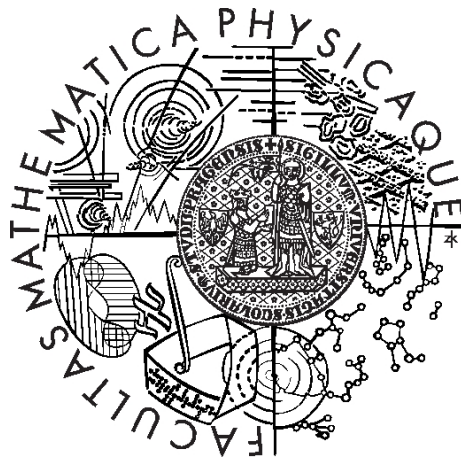


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Filip Roskovec

Superkonvergence pro časové diskretizace pomocí nespojitě Galerkinovy metody

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Miloslav Vlasák Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2012

Rád bych poděkoval svému vedoucímu práce Miloslavu Vlasákovi za trpělivost, se kterou mě seznamoval s problematikou Galerkinovy metody, odpovídal na moje dotazy a průběžně opravoval chyby. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přítelkyni za jejich podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Superkonvergence pro časové diskretizace pomocí nespojité Galerkinovy metody

Autor: Filip Roskovec

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Miloslav Vlasák Ph.D., katedra numerické matematiky

Abstrakt: Tématem této práce je teoretická analýza nespojité Galerkinovy metody pro časoprostorové diskretizace jednoduchých nestacionárních úloh. Narozdíl od standardní Metody konečných prvků (FEM) nevyžaduje nespojitá Galerkinova metoda spojitost přibližného řešení mezi sousedními prvky triangulace. Nespojitou Galerkinovu metodu aplikujeme zvlášť v čase a v prostoru. Nejprve diskretizujeme prostorovou část úlohy, a získáme tak prostorovou semidiskretizaci. Na semidiskrétní problém následně aplikujeme Časově nespojitou Galerkinovu metodu. Aproximaci řešení pak hledáme v prostoru nespojitých po částech polynomiálních funkcí stupně p a q v prostorové, respektive časové proměnné. Následuje analýza chyb tohoto schématu. Nakonec se věnujeme superkonvergenci schématu v uzlových bodech časové diskretizace. Numerické výpočty potvrzují teoretické výsledky.

Klíčová slova: Nespojitá Galerkinova metoda, Superkonvergence, Metoda konečných prvků, Rovnice vedení tepla

Title: Superconvergence for discontinuous Galerkin time discretizations

Author: Filip Roskovec

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: RNDr. Miloslav Vlasák Ph.D, Department of Numerical Mathematics

Abstract: The topic of this thesis is the application of the discontinuous Galerkin finite element method (DGFEM) on space-time discretizations of simple non-stationary problems. Unlike the standard finite element method, discontinuous Galerkin method does not require any continuity between neighbouring elements. We apply the DGFEM separately in space and in time. At first, we implement discretization with respect to space variables, whereby we acquire the space semidiscretization. Subsequently we apply Time discontinuous Galerkin method to the problem. We seek the approximate solution in the space of discontinuous piecewise polynomial functions of degree p in space and degree q in time. This is followed by the error estimates of this scheme. In the end we examine the superconvergence behaviour of the scheme in nodes of the time discretization. The theoretical results are verified by numerical experiments.

Keywords: Discontinuous Galerkin Method, Superconvergence, Finite Element Method, Heat equation

Obsah

Úvod	2
1 Nespojité Galerkinova metoda pro eliptické rovnice	3
1.1 Prostory funkcí	3
1.2 Slabá formulace Poissonovy rovnice	5
1.3 Aproximace řešení Abstraktního variačního problému pomocí Galerkinovy metody	6
1.4 Numerická analýza nespojité Galerkinovy metody	11
2 Evoluční rovnice	14
2.1 Spojitý problém a prostorová semidiskretizace	14
2.2 Časová diskretizace	15
2.3 Odhady chyb	17
2.4 Superkonvergence Časově nespojité Galerkinovy metody	20
3 Numerické experimenty	22
3.1 Rovnice časoprostorové nespojité Galerkinovy metody	22
3.2 Experimentální řád konvergence metody	23
Závěr	26
Seznam použité literatury	27

Úvod

V mnoha oblastech vědy a techniky je nutné hledat pomocí numerických metod přibližné řešení nejrůznějších parciálních diferenciálních rovnic. Tyto rovnice jsou velmi různorodé a použitelnost jednotlivých metod velmi závisí na vlastnostech řešené rovnice. V této práci se zabýváme takzvanou nespojitou Galerkinovou metodou. Ta může být úspěšně aplikována v různých formách na stacionární úlohy stejně jako na počátečně-okrajové nestacionární úlohy. Idea Galerkinovy metody spočívá v nahrazení nekonečně-dimenzionálního prostoru řešení slabé formulace dané parciální diferenciální rovnice nějakým jeho vhodným podprostorem. Úlohu diskretizujeme podobně jako při využití standardní Metody konečných prvků (FEM) a na jednotlivých prvcích triangulace aproximujeme hledané řešení polynomy. Narozdíl od konformní Metody konečných prvků však nevyžadujeme spojitost přibližného řešení mezi sousedními prvky triangulace. To může být v některých případech vhodné, například je-li gradient přesného řešení velmi strmý.

V první kapitole se zabýváme aplikací nespojitě Galerkinovy metody pro eliptické rovnice. Odvodíme schéma pro výpočet přibližného řešení Poissonovy rovnice s Dirichletovými okrajovými podmínkami a popíšeme význam jednotlivých stabilizačních členů, které přidáme do formulace úlohy. Takto v závislosti na koeficientu před jedním ze stabilizačních členů dostaneme nesymetrickou, symetrickou a neúplnou formulaci nespojitě Galerkinovy metody (NIPG, SIPG, IIPG). My se dále budeme věnovat pouze NIPG.

Tématem druhé kapitoly je využití Galerkinovy metody při diskretizaci nestacionárních problémů. Při řešení časoprostorové úlohy sestrojíme nejdříve takzvanou prostorovou semidiskretizaci. Tedy diskretizujeme úlohu pomocí nespojitě Galerkinovy metody pouze vzhledem k prostorovým proměnným, zatímco čas zůstává spojitý. Dostaneme tak soustavu lineárních obyčejných diferenciálních rovnic v časové proměnné. Tuto soustavu dále diskretizujeme pomocí Časově nespojitě Galerkinovy metody. Dále se zabýváme analýzou chyb plně diskretizovaného problému v čase i prostoru. Vzhledem k času dosahuje metoda optimálního řádu konvergence $O(\tau^{q+1})$ při aproximaci polynomy stupně q v časové proměnné. V koncových bodech intervalů časové diskretizace je ovšem řád metody vzhledem k času téměř dvojnásobný ($O(\tau^{2q+1})$). Zdá se, že řád konvergence je rovněž vyšší v uzlech pravé Radauovy kvadratury.

Třetí kapitola je věnována numerickým experimentům. Na dvou konkrétních příkladech ověřujeme teoretické výsledky z předchozí kapitoly. Vyšší řád konvergence můžeme skutečně pozorovat nejen v koncových bodech intervalů časové disretizace, ale i v bodech pravé Radauovy kvadratury stupně $q+1$ při aproximaci polynomy stupně q v časové proměnné.

1. Nespojité Galerkinova metoda pro eliptické rovnice

V této kapitole formulujeme úlohu nalezení slabého řešení Poissonovy rovnice s Dirichletovými okrajovými podmínkami na omezené oblasti s dostatečně hladkou hranicí. V další části definujeme pojem triangulace, odvodíme postup pro nalezení přibližného řešení Poissonovy rovnice pomocí nespojité Galerkinovy metody a budeme se krátce zabývat základními odhady chyby přibližného řešení.

1.1 Prostory funkcí

Nechť Ω je oblast v \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Prostor spojitých funkcí na Ω značíme $C(\Omega)$. Pro $k \in \mathbb{N}$ značíme $C^k(\Omega)$ prostor funkcí u , které mají na množině Ω spojitě všechny parciální derivace $D^\alpha u$ pro všechny multiindexy α takové, že $|\alpha| \leq k$, kde $D^\alpha v$ značí derivaci

$$\frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

Prostor $C^\infty(\Omega)$ je tvořen funkcemi, které náleží do prostoru $C^k(\Omega)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Označme $\text{supp } u = \{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}$ nosič funkce u . Pro $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ definujeme $C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \mid \text{supp } u \subset \Omega, \text{supp } u \text{ kompaktní}\}$

Nechť $p \in [1, \infty]$. Symbolem $L^p(\Omega)$ budeme značit Lebesgueovy prostory funkcí, definované klasickým způsobem (viz např. [8]). Připomeňme definice norem na těchto prostorech:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p} &= \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad p \in [1, \infty) \\ \|v\|_{L^\infty} &= \text{ess sup}_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha \mid |v(x)| \leq \alpha \text{ pro skoro všechna } x \in \Omega\} \end{aligned}$$

Dvojice $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ tvoří úplný normovaný lineární prostor. Prostor $L^2(\Omega)$ spolu se skalárním součinem definovaným jako $(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ tvoří Hilbertův prostor. V tomto textu budeme normou bez spodního indexu rozumět normu $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

Dále definujeme prostor lokálně integrovatelných funkcí

$$L_{loc}^p(\Omega) = \{v \text{ měřitelná na } \Omega \mid \left(\int_K |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \forall K \subset \Omega, K \text{ kompaktní}\}$$

Definice. Nechť $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ je multiindex. Buď $u, v_\alpha \in L_{loc}^1(\Omega)$. Řekneme, že v_α je slabá derivace funkce u podle x^α , jestliže

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \varphi \quad \text{pro } \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Pokud pro danou funkci $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ slabá derivace existuje, pak je určena jednoznačně. Je-li navíc u prvkem prostoru $C^k(\Omega)$, pak platí:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D^\alpha u) \varphi \quad \text{pro } \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

pro každý multiindex α takový, že $|\alpha| \leq k$. Tedy pokud existuje klasická derivace funkce u , pak se rovná derivaci slabé. Proto budeme dále užívat pro slabé derivace klasické značení $D^\alpha u$.

