UNIVERZITA KARLOVA v PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Diplomová práce

Budování představ čísla do 100

Creating number concept up to 100

Vedoucí diplomové práce: **Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.**

Autor diplomové práce: **Lucie Panovská**

Studijní obor: **Učitelství pro 1. stupeň ZŠ**

Forma studia: **kombinovaná**

Diplomová práce dokončena: **březen 2012**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a informačních zdrojů. Práce nebyla využita k získání stejného nebo jiného titulu.

V Praze dne 8. 3. 2012 Podpis: ………………………

Za podnětné připomínky, podporu, trpělivost a cenné rady během zpracování diplomové práce velmi děkuji prof. RNDr. Milanu Hejnému, CSc. Děkuji také rodině, kolegyním a přátelům, kteří mi byli oporou.

Anotace

Diplomová práce se zabývá porozumění číslům u žáků třetí třídy pražské základní školy. Pro výuku byly kromě učebnice Prodos využívány náměty z řady Fraus, která je zaměřena na rozvoj porozumění matematice. Během roku a půl probíhaly experimenty s žáky celé třídy v běžných hodinách matematiky. Pro diagnostické zpracování bylo vybráno 7 žáků. Experimenty byly zaměřeny na sémantické i strukturální představy čísel. Žáci při nich pracovali individuálně, součástí experimentů byl i následný rozbor prací s žáky. Potvrdil se předpoklad, že žáci využívají i strategie, kterým nebyli vyučováni. Operace odčítání je výrazně náročnější než operace sčítání a to jak u mentální aritmetiky, tak i při písemném počítání. Domněnka, že žáci si vedou lépe v prostředí financí, než v jiných prostředích se nepotvrdila. Bylo pozorováno, že při zadávání slovních úloh je nutno pečlivě zkoumat, zda žáci rozumí slovům a slovním obratům v textu úlohy.

Klíčová slova: sčítání, odčítání, rozklad čísla, počítání, matematika, početní strategie

Abstract

This diploma thesis deals with third-graders from one of Prague’s elementary schools and their understanding of numbers. In addition to the Prodos textbooks, some didactical ideas were taken from the Fraus textbooks, which are aimed at the development of children’s understanding mathematics. The experiments were carried out in a classroom and lasted one and a half year. Seven pupils were chosen to take part. The experiments were aimed at gauging their semantic and structural understanding of numbers. The pupils worked individually and were individually interviewed after the experiments. The assumption that pupils use strategies that are not taught in the classroom was confirmed, as well as the fact that the operation of subtraction is much more complicated than addition in mental arithmetic and also in written counting. However, the assumption that the pupils perform better when faced with financial matters as opposed to other situations was not confirmed. It came to light that when creating a verbal task, it is necessary to consider the pupil´s understanding of the vocabulary used.

Key Words: addition, subtraction, decomposition of number, computation, mathematics, calculative strategies

Obsah

1 Úvod

Cílem mé práce bylo hlouběji se zabývat myšlenkovými pochody žáků. Výzkum probíhal od září 2010 do ledna 2012 během vyučování ve třetím ročníku, kde bylo 14 žáků, vesměs Romů. Pro experiment bylo zvoleno 7 dětí, které jsem podrobněji sledovala v průběhu celého období experimentu. S pomocí vedoucího práce jsem se učila analyzovat žákovské práce a zamýšlet se nad příčinami vzniku chyb. Současně jsem studovala odbornou literaturu. Také jsem se učila správně zadávat slovní úlohy tak, aby byli přínosné pro diagnostiku.

V teoretické části jsem se zaměřila na mechanismy a strategie, které mohou žákům ulehčit pochopení matematiky a prohloubit jejich porozumění číslům. Zařadila jsem i vlivy, které mohou porozumění ovlivňovat, například věk, motivace a klima třídy.

Prací se prolínaly záměry edukativní a diagnostické. Edukativním záměrem bylo zjistit, jak žákům co nejvíce pomoci a které metody jsou vhodné k aplikaci ve výuce. Žákům z počátku činily velké obtíže slovní úlohy, protože jsou převážně „praktického zaměření“ a je potřeba hledat náměty slovních úloh, které jsou jim povědomé z běžného života. V učebnicích je často použito slovo nebo slovní spojení, které žáci neznají. Je tím velmi ovlivněna jejich úspěšnost při jejich řešení. Vzhledem k tomu, že své žáky dobře znám, byla jsem schopna jim zadávat slovní úlohy, ve kterých používám slovní zásobu z jejich každodenního úzu. Zvládají naučené postupy, chybí jim ale představivost, která se projevuje v logických operacích. Proto je nutné prolínat život s matematikou. Snažím se, aby si žáci uvědomili, že matematiku potřebují v běžném životě. Mou snahou je rozvíjet v žácích kladný vztah k ní. Naštěstí většinu žáků matematika baví a je to pravděpodobně díky pozitivnímu klimatu ve třídě a radosti z úspěchu.

