, v této době již více přijímané, zavedené Fregem, Russelem a Peanem na přelomu století. Nicméně není pravdou, že by si matematická obec neuvědomovala důležitost a význam práce Schrödera a Löwenheima. Pozornost matematiků, i těch, kteří navazovali na Peirce-Schröderovu "školu", se v té době zaměřovala jiným směrem. I samotný Skolem, jenž četl Löwenheimův článek krátce po jeho vydání, přiznal, že některým aspektům článku dříve nepřikládal patřičnou důležitost a raději se zabýval jinými problémy.
Problematiku jednotlivých formulací a jejich všemožných úskalí popíšeme později, bylo by ale nepatřičné opomenout zásluhy amerického filosofa a matematika Charlese Sanderse Peirce a německého logika Ernsta Schrödera, z jejichž prací Löwenheim vycházel a které byly pro jeho bádání stěžejní. I přes význam Peircových a Schröderových prací musíme však na tomto místě podotknout, že právě složitější algebraická notace, kterou ve svých pracích Löwenheim používá a která částečně zapříčinila úpadek již zmíněné věty, nebyla převzata od nikoho jiného než již zmíněného Ernsta Schrödera.

2.1 Algebraická renesance

V době, kdy matematika a logika prožívaly své období renesance, tedy na konci 19. a počátku 20. století, vycházejí i stěžejní články německého matematika a logika Ernsta Schrödera.[4] Schröderovy nové matematické poznatky vedly k silné polemice s americkým matematikem Charlesem Sandersem Peircem o možnostech a hranicích algebry logiky.[5] Je důležité si uvědomit na jaké matematické poznatky mohli matematici v té které době navazovat a v čem jsou tedy jejich přínosy pro matematiku, respektive logiku, výjimečné. Jaké notace se užívaly pro teorii množin? Existovala hierarchizace a axiomatika výrokové nebo predikátové logiky? A na jakých základech stavěla vzkvétající algebra?[6]

[4] Německý matematik **Ernst Schröder** (25. listopadu 1841 - 16. června 1902) proslul v první řadě svými pracemi v oblasti algebry logiky. Navazuje na práce George Boolea (viz poznámka 7), Augusta De Morgana a především Charlese Sanderse Peirce (viz poznámka 5).

[5] **Charles Sanders Peirce** (10. září 1839 - 19. dubna 1914), byl americký matematik, logik a významný filosof. Známý je hlavně jako zakladatel moderní sémiotiky. V logice a matematice však proslul především svými pracemi v oblasti logiky kvantifikátorů, algebry logiky a vytvořením systému Booleových funkcí.

[6] V době, ve které se nyní pohybujeme, vycházejí například Fregovy Begrieffsschriften (rok 1879), Peanovy základy aritmetiky vycházejí v roce 1889, Cantorova polemika s Dedekindem probíhá v 90. letech 19. století, a například částečná axiomatizace Zermelova (Fraenkel dodává "svůj" axiom až později), kterou dnes užíváme, je publikována v roce 1908. Výše zmiňovaná debata mezi oběma matemitiky probíhá v 80. a 90. letech 19. století.

Ernst Schröder se zabýval především algebrou a logikou. V době jeho studií vycházely v Británii klíčové práce George Boolea a Augusta De Morgana, kteří v oblastech matematiky pro Schrödera tak zajímavých zavedli ustálenou notaci a formulovali formální zákony.[7]

Jejich dílem, a samozřejmě především tvorbou Peircovou, byl Schröder inspirován, z těchto děl vycházel a jejich poznatky se snažil rozšířit a formalizovat. Jeho snaha vyústila v "přednáškový cyklus", který postupně vycházel na přelomu 19. a 20. století pod názvem *Vorlesungen über die Algebra der Logik. Vorlesungen* bezpochyby ovlivnily práci i notaci Löwenheima a pro pochopení jeho článku jsou pro nás velmi důležité už jen z toho důvodu, že v daných přednáškách Schröder předkládá koncept řešení relačních rovnic (relational equation), který lze považovat za zapomenutého původce takzvané Skolemizece (Skolemovských funkcí), díky němuž mohla být první verze teorému sformulována a dokázána.[8]

2.2 Schröderova notace

Jak již bylo řečeno Schröder vycházel z Booleových základů algebry logiky (tedy z tří základních Booleových operací popsaných níže a užití Booleových spojek), ze kterých jako první utvořil teorii svazů. Svazy byly dle Dedekindova[9] vzoru nazývány duálními grupami *"Dualgruppe"*.[10]
Současná algebraická notace se od té schröderovské v mnohém liší. Pokusím se zde nastínit notační rozdíly, které se v daných algebrách vyskytují.

V dnešní době bychom definovali algebru pro jazyk L obecně takto:

Definice 2.1. *Algebrou pro jazyk L míníme strukturu* $M = \langle M, F_0, F_1 \ldots \rangle$, *kde* M *je nosná množina struktury (domain) a* $F_0 = (f_0)^M, F_1 = (f_1)^M, \ldots, F_i = (f_i)^M : M^{n(i)} \longrightarrow M$ *(kde* $n(i)$ *je četnost* f_i*), jsou funkce, které realizují funkční symboly* $f_0, f_1, \ldots$.

Ve výše uvedené definici připouštíme i možnost, kde se $n(i) = 0$, v takovém případě je pak F_i konstatou.

Schröder zachazí s typy algeber, které v současnosti nazýváme Booleovy algebry. Každá Booleova algebra je svazem (*lattice*). Každý svazový jazyk L obsahuje dva základní binární funkční symboly $L = \{\vee, \wedge\}$, kde $\wedge$ je *průsek* (meet) a $\vee$ je *spojení* (join). Každý svaz splňuje následující (algebraickou) definici:

Definice 2.2. *Řekneme, že* $M = \langle M, \wedge, \vee, \leq \rangle$ *je svaz, splňuje-li* M *následující axiomy pro všechna* $x, y, z \in M$*:*

A1 Asociativita: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

[7]**George Boole** (2. listopad 1815 - 8. prosinec 1864) byl britský filosof a matematik, proslul především svými objevy v oblasti moderní aritmetiky, kterou dnes známe pod termínem Booleovy algebry. **August De Morgan** (27. červen 1806 - 6. listopad 1871) byl britský matematik, známý je především díky tzv. De Morganovým pravidlům, které představovaly formální verzi zákonů v logice. Zápis těchto zákonů byl ovlivněn Booleovou algebrou logiky.

[8]Srovnej BRADY, Geraldine. *From Peirce to Skolem.* Elsevier, Chicago, 2000. s. 143 - 295.

[9]Německý matematik **Richard Dedekind** (6. 10. 1831 - 12. 2. 1916) byl známý především díky svým objevům v oblasti teorie čísel a algebry, zkonstruoval množinu reálných čísel metodou, jež je dnes známá jako Dedekindovi řezy.

[10]Výraz "lattice" (svaz) ale Schröder neužívá. Termín svaz zavedl až americký matematik Garrett Birkhoff. Srovnej BRADY, Geraldine. *From Peirce to Skolem.* Elsevier, Chicago, 2000. s. 145.

A2 Komutativita: $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$.

A3 Absorbce: $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (y \wedge x) = x$.

A4 Idempotence: $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$.

A5* Kanonické uspořádání na $M : x \leq y$ tehdy a jen tehdy, pokud $x \wedge y = 0$, tehdy a jen tehdy, pokud $x \vee y = 1$.

Relace $\leq$ se nazývá částečné uspořádání respektive neostré uspořádání (*non-strict ordering*). Relace částečného uspořádání musí být *reflexivní*, *tranzitivní* a *slabě antisymetrická*.

Níže uvedená definice vymezuje pojem Booleovy algebry. Pro přesnost nutno dodat, že jsem do níže uvedené definice zanesla i axiom B6, který nepatří mezi základní booleovské axiomy. Booleova algebra, jejíž struktura by byla jednoprvková a platilo by tedy $1 = 0$, se nazývá *triviální Booleova algebra*, ale pro naše potřeby není podstatná.

Definice 2.3. *Booleova algebra je struktura v jazyce* $L = \{\wedge, \vee, -, 1, 0\}$*, která splňuje následující axiomy:*

B1 Asociativita: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

B2 Komutativita: $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$.

B3 Absorbce: $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (y \wedge x) = x$.

B4 Distributivita: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

B5 Komplement: $x \vee (-x) = 1$, $x \wedge (-x) = 0$.

B6 $0 \neq 1$

Na tomto místě ještě definujme *kanonické uspořádání* (canonical ordering) na Booleových algebrách:

Definice 2.4. Kanonickým uspořádáním na Booleově algebře nazveme takové částečné uspořádání ($\leq$), pro které platí: $x \leq y$ právě tehdy, když $x \wedge y = x$ právě tehdy, když $x \vee y = y$.

Pro vysvětlení Schröderovské notace uvedu ještě následující základní pojmy z teorie algebraických svazů dle soudobé algebraické notace. Mějme strukturu $M = \langle M, \leq \rangle$, která je částečně uspořádaná, a množinu $X \subseteq M$, pak následující platí:

1. x je nejmenším prvkem X tehdy a jen tehdy, jestliže $x \in X$ a pro každé $y \in X$, $x \leq y$.

2. x je minimálním prvkem X tehdy a jen tehdy, jestliže $x \in X$ a neexistuje $y \in X$ takové, že $y < x$.

3. x je dolní závora X tehdy a jen tehdy, jestliže pro každé $y \in X$, $x \leq y$.

4. x je infimum X tehdy a jen tehdy, jestliže x je největší dolní závora.

5. Analogicky definujeme největší prvek, maximální prvek, horní závoru a supremum (nejmenší horní závoru).

Nyní přejděme už k samotné Schröderově notaci. Předně budeme vycházet z prvního svazku *Vorlesungen über die Algebra der Logik.* Základním pojmem pro Schröderovskou notaci je *subsumpce* (*subsumtion, Einordnung*). V následujícím textu budeme subsumpci značit symbolem $\sqsubseteq$.[11] Mějme tvrzení tvaru:

$$a \sqsubseteq b,$$

pak levá strana výrazu a se nazývá *terminus minor* (*Unterbegriff, odvozený pojem - podpojem*), pravá strana výrazu naopak *terminus major* (*Oberbegriff, nadřazený pojem*). Schöderovo pojetí subsumpce bychom v dnešní době mohli přirovnat k neostrému uspořádání, jehož Schröderovské pojetí vysvětlíme níže.[12]

Schröder pracuje v takzvaném *identickém kalkulu s oblastmi variety* (*Identischer Kalkul mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit*). Varietou je myšlena varieta prvků (*Mannigfaltigkeit von Elementen*) a Schröder ji přirovnává k "varietě bodů na ploše školní tabule".[13] Příkladem takové variety může být mimo jiné varieta bodů v prostoru nebo varieta všech myšlených rovin v prostoru apod. Libovolné uskupení prvků variety nazveme *oblast/obor* (*Gebiet*). Oblasti (*Gebiete*) budeme značit malými latinskými písmeny $a, b, c, \ldots$. Každou konkretní oblast, ketrou si můžeme představit například pod symbolem a, nazveme hodnotu (Wert, valor, value). První důležitý vztah, který může být mezi dvěma oblastmi a který zaneseme do identického kalkulu, bude výše zmíněná subsumpce:

$$a \sqsubseteq b.$$

Ta nám vyjadřuje, že oblast a se řadí (do) oblasti b, tedy že a je zahrnuto v b. "[subsumption]..., die uns ausdrücken wird, *dass das Gebiet a sich dem Gebiet b einordne, dass a in b enthalten sei...*".[14]
Schröder v případě subsumpce, jak poznamenává G. H. Moore, ale plete dohromady vztah příslušnosti k množině a vztah podmnožiny. Oba tyto vztahy ve svých přednáškách označuje stejným symbolem (v našem případě $\sqsubseteq$).

Ve druhé přednášce prvního svazku *Vorlesungen* se Schröder ve §4 zabývá dvěma důležitými principy a to principem, který je dnes analogický principu reflexivity (*Prinzip I*), a princem tranzitivity (*Prinzip II*).

Princip I:

$$a \sqsubseteq a,$$

nám slovy říká "*a je a*". Tuto obecně platnou furmuly (*Formel*) nazývá Schröder *větou identity* (*Satz der Identität, principium identitatis*). Tato věta nám tvrdí, že a je obsaženo samo v sobě, je částí a; a je podřazené nebo identické a. *"... a ist in sich selbs enthalten, ist ein Teil von a; a ist untergeordnet oder identisch gleich a."*[15]

---

[11] Schröder užívá pro tento výraz jiný symbol, který sám zavedl v roce 1873. Pro matematické rovnice a výrazy bylo pro mě ale snažší užívat současných matematických symbolů.

[12] Více o pojmu subsumpce a jeho vztahu k matematické relaci $\leq$ viz SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 1.* Teubner, Leipzig, 1891, str. 125 - 141.

[13] Obecně je pod pojmem *Mannigfaltigkeit* míněn matematický pojem z topologie.

[14] Srovnej SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 1.* Teubner, Leipzig, 1891, s. 159.

[15] Srovnej SCHRÖDER, Ernst. *Die Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 1*, Leipzig: B.G. Teubner, 1891, s. 168.

Princip II:

Je-li $a \sqsubseteq b$ a současně $b \sqsubseteq c$, pak také platí $a \sqsubseteq c$.

Schröderovými slovy nám toto schéma z dvou známých pravd (*Wahrheiten*) dává pravdu novou. Tento proces nazývá dedukcí (*Schlussfolgerung*) nebo deduktivním uzavřením (*deduktives Schlissen, inference, illatio*). Předpoklady (*Voraussetzungen*), ze kterých vycházíme, premisy (*"Prämissen"*) jsou zde obě subsumpce $a \sqsubseteq b$ a $b \sqsubseteq c$; závěr (*"Schluss", Konlkusion*) je $a \sqsubseteq c$.[16]
Nyní je třeba definovat neostré částečné uspořádání. Schröder zavádí rovnost (*Gleichheitszeichen*) pro algebru logiky, pro níž je nutným předpokladem již dříve vysvětlený pojem subsumpce. Identická rovnost (identita) (*Identität*) je definována následovně:

Definice 2.5. $a = b$ platí tehdy a jen tehdy, platí-li $a \sqsubseteq b$ a zároveň $b \sqsubseteq a$.