Pro $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1, \infty]$ značíme $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolevův prostor definovaný jako

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega); D^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq k\}.$$

Jeli $p \in [1, \infty)$, označme pro $v \in W^{k,p}(\Omega)$

$$\|v\|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$|v|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pro $p = \infty$, $v \in W^{k,\infty}(\Omega)$ budeme značit

$$\|v\|_{k,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^\infty}$$

$$|v|_{k,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_{L^\infty}$$

Potom $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ je norma a $|\cdot|_{k,p,\Omega}$ seminorma na $W^{k,p}(\Omega)$. Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ a $p \in [1, \infty]$ je $W^{k,p}(\Omega)$ Banachův prostor. Pro $p = 2$ tvoří $W^{k,2}(\Omega)$ Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$(u, v)_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Buď $p \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Označme

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p,\Omega}}.$$

Prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$ tvoří Banachův prostor a platí $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$. Pro $p = 2$ budeme užívat značení $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ respektive $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$ s normou $\|\cdot\|_{k,2,\Omega} = \|\cdot\|_{k,\Omega}$. Prostor $H_0^1(\Omega)$ spolu s $|\cdot|_{1,2,\Omega} = |\cdot|_{1,\Omega}$ tvoří Banachův prostor. Normy $|\cdot|_{1,\Omega}$ a $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ jsou ekvivalentní na $H_0^1(\Omega)$ (což vyplývá z Poincaré-Fridrichsovy nerovnosti, viz např. [8]).

Definice. Necht' $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ je omezená oblast a $k \in \mathbb{N}_0$. Řekneme, že Ω je oblast s hranicí $C^{k,1}$ (značíme $\Omega \in C^{k,1}$) právě tehdy, když existují kladná čísla α, β a M kartézských souřadných systémů

$$r = 1, \dots, M : (x_{r_1}, \dots, x_{r_{d-1}}, x_{r_d}) = (x'_r, x_{r_d})$$

a M funkcí $a_r : \Delta_r \rightarrow \mathbb{R}$ k -krát spojitě diferencovatelných majících lipschitzovské všechny derivace až do řádu k , kde

$$r = 1, \dots, M : \Delta_r = \{x'_r \in \mathbb{R}^{d-1}; |x_{r_i}| < \alpha \forall i \in \{1, \dots, d-1\}\}$$

takových, že pro $\forall x \in \partial\Omega$, $\exists r \in \{1, \dots, M\}$ tak, že $\exists x'_r \in \Delta_r : x = T_r(x'_r, x_{r_d})$, kde T_r je zobrazení (otočení a posunutí) realizující přechod od r -tého kartézského souřadného systému (x'_r, x_{r_d}) ke globálnímu souřadnému kartézskému systému (x', x_d) .

1.2 Slabá formulace Poissonovy rovnice

Pro jednoduchost se v tomto textu nebudeme zabývat obecnými parciálními diferenciálními rovnicemi 2. řádu, ale pouze jedním reprezentantem této třídy rovnic, takzvanou Poissonovou rovnicí. Rovněž nebudeme uvažovat obecné okrajové podmínky, ale vystačíme si Dirichletovými okrajovými podmínkami na celé hranici $\partial\Omega$. V části o nespojitě Galerkinově metodě pro evoluční rovnice budeme totiž dokonce vyžadovat, aby řešení bylo nulové na hranici.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí ($\Omega \in C^{0,1}$). Mějme dány funkce: $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $u_D : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Hledáme $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{v } \Omega \\ u &= u_D & \text{na } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

Funkci $u \in C^2(\Omega)$ splňující úlohu (1.1) nazveme klasickým řešením. Dříve než začneme s odvozováním slabého řešení Poissonovy rovnice, definujme si takzvaný Abstraktní variační problém.

Definice (Abstraktní variační problém). *Nechť V je reálný Hilbertův prostor s normou $\|\cdot\|_V$, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, V -eliptická bilineární forma, tj. $\exists M, \alpha > 0$:*

- $|a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V \quad \forall u, v \in V$
- $a(v, v) \geq \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$

a f je spojitý lineární funkcionál na V . Úloha nalezení řešení abstraktního variačního problému spočívá v nalezení prvku $u \in V$, pro který platí:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Věta 1.1 (Laxovo-Milgramovo lemma). *Abstraktní variační problém má právě jedno řešení.*

Důkaz. viz např. [8, Věta 2.1.3] □

Nejprve uvažujme homogenní Dirichletovu úlohu:

$$u_D \equiv 0.$$

Předpokládejme, že $f \in L^2(\Omega)$. Rovnici (1.1) přenásobíme funkcí $v \in H_0^1(\Omega)$ a integrujeme přes Ω . Označíme-li $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ vnější jednotkovou normálu $\partial\Omega$, dostaneme pomocí Greenovy věty (viz např. [8, Lemma A.3.79]):

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x)v(x) dS \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \end{aligned}$$

Označme $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$ a $\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx$.

Definice. *Řekneme, že u je slabým řešením úlohy (1.1) s homogenními okrajovými podmínkami, pokud splňuje:*

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.2)$$

Z Laxova-Milgramova lemmatu dostáváme, že úloha (1.2) s homogenními okrajovými podmínkami má jednoznačné řešení, neboť platí:

- a je bilinerární forma na $H_0^1(\Omega)$
- $a(u, v) \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}$
- $a(u, u) = |u|_{1,\Omega}^2 \geq 0$
- $\|f\|_{(H_0^1(\Omega))^*} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$

Nyní předpokládejme, že u_D není identicky nulová na $\partial\Omega$ a existuje $\tilde{u}_D \in H^1(\Omega)$ taková, že $\tilde{u}_D|_{\partial\Omega} = u_D$ ve smyslu stopy (přesná definice operátoru stopy viz např. [8]). Předpokládejme, že $u \in H^1(\Omega)$ je řešení $a(u, v) = \langle f, v \rangle$, kde a je vhodná spojitá eliptická bilineární forma. Nechť $\tilde{u} = u - \tilde{u}_D$. Je-li u slabé řešení nehomogenní Poissonovy rovnice, pak $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ a zároveň splňuje rovnici:

$$a(\tilde{u}, v) = \langle f, v \rangle - a(\tilde{u}_D, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.3)$$

Definujeme-li $\langle \tilde{f}, v \rangle = \langle f, v \rangle - a(\tilde{u}_D, v)$, pak $\tilde{f} \in [H_0^1(\Omega)]^*$. Tedy úloha (1.3) má tvar Abstraktního variačního problému a z Laxova-Milgramova lemmatu plyne, že $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ (resp. $u \in H^1(\Omega)$) je určeno jednoznačně.

1.3 Aproximace řešení Abstraktního variačního problému pomocí Galerkinovy metody

Prostor V má obecně nekonečnou dimenzi. Idea Galerkinovy metody spočívá v nahrazení prostoru V nějakým jeho vhodným konečně-dimenzionálním podprostorem V_h . Pro každý prostor V_h budeme řešit diskrétní problém spočívající v nalezení prvku $u_h \in V_h$, pro který platí:

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.4)$$

Symbolem N_h označme dimenzi prostoru V_h . Nechť $\phi_1, \dots, \phi_{N_h}$ je báze prostoru V_h . Potom $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \phi_i(x)$. Chceme-li určit funkci u_h , stačí vypočítat koeficienty $\{u_1, \dots, u_{N_h}\}$. Ty získáme jako řešení soustavy rovnic:

$$\sum_{j=1}^{N_h} a(\phi_j, \phi_i) u_j = \langle f, \phi_i \rangle \quad \forall i = 1, 2, \dots, N_h \quad (1.5)$$

Označme $U = \{u_1, \dots, u_{N_h}\}$, $F = \{\langle f, \phi_1 \rangle, \dots, \langle f, \phi_{N_h} \rangle\}$ a $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{N_h}$ takzvanou *matici tuhosti*, kde $a_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i)$. Potom můžeme soustavu rovnic zapsat ve tvaru:

$$\mathbb{A}U = F$$

Budeme-li se zabývat existencí a jednoznačností řešení, stačí nám dokázat, že matice \mathbb{A} je regulární a pravá strana F konečná. Postačující podmínkou pro regularitu matice \mathbb{A} , je například V_h -elipticita bilineární formy a .

Dále krátce popíšeme konstrukci prostorů V_h .

Definice. *Triangulací množiny Ω rozumíme množinu \mathcal{T}_h konečně mnoha podmnožin T množiny Ω s následujícími vlastnostmi:*

(T1) *Každá množina $T \in \mathcal{T}_h$ je uzavřená a má neprázdný jednoduše souvislý vnitřek.*

(T2) *Každá množina $T \in \mathcal{T}_h$ má lipchitzovsky spojitou hranici ∂T .*

(T3) $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$

(T4) *Průnik vnitřků libovolných dvou různých množin $T \in \mathcal{T}_h$ je prázdný.*

Definice. *Řekneme, že množina $T \in \mathcal{T}_h$ je d -simplex, jestliže existují body $a_1, a_2, \dots, a_{d+1} \in \mathbb{R}^d$, které nejsou obsaženy v žádné nadrovině prostoru \mathbb{R}^d , a T je jejich konvexní obal.*

V tomto textu budeme vždy předpokládat, že všechny prvky $T \in \mathcal{T}_h$ jsou d -simplexy.

Řekneme, že prvky $T, T' \in \mathcal{T}_h$ jsou sousední, pokud $(d-1)$ -dimenzonální Lebesgueova míra průniku $\partial T \cap \partial T'$ je kladná. Pro libovolnou množinu $T \in \mathcal{T}_h$ označme $h_T = \text{diam}(T)$, $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ a $|T|$ d -dimenzonální míru množiny T . Průměr největší d -dimenzonální koule vepsané do T budeme značit ρ_T . Řekneme, že $\Gamma \subset T$ je stěna množiny T , jestliže Γ je maximální společná otevřená podmnožina $\partial T \cap \partial T'$, kde T' je nějaký soused množiny T , nebo $\Gamma = \partial T \cap \partial \Omega$. Systém všech stěn všech prvků $T \in \mathcal{T}_h$ označíme \mathcal{F}_h , dále označme množinu všech vnitřních stěn \mathcal{F}_h^I a množinu všech stěn na hranici \mathcal{F}_h^B . Předpokládáme, že oblast Ω je lipschitzovská, takže pro skoro všechny body $x \in \partial \Omega$ existuje vektor vnější normály. Pro skoro všechny body patřící nějaké stěně $\Gamma \in \mathcal{F}_h$ tedy můžeme definovat jednotkový normálový vektor $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$. Ve vnitřku oblasti Ω zvolíme směr normály libovolně pro $\forall \Gamma \in \mathcal{F}_h^I$. Pro $\Gamma \subset \partial \Omega$ zvolíme jednotkový normálový vektor ve směru vnější normály.

Nechť $h_0 > 0$, budeme předpokládat, že máme systém triangulací $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0, h_0)}$ s následujícími vlastnostmi:

- Existuje $C_R > 0$ takové, že $\frac{h_T}{\rho_T} \leq C_R$ pro všechna $T \in \mathcal{T}_h$ a všechna $h \in (0, h_0)$. Element T splňující tuto podmínku nazýváme regulárním.
- Existuje $C_K > 0$ takové, že pro libovolné dva sousední prvky $T, T' \in \mathcal{T}_h$ a všechna $h \in (0, h_0)$ platí $h_T \leq C_K h_{T'}$. Triangulaci splňující tuto vlastnost nazýváme lokálně kvaziuniformní.