U dětí romské národnosti se předpokládá, že je pro ně kontext financí srozumitelnější, nežli jiné kontexty. Proto jsem záměrně zadávala úlohy, na kterých by se mohl uvedený předpoklad projevit.

Diagnostickým záměrem bylo naučit se vytvářet slovní úlohy a úlohy tak, abych byla schopna určit, kde vznikají obtíže a nepochopení ze situací. Proto bylo v experimentech zařazováno pouze probrané učivo. Zajímalo mě, zda jsou žáci schopni užít dovednosti, které získali v průběhu školní docházky. Většina nemá neobvyklé problémy s řešením úloh. Potíže, které se v řešeních žáků objevují, jsou zcela běžné. Například posun výsledku o 1, o 10, nebo vzájemná záměna operace sčítání a odčítání. Větší potíže mají žáci s představou čísla jako množství a s porovnáváním. V mé práci jsem se snažila identifikovat, kterých chyb se žáci dopouštějí nejčastěji a zjistit, které mechanismy používají k výpočtům. Zajímalo mě, zda se mohou objevit i nové způsoby řešení úloh. V průběhu minulého školního roku jsem rozebírala úlohy žáků, učila se identifikovat a zdůvodňovat jejich chyby. Od práce jsem očekávala, že se je naučím rozebírat a zároveň zjistím, kde mají žáci největší nedostatky. Předpokládala jsem, že v budoucnu mi tato schopnost pomůže předejít podobným problémům.

2 Teoretická východiska

Prací zabývajících se vztahem dětí k matematice, k počítání a porozumění číslům u dětí je publikováno poměrně velké množství. Jen při vyhledávání v databázi www. sciencedirect.com při zadání například hesel adding in math and children (sčítání, matematika, děti) a omezení na rok 2012 bylo zobrazeno 742 prací. Práce jsou zaměřeny na různé oblasti, pro svou práci jsem vybrala ty, týkající se sémantického porozumění a strategií využívaných v numerických operacích sčítání a odčítání v oboru do 100.

2.1 Stadia vývoje matematického myšlení

Autoři (Aunio P., Niemivirta M., 2010) se zabývali vývojem matematického myšlení u dětí ve Finsku. Výsledky prokázaly, že získání početních schopností před školní docházkou předurčuje získání základních aritmetických dovedností a matematickou úspěšnost v první třídě bez závislosti na demografických faktorech.

Rozlišuje se 6 možných stádií při vývoji matematických schopností. Primární stádium zahrnuje pochopení množství, akustické, asynchronní, synchronní, výsledné a zkrácené počítání. Primární pochopení množství začíná kolem dvou let, kdy děti projevují znalosti, jak odlišné číslo (slovo) odkazuje na rozdílné množství objektů, ale v tomto stádiu je možné rozlišit pouze velmi základní množství. Na úrovni akustického rozlišení ve věku kolem tří let, umí říci čísla, ale ne ve správném pořadí a nezačíná nezbytně s jedničkou. Je to spíše, jako by recitovaly dětskou říkanku. Jakmile dosáhnou asynchronní fáze tj. kolem věku čtyř let, jsou děti schopny říci čísla ve správném pořadí a ukazovat na objekty, ale slovo a přiřazení není vždy koherentní. O šest měsíců později, v synchronní fázi, jsou schopny říkat čísla a označit správně počítané předměty. Výsledná fáze okolo věku pěti let, kdy dítě je schopno říci číslo správně a začíná od jedné a rozumí tomu, že počítaný předmět má být označen jednou a že poslední číslo znamená množství předmětů v souboru. Během fáze zkráceného počítání, okolo pěti a půl let, jsou schopny rozpoznat číslice a umí počítat od zvoleného čísla nahoru. Tak jejich schopnost operovat s čísly a tvořit řady a počítat od zvoleného čísla podstatně vzrůstá. (Aunio P., Niemivirta M., 2010)