Tvrzení (dodatek k definici 2.5.): Každá rovnost může být také čtena opačně ($b = a$). Tedy obě strany rovnosti mohou být navzájem zaměněné, je to symetrický vztah.
Představíme-li si oblasti a a b, pak musí být jedna obsažena v druhé a naopak, obě oblasti spolu koincidují. Identicky rovné oblasti označujeme tedy jako *"jednaké" (einerlei)*.

Výše nastínění pojem subsumpce spolu s principem I a II bychom v moderní terminologii nazvali částečným uspořádáním.

Pojem identické rovnosti z výše uvedené definice může být rozšířen ze dvou na libovolnou množinu oblastí. Oblasti množin(y) můžeme nazvat navzájem rovnými (*einander gleich*), pokud každé dvě navzájem stejné jsou si rovné.
Pro úplnost zde uvedu hlavní teorémy, které se výše zmíněné rovnosti týkají.[17]

Věta 2.1. *Nechť $a = a$. Každá oblast je sama se sebou idetnicky rovná.*

Věta 2.2. *Platí-li $a \sqsubseteq b$ a zároveň $b = c$, pak platí $a \sqsubseteq c$.*

Věta 2.3. *Je-li $a = b$ a zároveň $b \sqsubseteq c$, pak platí $a \sqsubseteq c$.*

Věta 2.4. *Jsou-li dvě oblasti identicky rovné s libovolnou třetí, pak jsou také identické mezi sebou. Tedy platí, že je-li $a = b$ a zároveň $b = c$, pak také platí $a = c$.*

Definice identické rovnosti a uvedené věty s ní spojené, které uvádí Schröder, jsou v moderní terminologii booleovské algebry v zásadě axiomy identity vzhledem k dané binární relaci.

Schröder dále definuje dvě speciální oblasti vztahující se k algebře logiky. Tyto oblasti budou následně značeny čísly 1 a 0. Stejně jako předchozí pojmy budou i tyto definovány pomocí řazení/uspořádání (*Einordnung*).

[16] Srovnej SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 1.* Teubner, Leipzig, 1891, s. 170 - 172.
[17] Důkazy i původní znění uváděných teorémů jsou k nalezení ve SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 1.* Teubner, Leipzig, 1891, s. 186 - 187.

Definice 2.6.

($2.6._\times$) Definujme identickou nulu (*der identische Null*) jako obecně platnou, tedy pro každou oblast a naši variety uznatelnou, subsumpci $0 \sqsubseteq a$.

($2.6._+$) Definujme identickou jedničku (*identischen Eins*) jako obecně platnou, tedy pro každou oblast a naši variety uznatelnou, subsumpci $a \sqsubseteq 1$.

0 tedy nazýváme oblast, která je ke každé oblasti a ve vztahu uspořádání a která je v každé oblasti variety obsažená. Jedná se tedy o nejmenší prvek v dané relaci uspořádání.
1 naopak nazýváme oblast, ke které je každá oblast a ve vztahu uspořádání a ve které je obsažena každá oblast variety. Jedná se tedy o největší prvek v relaci uspořádání.
Zjednodušeně lze říci, že 0 představuje prázdnou (*leeres*) oblast, která neobsahuje žádný bod variety. Oproti tomu 1 představuje celou varietu. Očividně také platí tvrzení:

$$0 \sqsubseteq 1.$$

Věta 2.5.

($2.5._\times$) *Platí-li $a \sqsubseteq 0$, pak platí $a = 0$. Zařazení (Einordnug) oblasti pod (unter) 0 znamená rovnost s 0, což je podmíněno "zmizením" (Verschwinden) příslušné oblasti.*

($2.5._+$) *Platí-li $1 \sqsubseteq a$, pak platí $1 = a$. Fakultativní nadřazenost (Fakultative Überordnung) oblasti nad (über) 1 je rovnost této oblasti s 1.*

Ve třetí přednášce prvního svazku *Vorlesungen* Schröder představuje základní operace, skrz které, jak je psáno, z (nejprve) dvou oblastí a, b může být odvozena třetí oblast, ze dvou tříd (*Klassen*) třída třetí. Tyto dvě nejdůležitější operce označuje jako *identické násobení* (*identische Multiplikation*) a *identické sčítání* (*identische Addition*). Pro zjednodušení těchto pojmů přejímá Schröder notaci pro jmenované operace z aritmetiky. Ve svých úvahách nad zmíněnými operacemi vychází především z prací Charlese Sanderse Peirce, na jehož notaci také částečně navazuje.
Suma a produkt jsou opět definovány skrze užití subsumpce. Oba výrazy nejsou na sobě nezávislé, nýbrž jeden lze vyjádřit skrze druhý.

Definice 2.7.

($2.7._\times$) Je-li pro dané oblasti a, b a c pravdivé to, že současně platí $c \sqsubseteq a$ a $c \sqsubseteq b$, pak musí, krátce řečeno, platit $c \sqsubseteq ab$.

($2.7._+$) Je-li pro dané oblasti a, b a c pravdivé to, že současně platí $a \sqsubseteq c$ a $b \sqsubseteq c$, pak musí, krátce řečeno, platit $a + b \sqsubseteq c$.

Těmito tvrzeními Schröder definuje identický produkt jako predikát a identickou sumu jako subjekt.
Symboly ab respektive $a + b$, které jsme nyní zavedli, budeme také nazývat "oblastmi" *(Gebiete)*.
Se zřetelem na výše uvedené definice má také platit opačné tvrzení, které je subsumpcí vyjádřeno následovně:

- Jestliže $c \sqsubseteq ab$, pak z daného vyplývá $c \sqsubseteq a$ a $c \sqsubseteq b$.
- Jestliže $a + b \sqsubseteq c$, pak z daného vyplývá $a \sqsubseteq c$ a rovněž $b \sqsubseteq c$.

Věta 2.6.

(2.6.$_\times$) *Subsumpce* $ab \sqsubseteq a$ *a* $ab \sqsubseteq b$ *platí pro všechny zamýšlené hodnoty* a *a* b. *Platí jako obecná formule (allgemeine Formel).*

(2.6.$_+$) *Subsumpce* $a \sqsubseteq a + b$ *a* $b \sqsubseteq a + b$ *platí pro všechny zamýšlené hodnoty* a *a* b. *Platí jako obecná formule.*

Největší dolní zavora a a b, *infimum*, je součin ab a daný výraz Schröder nazývá *identický součin* (identical product). Nejmenší horní závora a a b, *supremum*, je součet $a + b$ a daný výraz pojmenovává *identický součet* (identical sum). Tuto definici připisuje Schröder Peircovi.[18]. Ve druhém svazku *Vorlesungen*, pak Schröder rozvádí pojem součinu, který představuje největší dolní závoru a je značen Π, a pojem součtu, který naopak představuje nejmenší horní závoru a značíme ho Σ.
Komplement prvku a je značen $\bar{a}$. Oba pojmy rozvádí v kontextu Booleovy algebry pravdivostních funkcí.

Schröder tak ve svém prvním svazku přednášek uvedl kompletní axiomatickou definici Booleovy algebry. Jeho axiomatika je analogická s moderní axiomatikou Booleových algeber a splňuje všechny potřebné axiomy.

2.3 Schrödrův relativní kalkul

Schröder propracovává koncepci relativního kalkulu ve třetím svazku již zmiňovaných *Vorlesungen über die Algebra der Logik.* V mnoha kapitolách se opět odvolává a navazuje na práce Peirce, z jehož pojetí binárních *relativů* vychází. Ukažme si nyní základní notaci, definice a věty týkající se relativního kalkulu, které nám následně pomohou lépe pochopit Löwenheimův článek o relativním kalkulu a důkaz jeho známé věty. Důležitá pro nás bude především jedenáctá přednáška *Vorlesungen*, ve které nám Schröder ukazuje pojetí své *"eliminační teorie"*, která je blízká pojetí Skolemovských funkcí (tzv. Skolemizaci) a kterou také Löwenheim použil při důkazu své věty.

Celá Schröderova teorie je vystavěna na algebře *binárních "relativů"*, které můžeme chápat jako vztahy mezi individui resp. funkcemi apod. (V podstatě se jedná o vztahy velmi podobné relacím v dnešní predikátové logice). Schröder tento termín převzal od Peirce, v jehož spisech bychom se setkali s termínem *"dual relatives"*.
V identickém (oborém nebo třídním) kalkulu máme tři druhy početních operací - *"početních úkonů"*, *(Späzies)*, které nám jsou již známé. Jedná se o *identické násobení, identické sčítání* a *negace*. Dodejme ještě, že první dvě jmenované operace nazývá Schröder *"navázanými" (knüpfende)*, , které ke své "realizaci" předpokládají minimálně dva dané operandy (termy). Naproti tomu negaci nazývá Schröder operací *"nenavázanými" (nicht-knüpfende)*, neboť ke svému zavedení potřebuje pouze jeden term. Tyto výše uvedené spojité relace jsou v tomto případě asociativní i komutativní.
Schröder dále uvádí, že se stejnými *Spezies* se setkáme v logice relativů, kde tvoří *první stupeň* základních operací. K těmto operacím ale v tomto případě přináleží ještě jako *druhý stupeň* další tři *Spezies* a to: *tři základní "relativní" operace*

[18]Viz BRADY, Geraldine. *From Peirce to Skolem.* Elsevier, Chicago, 2000, s. 145

(die drei "relativen" Elementaroperationen) - *relativní násobení* (nebo kompozice), *relativní sčítaní* a *konverze.* První dvě jmenované *spojité* operace splňují asociativitu, ale nejsou obecně komutativní. Poslední jmenovaná *ne-spojitá* operace ke svému zavedení potřebuje pouze jeden operand (term). Jedná se tedy o operace, které v dnešní době nazýváme operacemi binárními respektive unárními.
Algebra logiky lze v podstatě, jak uvádí Schröder, vystavět na rozšířeném základě identického kalkulu "relativní" logiky a to dvěma způsoby.[19] Algebru logiky lze tedy vystavět buď na nám již známých pojmech subsumpce a postupně dospět k definici individua, anebo ji "znovu založit" na nové tabula rasa.

2.3.1 Universa diskurzu různých uspořádání a jejich individua

Schröder ve své první přednášce třetího svazku *Vorlesungen über die Algebra der Logik* představuje své pojetí universa diskurzu, Schröderem označovaných jako *Denkbereich.*[20] Jako dané *gegeben*, nějak koncepčně určené, máme "elementy" *(Elemente)* nebo individua značené

$$A, B, C, D, E \ldots$$

nějaké "obvyklé" (*"gewönlichen"*) variety.[21] Tyto jednotlivé prvky se musí navzájem odlišovat a zároveň musí být různé od 0 (*"durchweg von einander und vom Nichts verschieden"*). Individua musí být navzájem "konsistentní" (*verträglich*) a musí být vzájemně disjunktní (*einander gegenseitig ausschlissen*), takže žádný prvek nesmí být interpretován jako třída (*Klasse*), která by v sobě obsahovala jiný z těchto prvků.
Komplex těchto myšlených prvků si představíme jako "identickou sumu" (logické agregáty) a nazveme ho primárním (*ursprünglichen*) nebo universem diskurzu prvního řádu (*Denkbereich der ersten Ordnung*). Dané universum diskurzu značíme $\mathbf{1^1}$, čteme *jedna na prvou*, a platí tedy následující rovnice:

$$1^1 = A + B + C + D + E \ldots$$

Univerzum diskurzu $\mathbf{1^1}$ musí obsahovat více než jeden prvek. Tento předpoklad je nutně platný takřka pro všechna tvrzení Schröderovy teorie. Případ, kdy univerzum obsahuje pouze jeden prvek, Schröder nazývá zvláštním či výjimečným (*Ausnahmefall*).
Množství prvků, které univerzum obsahuje, může být konečné (nebo omezené) (*endliche, begrenzte*). V takovém případě univerzum sestává z libovolně zvoleného (*zu wählenden*) "počtu" (*Anzahl*) prvků. Systém prvků může být ale nekonečný (nebo neomezený) (*unendliches, unbegrenztes*), kde o počtu prvků nemůžeme mluvit. V případě nekonečného univerza, pak můžeme mluvit ještě o "diskrétních" (*diskrete*) prvcích, které slovy Schrödera tvoří "jednoduše nekonečný" systém (*einfach unendliches System*). A nebo nejsou diskrétní, což

[19] Srovnej SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 3.* Teubner, Leipzig, 1895, s. 4

[20] Toto označení pro doménu individuí přejímá i Leopold Löwenheim. Srovnej VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879 - 1931.* Harward University Press, Cambridge, 1967, s. 228.

[21] Podrobnější popis dané problematiky lze nálezt v SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 1,* s. 342.

znamená, že smějí být myšleny "konkrétně", tedy například jako prvky "vyplňující" kontinuum, jako body linie, tabule, tělesa obzvláště pak přímky, roviny, nebo prostoru. Pojem konečnosti a různých "možných druhů" nekonečnosti nějakého systému prvků Schröder pak dále rozvádí a dané pojmy přesně konstruuje a definuje.
Schröder dále zavádí vedle již nám známých velkých písmen pro značení určitých prvků (*bestimmte Elemnte*) novou kategorii znaků pro obecné (neurčité) prvky (*allgemeine Elemente*). Zavedení nové kategorie symbolů souvisí se zavedením prvního a nejjednoduššího aktu - nového vztahu (*Beziehung*) mezi dvěma prvky. Prvky, mezi kterými má vzniknout takový "vztah" (*Verhältniss*) mohou být odlišné nebo totožné - jednaké (*einerlei*). Zavedeme novou kategorii znaků, která sestává z následující řady písmen:

$$i, j, h, k, l, m, n, p, q.$$

Tato řada bude nějakým způsobem (*irgend eines*) představovat prvky $A, B, C, \ldots$ našeho univerza diskurzu 1^1. V podstatě bychom mohli říci, že prvky Schröderem označovaných velkými latinskými písmeny $A, B, C, D, \ldots$ představují neměnné tedy *určité* prvky - *konstanty*, a prvky $i, j, h, k, l, m, n, p, q$ pro nás představují obecné neurčité prvky - *proměnné*. Výše uvedené obecné prvky budeme dále moci užít také jako "indicie" (*Indiezes*), "pořadové indexy" (*laufende Zeiger*), *"sumovou"* a *"produktní"* proměnnou (*"Summations-" und "Produktationsvariable"*).
Nyní můžeme s jejich pomocí konsistentně sestavit rovnici, která nám představuje univerzum diskurzu 1^1:

$$1^1 = \sum_i i$$

kde je třeba ke korektnímu výkladu nutné "ohodnotit" pravou stranu rovnice, tedy sumu tak, že *sumová proměnná* i jde *(zu durchlaufen)* přes všechna individua univerza diskurzu 1^1.
Každá (identická) *suma prvků* (*Summe von Elementen*) takovéhoto universa diskurzu 1^1 bude později označena jako "absolutní term" (*absoluter Term*), jako *systém (oblast)* (*System, Gebiet*), nebo také jako *třída* (*Klasse, class-term*).