Regularita nám říká, že vnitřní úhly jednotkových d -simplexů jsou omezené nějakou konstantou a lokální kvaziuniformita nám zajistí, že libovolné dva sousední d -simplexy dané triangulace \mathcal{T}_h mají srovnatelný objem.

Pro danou triangulaci \mathcal{T}_h definujme takzvané "broken" Sobolevovy prostory:

$$H^k(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v; v|_T \in H^k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

s normou

$$\|v\|_{H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^k(T)}^2 \right)^{1/2}$$

a seminormou

$$|v|_{H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^k(T)}^2 \right)^{1/2}.$$

Pro každou $\Gamma \in \mathcal{F}_h^I$ existují dva sousední prvky $T^{(L)}, T^{(R)} \in \mathcal{T}_h$ takové, že Γ je jejich průnikem. Označme $T^{(L)}$ prvek, jehož vnější normála je rovna \mathbf{n} a druhý prvek $T^{(R)}$. Funkce $v \in H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)$ nemusí být obecně spojitá na stěnách $\Gamma \in \mathcal{F}_h^I$. Označme pro $\Gamma \in \mathcal{F}_h^I$:

$$v_R(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} v(x + \delta \mathbf{n}), \quad v_L(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^-} v(x + \delta \mathbf{n})$$

$$[v]_\Gamma = v_L - v_R, \quad \langle v \rangle_\Gamma = \frac{1}{2}(v_L + v_R)$$

Pro $\Gamma \in \mathcal{F}_h^B$ položme:

$$v_\Gamma = [v]_\Gamma = \langle v \rangle_\Gamma = v_\Gamma^{(L)} = \lim_{\delta \rightarrow 0^-} v(x + \delta \mathbf{n})$$

Nechť $p \in \mathbb{N}_0$. Přibližné řešení pomocí Galerkinovy nespojité metody budeme hledat v prostoru nespojitých po částech polynomiálních funkcí:

$$S_{h,p} = \{v; v|_T \in P^p(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

kde prostor $P^p(T)$ značí prostor polynomů na T stupně $\leq p$.

Odvoďme si nyní Galerkinovu nespojitou metodu pro Poissonovu rovnici. Předpokládejme, že funkce $u \in H^2(\Omega)$ je slabým řešením úlohy (1.1). Budeme postupovat podobně jako při odvozování slabé formulace této úlohy. Přenásobíme rovnici (1.1) testovací funkcí $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ a integrujeme přes libovolný prvek $T \in \mathcal{T}_h$. Použitím Greenovy věty dostaneme:

$$\int_T \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial T} \nabla u \cdot \mathbf{n}_T v dS = \int_T f v dx, \quad (1.6)$$

kde \mathbf{n}_T je vnější jednotková normála prvku T . Funkce $u \in H^2(\Omega)$, proto $\nabla u = \langle \nabla u \rangle$. Posčítáme rovnost (1.6) přes všechna $T \in \mathcal{T}_h$ a využijeme rovnosti:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \nabla u \cdot \mathbf{n}_T v dS = \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h} \int_\Gamma \langle \nabla u \rangle \cdot \mathbf{n} [v] dS,$$

neboť $[v] = v$ pro $\Gamma \in \mathcal{F}_h^B$. Zaveďme značení $\int_{\mathcal{F}_h} = \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h} \int_\Gamma$. Dohromady dostáváme:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\mathcal{F}_h} \langle \nabla u \rangle \cdot \mathbf{n} [v] dS = \int_\Omega f v dx \quad (1.7)$$

Levá strana rovnosti (1.7) tvoří jistou bilineární formu. Ta však není eliptická a navíc v ní nejsou žádným způsobem zohledněny okrajové podmínky. Při zkoumání konvergence přibližného řešení by navíc bylo výhodné, kdyby daná bilineární forma byla symetrická.

Nejprve se budeme zabývat symetrií bilinerní formy tvořené levou stranou rovnosti (1.7). Využijeme opět hladkosti slabého řešení u . Na levou stranu přidáme stabilizační člen

$$\Theta \int_{\mathcal{F}_h^I} [u] \mathbf{n} \cdot \langle \nabla v \rangle dS, \quad (1.8)$$

který je identicky rovný nule pro libovolnou konstantu Θ , neboť $[u] = 0$. Symetrii získáme volbou $\Theta = -1$ a přidáním okrajového členu:

$$\Theta \int_{\mathcal{F}_h^B} [u] \mathbf{n} \cdot \langle \nabla v \rangle dS = \Theta \int_{\partial\Omega} u_D \mathbf{n} \cdot \nabla v dS \quad (1.9)$$

Zároveň jsme tím do rovnosti (1.7) zapojili okrajovou Dirichletovu podmínku. Pro $\sigma > 0$ zavedeme penalizační bilineární formu:

$$J_h^\sigma(u, v) = \int_{\mathcal{F}_h^I} \frac{\sigma}{|\Gamma|} [u][v] dS + \int_{\mathcal{F}_h^B} \frac{\sigma}{|\Gamma|} u v dS, \quad (1.10)$$

kde $|\Gamma|$ značí (d-1)-dimenzonální Lebesgueovu míru stěny Γ . Je-li $u \in H^2(\Omega)$, potom platí:

$$J_h^\sigma(u, v) = \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma}{|\Gamma|} u_D v dS.$$

Přidáme-li členy (1.8), (1.9) a (1.10) do rovnosti (1.7), můžeme definovat formulaci Poissonovy rovnice s Dirichletovými okrajovými podmínkami pomocí nespojitě Galerkinovy metody:

Definice. Řekneme, že $u_h \in S_{h,p}$ je přibližným řešením Poissonovy rovnice s Dirichletovými okrajovými podmínkami získaným pomocí nespojitě Galerkinovy metody, jestliže splňuje:

$$A_h(u, v) = a_h(u_h, v_h) + J_h^\sigma(u_h, v_h) = l_h(v_h) \quad \forall v_h \in S_{h,p}, \quad (1.11)$$

kde J_h^σ je definována rovností (1.10),

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx - \int_{\mathcal{F}_h} \langle \nabla u_h \rangle \cdot \mathbf{n} [v_h] dS + \Theta \int_{\mathcal{F}_h} [u_h] \cdot \mathbf{n} \langle \nabla v_h \rangle dS,$$

$$l_h(v_h) = \int_{\Omega} f v_h dx + \Theta \int_{\partial\Omega} u_D \mathbf{n} \cdot v_h dS + \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma}{|\Gamma|} u_D \mathbf{n} \cdot v_h dS.$$

Přesný tvar formulace (1.11) závisí na volbě Θ . Volbou $\Theta = -1$ dostaneme Symetrickou nespojitou Galerkinovu metodu (SIPG – Symmetric Interior Penalty Galerkin method). $\Theta = 0$ nám dá takzvanou Neúplnou Galerkinovu metodu (IIPG – Incomplete Interior Penalty Galerkin method) a konečně pro $\Theta = 1$ dostaneme Nesymetrickou Galerkinovu metodu (NIPG – Nonsymmetric Interior Penalty Galerkin method). Pro tyto varianty označme bilineární formu A_h pomocí horních indexů A_h^S, A_h^I a A_h^N . V tomto textu se budeme dále zabývat především NIPG.

Poznámka. Z předchozího postupu je zřejmé, že formulace (1.11) je konzistentní pro slabé řešení $u \in H^2(\Omega)$, tj. $a_h(u, v_h) + J_h^\sigma(u, v_h) = l_h(v_h)$. Díky tomu mají funkce u_h, u vlastnost takzvané Galerkinovské ortogonality:

$$A_h(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in S_{h,p} \quad (1.12)$$

K důkazu následující věty budeme potřebovat tyto dvě nerovnosti:

- Pro všechna $v \in H^1(T)$, $T \in \mathcal{T}_h$, $h \in (0, h_0)$ existuje konstanta $C_1 > 0$ nezávislá na v , h , T taková, že platí:

$$\|v\|_{L^2(\partial T)}^2 \leq C_1(\|v\|_{L^2(T)}|v|_{H^1(T)} + h_T^{-1}\|v\|_{L^2(T)}^2) \quad (1.13)$$

(viz např. [1, Věta 3.10])

- Pro všechna $v \in P^p(T)$, $T \in \mathcal{T}_h$, $h \in (0, h_0)$ existuje konstanta $C_2 > 0$ nezávislá na v , h , T taková, že platí:

$$|v|_{H^1(T)} \leq C_2 h_T^{-1} \|v\|_{L^2(T)} \quad (1.14)$$

(viz např. [2, důkaz Věty 3.2.6])

Definice. Na prostoru $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ definujeme normu předpisem:

$$\|v_h\|_{DG} = \left(\frac{1}{2} (|v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + J_h^\sigma(v_h, v_h)) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.15)$$

Poznámka. Snadno lze ověřit, že $\|\cdot\|_{DG}$ je opravdu norma na prostoru $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$.

Věta 1.2. Pro $\Theta = -1, 0, 1$ existuje konstanta $\sigma^0 > 0$ taková, že je-li $\sigma > \sigma^0$, pak má úloha (1.11) jednoznačné řešení.

Důkaz. Potřebujeme ověřit, za jakých předpokladů je bilineární forma $A_h S_{h,p}$ -eliptická. Ověřme nejprve $S_{h,p}$ -elipticitu pro SIPG. Budeme postupovat podobně jako v [3]. Hledáme $\sigma^0 > 0$ a $\alpha > 0$ takové, že:

$$\alpha \|v_h\|_{DG}^2 \leq a_h^S(v_h, v_h) + J_h^\sigma(v_h, v_h) \quad \forall \sigma > \sigma^0 \quad \forall v_h \in S_{h,p}$$

Zvolme libovolnou funkci $v_h \in S_{h,p}$. Potom pro libovolné $K > 0$ využitím Hölderovy nerovnosti a následně Youngovy nerovnosti dostaneme:

$$\begin{aligned} a_h^S(v_h, v_h) &= |v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 - 2 \int_{\mathcal{F}_h} \langle \nabla v_h \rangle \cdot \mathbf{n} [v_h] dS \\ &\geq |v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 - 2 \left(\int_{\mathcal{F}_h} \frac{|\Gamma|}{K} |\langle \nabla v_h \rangle|^2 dS \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{F}_h} \frac{K}{|\Gamma|} [v_h]^2 dS \right)^{1/2} \\ &\geq |v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 - \left(\int_{\mathcal{F}_h} \frac{|\Gamma|}{K} |\langle \nabla v_h \rangle|^2 dS + \int_{\mathcal{F}_h} \frac{K}{|\Gamma|} [v_h]^2 dS \right) \end{aligned}$$