Žáci nastupují do školy v době předoperačního myšlení. Dle Piageta se projevuje kognitivní struktura, kterou nazývá ireverzibilita. Ta znamená, že žák není schopen postupovat zpětně ke svému výchozímu bodu. Vysvětluje to tím, že i když dokáže sečíst dvě a tři s výsledkem pět, často nedokáže tento postup obrátit a odečíst od pěti dvě s výsledkem tři. Na prvním stupni se žáci převážně pohybují ve třetím stadiu konkrétních operací. *V tomto důležitém stadiu, které v podstatě pokrývá mladší školní věk, vidíme, jak děti získávají uspořádanou a soudržnou symbolickou soustavu myšlení, jež jim umožňuje anticipovat události a ovládat své okolí......teprve ve čtvrtém stadiu formálních operací (okolo 12 let) jsou schopni si uvědomit, že při řešení určitého problému lze najednou vzít v úvahu rychlost, váhu a čas, popřípadě že jednu z těchto veličin bude asi nutno změnit, zatímco ostatní zůstanou konstantní atd.* (Fontana D., 2003, str. 67-71)

Pro úplné porozumění sčítání a odčítání je nutné naučit žáky, aby pochopili vztahy mezi těmito dvěma operacemi. Ukázalo se, že žáci využívali různé strategie při počítání. Mladí žáci chápou vztahy mezi sčítáním a odčítáním, a jejich pochopení není závislé na jejich početních schopnostech. Žák nemůže porozumět číslům, dokud si neuvědomí, že při přičtení jednoho čísla k nějakému číslu a následné odečtení téhož, je posunem na ose o stejné číslo. I předškolní dítě si je schopno uvědomit, že pokud přidá na pět kostek tři, které následně odebere, bude výška věže stejná jako na počátku, aniž by si uvědomil práci s čísly.

V Anglii, kde byl průzkum proveden, je v současné době kladen důraz na výuku základních dovedností v sčítání a odčítání a rozvoj faktů. V národním kurikulu je řečeno, že žáci by měli využívat skutečnosti, že odčítání je opak sčítání. Zdá se, že odčítání je dobrá pomůcka, ale důležitější je přínos k řádnému pochopení čísla. (Bryant, P., Christie, C., Rendu, A., 1999)

Porozumění konceptu inverze je větší než asociativity. Některé děti jsou schopny porozumět konceptu inverze již v předškolním věku. Koncept inverze znamená, že sčítání a odčítání jsou opačné operace, koncept asociační, že sčítání a odčítání je možné řešit v jakémkoli pořadí. Porozumění vztahům mezi sčítáním a odčítáním je nutné k pochopení části a celku. (Robinson, K. M., Dubé, A. K., 2009)

Žáci, kteří používají koncept asociační při sčítání a odčítání, jsou schopni jej využívat v problémech inverze. V problému a+b=b+_ dosazení chybějícího čísla bez počítání ukazuje na znalost, že sčítání a odčítání jsou opačné operace. Umožňuje rychle a jednoduše řešit problémy, které se na první pohled zdají složité. Toto porozumění inverzi je zásadní pro porozumění přirozeným číslům. Již před školní docházkou začínají žáci rozumět základním matematickým principům, které vedou k efektivním strategiím. (Robinson, K. M., Ninowski J. E., Gray M. L., 2006)

Domnívám se, že bych se více měla zabývat psychologií žáků. Problémem dospělých je, že někdy očekávají od žáků myšlení na úrovni, na kterou žáci nedosáhli. Někdy žáky podceňujeme, někdy přeceňujeme.