Nyní Schröder zavádí pojem nám známý jako uspořádaná dvojice, který popisuje následovně:

"Z našeho univerza diskurzu 1^1 vyjmeme nějaké dva prvky i a j v určité posloupnosti a v této posloupnosti - nezáleží z jaké příčiny, je jedno z jakého hlediska - " drží pohromadě" (zusammenhalten) ve dvojici. Výsledkem je spojení prostřednictvím dvojtečky, které znázorníme ve tvaru:

$$i : j$$

- čteno i ku j."[22]
Schröder výraz $i : j$ nazývá *"dvojicí prvků"* (*Elementepaar*), i pak zve *antecedentem* (*der Antecedent oder das Vorderglied*) nebo *relátem* (*das Relat*), j pak *konsekventem* (*der Konsekvent oder das Hinterglied*) nebo *korelátem* (*das Korrelat*).

[22] Viz SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 3,* s. 8-9.

Protože se jedná o uspořádanou dvojici, je *dvojice prvků* $i : j$ odlišná od dvojice dvojice $j : i$. Platí také:

$$(i = j) = (i : j = j : i),\ (i \neq j) = (i : j \neq j : i),$$

pro libovolné i a j.

V současné době bychom spíše napsali:

$$(i = j) \leftrightarrow (i : j = j : i),\ (i \neq j) \leftrightarrow (i : j \neq j : i),$$

ale Schröder používá i pro výraz ekvivalence znaménko rovnosti =.

Dvojice prvků $j : i$ se nazývá *konverzí* (*opakem*) (*das Konverse*) dvojice $i : j$. Pro každou dvojici také platí vztah:

$$i : j \neq 0,$$

což znamená, že se každá dvojice musí lišit od 0 (*von dem Nichts unterschieden*). Schröder rozlišuje dvě kategorie *dvojic prvků*:

1. Případ, kdy $i = j$, tedy dvojice prvků tvaru $i : i$, a takovýto individuální binární relativ nazývá *sebevztažný relativ* (*Selbstrelativ*).
2. Případ, kdy *dvojice prvků* má tvar $i \neq j$, tedy relativ typu $i : j$, a takovýto individuální binární relativ pak Schröder nazývá *Aliorelativem* (*Aliorelativ*).

Dodejme ještě, že každý *sebevztažný relativ* je sám svým opakem (*konverse*). Pojmy *Selbstrelativ* a *Alioreltiv* přejímá Schröder od Peirce. Výše jmenované pojmy vznikly jednoduchým překladem termínů *self-relative* a *aliorelative.*

Všechny myslitelné dvojice prvků, kde nám potřebné prvky poskytne naše universum diskurzu 1^1, lze uspořádat do následující tabulky:

$$\begin{array}{c} A : A, A : B, A : C, A : D, \ldots \\ B : A, B : B, B : C, B : D, \ldots \\ C : A, C : B, C : C, C : D, \ldots \\ \ldots \end{array}$$

Poznamenejme, že tyto "specifikované" dvojice prvků můžeme označit jako *individuální binární relativy* (*individuelle binären Relative*), kde kterýkoliv z nich může být obecně reprezentován prostřednictvím výrazu $i : j$.
Tento celek *individuálních binárních relativů* (nebo jednodušeji dvojic prvků) tvoří nové samostatné univerzum diskurzu, které nazýváme *univerzem diskurzu druhého řádu* (*Denkbereich der zweiten Ordnung*) a značíme $\mathbf{1^2}$ (čteme na druhou).
Z výše psaného nám tedy vyplývá nová "tabulka":

$$\begin{array}{c} 1^2 = (A : A) + (A : B) + (A : C) + (A : D) \ldots \\ +(B : A) + (B : B) + (B : C) + (B : D) \ldots \\ +(C : A) + (C : B) + (C : C) + (C : D) \ldots \\ \ldots \end{array}$$

Výše uvedou tabulku můžeme také zkrátit s pomocí zápisu sumy a to následujícím způsobem:

$$1^2 = \sum_j \sum_i (i : j) = \sum_i \sum_j (i : j) = \sum_{ij} (i : j)$$

Univerzum diskurzu $\mathbf{1^2}$ je tvořeno veškerými možnými *variacemi druhé třídy s opakováním* (*Variationen zur zweiten Klasse mit wiederholung*) prvků univerza 1^1, tedy druhá třída uvedených variací. Toto univerzum diskurzu zahrnuje prvky univerza 1^1 spojené do dvojic ve všech možných kombinacích a permutacích (*Verbindungen und Anordnugen/Permutationen*).
I toto univerzum diskurzu, stejně jako univerzum 1^1 představuje *varietu* (*Mannigfaltigkeit*), na kterou lze aplikovat identický kalkul.
Schröder pak pro zjednodušení "odstraňuje" exponent ^{2} a slučuje výše uvedou tabulku a rovnicí následovně:

$$\begin{aligned} 1 = \textstyle\sum_{ij} i : j = A : A + A : B + A : C + A : D + \ldots \\ +B : A + B : B + B : C + B : D + \ldots \\ +C : A + C : B + C : C + C : D + \ldots \\ \ldots \end{aligned}$$

Výše jsme nastínili Schröderovo pojetí *individuálních* binárních relativů. Samotný *binární relativ* ale je, slovy Schrödera: "identická suma (soubor) libovolných individuálních binárních relativů".

"... eine identische Summe (ein Inbegriff) von irgendwelchen individuellen binären Relativen."

Jednoduše tedy z našeho univerza diskuru 1^2 vybereme libovolné dvojice prvků a ty, buď hromadně do *systému dvojic prvků* nebo obecněji do *třídy dvojic prvků*, sjednotíme pomocí identického sčítání. Výsledkem takového procesu je *binární relativ.*

Schröderovy binární relativy jsou tedy v dnešní terminologii binární relace na fixované doméně. Relativem bychom dnes neoznačili sjednocení dvojic, nýbrž sjednocení singletonů množin $\{(a : b)\}$. Schröder ale chápe relativy jako sumy (tedy nejmenší horní závory) uspořádaných dvojic (jeho terminologií sjednocení *dvojic prvků*).[23]
Podstatou výše uvedených Schröderových postupů je spojení všech takových individuálních relativů $i : j$ do třídy nebo identické sumy dvojic prvků, ve které "relát" i stojí ke "korelátu" j *"ve vztahu" určitého druhu* (*in eine "Beziehung" von bestimmter Art*), ve vztahu charakterizovaném určitým *"fundamentum relationis"* a toto *fundamentum relationis* je vztah, který je pro pochopení Schröderova relačního kalkulu zásadní.

Na konci své první přednášky z *Vorlesungen* Schröder ukazuje možnosti kombinace tří libovolných prvků i, j a h z univerza 1^1 a nazývá je *individuální ternární relativ* (*individuelles ternäres Relativ*) nebo jednodušeji *trojice prvků* (*Elementetripel*) a výraz zapisuje následovně:

$$i : j : h$$

[23]Srovnej BRADY, Geraldine. *From Peirce to Skolem.* Elsevier, Chicago, 2000, s. 149 - 150

Ze souhrnu, tedy identické sumy všech myslitelných *trojic prvků*, nám vznikne nové *univerzum diskurzu třetího řádu* (*Denkbereich der dritten Ordnung*) označovaném symbolem $\mathbf{1^3}$ a pro dané univerzum platí následující vztah:

$$1^3 = \sum_h \sum_j \sum_i (i : j : h) = \sum_{ijh} i : j : h.$$

Opět lze matematicky říci, že se jedná o "třetí třídu variací s opakováním" prvků z primárního univerza 1^1. V případě *univerza diskurzu třetího řádu* můžeme rozlišovat více typů odlišných individuálních ternárních relací u jedné *trojice prvků.* Schröder uvádí následující příklad:

$$A : A : A,\ B : A : A,\ A : B : A,\ A : A : B,\ A : B : C$$

Identická suma *trojic prvků* libovolně zvolených z univerza 1^3 budeme dále nazývat *"ternárním relativem"* (*ternäres Relativ*).
Nakonec ještě poznamenejme, že i *"absolutní termy" (oblasti nebo systémy)*, třídy, které sestávají z prvků *primárního univerza diskurzu* 1^1 můžeme označit za *unární relativy* (*uninäre Relative*) a jeho prvky i můžeme pojmenovat jako *individuální unární relativy.*

To, co je ale pro nás obzvláště důležité a čím Schröder uzavírá svou první přednášku, je zmínka o možnostech *teorie relativů. Teorie relativů* nám umožňuje, aby *výrazy* (*Ausdrücke*) - tedy formule, relace nebo věty relativu určitého uspořádání - byly z jejich stanoveného univerza diskurzu *"reintepretovány"* (*umdeutet*) do univerza diskurzu jiného řádu. Reinterpretovat výraz lze dvěma způsoby:

1. Výrazy jsou *před-interpretovány* do univerza diskurzu vyššího řádu, ve kterém se všechny relativy daného řádu, sestávající z výrazů, resp. (vstupní, výchozí) relace, formule, *přepíšou* (*umschreiben*) (transformují) do univerza diskurzu vyššího řádu.

2. Výrazy lze *"zpětně"*-interpretovat (*zurück-deuten*) (v případě, že nižší univerzum, do kterého chceme reinterpretovat, není nižší něž univerzum prvního řádu) do univerza nižšího řádu.

V tomto ohledu nám současná logika již výrazně pokročila a to právě zásluhou Leopolda Löwenheima, který svým důkazem v podstatě vyvrátil tvrzení, že každá formule může být přepsána do univerza diskurzu nižšího řádu. Tento problém se týká ale pouze logiky prvního a druhého řádu, což nám zahrnuje celou problematiku Löwenheim-Skolemovy věty.[24]

2.3.2 Základy Schröderovy algebry binárních relativů

Schröder ve druhé přednášce svých *Vorlesungen* popisuje 29 tezí (*Festezungen*), které tvoří základ *veškeré logiky* (*die gesamte Logik*). S některými z nich jsme se setkali již dříve. Prvním z 29 *ustanovení* (*Festseztungen*) je definice *rovnosti* (*Gleichheit*), kterou Schröder pojmenovává také jako *jednakost* nebo *identita* (*Einerleiheit, Identität*), jejíž notace zapisující se pomocí subsumpce je nám již známá:

[24] O převádění logiky vyšších řádů na nižší více viz PEREGRIN, Jaroslav. (ed.). *Co člověk potřebuje, když potřebuje "logiku vyššího řádu"?*, (1995), Published online: jarda.peregrin.cz/mybibl/PDFTxt/485.pdf.

1)

$$(a \sqsubseteq b)(b \sqsubseteq a) = (a = b).$$

Dalších 14 *ustanovení*, pak s pojmem *rovnosti* úzce souvisí a týkají se celého pojetí Schröderovy logiky. Pokusíme se je zde krátce představit. Stejnou notaci a stejný kalkul používá ve své práci i Leopold Löwenheim a nám tedy poslouží k lepší orientaci v jeho článku.
Obor hodnot (*Wertbereich*) sestává u Schrödera pouze ze dvou hodnot a to identické nuly 0 a identické jedničky 1, což už jsme rozvedli výše.

2)

$$\text{a) } 0 \sqsubseteq 0, \text{ b) } 0 \sqsubseteq 1, \text{ c) } 1 \sqsubseteq 1,$$
$$\text{d) } 1 \not\sqsubseteq 0,$$

Tato čtyři základní pravidla se týkají platnosti možných subsumpcí v daném *oboru hodnot* (*Wertbereich*). Připomeňme také *tři identické oblasti* (*drei identischen Spezies*): *sčítání, násobení* a *negaci.*

3)

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0,\ 1 \cdot 1 = 1,$$
$$1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1,\ 0 + 0 = 0,$$

Ve výše uvedených tabulkách máme osm pravidel, které nám reprezentují "tabulku" *násobení* (*Einmaleins*) a "tabulku" *sčítání* (*Einpluseins*) pro doménu hodnot restringovanou pouze na hodnoty 0 a 1. Pro tento *obor hodnot* definují v podstatě *produkt* (*das Produkt*) $a.b$, resp. ab, a *sumu* (*die Summe*) $a + b$ dvou hodnot a a b.

4)

$$\bar{1} = 0,\ \bar{0} = 1.$$

Dvě výše uvedená pravidla reprezentují *negaci* (*Negation*) $\bar{a}$ ("*a s čárou*" nebo "*non-a*") ("*a-strich*" nebo "*nicht-a*") pro každou hodnotu a libovolného oboru (*jenes Bereiches*).

Schröder na tomto místě upozorňuje na *bezespornost* (*widerspruchsfreies*) stávajícího systému (*Konventionensystem*).

Předešlých 15 pravidel představuje základ, Schröderem nazývané *"písmenné počítání"* (*Buchstabenrechnung*), kalkulu, ve kterém si pod každým "obecným hodnotovým symbolem" (allgemeinen Wertsymbole) nebo písmenem $a, b, c \ldots$ "představíme", že reprezentuje libovolnou z obou hodnot 0 a 1.
Formální zákony (*formalen Gesetze*), tedy věty a formule, tohoto písmenného počítání nejsou odlišné od *výrokového kalkulu* (*Aussagenkalkul*). Výrokový kalkul je "podpřípadem" (*Unterfall*) *identického kalkulu* (*identischen Kalkulus*), který jsme částečně popsali výše.