Použitím nerovností (1.13) a (1.14) dostaneme:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}_h} \frac{|\Gamma|}{K} |\langle \nabla v_h \rangle|^2 dS &\leq \frac{1}{K} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \int_{\partial T} |\nabla v_h|^2 dS \\ &\leq \frac{C_1}{K} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T (\|\nabla v_h\|_{L^2(T)} |\nabla v_h|_{H^1(T)} + h_T^{-1} \|\nabla v_h\|_{L^2(T)}^2) \\ &\leq \frac{C_1}{K} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T |v_h|_{H^1(T)} C_2 h_T^{-1} |v_h|_{H^1(T)} + |v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 \right) \\ &\leq \frac{C_1(1 + C_2)}{K} |v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 \end{aligned}$$

K důkazu tvrzení věty tedy stačí, aby platila následující nerovnost:

$$\begin{aligned} \alpha \|v_h\|_{DG}^2 &= \frac{\alpha}{2} (|v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + J_h^\sigma(v_h, v_h)) \\ &\leq |v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 - \frac{C_1(1+C_2)}{K} |v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 - \frac{K}{\sigma} J_h^\sigma(v_h, v_h) + J_h^\sigma(v_h, v_h) \end{aligned}$$

Tato nerovnost bude splněna, pokud:

$$1 \geq \frac{\alpha}{2} + \frac{C_1(1+C_2)}{K} \quad \text{a zároveň} \quad 1 \geq \frac{\alpha}{2} + \frac{K}{\sigma} \quad (1.16)$$

Položme $\sigma^0 = C_1(1+C_2)$. Potom pro libovolné $\sigma > \sigma^0$, existuje $K \in (\sigma^0, \sigma)$ a $\alpha > 0$ taková, že platí nerovnost (1.16). A tedy bilineární forma A_h^S je $S_{h,p}$ -eliptická

Pro IIPG by se důkaz provedl obdobně. Pro NIPG je bilineární forma A_h^N $S_{h,p}$ -eliptická pro libovolné $\sigma > 0$. Pravá strana úlohy (1.11) je zjevně omezená pro libovolné $v_h \in S_{h,p}$. Řešení (1.11) tedy existuje a je určeno jednoznačně. \square

1.4 Numerická analýza nespojité Galerkinovy metody

Nakonec se věnujme krátce odhadům chyby přibližného řešení u_h získaného pomocí nespojité Galerkinovy metody pro Poissonovu rovnici s Dirichletovými okrajovými podmínkami. V následujícím textu předpokládejme:

- (P1) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí.
- (P2) Systém triangulací $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0, h_0)}$ se skládá z d -simplexů, je regulární a lokálně kvaziuniformní.
- (P3) Prostor $S_{h,p}$ je tvořen po částech polynomiálními funkcemi stupně $\leq p$.
- (P4) Funkce u je slabé řešení Poissonovy rovnice (1.1) a u_h je přibližné řešení získané pomocí nespojité Galerkinovy metody s konstantou $\sigma > \sigma^0$ z Věty 1.2 zajišťující elipticitu bilineární formy A_h .

Definice. Označme $\Pi_h v$ L^2 -projekci funkce $v \in L^2(\Omega)$ do prostoru $S_{h,p}$, která splňuje:

$$\Pi_h v \in S_{h,p}, \quad (v, \phi_h) = (\Pi_h v, \phi_h) \quad \forall \phi_h \in S_{h,p} \quad (1.17)$$

Je-li $T \in \mathcal{T}_h$, potom $\Pi_h v|_T$ je $L^2(T)$ -projekce funkce v na prostor $P^p(T)$.

Lemma 1.1. Jsou-li splněny předpoklady (P1)–(P4), pak existuje konstanta $C_\Pi > 0$ nezávislá na h taková, že pro všechna přirozená čísla $k \in [1, p]$, $\forall v \in H^{k+1}(T)$, $\forall T \in \mathcal{T}_h$ a $h \in (0, h_0)$ platí:

$$\|\Pi_h v - v\|_{L^2(T)} \leq C_\Pi h_T^{k+1} |v|_{H^{k+1}(T)} \quad (1.18)$$

$$\|\Pi_h v - v\|_{H^1(T)} \leq C_\Pi h_T^k |v|_{H^{k+1}(T)} \quad (1.19)$$

$$\|\Pi_h v - v\|_{DG} \leq (2C_1 + 1) C_\Pi h^k |v|_{H^{k+1}(\Omega, \mathcal{T}_h)} \quad (1.20)$$

Důkaz. První dvě nerovnosti jsou klasickými výsledky Metody konečných prvků. Jejich důkaz nalezneme například v [2]. Třetí nerovnost získáme kombinací nerovnosti (1.13) a Lemmatu 9 v [4]. \square

Lemma 1.2. *Za předpokladů (P1)–(P4) existuje konstanta $C_A > 0$ nezávislá na h taková, že pro $\forall u \in H^{p+1}(\Omega)$ a $\forall v_h \in S_{h,p}$ platí:*

$$|A_h^{N,S}(u - \Pi_h u, v_h)| \leq C_A h^p \|v_h\|_{DG} |u|_{H^{p+1}(\Omega)} \quad (1.21)$$

Důkaz. Důkaz lze provést obdobně jako v [4, Lemma 9] \square

Lemma 1.3. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3). Pak je bilineární forma A_h stejnoměrně omezená v prostoru $S_{h,p}$. Tedy existuje konstanta $C_B > 0$ nezávislá na h taková, že platí*

$$|A_h(v_h, w_h)| \leq C_B \|v_h\|_{DG} \|w_h\|_{DG}, \quad \forall v_h, w_h \in S_{h,p}. \quad (1.22)$$

Důkaz. Zvolme libovolné $v_h, w_h \in S_{h,p}$. Potom můžeme provést odhad

$$\begin{aligned} A_h(v_h, w_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla v_h \cdot \nabla w_h dx - \int_{\mathcal{F}_h} \langle \nabla v_h \rangle \cdot \mathbf{n} [w_h] dS \\ &\quad + \Theta \int_{\mathcal{F}_h} [v_h] \cdot \mathbf{n} \langle \nabla w_h \rangle dS + \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma}{|\Gamma|} [v_h] [w_h] dS \\ &\leq |v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)} |w_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)} + \left(\int_{\mathcal{F}_h} \frac{|\Gamma|}{\sigma} |\langle \nabla v_h \rangle|^2 dS \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{F}_h} \frac{\sigma}{|\Gamma|} [w_h]^2 dS \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_{\mathcal{F}_h} \frac{|\Gamma|}{\sigma} |\langle \nabla w_h \rangle|^2 dS \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{F}_h} \frac{\sigma}{|\Gamma|} [v_h]^2 dS \right)^{1/2} + J_h^\sigma(v_h, w_h) \end{aligned}$$

Členy na pravé straně nerovnosti můžeme odhadnout podobně jako v důkazu Věty 1.2. Pro $M > 0$ dostatečně velké dostaneme:

$$\begin{aligned} |A_h(v_h, w_h)| &\leq |v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)} |w_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)} + C |v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)} J_h^\sigma(w_h, w_h)^{1/2} \\ &\quad + C |w_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)} J_h^\sigma(v_h, v_h)^{1/2} + J_h^\sigma(v_h, w_h) \\ &\leq \frac{M}{2} (|v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 |w_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + |v_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 J_h^\sigma(w_h, w_h) + |w_h|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 J_h^\sigma(v_h, v_h) \\ &\quad + J_h^\sigma(v_h, v_h) J_h^\sigma(w_h, w_h))^{1/2} = M \|v_h\|_{DG} \|w_h\|_{DG} \end{aligned}$$

\square

Věta 1.3. *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3). Nechť $u \in H^{p+1}(\Omega)$ je slabé řešení Poissonovy rovnice (1.1) a $u_h \in S_{h,p}$ řešení příslušné diskrétní úlohy (1.11). Potom existuje konstanta $C_{DG} > 0$ nezávislá na $h \in (0, h_0)$ taková, že platí:*

$$\|u - u_h\|_{DG} \leq C_{DG} h^p |u|_{H^{p+1}(\Omega)} \quad (1.23)$$

Důkaz. Z trojúhelníkové nerovnosti můžeme rozdělit odhad na dvě části:

$$\|u - u_h\|_{DG} \leq \|u - \Pi_h u\|_{DG} + \|\Pi_h u - u_h\|_{DG}. \quad (1.24)$$

První část můžeme odhadnout pomocí nerovnosti (1.20) z Lemmatu 1.1:

$$\|u - \Pi_h u\|_{DG} \leq (2C_1 + 1)C_\Pi h^p |u|_{H^{p+1}(\Omega)}. \quad (1.25)$$

K odhadu druhé části nerovnosti (1.24) využijeme $S_{h,p}$ -elipticity bilineární formy $A_h^{S,N}$:

$$\alpha \|\Pi_h u - u_h\|_{DG}^2 \leq A_h^{S,N}(\Pi_h u - u_h, \Pi_h u - u_h) \quad (1.26)$$

Funkce $\Pi_h u - u_h \in S_{h,p}$. Využijeme-li navíc nerovnost (1.21), můžeme provést následující odhady:

$$\begin{aligned} \|\Pi_h u - u_h\|_{DG}^2 &\leq \frac{1}{\alpha} A_h^{S,N}(\Pi_h u - u_h, \Pi_h u - u_h) \\ &= \frac{1}{\alpha} A_h^{S,N}(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u_h) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} C_A h^p \|\Pi_h u - u_h\|_{DG} |u|_{H^{p+1}(\Omega)} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Složení nerovností (1.24), (1.25) a (1.27) dostaneme:

$$\|u - u_h\|_{DG} \leq ((2C_1 + 1)C_\Pi + \frac{1}{\alpha} C_A) h^p |u|_{H^{p+1}(\Omega)}, \quad (1.28)$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka. *Ve Větě 1.3 jsme odvodili p -tý řád konvergence přibližného řešení v DG -normě. Odvození optimálních odhadů v L^2 -normě je složitější a v tomto textu se jím nebudeme zabývat. Pro SIPG variantu lze za vhodných předpokladů pomocí Aubin-Nitscheho techniky odvodit v L^2 -normě řád konvergence $O(h^{p+1})$. Pro varianty IIPG a NIPG je problematika ještě složitější a kromě speciálních příkladů není tento problém ještě uspokojivě vyřešen. Z numerických experimentů vyplývá, že řád konvergence $O(h^{p+1})$ dostaneme pouze pro p liché, zatímco pro p sudé je řád konvergence pouze $O(h^p)$.*

2. Evoluční rovnice

V této kapitole se budeme zabývat nestacionárními parabolickými parciálními rovnicemi, speciálně rovnicí vedení tepla s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami a počáteční podmínkou u_0 . Popíšeme si prostory funkcí, které budeme později potřebovat. Odvodíme semi-diskretizaci problému pomocí prostorové nesymetrické nespojitě Galerkinovy metody (NIPG). K tomu využijeme znalostí z první kapitoly. Tímto způsobem dostaneme soustavu lineárních obyčejných diferenciálních rovnic. V dalším se budeme zabývat úplnou diskretizací problému. Popíšeme odvození časově nespojitě Galerkinovy metody a budeme se věnovat konvergenci přibližného řešení.