(Blažková, R., 2000) Autorka uvádí, že vytváření matematických pojmů je nepřenosné. Pouze vlastní myšlenkovou činností se dítě dopracuje k pochopení abstraktních matematických pojmů. Požadovaný abstraktní pojem je vytvářen skrze manipulativní činnost s konkrétními předměty a následně činnost se zástupci těchto předmětů. Ve škole je proces vytváření pojmu přirozeného čísla zahrnut do oblasti tzv. „numerace“. Po vybudování pojmu přirozeného čísla a zvládnutí jeho vlastností by žák měl být schopen počítat předměty v dané skupině nebo souboru, vytvořit skupinu s daným počtem prvků, psát číslice a zapisovat čísla, číst číslice a čísla, orientovat se v číselných řadách, znázornit čísla na číselné ose, porovnávat čísla a zaokrouhlovat je. Přirozená čísla jsou v běžném životě používána v mnoha významech. Číslo znamená buď označení množství (počet prvků dané skupiny), nebo má význam operátoru (příkaz uber, přidej), nebo význam adresy (číslo sedadla v divadle, číslo domu, SPZ automobilu). Pojem čísla prošel v historii složitým vývojem. Podobný proces se odehrává i při vytváření pojmu čísla u dětí. Budování pojmu vyžaduje vysoký stupeň abstrakce, jelikož dítě musí přestat vnímat viditelné vlastnosti předmětů, a musí začít chápat, že některé skupiny předmětů mají něco společného, co nesouvisí s jejich viditelnými vlastnostmi. Aby dítě pochopilo pojem čísla, musí mít mnoho zkušeností. V předmatematickém období si dítě buduje chápání vztahu „stejně“ přiřazováním prvků jedné skupiny, skupině druhé. Umí vzájemně přiřadit prvky obou skupin. Prostřednictvím hry, kreslení, třídění a přiřazování konkrétních předmětů je u žáků potřeba od nejranějšího věku vytvářet předpoklady pro pozdější chápání a rozlišování společných znaků, velikosti, počtu apod. Často se nepochopení pojmu přirozených čísel projeví zřetelně při provádění základních početních operací. Opět je nutné vycházet z manipulativní činnosti s konkrétními předměty a následně jejich zástupci neboli reprezentanty tj. s jejich symboly. Teprve na základě činností vyvozujeme jednotlivé operační spoje a zapisujeme příslušné příklady. Vhodné je využívání dramatizace, manipulativních činností a kreslení. Nejprve je vhodné počítat prvky stejného druhu. Konkrétní a grafické znázornění využívá dítě tak dlouho, než se naučí početní spoje bez opory o názor. Při sčítání ve druhé desítce bez přechodu přes základ deset je vhodné využívat komutativnosti sčítání 12 + 4 = 4 + 12. Při pamětném odčítání jsou kladeny velké nároky na žákovu dobrou představu o čísle a jeho paměť. Pokud si žák zafixuje chybně spoj sčítání, k nápravě je nutná důsledná manipulativní činnost skrze znázornění konkrétními předměty.

Problém u našich žáků z málo podnětného prostředí je, že nastupují do školy většinou bez sebemenších „předčíselných představ.“ Během první třídy je tedy nutné rozvíjet zkušenosti, které jsou jinak rozvíjeny již v mateřských školách.

2.2 Rozklad čísel

(Cheng, Zi J., 2012) Skládání a rozkládání čísel je zásadní pro naučení sčítání. Schopnost počítat je tradičně považována za důležitý mezník ve vývoji dítěte pro pochopení čísel. Děti začínají počítat po jedné a učí se používat čísla na konkrétních předmětech. Učit počítat se jim pomáhá vyvinout pochopení pořadových vztahů. Děti používají počítání, aby řešily numerické problémy, včetně identifikace počtů jednotek v souboru předmětů, vybrání podsouboru z většího souboru a porovnání počtu členů ve dvou souborech. Jak děti řeší problémy zahrnující početní operace jako je 8+3? K pochopení čísel a sčítání děti mohou použít různé strategie (tradiční po jedné, dopočítávání, nebo pomocí rozkladu.) Většina učitelů i rodičů podporuje žáky, aby tradiční počítání používali jako základní strategii řešení sčítání. Žákům vyhovuje tento způsob, při kterém mohou počítat konkrétní předměty skrze počítání prstů. Pro děti i jejich rodiče a učitele, je tradiční počítání užitečný a nevyhnutelný způsob, jediný, který umožňuje počítání jednoduchých sčítání. Tato metoda však může oddálit žákův rozvoj složitějších matematických dovedností. Pokračování v této strategii může dítě zdržet ve vývoji pokročilejších matematických znalostí (schopností). Některé studie ukazují, že předškolní děti, které prošly pokračujícím zaujetím pro tuto strategii, odmítají zkoušet novou a mnohem pokročilejší strategii rozkladu. Není překvapující, že tyto děti se snaží dávat přednost použití počítání, které se zdá snadnější. To také vysvětluje, proč to učitelé a rodiče považují za efektivní metodu. Děti používající tuto strategii řeší sčítací problémy s menším pochopením a projevuje se u nich horší porozumění vztahům mezi čísly. Tradiční sčítací strategie založena na blocích nebo prstech je užitečná pro malé děti řešící sčítání, ale není vhodná pro problémy zahrnující větší čísla. Kromě výše zmíněných strategií děti často používají další strategii, aby získaly součet dvou malých čísel (např. 2 + 5). Místo počítání součtu, děti získají odpověď ze své paměti (rychle získají odpověď).