Volně tedy můžeme interpretovat 1 jako *pravdivý* (*wahre*) a 0 jako *nepravdivý* (*falsche*) výrok (*Aussag*).

Dalo by se říci, že předešlá pravidla by v současném logickém diskurzu reprezentovala pravdivostní ohodnocení výrokového kalkulu.

Schröder dále definuje sedm základních ustanovení (*Festsetzungen*) pro *obecné binární relativy* (*allgemeine "binäre Relative"*) a určité speciální relativy (*gewisse spezielle Relative*) tohoto druhého řádu.
Jak už bylo řečeno *binárním relativem* myslíme *sumu dvojic prvků* (*Summe von Elementpaaren*) z univerza 1^2.
Schröder obecným binárním relativem myslí jakýkoliv výraz níže uvedeného tvaru:

5)

$$a = \sum_{ij} a_{ij}(i : j),$$

kde indexy i a j jsou nezávislé na všech prvcích z univerza diskurzu 1^1 (jako jejich význam nebo "hodnota") a jdou přes všechny prvky univerza 1^2. Jestliže se "koeficienty" (*Koeffitzienten*) a_{ij}, související nebo "násobící" dvojici prvků $i : j$, omezí pouze na oblast obou hodnot (*Werte*) 0 a 1, pak nám vznikne formule, kterou zapíšeme ve tvaru:

5_a)

$$(a_{ij} = 1) + (a_{ij} = 0) = 1.$$

První hodnota koeficientu (*erstern Koeffizientenwert*) je vyjádřena prostřednictvím tvrzení:

5_b)

$$1(i : j) = 1 \cdot (i : j) = i : j,$$

a zaručuje *existenci* (*das Vorhandensein*) $i : j$ jako člena sumy (*als Glied der Summe*).
Koncová hodnota koeficientu (*letzteren Koeffizientenwert*) vyjadřuje prostřednictvím tvrzení:

5_c)

$$0(i : j) = 0 \cdot (i : j) = 0,$$

ztrátu (*Ausfall*) prvků dvojice $i : j$ jako člena sumy.
Rovnice číslo 5 je tedy obecná rovnice, která nám poskytuje *schéma* (*Schemma*) pro všechny (*alle*) binární relativy.

V následujících rovnicích se levá strana symbolů týká binárních relativů. Tvrzení číslo 5 nám nepřímo poskytuje také následujících dvanáct rovnic, které jsou jeho důsledkem a které nám poslouží k lehčímu porozumění v následujícím textu:

$$1 = \sum_{ij} 1_{ij}(i : j),\ 0 = \sum_{ij} 0_{ij}(i : j),\ 1' = \sum_{ij} 1'_{ij}(i : j),$$

$$i = \sum_{hk} i_h k(h : k),\ i : j = \sum_{hk} (i : j)_{hk}(h : k)$$

$$ab = \sum_{ij} (ab)_{ij}(i : j),\ a + b = \sum_{ij} (a + b)_{ij}(i : j),\ \bar{a} = \sum_{ij} (\bar{a})_{ij}(i : j),$$

$$a;b = \sum_{ij}(a;b)_{ij}(i:j),\ a \ddagger b = \sum_{ij}(a \ddagger) b)_{ij}(i:j),\ \breve{a} = \sum_{ij}(\breve{a})_{ij}(i:j).$$

Schröder pak následně vysvětluje význam výše uvedených tvrzení a ohodnocení binárních relativů následovně:
Víme-li pro určité univerzum diskurzu pro každý myslitelný *sufix* ij, jaká hodnota přináleží koeficientu a_{ij} binárního relativu a, tedy zda-li je roven 0 (= 0) nebo roven 1 (= 1) (právě pro tento sufix ij), pak také víme jaké dvojice prvků do sumy výhradně *"vstupují"* (*eingehen*) a známe způsob, jakým je binární relativ a z individuálních binárních relativů univerza diskurzu 1^2 konstruován.[25].
Tedy známe binární relativ a samotný.
K determinaci dostatečného určení nějakého binárního relativu, respektive k definici speciálního (*speziellen*) binárního relativu postačí, a s ohledem na rovnici číslo 5 je žádoucí, určit jaké mají být hodnoty jejich koeficientů.
Následujících šest tvrzení značené symboly 1, 0, $1'$, $0'$ a symboly i a $i:j$ Schröder definuje také přes binární relativy.

6)

$$1_{ij} = 1,\ 0_{ij} = 0,$$

7_a)

$$1'_{ij} = (i = j),\ 0'_{ij} = (i \neq j),$$

7_b)

$$1'_{ij} = 1,$$
$$1'_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j$$

$$0'_{ij} = 0,$$
$$0'_{ij} = 1 \text{ pro } i \neq j$$

8)

$$i_{hk} = 1'_{ih}$$

9)

$$(i:j)_{hk} = 1'_{ih}1'_{kj}$$

Těchto šest tezí společně s tvrzením 5) tvoří druhou "skupinu" základních *úmluv* (*Konventionen*).
Symboly 1 a 0, jsou-li interpretovány jako relativy, budeme označovat jako *"identické moduly"* (*identischen Moduln*).
První ze dvou tvrzení v úmluvě 6) budeme označovat jako *identický modul 1* (*der identische Modul Eins*), který koinciduje s univerzem diskurzu 1^2. Tento modul je *univerzem*, *úplnou sumou* (*Vollsumme*), *totalitou* (*das Totum*) nebo *celkem* (*das Ganze*) univerza, je sumou všech svých individuí nebo dvojic prvků.
Druhé tvrzení v úmluvě 6) budeme označovat jako *identický modul 0* (*der identische Modul Null*) a odkazuje nás k úplně prázdnému relativu (*zu einem leeren Relativ*). Jedná se tedy o relativ, který neobsahuje vůbec žádné (*gar kein*) dvojice prvků z našeho univerza diskurzu 1^2.
S ohledem na tvrzení 6) a s ohledem na některá tvrzení z ustanovení v bodě 5) pak můžeme identické moduly 1 a 0 zapsat jako rovnice v následujícím tvaru:

[25]Sufixem (*das Suffix*) Schröder míní "*relativní koeficienty*" (podle pravidla psaných ve formě dvojitého indexu. Více viz SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 3.* Teubner, Leipzig, 1895, s. 23.)

$$1 = \sum_{ij} i : j,$$

$$0 = ,$$

kde se druhá rovnice považuje za kompletní, přestože na pravé straně neobsahuje nic.
Identické moduly nám reprezentují oba dva extrémy, respektive hranice, myslitelných binárních relativů. Modul 1 Schröder také nazývá "maximálním relativem" (*Maximalrelativ*) a 0 "minimálním relativem" (*Minimalrelativ*).

Mimo těchto dvou identických modulů Schröder popisuje další dva speciální binární relativy, které označuje symboly $1'$ a $0'$. Definicí těchto dvou *"relativních modulů"* (*relativen Moduln*) jsou tvrzení 7_a) a 7_b) popsané výše. Stejně jako v případě modulů 1 a 0, lze tyto dva moduly "přepsat" s pomocí tvrzení 5) a to následujícím způsobem:

$$1' = \sum_{ij}(i = j)(i : j) = \sum_i (i : i),$$

$$0' = \sum_{ij} i \neq j(i : j).$$

$1'$ nám představuje sumu - "univerza, oblasti" (*das Universum, der Bereich*), všech individuálních *sebevztažných* relativu (*selbsrelative*), univerza diskurzu 1^2. $0'$ je naopak sumou všech *alio*-relativů (*Aliorelative*) libovolného univerza, tvoří tak "univerzum aliorelativů" (*das Universum der Aliorelative*).

Tvrzení 8) lze opět přepsat díky tvrzení 5) následujícím způsobem:

$$i = \sum_{hk} 1'_{ih}(h : k) = \sum_h \sum_k (i = h)(h : k) = \sum_h (h = i) \sum_k (h : k) = \sum_k i : k,$$

kde i je považované za sumu všech dvojic prvků, kde i stojí na pozici relátu. Relativ i zahrnuje takové termy, které jsou označeny prvkem i v tabulce 1^2 (*in der mit dem Element i markierten Zeile*).
Tvrzení 9) pak díky 7), 5) a 3) můžeme naspat také následovně:

$$i : j = i : j.$$

Tvrzení 9) nám zajišťuje přípustnost dvojice prvků $i : j$ samotných jako sumy dvojic prvků.

Třetí skupinu základních definic Schröderovy teorie tvoří níže uvedených 6 tvrzení. Opět je budeme definovat prostřednictvím binárních relativů. Schröder je zapisuje takto:

10)
$$(ab)_{ij} = a_{ij}b_{ij},\ (a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

11)
$$\bar{a}_{ij} \text{ nebo } (\bar{a})_{ij} = \overline{(a_{ij})},$$

12)
$$(a; b)_{ij} = \sum_h a_{ih}b_{hj},\ (a \ddagger b)_{ij} = \prod_h (a_{ih} + b_{hj}),$$

13)

$$\breve{a}_{ij} \text{ nebo } (\breve{a})_{ij} = a_{ji},$$

Z hlediska tvrzení 5) se výše uvedená tři tvrzení definují jako *identický produkt* (*identische Produkt*) $a.b$ nebo jednodušeji ab, *identická suma* (*identische Summe*) $a + b$ a nakonec *negace* (*das Negat* nebo *die Negation*) $\bar{a}$ relativu a.
Co se týká "pravdivostních ohodnocení" daných tvrzení, pak je Schröder definuje následovně:

1. Identický produkt $(ab)_{ij}$ může být roven 1 tehdy a jen tehdy, mají-li a a b oba hodnotu 1.

2. Identická suma $(a + b)_{ij}$ je rovna 1 tehdy a jen tehdy, má-li a *nebo* b ohodnocení 1.

Tvrzení 12) a 13), což již bylo nahlédnuto v tvrzení 5), definují tři tvrzení pro Schröderovu teorii a to:

1. *Relativní produkt* (das *relative Produkt*) $a; b$ (čteno a z b) dvou binárních relativů a, b.

2. *Relativní suma* (die *relative Summe*) $a \ddagger b$ (čteno a *piu* b) dvou binárních relativů a, b.

3. *Konverze* (das *Konverse*, die *Konvresion*) $\breve{a}$ (čteno a *konverze*) binárního relativu a.

"Relativní násobení" (*Relative Multiplikation*) nám ze dvou binárních relativů a a b dává relativ třetí a to ve tvaru $a; b$. Tento relativ můžeme také nazývat *kompozicí* (*Komposition*). Schröder jednotlivé komponenty a a b vzešlého binárního relativu také nazývá *relativními faktory* (*Relative Faktoren*).
Poznamenejme jen, že relativní produkt nesplňuje komutativitu a proto Schröder rozlišuje jednotlivé faktory produktu termíny *prefaktor* nebo *násobenec* (*Vorfaktor, Multiplikand*) a druhý v pořadí označuje termínem *postfaktor* (*Nachfaktor, Multiplikator*).

Schröder těchto šest výše uvedených operací popisuje jako "dokonale jednoznačné operace" (*vollkommen eindeutige Operationen*), jsou *absolutně realizovatelné* (*unbedingt ausführbar*). Schröder ještě dodává, že znamenají-li a a b binární relativy, pak nejsou tyto symboly $(ab, a + b, a; b, \breve{a} \ldots)$ nikdy nesmyslné nebo nejasné znaky a také nemají mnohoznačná jména. Což znamená, že v oblasti binárních relativů každému náleží jedno a pouze jedno ohodnocení (*Wert*).

Poslední velmi důležité tvrzení, které přidáme ke třetí skupině Schröderových ustanovení, nám definuje *uspořádání* (*Einordnung*), nebo-li *subsumpci* (*Subsuption*) mezi binárními relativy. Mějme tedy rovnici ve tvaru:

14)

$$(a \sqsubseteq b) = \prod_{ij}(a_{ij} \sqsubseteq b_{ij}),$$

kde *a je v uspořádání s b* (*a ist eingeordnet b*), $a \sqsubseteq b$, tehdy a jen tehdy, je-li pro každý *sufix ij* $a_{ij} \sqsubseteq b_{ij}$. Tedy formulace $a \sqsubseteq b$ nám dle Schrödera říká, že všechny dvojice prvků *a se nacházejí* (*unter sich vorfinden*) pod těmi (*denen*

von) z b. Můžeme tedy říci, že a je *část* (*Teil*) (a to buď pravá/vlastní (*echter*) nebo celá (*das Ganze*)) b, a je v b *obsažena* (*enthalten*).
Dle definice 1) se nám pak jako důsledek 14) objevuje následující tvrzení:

$$(a = b) = \prod_{ij}(a_{ij} = b_{ij}),$$

a tyto dva relativy můžeme nazvat rovnými tehdy a jen tehdy pokud korespondují jejich koeficienty.

Schrňme si výše uvedené poznatky z Algebry logiky.
Schröder nám v návaznosti na Peirce, na jehož pojetí algebry logiky nejvíce navazuje, ukázal základní operace kalkulu relativů, který má, jak je výše uvedeno, šest základních operací. Tři jsou základní Booleovské operace (tedy sčítaní, násobení a negace) a tři jsou definovány speciálně pro potřeby kalkulu relativů (jedná se tedy o relativní produkt, relativní sumu a konverzi). Na konci jsme pak částečně definovali Schröderovo pojetí pravdivostního ohodnocení.

2.3.3 Definice produktu, sumy a funkce v algebře binárních relativů

Nyní si ukážeme definici produktu a sumy přes $f(u)$, kde u je nedefinovaný relativ a f je funkce v algebře binárních relativů. Popíšeme také notaci a základní rovnice a definice s užitím produktu a sumy spojené.