2.1 Spojitý problém a prostorová semidiskretizace

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená polygonální oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí a $T > 0$. Označme $Q_T = (0, T) \times \Omega$. Nechť $f \in C(0, T, L^2(\Omega))$ a $u^0 \in L^2(\Omega)$. Rovnicí vedení tepla s homogenními okrajovými podmínkami nazveme následující úlohu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f, \quad \text{v } Q_T, \\ u &= 0, \quad t \in (0, T), x \in \partial\Omega \\ u(0, x) &= u^0(x), x \in \Omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pro libovolný Banachův prostor X a funkci $u : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že $u(t, \cdot) \in X$ pro každé $t \in (0, T)$, budeme pro jednoduchost $u(t, \cdot)$ značit pouze $u(t)$.

Definujme si nyní takzvané Bochnerovy prostory funkcí.

Definice. Nechť X je libovolný Banachův prostor. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$. Definujme následující prostory:

$$C^k(0, T; X) = \{u : (0, T) \rightarrow X \mid t \mapsto \|u(t)\|_X \in C^k([0, T])\} \tag{2.2}$$

$$L^p(0, T; X) = \{u : (0, T) \rightarrow X \mid u \text{ je měřitelná, } \int_0^T \|u(t)\|_X^p dx < \infty\} \tag{2.3}$$

s normou

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \tag{2.4}$$

respektive

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \text{esssup}_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_X. \tag{2.5}$$

Dále definujme prostory funkcí

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T, X) \mid u^{(i)} \in L^p(0, T, X), 0 \leq i \leq k\}, \tag{2.6}$$

kde $u^{(i)}$ značí i -tou slabou derivaci funkce u podle času t s normami

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{i=1}^k \|u^{(i)}\|_{L^p(0,T;X)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (2.7)$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(0,T;X)} = \text{esssup}_{t \in (0,T)} \left(\sum_{i=1}^k \|u^{(i)}(t)\|_X \right). \quad (2.8)$$

Podobným způsobem jako v kapitole 1.2 bychom dostali slabou formulaci úlohy (2.1):

Definice. Řekneme, že funkce $u \in C^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ je slabým řešením úlohy (2.1), jestliže platí:

$$\begin{aligned} (u'(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) &= (f(t), v), \quad \forall t \in (0, T), \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u(0) &= u^0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Věnujme se nyní diskretizaci úlohy (2.9). Na oblasti Ω uvažujme lokálně kva-ziuniformní regulární triangulaci \mathcal{T}_h tvořenou d -simplexy. Pro libovolný prvek $T \in \mathcal{T}_h$ označme $h_T = \text{diam}(T)$ a $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$. Nakonec připomeňme definici prostoru funkcí:

$$S_{h,p} = \{v; v|_T \in P^p(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.10)$$

K odvození takzvaného semidiskrétního tvaru úlohy (2.9) můžeme opět využít postup popsany v 1. kapitole.

Definice. Řekneme, že funkce $u_h \in C^1(0, T; S_{h,p})$ pro $m = 1, \dots, r$ je řešením prostorové semidiskretizace úlohy (2.9), jestliže:

$$\begin{aligned} (u'_h(t), v_h) + A_h^N(u_h(t), v_h) &= l_h(v_h)(t) \\ \forall v_h \in S_{h,p} \forall t \in I_m, m &= 1, \dots, r \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$(u_h(0), v_h) = (u^0, v_h) \quad \forall v_h \in S_{h,p}, \quad (2.12)$$

kde A_h^N značí bilineární formu odvozenou v 1. kapitole pomocí NIPG (v dalším budeme používat značení $A_h = A_h^N$), přesněji:

$$\begin{aligned} A_h^N(u_h, v_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx - \int_{\mathcal{F}_h} \langle \nabla u_h \rangle \cdot \mathbf{n} [v_h] dS \\ &+ \int_{\mathcal{F}_h} [u_h] \cdot \mathbf{n} \langle \nabla v_h \rangle dS + \int_{\mathcal{F}_h} \frac{\sigma}{|\Gamma|} [u_h] [v_h] dS, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$l_h(v_h) = \int_{\Omega} f v_h dx \quad (2.14)$$

2.2 Časová diskretizace

Úloha (2.11)-(2.12) představuje soustavu lineárních diferenciálních rovnic v proměnné t . Odvodme si nyní úplnou diskretizaci tohoto problému pomocí Časově nespojitě Galerkinovy metody. Interval $(0, T)$ rozdělme na r intervalů $I_m = (t_{m-1}, t_m]$, kde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = T$, a označme $\tau_m = t_m - t_{m-1}$ jejich délky. Definujme $\tau = \max_{m=1, \dots, r} \tau_m$. Pro zvolené celé číslo $q \geq 0$ budeme hledat

řešení plně diskretizované úlohy v prostoru:

$$S_{h,p}^{\tau,q} = \{v \in L^2(Q_T) : v|_{I_m} = \sum_{s=0}^q \psi_s t^s, \psi_s \in S_{h,p}, m = 1, \dots, r\}. \quad (2.15)$$

Dále označme limitní hodnoty v uzlech dělení a skok funkce $v \in S_{h,p}^{\tau,q}$ v čase:

$$v_m^\pm = \lim_{\delta \rightarrow 0^\pm} v(t_m + \delta), \quad \{v\}_m = v_m^+ - v_m^-. \quad (2.16)$$

Předpokládejme nyní, že funkce $u_h \in C^1(0, T; S_{h,p})$ je řešením (2.11). Nahradme funkce v_h v rovnosti (2.11) testovacími funkcemi z prostoru $S_{h,p}^{\tau,q}$ a integrujme (2.11) přes interval $(0, T)$. Dostaneme:

$$\int_0^T (u_h'(t), v(t)) + A_h(u_h(t), v(t)) dt = \int_0^T l_h(v(t)) dt \quad (2.17)$$

Poznámka. Je-li funkce w nespojitá v bodech t_m , $m = 1, \dots, r-1$, budeme zápisem $\int_0^T w(t) dt$ formálně myslet $\sum_{m=1}^r \int_{I_m} w(t) dt$.

Pro první člen rovnosti využijeme pravidla integrace per partes a díky spojitosti funkce u_h dostaneme:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u_h'(t), v(t)) dt = \\ & = - \int_0^T (u_h(t), v'(t)) dt + \sum_{m=1}^r (u_h(t_m), v_m^-) - (u_h(t_{m-1}), v_{m-1}^+) \\ & = - \int_0^T (u_h(t), v'(t)) dt + \sum_{m=1}^r (u_{h,m}^-, v_m^-) - (u_{h,m-1}^-, v_{m-1}^+) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pro jednoduchost zápisu používáme značení $u_{h,0}^- = u(0)$. Nahradíme-li řešení úlohy (2.9) funkcí $U \in S_{h,p}^{\tau,q}$ a integrujeme-li (2.18) znovu pomocí pravidla per partes dostaneme:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (U(t), v'(t)) dt + \sum_{m=1}^r (U_m^-, v_m^-) - (U_{m-1}^-, v_{m-1}^+) \\ & = \int_0^T (U'(t), v(t)) dt + \sum_{m=0}^{r-1} ((U_m^+ - U_m^-), v_m^+) \\ & = \int_0^T (U'(t), v(t)) dt + \sum_{m=0}^{r-1} (\{U\}_m, v_m^+) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dohromady dostáváme:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (U'(t), v(t)) + A_h(U(t), v(t)) dt + \sum_{m=1}^{r-1} (\{U\}_m, v_m^+) + (U_0^+, v_0^+) \\ & = \int_{I_m} (f(t), v(t)) dt + (U_0^-, v_0^+) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Funkce $v \in S_{h,p}^{\tau,q}$ nemusí být spojitá v uzlech dělení t_m . Úlohu (2.20) tedy můžeme řešit postupně na jednotlivých intervalech. Pro výpočet na libovolném intervalu I_m potřebujeme znát pouze hodnotu U_{m-1}^- nutnou k vypočítání skoku $\{U\}_{m-1}$. Diskrétní řešení je navíc nezávislé na koncovém bodu intervalu $(0, T)$. Dostáváme tak následující jednokrokové schéma:

Definice. Řekneme, že funkce $U \in S_{h,p}^{\tau,q}$ je přibližným řešením úlohy (2.9) získaným pomocí Časově nespojité Galerkinovy metody, jestliže splňuje:

$$\begin{aligned} \int_{I_m} (U', v) + A_h(U, v) dt + (\{U\}_{m-1}, v_{m-1}^+) &= \int_{I_m} l_h(v) dt & (2.21) \\ \forall v \in S_{h,p}^{\tau,q}, m = 1, \dots, r, & \\ (U_0^-, v) &= (u^0, v) \quad \forall v \in S_{h,p} \end{aligned}$$

Věta 2.1. Řešení úlohy (2.21) je v prostoru $S_{h,p}^{\tau,q}$ určeno jednoznačně.

Důkaz. Předpokládejme, že pro libovolný interval I_m máme dáno U_{m-1}^- a pravou stranu l_h . Jelikož prostor $S_{h,p}^{\tau,q}$ má konečnou dimenzi, je existence a jednoznačnost řešení ekvivalentní s tím, že příslušná homogenní rovnice má pouze triviální řešení. Uvažujme tedy následující rovnici

$$\int_{I_m} (U', v) + A_h(U, v) dt + (U_{m-1}^+, v_{m-1}^+) = 0 \quad \forall v \in S_{h,p}^{\tau,q} \quad (2.22)$$

a předpokládejme, že funkce $U \in S_{h,p}^{\tau,q}$ je jejím řešením. Zvolme testovací funkci $v = U$. Využijeme rovnosti

$$(U', U) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|^2 \quad (2.23)$$

a dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|U_m^-\|^2 - \frac{1}{2} \|U_{m-1}^+\|^2 + \int_{I_m} A_h(U, U) dt + \|U_{m-1}^+\|^2 &= 0, \\ \|U_m^-\|^2 + \|U_{m-1}^+\|^2 + 2 \int_{I_m} A_h(U, U) dt &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Bilineární forma A_h je podle Věty 1.2 $S_{h,p}$ -eliptická pro libovolné $\sigma > 0$ a tedy $A_h(U, U) > 0$ pro všechna $U \neq 0$. Z rovnosti 2.24 tedy vyplývá, že funkce U musí být identicky nulová v intervalu I_m . \square

Poznámka. Stejně jako v 1. kapitole je formulace (2.21) konzistentní pro slabé řešení $u \in C^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ úlohy (2.9).