Jsou zásadní rozdíly mezi porozuměním dětí a postupy, které používají při řešení problémů. Ve sčítání a odčítání je klíčový pokrok v konceptu zjištění, že celek může být rozložen na dvě části. U žáků se také liší úroveň porozumění celku a jeho vztahů. Důležité je pochopení opačného vztahu sčítání a odčítání. Na rozdíl od porozumění konceptu jsou důkazy, že mechanismy sčítání a odčítání se s věkem zlepšují. Používání konceptů při řešení problémů je základní aspekt matematického porozumění. Je zásadní prozkoumat individuální rozdíly v konceptuálních a procedurálních znalostech pro pochopení pokroku v sčítání a odčítání. Žáci využívají vztahu celku a částí k vytvoření efektivních procedur řešení problémů. (Canobi, K. H., 2004)

Autorka dále zkoumala u 5-7letých porozumění částí a celku. S použitím loutek zkoumala koncepční vztahy a+b=c, b+a=c princip záměny sčítanců, a+b=c, c-b=a princip inverze. Ukázalo se, že zásadním pokrokem v porozumění koncepčním vztahům je zahrnutí odčítacích vztahů do mentálních reprezentací, jak jsou části dávány dohromady, aby utvořily celek. (Canobi, K. H, 2005)

(Hejný M., Jirotková D., Slezáková, J., 2001) Zmiňují termín aditivní triáda tj. trojice čísel, z nichž jedno je součtem dalších dvou. Například (3,5,8). *Představu, která o triádě vzniká ve vědomí žáka, budeme nazývat schéma triády. Je to komplexní představa, která v sobě zahrnuje jak strukturální (pracující pouze s čísly), tak i sémantické (jsou propojené na životní zkušenosti žáka) generické modely.* Žáci potřebují pochopit schéma, aby byli schopni pracovat s ním jako s celkem a nahrazovat čísla triády v různých kontextech. Triáda se může projevovat jako zápis úlohy (3 + 5 = ?), vhodnější je však její využití v jiných schématech (3 +? = 8). Zajímavými typy úloh na procvičení triád jsou sčítací trojúhelníky.

Při vlastním experimentu ve druhé třídě se ukázalo, že pro nácvik je vhodné žákům vystříhat čísla a nechat je s nimi manipulovat. Domnívám se, že takovouto aktivitu by zvládli i žáci prvního ročníku. S mými žáky jsem oproti odborné literatuře stavěla součtové trojúhelníky jako pyramidy. U jednodušších pyramid se po pochopení algoritmu procvičuje sčítání a odčítání. Jedná se o automatickou akci, která je pro žáky větší výzvou nežli počítání příkladů. Pro žáky je tak pochopitelnější vzrůstající systém čísel. Pyramidy žáky baví, jsou náročnější na jejich logické myšlení nežli běžné úlohy a jsou velmi rychlé na přípravu.

(Hejný M., Jirotková D., Slezáková, J., 2001) Autoři dělí sémantické generické modely do tří skupin. Do první skupiny spadají jevy, které odezní a není tudíž možné je dále smyslově vnímat, nazývají se dynamické modely a spadají sem například zvuky. Druhá skupina, která je ve výuce využívána nejvíce, jsou modely statické, například předměty a obrázky. Staticko-dynamické modely jsou kombinací obou výše uvedených modelů. Všechny modely využívají životních zkušeností žáka.

Uvědomila jsem si, že i já ve výuce využívám pouze statických modelů.

Na základních školách v Malajsii je povinně využíván soroban. Pomáhá žákům uvědomit si pozici čísel (hodnotu) a následně lépe porozumět číslům. V sorobanu se pracuje s celky 5 a 10, což od žáků vyžaduje matematické myšlení. (Aunio P., Niemivirta M., 2010)

Ujistila jsem se ve svém přesvědčení, že rozklad čísla je pojem dvou významů. Souhlasím s jeho nutností jako pochopení možnosti rozložit různá čísla na jiná v souvislosti s porozuměním číslům. V české odborné literatuře se však častěji vyskytuje rozklad jako metoda sčítání a odčítání s přechodem. S tou nesouhlasím, důvody vysvětluji později.