Pod termínem *pořadový index* (*laufenden Zeiger*) u, což znamená *produktovou* respektive *sumovou proměnnou* (*Produktations-* resp. *Summations-Variablen*), rozumíme relativní symbol (*Relativ*symbol), kterému jsou přiřazeny všechny hodnoty z nějakého určitého oboru hodnot. Tento obor hodnot Schröder nazývá *rozšíření* (*Erstreckung*) "po u braném" (*nach u genommenen*) produktu $\prod$ respektive sumy $\sum$ a tento je v nejobecnějším případě dobře definovanou *třídou* (*wohldefinierte Klasse*) binárních relativů.
Pod *obecným termem* (faktorem, resp. sčítancem) (*allgemeinen Term, Faktor, Summand*) produktu $\prod\limits_u$ resp. sumy $\sum\limits_u$ si představíme *funkci* u - $f(u)$. Funkce $f(u)$ je výrazem, který je utvořen nějakým daným způsobem prostřednictvím operací ze skupiny výše uvedených šesti základních Schröderovských operací ze samotného u a jiných libovolných relativů značených $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$, jejichž významy (resp. ohodnocení) musí ale být stále zachovány. A takto musí být zachovány i pokud se nám změní význam u uvnitř daného *rozšíření*. Tyto posledně jmenované relativy budeme nazývat, v protikladu proti *argumentu* u (*Argument*), *parametry* funkce $f(u)$ a můžeme je chápat jako obecné relativy, speciální hodnoty a nebo mohou být nahrazeny výše popsanými moduly. Funkce $f(u)$ je ale sama osobě binárním relativem, jehož hodnota pro každou předpokládanou hodnotu u a fixované hodnoty ostatních parametrů musí být jednoznačně určena.
Následující symboly definujme jako binární relativy:

$$\prod_u f(u)$$

a

$$\sum_u f(u).$$

Definici můžeme znázornit také jako obecné tvrzení prostřednictvím koeficientů. Tvrzení pak mají následující podobu:

15_a)

$$\{\prod_u f(u)\}_{ij} = \prod_u \{f(u)\}_{ij}$$

15_b)

$$\{\sum_u f(u)\}_{ij} = \sum_u \{f(u)\}_{ij}$$

Dále mějme výrok A_u, který reprezentuje libovolný výrok o "předmětu myšlení" (*Gedankending*) u, tedy výrok o u, který je zapsán následovně:

$$\prod_u A_u \text{ a } \sum_u A_u$$

První z výroků reprezentuje takový výrok, že A_u je pravdivý *pro každý* z těchto objektů u (v rámci rozšíření), druhý výrok nám tvrdí, že A_u je pravdivý *pro určité* (*gewisse*) u (v rámci rozšíření)- tedy že existuje alespoň jedno u v rozšíření pro které A_u platí.
Schröderovo ohodnocení daných výroků je tedy následující:

1. Výrok $\prod_u A_u$ má hodnotu 1 tehdy a jen tehdy, je-li pro každé myslitelné u $A_u = 1$.
2. Výrok $\prod_u A_u$ má hodnotu 0 tehdy a jen tehdy, existuje-li alespoň jedno takové u, pro které $A_u = 0$.
3. Výrok $\sum_u A_u$ má hodnotu 1 tehdy a jen tehdy, existuje-li v rozšíření u, pro které $A_u = 1$.
4. Výrok $\sum_u A_u$ má hodnotu 0 tehdy a jen tehdy, pokud se pravě v rozšíření žádné takové u nevyskytuje.

Dále Schröder dodává, že představíme-li si v jako ohodnocení libovolně zvoleného z pole rozšíření (*Erstreckungsbereich*) pro u, pak nám vznikne následující:

$$(\prod_u A_u = 1) \sqsubseteq (A_v = 1) \sqsubseteq (\sum_u A_u = 1)$$
$$\text{a}$$
$$(\sum_u A_u = 0) \sqsubseteq (A_v = 0) \sqsubseteq (\prod_u A_u = 0).$$

Zkráceně lze také napsat:

$$\prod_u A_u \sqsubseteq A_v \sqsubseteq \sum_u A_u \text{ a } \overline{\sum_u A_u} \sqsubseteq \overline{A_v} \sqsubseteq \overline{\prod_u A_u},$$

čímž je nám dle Schrödera také k dispozici tvrzení:

$$\prod_u A_u = A_v \prod_u A_u \text{ a } \sum_u A_u = A_v + \sum_u A_u.$$

Negace aplikovná na výroky $\prod$ a $\sum$ vypadá následovně:

$$\overline{\prod_u A_u} = \sum_u \overline{A}_u \text{ a } \overline{\sum_u A_u} = \prod_u \overline{A}_u$$

Pouze pro úplnost uvádím základní typy pro *rozšíření u*. Obsahuje-li rozšíření u pouze jeden objekt v, pak $\prod$ a $\sum$ sestávají pouze z jednoho termu a jsou *monomické* (*monomisch*) a "rovnice" pak je následující:

$$\prod_u A_u = A_v = \sum_u A_u$$

Pokud obsahuje dva objekty v a w pak je definován skrze *binární* produkt a *binární* sumu. To nám představují tvrzení:

$$\prod_u A_u = A_v A_w \text{ a } \sum_u A_u = A_v + A_w$$

Jedna z posledních tvrzení, která jsou důležitá pro Schröderův kalkul relativů a která uvádí téměř na konci své druhé přednášky ve *Vorlesungen*, jsou tvrzení týkající se vzájemného "uspořádání" některých z výše uvedených relativů:

$$\prod_u (A \sqsubseteq B_u) = (A \sqsubseteq \prod_u B_u)$$

a také platí

$$\prod_u (A_u \sqsubseteq B) = (\sum_u A_a \sqsubseteq B),$$

je-li B_u výrok konstantní vzhledem k u a B je konstantní vzhledem k u. Schröder uvádí jako platná pro svou teorii ještě (tyto jsou podobné tvrzením, které uvádí Peirce) následující tvrzení:

$$\sum_u (A_u \sqsubseteq B) = (\prod_u A_u \sqsubseteq B) \text{ a } \sum_u (A \sqsubseteq B_u) = (A \sqsubseteq \sum_u B_u).$$

Tyto dvě formule pak Schröder následně zobecňuje na tvar:

$$\sum_{u,v} \text{ nebo } \sum_u \sum_v (A_u \sqsubseteq B_v) = (\prod_u A_u \sqsubseteq \sum_v B_v)$$

Výše uvedená tvrzení pak lze nakonec shrnout do následujícího schématu:

$$\prod_u (A_u \sqsubseteq B_u) \sqsubseteq \begin{cases} (\prod_u A_u \sqsubseteq \prod_u B_u) \\ (\sum_u A_u \sqsubseteq \sum_u B_u) \end{cases} \sqsubseteq \sum_u (A_u \sqsubseteq B_u).$$

Na závěr této podkapitoly dodejme, že pro výroky $\sum$ a $\prod$ platí pravidla distributivity.[26] Např:

$$A \sum_u B_u = \sum_u AB_u \text{ nebo } A + \prod_u B_u = \prod\nolimits_u (A + B_u).$$

Pro naše potřeby je ještě důležité tvrzení pro případ, kdy máme výrok $A_{u,v}$, který odkazuje ke dvěma objektům u a v, kterými zamýšlíme proměnné. Pak následující tvrzení platí:

[26] více viz SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 3,* s. 40 - 41.

$$\sum_u \prod_v A_{u,v} \sqsubseteq \prod_v \sum_u A_{u,v}.$$

Přestože by si Schröderova algebra logiky a především jeho pojetí binárních relativů a problematika relativního kalkulu obecně zasloužily mnohem více prostoru a času, ukončíme na tomto místě bližší poznávání základů této pozoruhodné teorie, neboť by měla být pro základ dostačující, a přesuneme se ke složitější části Schröderových přednášek, které jsou přímo aplikovány v důkazu Löwenheimovy věty z roku 1915.

2.4 Schröderova "eliminační teorie"

Problémem "eliminace" se Schröder zabývá ve své jedenácté přednášce třetího svazku svých přednášek, jejíž název zní *Studien über Elimination, Produktier- und Summiraufgaben.* Bylo to jedno z nejsofistikovanějších užití logiky druhého řádu. I v tomto případě navazuje německý matematik na práci Peirce, jež ho velmi inspirovala. Jeho výsledky v mnoha Peirce převyšují, jako například již zmíněná "eliminace". Protože je jedenáctá přednáška *Vorlesungen* velmi obsáhlá a v mnohém velmi složitá, nastíním zde jen daný postup "eliminace", která je přímo užita Löwenheimem.
Pasáž, která se týká části užité Löwenheimem je označena jako "úkol 12" (*Aufgabe 12*).[27] Cílem tohoto úkolu bylo vyřešení rovnice pro danou proměnou. Rovnice měla tento tvar:

$$x = \prod_u \{u + (\bar{u} \ddagger a); b)\}.$$

Řešení bylo možné jen pro dva speciální případy a to pro:

$$\prod_u \{u + (\bar{u} \ddagger 0); b)\} = 0 \text{ a } \prod_u \{u + (\bar{u} \ddagger a); 1'b)\} = 0 \ddagger (a0' + b1').$$

K danému výsledku mohl Schröder dospět díky "rozpadu" (*zerfallen*) druhého členu obecného faktoru.[28] Díky řešení jednoho podproblému "úkolu 12" Schröder získal speciální soustavu rovnic, z níž dokázal formulovat druhořádový výrok:

$$\prod_u (u_{hk} + \bar{u}_{hl}) = 1'_{lk},$$

z čehož vyplývá, že pro $l = k$ se tento $\prod$ rovná 1 a pro $l \neq k$ je roven 0.
Dále Schröder uvažuje infinitární výrok mající univerzální kvantifikátor pro nespočetně mnoho proměnných. Tedy pro tolik, kolik prvků se nachází v myšleném kontinuu. Tato metoda pak zaujala Löwenheima, který ji užil ve svém důkazu v roce 1915.

Tuto metodu popisuje Schröder takto:

> Tato metoda sestáva z tohoto: lze operovat i s *nekonečnými (unendlich)* (nebo neohraničenými) *mnohočetnými (vielfachen)* produkty $\prod$, dokonce i s takovými, jejichž $\prod$-znak může tvořit kontinuum, ve kterém *každému bodu přímky* odpovídá jeden $\prod$ *jednoznačně určený pojmenovanou produktovou*

[27]Srovnej SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 3,* s. 510
[28]Srovnej SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 3,* s. 467 - 510.

proměnnou. Na takovéto produkty a sumy smíme přenášet a aplikovat ty *nekonečné postupy (Schlussweisen)*, které jsou zajištěny výrokovým schématem zakládajícím se na *dictum de omni.*[29]

Schröder tvrdí, že je to "poprvé, kdy se v matematice něco takového stalo." Uveďme příklad postupu, na kterém tuto metodu aplikuje sám Schröder. Jedná se o řešení "podúkolu" již výše zmíněného problému 12, který nám představuje tvrzení:

$$z = \prod_u \{u + (\bar{u} \ddagger a); i + (\bar{u} \ddagger a); j\}.$$

Nyní mějme:

$$z_{hk} = \prod_u \{u_{hk} + (\bar{u} \ddagger a)_{hi} + (\bar{u} \ddagger a)_{hj}\}$$

$$= \prod_u \{u_{hk} + \textstyle\prod_m (\bar{u}_{hm} + a_{mi}) + \prod_n (\bar{u}_{hn} + a_{nj})\}$$

$$= \textstyle\prod_{mn} \{a_{mi} + a_{nj} + \displaystyle\prod_u (u_{hk} + \bar{u}_{hm} + \bar{u}_{hn})\}.$$

A nyní máme ale tvrzení:

$$\prod_u (u_{hk} + \bar{u}_{hm} + \bar{u}_{hn}) = 1'_{mk} + 1'_{nk},$$

které je rovné 0 pro $(m \neq k)(n \neq k)$, protože (mimo jiné) se zde vyskytne faktor s $u_{hk} = 0$, $u_{hm} = 1$, $u_{hn} = 1$, a rovné 1 pro $(m = k) + (n = k)$.

A proto máme:

$$z_{hk} = \textstyle\prod_m \prod_n (1'_{km} + a_{mi} + 1'_{kn} + a_{nj})$$

$$= \textstyle\prod_m (1'_{km} + a_{mi}) + \prod_n (1'_{kn} + a_{nj})$$

$$= (1' \ddagger a)_{ki} + (1' \ddagger a)_{kj}$$

$$= \{(1' \ddagger a); i + (1' \ddagger a); j\}_{kh},$$

čímž Schröder dostává tvrzení:

$$z = (\breve{i} + \breve{j}); (\breve{a} \ddagger 1').^{30}$$

A právě teď se dostáváme k problému posunu "existenčního kvantifikátoru" před "univerzální". Na tomto místě Schröder provedl proces, který později zavedl Skolem do problematiky logiky prvního řádu a my to nyní známe jako řešení prostřednictvím Skolemových funkcí - tzv. Skolemizace. Aby to mohl provést, zavedl univerzální kvantifikátor indexovaný relačními proměnnými, kde se kvantifikuje přes relace, a tento kvantifikátor pak rozvádí do nekonečného součinu kvantifikátorů, kde kvantifikátor existuje pro každé individuum daného infinitního oboru. Ukažme si nyní postupný vývoj tohoto procesu *"Schröderizace"*,

[29]Výraz *dictum de omni* pochází z aristotelského sylogismu. V podstatě jde o princip, který nám říká, že je-li cokoliv potvrzeno o nějakém druhu, pak je to stejně "potvrzující/platné" pro všechny poddruhy tohoto druhu.

[30]Více viz SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 3,* s. 512 - 513.

jak jej popisuje Schröder ve svých *Vorlesungen*.

Schröder uvadí, že řešení pro úkol 12 je jednoduché za předpokladu, že b reprezentuje jeden prvek $b = i$ i za předpokladu, že b reprezentuje systém dvou prvků a to $b = i + j$. [31] To ale nelze tvrdit v případě, kde $b = b; 1$ je systém, tedy suma libovolného počtu prvků, které mohou kontinuálně jako body vyplňovat přímku. Dále tvrdí, že toto zkoumání (*Untersuchung*) musí zůstat pouze kvantitativně generalizovatelné (*verallgemeiner*) a v tomto případě pak získáme tato tvrzení:

$$\prod_u \{u + (\bar{u} \ddagger a); b; 1\} = 1; \breve{b}; (\breve{a} \ddagger 1'),$$

$$\prod \{u + (\bar{u} \ddagger a); 1\} = 1; (\bar{a} \ddagger 1').$$

Následně se vrací k předchozímu tvrzení tykající se rovnic z_{hk}. Schröder dále píše:

> Jsou-li v nějakém běžném součtu všechny "články" produkty $\prod$ s navzájem nezávisle pojmenovanými indexy, pak je dovoleno, abychom všechny posunuli dopředu (*voranschieben*) doleva s jejich indexem jako sufixem zatížený $\prod$.