2.3 Odhady chyb

Věnujme se nyní odhadům chyby plně diskrétního řešení $U \in S_{h,p}^{\tau,q}$ získaného pomocí Časově nespojité Galerkinovy metody. Zavedme si nejprve prostor funkcí

$$S^{\tau,q} = \{w \in L^2(Q_T); v|_{I_m} = \sum_{j=0}^q w_j t^j, w_j \in L^2(\Omega)\} \quad (2.25)$$

Definice. Definujme projekci $P : C(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow S^{\tau, q}$ splňující

$$\int_{I_m} (Pu - u, v) dt = 0 \quad \forall v \in S^{\tau, q-1},$$

$$(Pu)_m^- = u(t_m) \quad \forall m = 1, \dots, r$$

Dále definujme časoprostorovou projekci $\pi : C(0, T, L^2(\Omega)) \rightarrow S_{h,p}^{\tau, q}$ jako $\pi = \Pi_h \circ P$, kde Π_h značí L^2 -projekci definovanou v (1.17). Ekvivalentně pro libovolnou funkci $u \in C(0, T; L^2(\Omega))$ platí

$$((\pi u)(t), v) = ((Pu)(t), v) \quad \forall v \in S_{h,p}, \forall t \in I_m \quad (2.26)$$

Poznámka. Projekce π je určena jednoznačně a projekce Π_h a P komutují. Projekci π se podrobněji zabývá článek [7][Lemma 4, Lemma 9].

Připomeňme si ještě definici DG-normy (1.15). V důkazu následující věty budeme využívat rovnosti

$$\|v\|_{DG}^2 = \frac{1}{2} A_h^N(v, v), \quad \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) \quad (2.27)$$

Lemma 2.1. Pro libovolnou funkci $u \in W^{q+1, \infty}(0, T; H^1(\Omega))$, existují konstanty $C_P, C_{\bar{P}}, C_{\tilde{P}}$ takové, že platí

$$\sup_{t \in I_m} \|Pu(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \tau^{q+1} \sup_{t \in I_m} \|u^{(q+1)}(t)\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.28)$$

$$\sup_{t \in I_m} |Pu(t) - u(t)|_{H^2(\Omega)} \leq C_{\bar{P}} \tau^{q+1} \sup_{t \in I_m} |u^{(q+1)}(t)|_{H^2(\Omega)} \quad (2.29)$$

$$\sup_{t \in I_m} \|Pu(t) - u(t)\|_{DG} \leq C_{\tilde{P}} \tau^{q+1} \sup_{t \in I_m} |u^{(q+1)}(t)|_{H^1(\Omega)} \quad (2.30)$$

Důkaz. Důkaz prvních dvou tvrzení je zobecněním Věty 3.1.5 v [2]. Důkaz třetího odhadu je proveden v [5][Lemma 4.3]. Využívá však homogenních okrajových podmínek na $\partial\Omega$. Za zcela obecných okrajových podmínek není odhad v této podobě znám. \square

Věta 2.2. Necht $u \in W^{q+1, \infty}(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^{p+1}(\Omega))$ je slabé řešení úlohy (2.9) a $U \in S_{h,p}^{\tau, q}$ je přibližné řešení získané pomocí (2.21). Potom pro všechny $n \in \{1, \dots, r\}$ platí

$$\|U_n^- - u(t_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_D (\tau^{q+1} + h^p) \left(\sup_{t \in (0, t_n)} \|u^{(q+1)}\|_{H^2(\Omega)} + \sup_{t \in (0, t_n)} |u|_{H^{p+1}(\Omega)} \right) \quad (2.31)$$

Důkaz. Nejprve rozdělme chybu

$$U - u = (U - \pi u) + (\pi u - u) = \xi + \eta.$$

Pro η dostaneme díky odhadu (1.18) a přesnosti projekce P v koncových bodech intervalů

$$\begin{aligned} \|\eta_m^-\|_{L^2(\Omega)} &\leq \underbrace{\|P(\Pi_h u_m^-) - \Pi_h u_m^-\|_{L^2(\Omega)}}_{=0} + \|\Pi_h u_m^- - u_m^-\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.32) \\ &\leq C_\Pi h^{p+1} |u|_{H^{p+1}(\Omega)} \end{aligned}$$

Z konzistence slabého řešení úlohy (2.9) dostáváme pro libovolnou funkci $w \in S_{h,p}^{\tau,q}$ následující rovnost:

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} (\xi', w) + A_h(\xi, w) dt + (\{\xi\}_{m-1}, w_{m-1}^+) \\ &= - \int_{I_m} (\eta', w) + A_h(\eta, w) dt - (\{\eta\}_{m-1}, w_{m-1}^+) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Projekce P je uzlově přesná a protože projekce π má vlastnost (2.26), platí $(\eta_m^-, w) = 0$ pro všechna $w \in S_{h,p}$ a $m \in 1, \dots, r$. Díky této vlastnosti a ortogonalitě na prostor $S_{h,p}^{\tau,q-1}$ společně s využitím pravidla integrování per partes dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} (\eta', w) dt + (\{\eta\}_{m-1}, w_{m-1}^+) = (\eta_m^-, w_m^-) - (\eta_{m-1}^+, w_{m-1}^+) \\ & - \int_{I_m} (\eta, w') dt + (\{\eta\}_{m-1}, w_{m-1}^+) = 0 \quad \forall w \in S_{h,p}^{\tau,q} \end{aligned} \quad (2.34)$$

S využitím rovnosti (2.23) a Youngovy nerovnosti odvodíme

$$\begin{aligned} & 2 \int_{I_m} (\xi', \xi) dt + 2(\{\xi\}_{m-1}, \xi_{m-1}^+) \\ &= \|\xi_m^-\|^2 - \|\xi_{m-1}^+\|^2 + 2\|\xi_{m-1}^+\|^2 - 2(\xi_{m-1}^-, \xi_{m-1}^+) \geq \|\xi_m^-\|^2 - \|\xi_{m-1}^-\|^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Za testovací funkci zvolme $w = 2\xi$ a dosadíme do levé strany (2.33).

$$\begin{aligned} & 2 \int_{I_m} (\xi', \xi) + A_h(\xi, \xi) dt + 2(\{\xi\}_{m-1}, \xi_{m-1}^+) \\ & \geq \|\xi_m^-\|^2 - \|\xi_{m-1}^-\|^2 + 4 \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \end{aligned} \quad (2.36)$$

Na pravé straně rovnosti (2.33) nám tedy zbývá jen člen $-\int_{I_m} A_h(\eta, 2\xi) dt$. Využijeme-li Lemma 1.2, Lemma 1.3 a Youngovu nerovnost, dostaneme:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{I_m} A_h(\eta, 2\xi) dt \right| \leq 2 \int_{I_m} |A_h(\pi u - \Pi_h u, \xi)| + |A_h(\Pi_h u - u, \xi)| dt \\ & \leq \int_{I_m} 2C_B \|\pi u - \Pi_h u\|_{DG} \|\xi\|_{DG} + 2C_A h^p \|\xi\|_{DG} |u|_{H^{p+1}(\Omega)} dt \\ & \leq C_B^2 \int_{I_m} \|\pi u - \Pi_h u\|_{DG}^2 dt + C_A^2 h^{2p} \int_{I_m} |u|_{H^{p+1}(\Omega)}^2 dt + 2 \int_{I_m} \|\xi\|_{DG}^2 dt \end{aligned} \quad (2.37)$$

První člen na pravé straně nerovnosti odhadneme pomocí (1.20)

$$\begin{aligned} \|\pi u - \Pi_h u\|_{DG} & \leq \|\Pi_h(Pu - u) - (Pu - u)\|_{DG} + \|Pu - u\|_{DG} \\ & \leq Ch \|Pu - u\|_{H^2(\Omega)} + \|Pu - u\|_{DG} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dohromady dostaneme pomocí nerovností (2.29) a (2.30) a tomu, že $h \leq |\Omega|$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{I_m} A_h(\eta, 2\xi) dt \right| \leq C\tau_m (\sup_{t \in I_m} \|Pu - u\|_{H^2(\Omega)}^2 + \sup_{t \in I_m} \|Pu - u\|_{DG}^2) \\ & + h^{2p} \sup_{t \in I_m} |u|_{H^{p+1}(\Omega)}^2 + \int_{I_m} 2\|\xi\|_{DG}^2 dt \\ & \leq \tau_m C (\tau^{2q+2} + h^{2p}) (\sup_{t \in I_m} \|u^{(q+1)}\|_{H^2(\Omega)}^2 + \sup_{t \in I_m} |u|_{H^{p+1}(\Omega)}^2) + \int_{I_m} 2\|\xi\|_{DG}^2 dt \end{aligned} \quad (2.39)$$

Složení nerovností (2.36) a (2.37) dostaneme

$$\|\xi_m^-\|^2 \leq \|\xi_{m-1}^-\|^2 + \tau_m C(\tau^{2q+2} + h^{2p}) \left(\sup_{t \in I_m} \|u^{(q+1)}\|_{H^2(\Omega)}^2 + \sup_{t \in I_m} |u|_{H^{p+1}(\Omega)}^2 \right) \quad (2.40)$$

Předpokládáme, že přibližné řešení splňuje počáteční podmínku, a tedy $\xi_0^- = U_0^- - u^0 = 0$. Pro libovolné $n \in \{1, \dots, r\}$ sečteme nerovnost (2.40) přes všechna $m = 1, \dots, n$ a dostaneme tvrzení věty:

$$\begin{aligned} \|U_n^- - u(t_n)\| &\leq \|\xi_n^-\| + \|\eta_n^-\| \\ &\leq C_D(\tau^{q+1} + h^p) \left(\sup_{t \in (0, t_n)} \|u^{(q+1)}\|_{H^2(\Omega)} + \sup_{t \in (0, t_n)} |u|_{H^{p+1}(\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

□

Komplikovanějším způsobem lze odvodit za určitých předpokladů podobný odhad řádu $(q+1)$ v čase i pro vnitřní body intervalů I_m . Viz například [9][Theorem 12.2], kde však hraje klíčovou roli symetrie bilinerární formy A_h . Obecnější přístup můžeme nalézt v [10][Theorem 5.2.2].

