

## Posudek na bakalářskou práci Terezy Liepoldové

*Název:* Skolemův paradox v teorii množin: Zrození Löwenheim-Skolemovy věty a její důsledek v podobě Skolemova paradoxu

*Univerzita, katedra:* Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta, katedra logiky

*Vedoucí práce:* Mgr. Radek Honzík, Ph.D.

---

Práce je psaná v českém jazyce a měla za úkol zmapovat vývoj Löwenheim-Skolemovy věty, uvést její různé formulace, formulovat Skolemův „paradox“ a okomentovat jeho relevanci z filosofických i matematických pozic.

Autorka pojala práci spíše historicky a zkoumala původní prameny a původní formulace věty a důkazu.

V Kapitole 2 se věnuje Schröderovu reaktivnímu kalkulu, který představuje do velké hloubky. V některých případech naznačuje souvislost s dnešní notací a pojmy.

V Kapitole 3 popisuje Löwenheimovu formulaci věty, při které využil kalkul vyvinutý dříve Peircem a Schröderem. Je to právě tato skutečnost, totiž že použil tento kalkul, který – jak autorka naznačuje v souladu s literaturou – je značně složitý, která bránila většímu rozšíření věty v matematické komunitě.

V Kapitole 4 uvádí autorka reformulaci věty i jejího důkazu v dnes klasické formulaci v provořadové logice od Thoralfa Skolema. Skolem svou větu chápal jako argument proti provořadové formulaci různých teorií, hlavně teorie množin – Skolemovým paradoxem, jak se dnes často nazývá, je skutečnost, že má-li provořadová teorie množin model, pak má i spočetný model. Tato skutečnost relativizuje pojem nespočetných velikostí.

Bezesporným kladem práce je pečlivá analýza dobových pramenů a původní notace (v anglickém i německém jazyce). Původní notace je na dnešní poměry velmi složitá, až nepřehledná, a její přehledný popis je užitečný. Práce ukazuje názorně, jak nevhodně zvolená notace může bránit rozšíření jinak zajímavých myšlenek. Na několika místech se také autorka správně vyjadřuje k tomu, že pro dnešní matematiku není Skolemův paradox skutečným paradoxem, ale do jisté míry užitečným nástrojem pro získávání modelů.

Na druhé straně by práci neškodilo více srovnání mezi původní notací a dnešní notací – v některých případech není souvislost vůbec zřejmá a na základě příkladů v práci ji lze těžko domyslet. Některé pojmy v původní notaci jsou představeny bez definic, např. pojem relativní sumy na str. 20 (trošku vysvětlený až na straně 22). Zvláště v kapitole 2.4 nezbyvá než věřit, že výrazy jsou dobře, protože čtenář nemá dostatek informací, aby výrazy pochopil a mohl s nimi pracovat.

Největším problémem jsou nejasné a občas rovnou chybné formulace samotných LS vět. Těžko říct, kde je chyba – jestli v původním článku, v překladu, nebo v autorčině formulaci. Např. formulace na straně 36 tvrdí, že každý provořadový výraz (zřejmě výrok) je buď sporný nebo splnitelný ve spočetné struktuře. To zcela opomíjí výroky, které jsou splněny např. pouze ve struktuře mohutnosti nejvýše  $n$  pro nějaké přirozené číslo  $n$ . Podobně komentář na straně 38 nahoře tvrdí, že „... že spočetná splnitelná množina prvořadových výroků má spočetný model.“ Věta 3.2 nedává příliš smysl; autorka by ji mohla okomentovat a vysvětlit. Nejasné je také tvrzení, že „Jedním z dalších kladů LST z roku 1923 byl fakt, že v něm nebyl důkaz proveden pomocí axiomu výběru, čímž se mimo jiné opět zjednodušil.“ Přitom k důkazu je jistá forma AC potřeba vždy.

Doporučuji autorce, aby si k obhajobě pečlivě nastudovala přesné znění LS vět.

Práci hodnotím známkou *velmi dobře*.

Radek Honzík, 7. září 2012.