Schröder nyní převádí formuli (respektive levou část) uvedenou výše, ve kterém $\prod$ jdoucí přes u nazývá s, a dostává tím možnost formalizovat již výše zmíněnou proceduru. V dané formuli používá pro systém $b = b; 1$ výraz tvaru $b = \sum_i i$. Pro

$$s = \prod_u \{u + (\bar{u} \ddagger a); \sum_i i\}$$

tedy nám vznikne

$$s_{hk} = \prod_u \{u + \sum_i (\bar{u} \ddagger a); i\}_{hk}$$

$$= \prod_u \{u_{hk} + \sum_i (\bar{u} \ddagger a)_{hi}\} = \prod_u \{u_{hk} + \sum_i \prod_m (\bar{u}_{hm} + a_{mi})\}.$$

Toto ale k "přenesení" $\prod_m$ před (*vor*) $\sum_i$ a tímto před $\prod_u$ nestačí. Schröder dodává:

> Máme-li $\sum_i$ z $\prod_m$ obecného termu $f(i, m)$ a přejeme-li si z libovolného důvodu posunout do ekvivalentní modifikace (*in äquivalenter Umformung*) $\sum$ za $\prod$ není ihned možné. Kvůli $\sum \prod \sqsubseteq \prod \sum$ můžeme dělat pouze oslabené závěry. V opačném případě nám nebrání nic: v každém jiném (*andern*) prvku $\sum_i$ označíme jinak pořadový index (*der laufende Zeiger*) $\prod_m$, což znamená: "odlišit" (*zu differenzieren*) všechny tyto indexy jako m_ι (m se sufixy iota), kde si pouze zapamatujeme, že ι se "paralelně" (*parall*) mění s i.

[31] Srovnej SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 3*, s. 510 - 513.

Toto tvrzení má pro nás velký význam a to takový, že nyní můžeme každý jednotlivý $\prod$ navazující na určitý m_ι posunou před $\sum$. A tedy následující schéma "je ospravedlněno".

$$\begin{cases} \sum_i \prod_m f(i,m) = \sum_i \prod_{m_\iota} f(i,m_\iota) = \prod_\iota (\prod_{m_\iota}) \sum_i f(i,m_\iota) \\ \prod_i \sum_m f(i,m) = \prod_i \sum_{m_\iota} f(i,m_\iota) = \prod_\iota (\sum_{m_\iota}) \prod_i f(i,m_\iota) \end{cases}$$

Výsledkem je, že můžeme všechny $\prod$ předsunout před $\sum$.

Závěrečný krok, který musíme podniknout, abychom získali základ pro LST a co je podstatné, pro výše uvedené schéma, popisuje Schröder takto:

> Prochází-li ι (paralelní s i) skrze sérii hodnot $_1,_2,_3,_4,\ldots$, měl by být vysvětlen význam záhadného operátoru před $\sum_i$ ve výše uvedeném schématu a to lze popsat obvyklým způsobem...,

a to ve formě:

$$\prod_\iota (\prod_{m_\iota}) = \prod_{m_1} \prod_{m_2} \prod_{m_3} \cdots \quad \text{popřípadě} \quad \prod_{m_1 m_2 m_3 \ldots} = \prod_{\prod_\iota m_\iota}$$

a definuje tak produktový symbol pro (možno i neomezený) mnohonásobný produkt (*vielfaches Produkt*). A dále máme

$$\prod_\iota (\sum_{m_\iota}) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{m_3} \cdots \quad \text{popřípadě} \quad \sum_{m_1 m_2 m_3 \ldots} = \sum_{\prod_\iota m_\iota},$$

což představuje několikanásobnou sumu (*mehrfachen Summe*).

Schröder pak na následujících stránkách ukazuje aplikaci daného schématu.[32] Nám ale postačuje výše uvedený rozbor schémat, který nám poskytl. Přestože by si i celá jedenáctá kapitola Schröderových přednášek z algebry logiky zasluhovala větší pozornost, přesuneme se nyní již první formulaci věty a aplikaci "Schröderizace" v důkazu.

[32] viz SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 3,* s. 515 - 519.

3 Leopold Löwenheim a problematika řádovosti logiky

Leopold Löwenheim se narodil roku 1878 v německém městě Krefeld. Po té co vystudoval matematiku, začal působit jako učitel matematiky na gymnáziu v Berlíně. V roce 1906 se také stal recenzentem vědeckého časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Během vojenské služby v první světové válce se mu podařilo sepsat a publikovat své matematické výsledky.

Jeho matematické výsledky se opět týkají problematiky logiky prvního a druhého řádu. V této době však logika neměla ještě stále svou pevnou hierarchizaci tak, jak ji známe dnes. Nedá se říci, že by Löwenheim používal, což platí i pro Schrödera, čistě logiku prvního nebo druhého řádu, přesto si oba matematici začali uvědomovat a klást si otázky týkající se možnosti vyjádřitelnosti výroků v logice a tím narazili i na některé obtíže vyjádřitelnosti, které pak vyústily v první formulaci Löwenheimovy věty. G. H. Moore o Löwenheimovi tvrdí, že byl v podstatě prvním člověkem, který publikoval významné matematické výsledky o sémantice logiky.
Löwenheim se velmi brzy, velmi pravděpodobně již během svého studia, seznámil s pracemi Ernsta Schrödera a jeho první odborné články tak byly věnovány analýze a prohloubení Schröderových poznatků. První etapa těchto zkoumání vyústila v již zmíněný článek z roku 1915 *O možnostech v rámci kalkulu vztahů (Über Möglichkeiten im Relativkalkül)*, kde rozšířil Schröderovy poznatky týkající se kalkulu relativů (z roku 1895), jejichž nevelké torzo jsem popsala výše. Löwenheim však ve svém článku učinil v daném kalkulu mnoho změn a některé si blíže popíšeme.

3.1 Löwenheimova notace a rozšíření kalkulu relativů

Löwenheim navazuje na Peirce-Schröderovu tradici v notaci pro algebru logiky. V době, kdy publikoval své poslední poznatky se od této tradice již začínalo ustupovat, což také částečně zapříčinilo, že některé významné poznatky v jeho článku ušly pozornosti matematické veřejnosti.
Löwenheimova logika je v podstatě logikou druhého řádu (totéž jako u Schrödera), ale dovoluje, aby byly kvantifikátory rozvíjeny jako infinitární konjunkce respektive disjunkce.[33]. Svou logiku rozlišoval na infinitární prvořádovou část a ostatní logiku a v důsledku toho prohlásil, že všechny důležité problémy matematiky lze pojmout do jeho (infinitární) logiky druhého řádu.[34] Než se ale dáme do částečného rozboru věty a řádovosti logiky připomeňme některé notační principy.

Löwenheim stejně jako Schröder označuje univerzum diskurzu (*Denkbereich*) 1^1 a je jím myšlena nosná množina struktury (doména individuí) obsahující alespoň jeden element. Dané universum diskurzu může být konečné nebo nekonečné

[33]Srovnej viz LÖWENHEIM, Leopold. Über Möglichkeiten in Relativkalkül. in: *Mathematische Annalen, 76.* str. 447 - 470. Anglický překlad in van Heijenoort [Hei76] str. 228 - 251. Popřípadě MOORE, Gregory H. The Emergence of First-Order Logic in: *Minnesota Studies of the Philosophy of Science XI.* Český překlad in: [PerO6] str. 17 - 64.

[34]Srovnej viz LÖWENHEIM, Leopold. Über Möglichkeiten in Relativkalkül. Anglický překlad in van Heijenoort [Hei76] s. 233.

a v případě, že je nekonečné, pak může být spočetné či nespočetné.

Löwenheim také užívá binární relativní koeficient a_{ij}, což je výraz, kterým označujeme určitou vlastnost, jež platí pro uspořádanou dvojici (i, j). V současné predikátové logice by výše zmíněný výraz v podstatě označoval predikátový výraz $P(x, y)$, kde x a y jsou proměnné a P je predikátový symbol. Relativní koeficient je definován stejně jako u Schrödera (viz výše výraz 5) atd.). Löwenheim přebírá i Schröderovské pojetí subsumpce.

3.1.1 Definice platnosti relativního koeficientu a binárního relativu

Následující definici splnitelnosti relativního koeficientu uvádím podle van Heijenoorta, jak ji prezentuje v úvodu k překladu Löwenheimova článku. Ta se částečně liší od definice, kterou by použil Schröder.[35]

1. $a_{ij} = b_{ij}$ platí tehdy a jen tehdy, platí-li a_{ij} a b_{ij} nebo neplatí ani jeden z obou členů.

2. Negaci značíme $\bar{a}_{ij}$ a tento relační koeficient platí tehdy a jen tehdy, pokud a_{ij} neplatí.

3. Pro konverzi a_{ij}, značeno $\breve{a}_{ij}$, platí, že $\breve{a}_{ij} = a_{ji}$.

Sumu (součet) budeme nadále dle Schröderova vzoru značit $a_{ij} + b_{ij}$ a v současné algebře jej můžeme vnímat jako alternaci disjunkce $a_{ij} \vee b_{ij}$. Produkt (součin) opět budeme zapisovat ve tvaru $a_{ij} \cdot b_{ij}$ nebo $a_{ij}b_{ij}$. Ten v současné algebře představuje typ konjunkce $a_{ij} \wedge b_{ij}$. Dále označujeme existenční kvantifikátor výrazem stejným pro Schrödera tedy $\sum$ a obecný $\prod$.

Löwenheim uvádí stejné typy relativů jaké jsme již popsali u Schrödera, na tomto místě opět uvádím definici, která předchází Löwenheimově článku v podání van Heijenoorta. Ten definuje Löwenheimův binární relativ jako množinu uspořádaných dvojic, pro které platí a_{ij}. Definice je následující:

1. $a = b$ tehdy a jen tehdy, když $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechny uspořádané dvojice (i, j).

2. Negace $\bar{a}$ platí tehdy a jen tehdy, když $(\bar{a})_{ij} = \bar{a}_{ij}$.

3. Konverze $\breve{a}$ platí tehdy a jen tehdy, když $(\breve{a})_{ij} = \breve{a}_{ij} = a_{ji}$.

4. Identická suma (sčítání) $a + b$ platí tehdy a jen tehdy, pokud $(a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

5. Identický produkt (násobení) $a \cdot b$ nebo ab platí tehdy a jen tehdy, pokud $(a \cdot b)_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$.

6. Relativní produkt (násobení) $(a; b)$ platí tehdy a jen tehdy, pokud $(a; b)_{ij} = \sum_{h} a_{ih}b_{hj}$.

[35] SrovnejLÖWENHEIM, Leopold. Über Möglichkeiten in Relativkalkül. Anglický překlad in van Heijenoort [Hei76], s 228 - 229.

7. Relativní suma (sčítání) $(a \ddagger b)$ platí tehdy a jen tehdy, pokud $(a \ddagger b)_{ij} = \prod_{h}(a_{ih} + b_{hj})$.

Je tedy patrné, že Löwenheim využívá stejných vztahů jako Schröder a to tří základních operací převzatých od Boolea (ty, které jsme u Schrödera označili jako identické sčítání, identické násobení a negaci) a tří týkajících se Schröderova kalkulu binárních relativů (ty, které jsme označili jako relativní sčítání, relativní násobení a konverzi). Se všemi jsme se již seznámili při popisu Schröderova kalkulu relativů.

Löwenheim také užívá čtyř relativů, které stejně jako Schröder nazývá moduly a značí je stejným způsobem, tedy $1,\ 0,\ 1',\ 0'$. I platnost je definována podobně:

1. $1 = 1_{ij}$ pro všechny uspořádané dvojice (i, j),
2. $0 = \bar{1}$,
3. $1' = 1'_{ij}$ platí tehdy a jen tehdy, pokud $i = j$,
4. $0' = \overline{1'}$.

Moduly a téměř vše co souvisí s jejich užitím a jejich vzájemnými vztahy jsme popsali u Schrödera, výše zmíněný výčet slouží pouze pro lepší přehlednost. Nyní se zaměříme na místa, kde se Löwenheim od Schrödera odchyluje, respektive užívá ve své logice další četná rozlišení.

3.1.2 Relační výraz versus individuový výraz a relativní rovnice

Velmi důležitým rozlišením termínů, které Löwenheim užívá, je rozlišení termínu "relační výraz", pro který Löwenheim užívá výraz *Relativausdruck*, a termínu "individuový výraz", který označuje termínem *Zählausdruck*. Tyto definice se od definic prvořádových a druhořádových formulí liší tím, že takové výrazy mohly mít kvantifikátor pro každé individuum oboru respektive pro každý vztah. Löwenheimova logika tak připouští nekonečné řetězce kvantifikátorů a booleovských spojek.[36]

Löwenheim definuje relační výraz *(Relativausdruck)* jako

> *výraz, který je tvořen relativy nebo (ne nutně binárními) relativními koeficienty a ve kterých se $\sum$ a $\prod$ vyskytují pouze spočetněkrát. Každá $\sum$ a $\prod$ jdou buď (ranging over) přes všechny indexy, což znamená přes všechna individua domény prvního stupně, kterou budeme, následujíce Schrödera, značit 1^1, nebo přes všechny relativy, které mohou být utvořeny prostřednictvím této domény.*

[36]Viz LÖWENHEIM, Leopold. Über Möglichkeiten in Relativkalkül. Anglický překlad in van Heijenoort [Hei76], s. 232 - 233 a MOORE, Gregory H. The Emergence of First-Order Logic in: *Minnesota Studies of the Philosophy of Science XI.* český překlad in: [PerO6] str. 17 - 64.