2.4 Superkonvergence Časově nespojitě Galerkinovy metody

V následující části se věnujeme řádu konvergence přibližného řešení v uzlových bodech dělení intervalu $(0, T)$. Odhad chyby řádu $O(\tau^{q+1})$, je optimální pro polynomy řádu q . V uzlech dělení t_1, \dots, t_r lze však získat dokonce řád konvergence $O(\tau^{2q+1})$. Definujme si následující úlohu:

Nechť $V \subset L^2(\Omega)$ je konečně dimenzionální Hilbertův prostor. Uvažujme následující úlohu:

Pro funkci $f \in C(0, T, V)$ a lineární, pozitivně definitní (obecně nesymetrický) operátor $A : V \rightarrow V$ hledejme $u \in C^1(0, T, V)$ splňující

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= f(t), \quad \forall t \in (0, T), \\ u(0) &= u^0 \in V. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ukažme si nejprve, že úlohu (2.11) lze převést do tvaru (2.42). Označme N_h dimenzi prostoru $S_{h,p}$ a jeho bázi $\phi_1, \dots, \phi_{N_h}$. Potom můžeme řešení úlohy (2.11) napsat ve tvaru $u_h(t)|_{I_m} = \sum_{i=1}^{N_h} u_i(t)\phi_i$. Za testovací funkce vezmeme postupně všechny báze funkce a dostaneme tak následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_h} u_j'(t)(\phi_j, \phi_i) + \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t)A(\phi_j, \phi_i) &= l_h(\phi_i)(t), \quad i = 1, \dots, N_h, \\ \sum_{j=1}^{N_h} u_j(0)(\phi_j, \phi_i) &= (u^0, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N_h. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Označme symbolem \mathbb{B} takzvanou *matici hmoty* s prvky $b_{i,j} = (\phi_j, \phi_i)$, symbolem \mathbb{A} *matici tuhosti* s prvky $a_{i,j} = A(\phi_j, \phi_i)$, $U(t)$ vektor s prvky $u_j(t)$, $F(t)$ vektor

s prvky $l_h(\phi_i)(t)$ a vektor U^0 s prvky (u^0, ϕ_i) . Potom můžeme soustavu rovnic (2.43) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbb{B}U'(t) + \mathbb{A}U(t) &= F(t), \\ \mathbb{B}U(0) &= U^0.\end{aligned}\tag{2.44}$$

Matice \mathbb{B} je symetrická a pozitivně definitní a tedy invertibilní. Rovnost (2.44) můžeme přenásobit \mathbb{B}^{-1} . Dostáváme tak úlohu ve tvaru (2.42)

$$\begin{aligned}U'(t) + \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}U(t) &= \mathbb{B}^{-1}F(t), \\ U(0) &= \mathbb{B}^{-1}U^0.\end{aligned}\tag{2.45}$$

K získání časové diskretizace úlohy (2.42) bychom postupovali stejným způsobem jako v části 2.2. Zavedme si prostor

$$\tilde{S}^{\tau,q} = \{v \in L^2(0, T, V); v|_{I_m} = \sum_{i=0}^q v_i t^i, v_i \in V\}\tag{2.46}$$

Definice. Řekneme, že funkce $U \in \tilde{S}^{\tau,q}$ je přibližným řešením úlohy (2.42) získaným pomocí Časově nespojitě Galerkinovy metody, jestliže splňuje

$$\begin{aligned}\int_{I_m} (U', w) + (AU, w)dt + (\{U\}_{m-1}, w_{m-1}^+) &= \int_{I_m} (f, w)dt \\ \forall w \in \tilde{S}^{\tau,q}, m = 1, \dots, r, \\ U_0^- &= u^0\end{aligned}\tag{2.47}$$

Podrobně se touto problematikou zabývá [9][kapitola 12]. Předpokládá však, že operátor A je samoadjungovaný. To je ovšem splněno pouze v případě, že bilineární forma A_h je symetrická, neboť pomocí Frechet-Rieszovy věty můžeme ztotožnit bilineární formu A_h a operátor A

$$A_h(u, v) = (Au, v) = (u, Av) = A_h(v, u).$$

Proto je tento přístup použitelný pouze pro symetrickou verzi prostorové diskretizace pomocí nespojitě Galerkinovy metody (SIPG). Obecnější důkaz superkonvergence v uzlových vodech můžeme najít v [10][kapitola 6]. Tento přístup již nevyžaduje symetrii bilineární formy A_h , a proto je použitelný i pro NIPG. Zformulujme si zde tento výsledek:

Věta 2.3. *Nechť funkce u je dostatečně hladkým řešením úlohy (2.42) a $U \in \tilde{S}^{\tau,q}$ je jeho aproximací získanou pomocí (2.47). Potom*

$$\|U_n^- - u(t_n)\| \leq C\tau^{2q+1} \int_0^{t_n} |u^{(q+1)}|_{2q+1}^2 dt,\tag{2.48}$$

kde $|\cdot|_{2q+1}$ je norma definovaná předpisem $|v|_{2q+1}^2 = \|D^{-\frac{1}{2}}A^{s+1}v\|^2$ a $D = \frac{A+A^*}{2}$ je symetrická část operátoru A .

Důkaz. viz [10][Theorem 6.4.3] □

Vyšší řád konvergence metody můžeme při numerických experimentech (viz kapitola 3) pozorovat i uvnitř časových intervalů I_m , konkrétně právě v uzlech pravé Radauovy kvadratury stupně $q+1$. V těchto bodech se zdá, že by řád konvergence mohl být o stupeň vyšší nežli řád konvergence $O(\tau^{q+1})$, kterého schéma dosahuje v obecném bodě intervalu I_m . Tuto hypotézu nejsme v současné době schopni teoreticky dokázat.

3. Numerické experimenty

V této kapitole popíšeme několik numerických příkladů, na kterých ukážeme přesnost a řád konvergence časoprostorové nespojitě Galerkinovy metody. Soustředíme se zde na odhady chyby v závislosti na časové proměnné. Z toho důvodu se budeme zabývat pouze případy s jednou prostorovou proměnnou. Nebudeme tak muset řešit problémy spojené s volbou triangulace.

3.1 Rovnice časoprostorové nespojitě Galerkinovy metody

Hledejme přibližné řešení diskrétní úlohy (2.21). Úlohu budeme řešit postupně na jednotlivých intervalech I_m , neboť pro řešení úlohy na intervalu I_m potřebujeme znát pouze hodnotu U_{m-1}^- . Dostáváme tak jednokrokovou metodu, která v každém kroku vyžaduje řešení lineární soustavy rovnic. Počet rovnic této soustavy odpovídá dimenzi prostoru $S_{h,p}^{\tau,q}$. Ta je rovna $(q+1)N_h$, kde q je stupeň polynomů časové proměnné a N_h je dimenze prostoru $S_{h,p}$. Velikost této soustavy, která roste v závislosti na řádu metody, způsobuje velkou časovou náročnost výpočtů a může být považována za jednu z nevýhod této metody.

Zvolme pevně $m \in \{1, \dots, r\}$. Označme $\phi_1, \dots, \phi_{N_h}$ ortogonální bázi prostoru $S_{h,p}$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}$ ortogonální bázi prostoru $P^q(I_m)$ polynomů stupně $\leq q$ v časové proměnné. Označíme-li $\psi_{ik}(x, t) = \phi_i(x)\varphi_k(t)$ pro $i = 1, \dots, N_h$, $k = 1, \dots, q+1$, pak tyto funkce tvoří bázi prostoru $S_{h,p}^{\tau,q}$ a tedy libovolnou funkci $v \in S_{h,p}^{\tau,q}$ můžeme zapsat ve tvaru $v = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{k=1}^{q+1} x_{ik}\psi_{ik}$. Úlohu (2.21) můžeme tedy přepsat do následujícího tvaru.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{N_h} \sum_{k,l=1}^{q+1} x_{jl} \int_{I_m} (\psi'_{jl}, \psi_{ik}) + A_h(\psi_{jl}, \psi_{ik}) dt + (\psi_{jl}(t_{m-1}), \psi_{ik}(t_{m-1})) \\ = \sum_{i,j=1}^{N_h} \sum_{k,l=1}^{q+1} \int_{I_m} l_h(\psi_{ik}) dt + (U_{m-1}^-, \psi_{ik}(t_{m-1})) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Zavedme nyní označení:

$$\alpha_k = \int_{I_m} \varphi_k^2 dt, \quad \beta_i = \int_{\Omega} \phi_i^2 dx, \quad a_{ij} = A_h(\phi_j, \phi_i), \quad (3.2)$$

$$r_{kl} = \int_{I_m} \varphi'_l(t)\varphi_k(t) dt + \varphi_l(t_{m-1})\varphi_k(t_{m-1}) \quad (3.3)$$

$$b_{ik} = \int_{I_m} l_h(\psi_{ik}) dt + (U_{m-1}^-, \psi_{ik}(t_{m-1})) \quad (3.4)$$

S použitím tohoto značení a díky ortogonalitě bázevých funkcí můžeme rovnost (3.1) zapsat jako

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{l=1}^{q+1} \alpha_k a_{ij} x_{jl} \delta_{lk} + \beta_i r_{kl} x_{jl} \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_k a_{ij} x_{jk} + \sum_{l=1}^{q+1} \beta_i r_{kl} x_{il} = b_{ik} \\ \forall i = 1, \dots, N_h, \quad k = 1, \dots, q+1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde δ_{ij} značí Kronekerovo delta. Označme dále matice $\mathbb{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{N_h}$, $B = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_{N_h}\}$ a vektory $x^k = (x_{1,k}, \dots, x_{N_h,k})$, $b^k = (b_{1,k}, \dots, b_{N_h,k})$ pro $k = 1, \dots, q+1$. Potom můžeme rovnost (3.5) zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} r_{1,1}B + \delta_{1,1}\alpha_1\mathbb{A} & \cdots & r_{1,q+1}B + \delta_{1,q+1}\alpha_1\mathbb{A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{q+1,1}B + \delta_{q+1,1}\alpha_{q+1}\mathbb{A} & \cdots & r_{q+1,q+1}B + \delta_{q+1,q+1}\alpha_{q+1}\mathbb{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{q+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^{q+1} \end{pmatrix}$$

3.2 Experimentální řád konvergence metody

Pokusme se nyní experimentálně ověřit teoretické výsledky popsané v minulé kapitole. Zkoumáme řád konvergence v časové proměnné. Abychom eliminovali nepřesnosti závislé na prostorové diskretizaci, zvolíme velmi jemné prostorové dělení ($h = 1/160$) a stupeň polynomů prostorové proměnné $p = 4$. Budeme pracovat s ekvidistantním dělením a velikost časového kroku $\tau = T/r$ budeme postupně snižovat. Pro libovolné dva různé časové kroky τ_1, τ_2 a jim příslušné chyby e_1, e_2 , vypočteme experimentální řád konvergence (EOC) jako:

$$EOC = \frac{\log(e_2) - \log(e_1)}{\log(\tau_2) - \log(\tau_1)} \quad (3.6)$$

Vzhledem k tomu, že nepřesnosti metody se přenášejí v každém kroku z minulých intervalů, budeme chybu přibližného řešení vyšetřovat pouze na posledním časovém intervalu I_r . Zajímá nás odchylka přibližného řešení v normě definované následujícím předpisem

$$\|e_h\|_{L^\infty(I_r; L^2(\Omega))} = \sup_{t \in (I_r)} \|u(t) - U(t)\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.7)$$

V praktickém výpočtu je tento výpočet těžko proveditelný, a proto budeme počítat tuto chybu jako maximum odchylky v deseti rovnoměrně rozložených bodech intervalu I_r .