U všech ostatních produktů a sum, které "nejdou přes" individua z univerza 1^1 nebo přes všechny relativy, Löwenheim předpokládá, že jsou konečné a označuje je nám již známým způsobem prostřednictvím $+$ nebo $\cdot$, ale nikdy neužívá výrazu $\sum$ nebo $\prod$. Rovnost dvou relativních výrazů nám dává relativní rovnici *(Relativgleichung)*, kterou Löwenheim převádí do "nulové" formy (*zero form*).

Naopak termínem individuový výraz *Zählausdruck* myslí takové výrazy, ve kterých jde každá $\sum$ a $\prod$ přes indexy, tedy přes individua z univerza 1^1. U těchto výrazů nelze "kvantifikovat" přes relace, jedná se tedy o výraz prvořádový. Rovnici pak nazývá individuou *Zählgleichung.* Jako příklad takové rovnice uvádí Löwenheim rovnici:

$$\sum_l \prod_{i,j,h} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\bar{z}_{li} \sum_k z_{ki} = 0.$$

Takovouto rovnici můžeme ještě "zhustit" a to na rovnost s relativy a nikoliv relativními koeficienty. Výše uvedená rovnice pak v Löwenheimově podání vypadá následovně:

$$0 \ddagger \{[1' + (\check{\bar{z}} \ddagger \bar{z})](0 \ddagger \check{\bar{z}}).\check{z}; 1\} \ddagger 0 = 0$$

Dobře formovaná formule *(well-formed formula)* prvořádového predikátového kalkulu s rovností je v Löwenheimově notaci taková, u které jsou užity moduly $1'$ a $0'$.

Löwenheim dále definuje tři typy relativních rovností a to:

1. identickou rovnost,
2. "útěkovou" rovnost *(Fluchtgleichung)*, která je rovností, která není splněna v žádném univerzu 1^1, ale je splněna v každém konečném univerzu 1^1,
3. rovnost zastavení *(Haltgleichung)*, která není dokonce splněna v každém konečném univerzu 1^1 pro libovolnou hodnotu indexů.

Löwenheim k rovnici dává ještě explicitnější vysvětlení a to, že tato rovnost není identicky splněna, ale je splněna pokaždé, když "sumová" nebo "produktová" proměnná jde přes konečnou doménu 1^1.

Výše definované termíny nám již postačí k tomu, abychom si přiblížily Löwenheimův článek z roku 1915 a znění Löwenheimovy věty.

3.2 O možnostech kalkulu relativů

Jak již bylo několikrát výše zmíněno slavný Löwenheimuv článek vyšel roku 1915 v *Mathematische Annalen.* Je rozdělen do tři paragrafů, přičemž první se týká především definic, jejichž většinu jsme rozebrali v předešlé podkapitole. Druhý, a pro nás nejvíce zajímavý, se týká prvořádových rovnic, kde je jako *Theorem 2* označena Löwenheimova věta. Třetí se pak týká singulární rovnosti *(singulary equation)*, ten ale není pro tuto práci tolik důležitý.

Údajná motivace pro formulaci Löwenheimovy věty byla dvojí. Ve Schröderově relativním kalkulu lze totiž vyjadřovat výroky dvěma způsoby a to:

1. pomocí kvantifikátorů a individuových proměnných,
2. pomocí vztahů bez individuových proměnných.

V podstatě se jedná o problém kondenzovatelnosti (zhušťování) výroků. Löwenheim ze Schröderovy teorie odstranil možnost interpretace individuí jako určitého druhu relací. A tento "objev" se týkal první věty, kterou Löwenheim připisuje Korseltovi.

3.2.1 Korseltova věta

Löwenheim jako větu jedna ve svém článku označuje větu německého matematika Alwina Korselta, který se také, navazujíce na tradici Schrödera, věnoval algebře relativů. Tato věta, ač podle Löwenheima obsahovala několik mezer v důkazu, byla jednou z průlomových v kalkulu relativů. Její znění je následující:

Věta 3.1. *Existuje nekondenzovatelná rovnice, například,*

$$\sum_{h,i,j,k} 0'_{hijk} = 0 \textit{ nebo } 1,$$

$$\sum_{h,i,j,k,l} 0'_{hijkl} = 0 \textit{ nebo } 1,$$

$$\cdots\cdots$$

jsou jistě nekondenzovatelná prvořádová tvrzení.

V důkazu této věty Löwenheim dokázal, že zkondenzovatelným výrokem prvního řádu nelze vyjádřit, že existují alespoň čtyři prvky.[37] Problém spočíval v převodu formulí z relačního kalkulu užívaného Löwenheimem do binárního predikátového kalkulu prvního řádu. Tedy, že nelze každý výrok, který bude formulován v Löwenheimově kalkulu, zkondenzovat. Tím započal jeho velký průlom v řádovosti logiky.

3.2.2 Löwenheimova věta

Po rozboru kondenzovatelnosti tvrzení se Löwenheim přesunul k analogickému tvrzení pro spočetné obory, které dnes známe jako Löwenheimovu větu. Originální změní věty, které publikoval Löwenheim ve svém článku je toto:[38]

Věta 3.2. *Je-li univerzum diskurzu alespoň spočetné nekonečné, pak to již není případ, kdy je prvořádová útěková rovnice splnitelná pro libovolnou hodnotu relativního koeficientu.*

Lépe pochopitelnou formulaci této věty uvádí G. H. Moore:

> *Pro nekonečný obor M (spočetný nebo i větší kardinality) platí, že je-li výrok prvního řádu platný v každém konečném oboru, avšak nikoli v každém oboru, pak tento výrok není platný v M.*[39]

[37] Srovnej LÖWENHEIM, Leopold. Über Möglichkeiten in Relativkalkül. Anglický překlad in van Heijenoort [Hei76],s. 233 - 235.

[38] Anglický překlad věty uvedené ve van Heijenoortovi zní: *If the domain is at least denumerably infinit, it is no longer the case that a first-order fleeing equation is satisfied for arbitrary values of the relative coefficients.* Srovnej LÖWENHEIM, Leopold. Über Möglichkeiten in Relativkalkül. Anglický překlad in van Heijenoort [Hei76],s. 235.

[39] Srovnej MOORE, Gregory H. The Emergence of First-Order Logic in: *Minnesota Studies of the Philosophy of Science XI* český překlad in: [PerO6] s. 48.

Löwenheimův důkaz a rozbor dané věty je velmi obsáhlý a zde na něj bohužel není dostatek prostoru. Zkusíme si jen nastínit hlavní body Löwenheimova postupu. Jeho důkaz se především opírá o formuli druhého řádu, která má tvar:

$$\prod_i \sum_k A_{ik} = \sum_{k_\lambda} \lambda \prod_i A_{ik_i}.$$

Kde suma, která je druhá v pořadí má speciální tvar, neboť se v rámci ní nekvantifikuje přes individua. Moore převádí danou formuli druhého řádu do "moderního" tvaru:

$$(\forall x)(\exists y)\phi(x,y) \iff (\exists f)(\forall x)\phi(x,f(y)),$$

kde f je funkční proměnná.[40]
Tuto formuli považoval Löwenheim za rozvinutelnou do infinitární formule s prvořádovým existenčním kvantifikátorem pro každé individuum oboru M. Na tomto místě pak použil Schröderovu eliminační metodu popsanou výše a dospěl tak k tomu, že potřebnou část výroku převedl do "normální formy", která je v jeho případě tvaru.

$$\sum \prod A = 0$$

Důkaz pak uzavírá tvrzením o aplikaci své věty na axiomatický systém Schrödera, Müllera a Hantingtona:

> *Všechny otázky vztahující se ať závisle či nezávisle na třídu Schröderových, Müllerových nebo Hantingtonových axiomů jsou rozhodnutelné (pokud vůbec) již ve spočetné doméně.*

Přestože Löwenheim sepsal svou větu pro logiku prvního řádu, své poznatky formuloval v logice, která logikou čistě prvního řádu nebyla.

Tímto uzavřeme kapitolu, která nám nastínila jak vůbec vznikla Löwenheim-Skolemova věta a z jakých základů vychází. Nyní se ale posuneme k "líbivějším" a současné logice přístupnějším formulacím, respektive reformulacím, LST.

---

[40] Srovnej MOORE, Gregory H. The Emergence of First-Order Logic in: *Minnesota Studies of the Philosophy of Science XI.* český překlad in: [PerO6] s. 48.

4 Thoralf Skolem a zrození paradoxu

Thoralf Skolem byl norským matematikem, který od roku 1909 působil na univerzitě v Oslu (tehdy ještě Kristiania). Už jeho rané práce, mezi kterými byla i jeho práce diplomová, se zabývaly studiem Schröderovy algebry logiky. Thoralf Skolem se začal Löwenheimovou prací zabývat krátce poté, co Löwenheim publikoval svou větu. Než ale Skolem poprvé reformuloval Löwenheimovu větu uplynulo téměř pět let. Skolemova první reformulace v prvé řadě zjednodušila formulaci a důkaz věty, část užité notace ale byla stále věrná tradici Peirce-Schröder, alespoň co se týče označení kvantifikátorů. Druhá reformulace pak převedla tvrzení do oblasti teorie množin a dala tak vzniknout Skolemovu paradoxu. Tento článek byl také jednou z příčin sporu, který vedl dlouhá léta s Zermelem o "síle" prvořádové axiomatice teorie množin.

4.1 Reformulace Löwenheimovy věty s užitím Skolemovy normální formy

Thoralf Skolem navázal na práci Leopolda Löwenheima nejprve roku 1919, kdy použil ve svém článku některé Löwenheimovy termíny týkající se kalkulu relativů (např. Zählausdruck). Významný posun a rozšíření Lwenheimovy práce však znamenal jeho článek *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit und Beweisbarkeit mathematischen Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen* (Logicko-kombinatorická zkoumání o splnitelnosti a dokazatelnosti matematických vět), který vyšel v roce 1920 v časopise *Skrifter, Videnskabsakademiet i Kristiana.* Konkrétně se Löwenheimově větě věnuje v první části článku, kterou nazval *Vereinfacher Beweis eines Satzes von L. Löwenheim. Verallgemeinerungen des Setzes.*

Skolem v úvodu svého článku popisuje Löwenheimův výsledek takto:

> *Tato věta [Löwenheimova] říká, že každý prvořádový výraz (Zählausdruck) je buď rozporný (widerspruchsvoll), nebo už je splnitelný v nějaké nekonečné spočetné doméně.*

V tomto ohledu musíme výraz "rozporný" (respektive sporný) brát v sémantickém slova smyslu, tedy že nemá model.

Zjednodušení Löwenheimovy věty spočívalo ve zjednodušení notace a především v užití Skolemovy normální formy, která se hned na první pohled liší od té Löwenheimovy, a Skolemových funkcí, kterými se vyhnul tomu, aby byly v důkazu užity druhořádové výroky (tak jak jsme to výše popsali u Löwenheima). Skolem píše, že se snaží zamezit použití indexů relačních výrazů, kterými Löwenheim druhořádové výroky formuloval.[41]

Skolem nejprve zobecňuje některé Löwenheimovy termíny. Místo výrazu *Zählausdruck* (tedy prvořádový výraz) začíná užívat *Zählaussage* (prvořádový výrok).

[41] Srovnej FENSTAD, Jens Erik (ed.). *Selected Works in Logic by Th. Skolem.* Universitetsforlaget, Oslo, 1970, s. 103.

Příkladem takového výroku je například formule tvaru:

$$\sum_x \prod_y R_{xy},$$

který nám říká, že pro každé x existuje y tak, že existuje *(bestehen)* relace R mezi x a y. Tím pozměnil a zobecnil definici prvořádového výroku.

Následně Skolem uvádí definici normální formy, kterou následně používá v důkazu LST:

Definice 4.1. Prvořádový výrok je v normální formě pokud je v takovém tvaru, kde na prvním místě je $\prod$-znak, pak $\sum$-znak a pak následuje výraz, který neobsahuje ani znak $\sum$ ani $\prod$. Taktéž každý prvořádový výrok, který obsahuje pouze $\prod$ nebo pouze $\sum$, je ve tvaru normální formy v případě, že tyto znaky stojí na začátku a pak následují další.

Příkladem normální formy jsou výroky:

$$\prod_x \sum_y R_{xy} \text{ nebo } \prod_x \prod_y \sum_z (R_{xy} + S_{yz}).$$

Kdežto formule tvaru:

$$\sum_x \prod_y R_{xy}$$

v normální formě není.

Na tuto definici Skolem navazuje větou, která nám říká následující:

Věta 4.1. *Je-li U libovolný prvořádový výrok, pak existuje prvořádový výrok U' v normální formě tak, že U je splněn v nějaké dané doméně tehdy a jen tehdy, je-li U' splnitelný, a naopak.*[42]

Touto větou si Skolem vytvořil prostor pro snazší formulaci věty a následné použití v důkazu LST. Skolemovi se tímto povedly v zásadě dvě věci. Skolem tuto větu neformuloval pouze pro logiku prvního řádu, ale následně důkaz ještě zobecnil pro spočetnou konjunkci spočetných disjunkcí prvořádových výroků. Dokázal tím tedy Löwenheimovu větu, avšak jak sám uvádí: *bez použití individuových symbolů jako podindexů (Subindiezes).*

Jeho formulace zní následovně:

Věta 4.2. *Každý výrok ve [Skolemově] normální formě je buď sporný, anebo je již splněn v konečné nebo nekonečné spočetné doméně.*[43]

[42]Pro úplnost uvádím větu v původním překladu: *Ist U eine beliebige Zählasussage, so gibt es eine Zählaussage U' von der Normalform beschaffen, dass U immer und nur dann innerhalb eines gegebenen Denkbereichs erfüllbar ist, wenn U' erfüllbar ist, und umgekehrt.* - FENSTAD, Jens Erik (ed.). *Selected Works in Logic by Th. Skolem.* Universitetsforlaget, Oslo, 1970, 104.

[43]Opět uvádím orginální znění věty: *Jede Aussage von Normalform ist entweder ein Widerspruch oder schon innerhalb eines endlichen oder eines abzählbar unendlichen Denkbereichs erfüllbar.* - FENSTAD, Jens Erik (ed.). *Selected Works in Logic by Th. Skolem.* Universitetsforlaget, Oslo, 1970, s. 106.

Zde bychom opět měli výraz "sporný" brát ve smyslu "neexistuje model".

První triviální znění Löwenheim-Skolemovy věty, které se dnes uvádí je tedy, že spočetná splnitelná množina prvořádových výroků, má spočetný model. Nicméně daleko zásadnější byla aplikace této věty na teorii množin, díky čemuž vznikl Skolemův paradox.

4.2 Zrození paradoxu: Löwenheim-skolemova věta a teorie množin

Skolem svou další reformulaci LST provedl v rámci teorie množin. Jeho motivace pro publikaci článku z roku 1923 *Einige Bemerkungen zur aximatischen Begründung der Mengenlehre* (Několik poznámek k axiomatickému základu teore množin) se týkala především samotného pojetí teorie množin.[44] Sám napsal:

> *Nejdůležitějším výsledkem, který uvádím, je relativita pojmů teorie množin. Již dříve (mezi léty 1915 - 1916) jsem se o tom zmínil Prof. Bernsteinovi v Göttingenu. To, že jsem to až doposavad nepublikoval mělo dva důvody. Zaprvé jsem se věnoval jiným problémům a zadruhé jsem si myslel, že je zřejmé, že množinové axiomy nejsou uspokojující pro poslední základy matematiky a že se o to největší matematici nebudou tolik starat. V poslední době ale k mému údivu velmi mnoho matematiků považuje tyto axiomy teorie množin za ideální základy matematiky. Proto přišel čas, abych publikoval kritiku.*[45]

Löwenheim-Skolemova věta mu toto tvrzení pomohla částečně obhájit. V tomto článku formulovat LST explicitně pro prvořádovou logiku. Skolem v podstatě navrhl, aby byla celá teorie množin formulována v rámci prvořádové logiky. V té době nebylo něco podobného obvyklé. Teorie množin byla běžně zvyklá užívat kvantifikace jak přes individua, tak ale i přes množiny individuí, množiny množin atd. Vystavěním teorie množin na logice prvního řádu Skolem ukázal relativitu pojmů teorie množin.

Skolem nejprve nastínil v několika bodech problematiku, kterou se snažil obhájit. Jedním z hlavních tvrzení bylo:

> *Jsou-li axiomy bezesporné, pak existuje obor B (Bereich B), pro který axiomy platí a jehož veškeré prvky (prvky oboru B) mohou být vyčísleny s pomocí všech kladných konečných čísel (mit Hilfe der ganzen positiven endlichen Zahlen numeriert werden können).*

Kde bychom si pod pojmem čísla (Zahlen) měli představit čísla celá (integers).

K důkazu toho tvrzení Skolem využije právě reformulaci Löwenheimovy věty a formuluje ji následujícím způsobem:

[44] Tato přednáška byla nejprve přednesena na pátém skandinávském kongresu matematiků v roce 1922, tiskem vyšla o rok později.

[45] Srovnej FENSTAD, Jens Erik (ed.). *Selected Works in Logic by Th. Skolem.* Universitetsforlaget, Oslo, 1970, s. 152.

Věta 4.3. *Je-li prvořádový výrok splněn v nějaké libovolné nekonečné doméně, pak už je splněn v nekonečné spočetné doméně.*[46]

Formulací a následným důkazem této věty pak Skolem poukázal na zdánlivý paradox v teorii množin. Tedy stojí-li teorie množin na axiomech, z nichž zřejmě vyplývá například Cantorova věta, která nám zajišťuje shora neomezenou škálu nekonečných množin a tedy v důsledku nespočetnou množinu, pak nám vyvstává zdánlivý spor s tím, že by tato nespočetná množina měla být prvkem spočetného modelu. Z této zdánlivé antinomie pak vzešel velmi obsáhlý filosofický a matematický spor, na jehož filosofickém řešení nepanuje shoda ani v dnešní době.[47]

Zajímavým důsledkem, který vyplývá ze Skolemova článku z roku 1923, avšak není v něm nikde explicitně vyřčen, je v podstatě úplnost prvořádové logiky. Z prací Löwenheima a Skolema vycházel i Kurt Gödel při psaní své disertační práce o úplnosti prvořádové logiky.[48] V dopise z roku 1967 napsal Kurt Gödel Hao Wangovi:

> *Věta o úplnosti, matematicky, je vskutku téměř triviálním důsledkem u Skolema z roku 1923. Nicméně faktem je to, že v té době nikdo (včetně samotného Skolema) nesestavil takový závěr.*[49]

Skolem se k LST během svého života ještě několikrát vrátil a publikoval o něm mnoho dalších matematických poznatků. Jeho článek z roku 1923 zapříčinil, že se o problém prvořádovosti teorie množin a obecně logiky začalo zajímat mnohem více matematiků a prvořádová logika tak mohla pomalu začít získávat podobu jakou známe dnes a stala se základem pro většinu matematických zkoumání. Nesmíme však zapomenout na to, že podnět pro oddělené zkoumání logiky prvního a vyšších řádu započal svou větou Leopold Löwenheim. Thoralf Skolem byl ale prvním, kdo formuloval logiku prvního řádu jako veškerou logiku a následně v této logice poprvé formuloval teorii množin.

[46] Opět uvádím překlad daného tvrzení: *Wenn eine Zählaussage überhaupt innerhalb irgend eines Denkbereichs erfüllt ist, dann ist sie schon innerhalb eines abzählbar unendlichen Denkbereichs erfüllt. - FENSTAD, Jens Erik (ed.). Selected Works in Logic by Th. Skolem. Universitetsforlaget, Oslo, 1970, s. 140.*

[47] O filosofických a matematických důsledcích Skolemova paradoxu více v: PUTNAM, Hilary. Models end Reality in: *Journal of Symbolic Logic, 45,* (1980) str. 464 - 482. český překlad in: [PerO6] str. 391 - 422., BAYS, Timothy. *Reflections on Skolem's Paradox*, PhD Thesis, 2001., KLENK, Virginia. Intended models and the Löwenheim-Skolem Theorem. in: *Journal of Philosophical Logic 5.* (1976) str. 475 - 489., SHAPIRO, Stewart. *Foundations whidaut Foundationalism. A Case for Second-order Logic.* Clarendon Press, Oxford, 1991.

[48] Gödel ve jedné ze svých poznámek odkazuje na důkaz Löwenheimovy věty ve Skolemově článku z roku 1920 - srovnej van Heijenoort str. 586.

[49] Srovnej BRADY, Geraldine. *From Peirce to Skolem.* Elsevier, Chicago, 2000, s. 3. nebo Dreben and Van Heijenoort 1986, s. 52.

5 Závěr

Při této krátké exkurzi do velmi bohaté a poutavé historie logiky, respektive algebry logiky, jsem se pokusila nastínit vznik a vývoj Löwenheim-Skolemovy věty a s tím spojený zrod Skolemova paradoxu. Mým cílem bylo mimo jiné poukázat na nestandardnost notace (myšleno ve smyslu jazyka současné logiky) a na některá úskalí, která s touto notací souvisí. Snažila jsem se také nastínit výpovědní hodnotu jazyka, který užíval Schröder, Löwenheim a částečně i Skolem, neboť byl bohatší než jazyk standardní logiky prvního řádu a umožňoval jim vytvářet nekonečně dlouhé výrazy (u Löwenheima a Schrödera přesahoval bohatost i druhořádové logiky).

Částečně jsem představila Schröderův relativní kalkul, který nám mimo jiné ukázal metodu, která se v principu velmi podobala Skolemově eliminaci kvantifikátorů - Skolemizaci. Tuto metodu pak aplikoval Leopold Löwenheim v důkazu své věty a jako první matematik tak ukázal možnost odděleného zkoumání prvořádového a druhořádového logického počtu, přestože ve svém důkazu použil výrazy druhořádového charakteru. Složitost notace a formulace důkazu Löwenheimovy věty měla také své stinné stránky a to, že neupoutala patřičnou pozornost matematického světa. Většina matematiků samozřejmě Löwenheimovy práce znala, ale nepřikládali jim důležitost nebo si nepovšimli významu, který měly. To byl případ i Thoralfa Skolema, který si síly daných tvrzení povšiml, ale nepovažoval za nutné se k nim vyjadřovat hned po jejich vydání.

Thoralf Albert Skolem po pěti letech od publikace Löwenheimovy věty vydal článek, ve kterém za pomoci Skolemovy normální formy větu i důkaz zjednodušil a otevřel si tím prostor pro další zkoumání. Průlom znamenala publikace z roku 1923, ve které Skolem opět reformuloval původní větu, ale tentokrát v rámci jím pozměněné teorie množin, která byla nově vystavěna čistě na logice prvního řádu. Jeho záměrem bylo, jak jsem nastínila, poukázat na relativitu pojmů tehdejší teorie množin a dokázat tak, že není vhodná jako pevný základ pro matematiku. Jedním z dalších kladů LST z roku 1923 byl fakt, že v něm nebyl důkaz proveden pomocí axiomu výběru, čímž se mimo jiné opět zjednodušil. Důsledkem této věty byl také nově vzniknuvší Skolemův paradox, který z matematického hlediska paradoxem není, ale z filosofického položil základy dlouhotrvajícího sporu. Matematicky se dá vysvětlit právě relativitou pojmů, téměř nepřekonatelnou antinomii ale představuje z hlediska filosofie jazyka.

Löwenheim-Skolemova věta nám tak v plné kráse předvedla nečekaný rys formálních systémů v podobě zdánlivého Skolemova paradoxu. Tedy máme-li nějaký prvořádový axiomatický systém, jehož některý axiom nám v důsledku umožňuje existenci nespočetné množiny (v případě teorie množin jsme si za příklad vzali Cantorovu větu), pak nám Löwenheim-Skolemova věta říká, že takováto množina obsahující nespočetně mnoho prvků má být součástí spočetného modelu teorie množin. Nutným předpokladem je samozřejmě bezespornost dané teorie. Řešení právě tkví v relativnosti pojmu nespočetná množina vůči nějakému modelu.

Současné znění LST je samozřejmě jiné než jsme si ukázali. Je formulován pomocí tvrzení o elementární podstruktuře a má velký význam pro teorii modelů, která by nevznikla bez Löwenheimova přičinění. Je ale důležité si uvědomit postupný vývoj té či oné matematické věty, neboť nám to ukazuje nové perspektivy bádání, možnost navázání na již zapomenuté matematické poznatky, které by současnou vědu mohly posunout jiným směrem.

Reference

[Bal01] BALCAR, Bohuslav, ŠTĚPÁNEK, Petr. *Teorie množin.* Academia, Praha, 2001.

[Bay01] BAYS, Timothy. *Reflections on Skolem's Paradox*, PhD Thesis, 2001.

[Bra00] BRADY, Geraldine. *From Peirce to Skolem.* Elsevier, Chicago, 2000.

[Fen70] FENSTAD, Jens Erik (ed.). *Selected Works in Logic by Th. Skolem.* Universitetsforlaget, Oslo, 1970.

[Hei67] VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879 - 1931.* Harward University Press, Cambridge, 1967.

[Kle76] KLENK, Virginia. Intended models and the Löwenheim-Skolem Theorem. in: *Journal of Philosophical Logic 5.* (1976) str. 475 - 489.

[Kol08] KOLMAN, Vojtěch. *Filosfie čísla: Základy logiky a aritmetiky v zrcadle analytické filosofie.* Filosofia, Praha, 2008.

[Kuh08] KUHN, Thomas Samuel. *Struktura vědeckých revolucí.* Oikoymenh, Praha, 2008.

[Löw15] LÖWENHEIM, Leopold. Über Möglichkeiten in Relativkalkül. in: *Mathematische Annalen, 76.* str. 447 - 470. Anglický překlad in van Heijenoort [Hei76] str. 228 - 251.

[Moo88] MOORE, Gregory H. The Emergence of First-Order Logic in: *Minnesota Studies of the Philosophy of Science XI: History and Philosophy of Modern Mathematics* (1988) str. 95 - 135. český překlad in: [PerO6] str. 17 - 64.

[Per06] PEREGRIN, Jaroslav. (ed.). *Logika 20. století: Mezi filosofií a matematikou. Výbor textů k moderní logice.* Filosofia, Praha, 2006.

[Per95] PEREGRIN, Jaroslav. (ed.).*Co člověk potřebuje, když potřebuje "logiku vyššího řádu"?*, (1995), Published online: jarda.peregrin.cz/mybibl/PDFTxt/485.pdf.

[Put80] PUTNAM, Hilary. Models end Reality in: *Journal of Symbolic Logic, 45,* (1980) str. 464 - 482. český překlad in: [PerO6] str. 391 - 422.

[Sha91] SHAPIRO, Stewart. *Foundations whidaut Foundationalism. A Case for Second-order Logic.* Clarendon Press, Oxford, 1991.

[Sch90] SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 1.* Teubner, Leipzig, 1891.

[Sch91] SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 2.* Teubner, Leipzig, 1893.

[Sch95] SHRÖDER, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band 3.* Teubner, Leipzig, 1895.

[Sch09] SHRÖDER, Ernst. *Abriss der Algebra der Logik, Band 1.* Teubner, Leipzig, 1909.

[Sch10] SHRÖDER, Ernst. *Abriss der Algebra der Logik, Band 2.* Teubner, Leipzig, 1910.

[Sko20] SKOLEM, Thoralf. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit und Beweisbarkeit mathematischen Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. in: *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse, 4.* str. 1 - 36. Orginální znění otištěno in: Fenstad [FEN70] str. 103 - 136. Anglický překlad in. [Hei67] str. 252 - 263.

[Sko23] SKOLEM, Thoralf. Einige Bemerkungen zur aximatischen Begründung der Mengenlehre. in: *Mathematikerkongressen i Helsingfors den 4 - 7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkonressen, Redogörelse. Akademiska Bokhandeln,* str. 217 - 232. Orginální znění otištěno in: Fenstad [FEN70] str. 137 - 152. Anglický překlad in: [Hei67] str. 290 - 301.

[Šve02] ŠVEJDAR, Vítězslav. *Logika: Neúplnost, složitost, nutnost.* Academia, Praha, 2002.