Dále budeme měřit velikost odchylky v $L^2(\Omega)$ -normě v uzlech pravé Radauovy kvadratury stupně $q+1$, kde očekáváme superkonvergenci. Označme

$$\|\tilde{e}_h\|_{L^2(\Omega)} = \|u(T) - U(T)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\bar{e}_h\|_{L^2(\Omega)} = \max_{t \in \{t^1, \dots, t^q\}} \|u(t) - U(t)\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.8)$$

kde body t^1, \dots, t^q značí uzly Radauovy kvadratury stupně $q+1$ bez pravého krajního bodu intervalu I_r .

Řešme následující dvě jednodimenzionální úlohy ve tvaru (2.1).

Úloha 1. *Nechť $\Omega = (0, 1)$, $T = 2$ a $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Hledejme funkci u , pro kterou platí*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) &= \sin(\pi x) (1 - \sin(t) + \pi^2(t + \cos(t))), \quad v Q_T, \\ u(t, x) &= 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega \\ u(0, x) &= \sin(\pi x), \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

Přesné řešení této úlohy má tvar

$$\sin(\pi x) (t + \cos(t)). \quad (3.10)$$

Úloha 2. Necht' $\Omega = (0, 1)$, $T = 1$ a $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Hledejme funkci u , pro kterou platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) &= \sin(2\pi x) \left(\frac{e^{10t}}{e^{10} - 1} (10 + 4\pi^2) - \frac{4\pi^2}{e^{10} - 1} \right), \quad (3.11) \\ \text{pro } (t, x) &\in Q_T \\ u(t, x) &= 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega \\ u(0, x) &= 0, \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

Přesné řešení této úlohy má tvar

$$\sin(2\pi x) \frac{e^{10t} - 1}{e^{10} - 1}. \quad (3.12)$$

Úlohy (3.9) a (3.11) diskretizujeme pomocí metody (2.21). Následující tabulky (3.1) a (3.2) ukazují pro $q = 0, 1, 2$, že vypočtené hodnoty odpovídají v tomto případě teoretickým odhadům. Pro obecný bod $t \in (0, T)$ je řád konvergence $O(\tau^{q+1})$ a pro uzlové body dělení dostaneme řád $O(\tau^{2q+1})$. Pro uzly pravé Radaovy kvadratury na libovolném intervalu I_m , $m = 1, \dots, r$ odpovídá experiment naší hypotéze. Řád konvergence se zdá být v těchto bodech o stupeň vyšší nežli v obecném bodu intervalu I_m , tedy $O(\tau^{q+2})$.

	τ	$\ e_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ \tilde{e}_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ \bar{e}_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC
$q = 0$	5.000E-01	3.025E-03	–	8.076E-03	–	–	–
	2.500E-01	3.559E-03	-0.234	4.258E-03	0.923	–	–
	1.250E-01	2.748E-03	0.373	2.302E-03	0.886	–	–
	6.250E-02	1.640E-03	0.744	1.212E-03	0.925	–	–
	3.125E-02	8.892E-04	0.883	6.238E-04	0.958	–	–
	1.563E-02	4.622E-04	0.943	3.166E-04	0.978	–	–
	τ	$\ e_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ \tilde{e}_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ \bar{e}_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC
$q = 1$	5.000E-01	5.296E-03	–	8.668E-04	–	2.959E-04	–
	2.500E-01	2.239E-03	1.242	1.364E-04	2.666	4.350E-05	2.766
	1.250E-01	6.671E-04	1.746	1.982E-05	2.783	6.102E-06	2.833
	6.250E-02	1.794E-04	1.893	2.704E-06	2.873	8.195E-07	2.896
	3.125E-02	4.640E-05	1.951	3.544E-07	2.931	1.068E-07	2.939
	1.563E-02	1.178E-05	1.976	4.526E-08	2.969	1.379E-08	2.952
	τ	$\ e_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ \tilde{e}_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ \bar{e}_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC
$q = 2$	5.000E-01	5.287E-04	–	5.589E-06	–	5.610E-06	–
	2.500E-01	6.460E-05	3.032	3.461E-07	4.013	7.039E-07	2.994
	1.250E-01	7.934E-06	3.025	1.364E-08	4.664	5.365E-08	3.713
	6.250E-02	9.811E-07	3.015	4.352E-10	4.970	3.606E-09	3.894
	3.125E-02	1.218E-07	3.009	1.612E-11	4.754	2.600E-10	3.794
	1.563E-02	1.515E-08	3.007	3.043E-11	-0.916	4.534E-11	2.519

Tabulka 3.1: Časoprostorově nespojitá Galerkinova metoda aplikovaná na Úlohu 1. Tabulka ukazuje diskrétní $L^\infty(L^2)$ -normu na intervalu I_r , L^2 -normu odchylky přibližného řešení v koncovém bodě intervalu a v uzlech pravé Raduovy kvadratury stupně $q + 1$ a příslušný experimentální řád konvergence.

	τ	$\ e_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ \tilde{e}_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ \bar{e}_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC
$q = 0$	5.000E-01	4.090E-01	–	4.090E-01	–	–	–
	2.500E-01	2.651E-01	0.625	2.651E-01	0.625	–	–
	1.250E-01	1.525E-01	0.797	1.525E-01	0.797	–	–
	6.250E-02	8.199E-02	0.896	8.199E-02	0.896	–	–
	3.125E-02	4.250E-02	0.947	4.250E-02	0.947	–	–
	1.563E-02	2.164E-02	0.973	2.164E-02	0.973	–	–
	7.813E-03	1.092E-02	0.986	1.092E-02	0.986	–	–
		τ	$\ e_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ \tilde{e}_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ \bar{e}_h\ _{L^2(\Omega)}$
$q = 1$	5.000E-01	9.951E-02	–	9.951E-02	–	2.292E-02	–
	2.500E-01	3.221E-02	1.627	2.712E-02	1.875	9.438E-03	1.280
	1.250E-01	1.103E-02	1.544	5.129E-03	2.402	2.199E-03	2.101
	6.250E-02	3.254E-03	1.762	7.839E-04	2.710	3.734E-04	2.557
	3.125E-02	8.838E-04	1.880	1.078E-04	2.862	5.416E-05	2.785
	1.563E-02	2.302E-04	1.940	1.411E-05	2.933	7.281E-06	2.895
	7.813E-03	5.738E-05	2.004	1.803E-06	2.967	9.435E-07	2.948
		τ	$\ e_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ \tilde{e}_h\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ \bar{e}_h\ _{L^2(\Omega)}$
$q = 2$	5.000E-01	2.112E-02	–	5.589E-03	–	3.646E-03	–
	2.500E-01	4.075E-03	2.373	5.963E-04	3.325	6.306E-04	2.531
	1.250E-01	6.125E-04	2.734	3.321E-05	4.166	6.500E-05	3.278
	6.250E-02	8.294E-05	2.884	1.310E-06	4.663	4.946E-06	3.716
	3.125E-02	1.078E-05	2.943	4.500E-08	4.863	3.322E-07	3.896
	1.563E-02	1.375E-06	2.970	1.696E-09	4.728	2.113E-08	3.974
	7.813E-03	1.735E-07	2.986	2.934E-10	2.531	1.107E-09	4.253

Tabulka 3.2: Časoprostorově nespojitá Galerkinova metoda aplikovaná na Úlohu 2 pro $q = 0, 1, 2$.

Závěr

V této práci jsme se zabývali nespojitou Galerkinovou metodou aplikovanou na stacionární i nestacionární rovnice. Formulovali jsme tuto metodu pro některé jednoduché rovnice a věnovali jsme se analýze chyb.

Hlavním tématem této práce měla být superkonvergence této metody vzhledem k času. Superkonvergentní chování může být pozorováno v uzlech časové diskretizace úlohy a dále v uzlech pravé Radauovy kvadratury na intervalech I_m . Superkonvergence v uzlech časové diskretizace je popsána v literatuře (viz [9], [10]). V uzlech pravé Radauovy kvadratury řádu $q + 1$ jsme v praktických výpočtech zaznamenali o stupeň vyšší řád konvergence než pro obecný bod intervalu I_m . Ve snaze teoreticky dokázat tuto vlastnost nespojitě Galerkinovy metody se nám podařilo ztotožnit Časově nespojitou Galerkinovu metodu stupně q s takzvanou Časově spojitou Galerkinovou metodou stupně $q + 1$ v případě, že jsou integrály na intervalu I_m obsažené v rovnici nahrazeny pravou Radauovu kvadraturu s $q + 1$ uzly. Bohužel však algebraický řád této kvadratury je o stupeň nižší než bychom potřebovali, aby Časově spojitá Galerkinova metoda stupně $q + 1$ dosahovala optimálního řádu konvergence $O(\tau^{q+2})$. Tento problém se nám tedy nepodařilo vyřešit a zůstává dále otevřený.

Seznam použité literatury

- [1] S. Agmon: *Lectures on elliptic boundary value problems*, Princeton, N.J.-Toronto-New York-London: D. van Nostrand Company, Inc. V, 291 p. , 1965.
- [2] P. G. Ciarlet: *The Finite Elements Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.
- [3] V. Dolejší, M. Feistauer: *Error estimates of the discontinuous Galerkin method for nonlinear nonstationary convection-diffusion problems*, Numerical Functional Analysis and Optimization, Volume 26, Number 3, 2005 , pp. 349-383(35).
- [4] V. Dolejší, M. Feistauer, V. Sobotíková: *Analysis of the discontinuous Galerkin Method for Nonlinear Convection–Diffusion Problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., volume 194, 2005.
- [5] V. Dolejší, J. Hájek, M. Vlasák: *A priori error estimates of an extrapolated space-time discontinuous galerkin method for nonlinear convection-diffusion problems*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Volume 27, Issue 6, pages 1456–1482, 2011.
- [6] V. Dolejší, P. Knobloch, V. Kučera, M. Vlasák: *Finite element methods: theory, applications and implementation*, Technická univerzita v Liberci, 2011.
- [7] M. Feistauer, J. Hájek, K. Švadlenka *Space-time Discontionuous Galerkin Method for Nonstationary Convection-diffusion-reaction Problems*, Applications of Mathematics No. 3, 197–233, 2006.
- [8] M. Rokyta a kol.: *Úvod do moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic*, 2009.
- [9] Vidar Thomée: *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. 2nd revised and expanded ed.*, Berlin: Springer. xii, 370 p., 2006.
- [10] Miloslav Vlasák: *Numerické řešení problémů konvekce-difuse pomocí nespojitě Galerkinovy metody*, disertační práce, 2011 .

Seznam tabulek

3.1	Časoprostorově nespojitá Galerkinova metoda aplikovaná na Úlohu 1. Tabulka ukazuje diskrétní $L^\infty(L^2)$ -normu na intervalu I_r , L^2 -normu odchylky přibližného řešení v koncovém bodě intervalu a v uzlech pravé Raduovy kvadratury stupně $q + 1$ a příslušný experimentální řád konvergence.	25
3.2	Časoprostorově nespojitá Galerkinova metoda aplikovaná na Úlohu 2 pro $q = 0, 1, 2$	25