(John Dewey in Singule, F., 1991, str. 96) *Původem myšlení jsou jisté rozpaky, zmatek nebo pochybnosti. Myšlení není žádným spontánním spalováním, nedochází k němu na základě nějakých „obecných principů“. Vždy existuje něco, co je způsobuje a vzbuzuje. Všeobecné naléhání na dítě (nebo na dospělého), aby myslelo bez ohledu na existenci nějaké obtíže v jeho vlastní zkušenosti, obtíže, která je trápí a ruší jeho rovnováhu, je stejně nicotné jako rada, aby se samo vyzdvihlo pomocí svých tkaniček u bot......*
I když má dítě (nebo dospělý) nějaký problém, bude zcela marné nutit je, aby myslelo, nemá-li dřívější zkušenosti obsahující některé z týchž podmínek. Může ovšem také vzniknout stav zmatenosti a mohou být k dispozici dřívější zkušenosti, z nichž se vynoří určité návrhy, a přece myšlení nemusí být uvažováním. Osoba nemusí být dostatečně kritická k idejím, které ji napadla.....Může vzít první „odpověď“ nebo řešení, které ho napadne, jen z duševní lenosti, netečnosti nebo netrpělivosti něco řešit.

2.3 Učitel

(Hejný, M., in Proměny primárního vzdělávání v ČR 2005, str. 176) Rozlišují se dvě edukační strategie, které jsou úzce spjaté s edukačním cílem učitele. Výuka, kde učitel je považován za nositele moudrosti, je nazývána transmisivní. Během takové výuky žáci vstřebávají informace předávané učitelem a jejich cílem je si informace zapamatovat. V matematice to znamená naučit se správně používat strategie, které učitel žákům předloží. Opačným přístupem je konstruktivistická strategie. Učitel se snaží žákům předkládat různé problémy, které diferencuje dle jejich schopností, řídí diskusi, nechá žáky, aby si vytvořili své vlastní matematické struktury.

(Stehlíková, N., 2007, str. 14) Na výše zmíněné strategie navazují styly vyučování. Učitel vyučující transmisivně často využívá autoritativní strategie, zatímco učitel vyučující konstruktivisticky vyžaduje dialogické interaktivní strategie. *Setkali jsme se s učiteli, kteří vyučovali transmisivně, ale jejich zacházení s žáky bylo dialogické, ale ne s učiteli pracujícími konstruktivně s autoritativním vztahem k žákům. Nicméně takový případ nastat může.*

Sama sebe bych na ose transmisivní a konstruktivistická učitelka zařadila spíše ke konstruktivistickému. Stále se občas přistihnu, jak se snažím žákům předat nějaký poznatek, místo abych jim umožnila, aby ho odhalili vlastními silami. Činím tak pravděpodobně ze zvyku a z časových důvodů. I když si uvědomuji, že informace, na které žáci přijdou sami, jim zůstávají v mysli déle, bojuji někdy s netrpělivostí.

Základním principem konstruktivizmu není výklad, ale vhodná série úloh. (Hejný, M., 2004, str. 23)

Po přednáškách na Pedagogické fakultě se snažím žákům předkládat zajímavé úlohy, které rozvíjí jejich porozumění matematice.

(Ghazali, M., Othname, A. R., Alias R., Saleh, F., 2010) Se snažili vyvinout kriteria hodnocení učitelů. Správné vyřešení úloh již není považováno za důkaz žákovského pochopení matematického konceptu. Nežli učit žáky přesný postup řešení, jsou žáci vedeni k tomu, aby si vymýšlely vlastní mentální strategie a propojovali skutečný život s odpovídajícími matematickými reprezentacemi. Rané zkušenosti s číselnými operacemi zajistí žákům důležité propojení mezi strukturami, které posilují pochopení a jsou důležité k vytvoření spojů mezi různými operacemi a efektivními početními strategiemi, které vedou k porozumění číslům. Ukázalo se, že žáci využívají vlastní mentální strategie, i ty, kterým nebyli vyučováni.

2.4 Motivace

Učitel předkládá žákovi takové podněty z vnějšího prostředí, se kterými se žák samostatně snaží provádět mentální operace. Pro matematickou práci s podněty je pro žáka nutná vnitřní motivace. Učitel ukazuje žákovi cesty a povzbuzuje jeho zvídavost, snaží se mu dopřát pocit radosti z nového poznání i pocit sociální seberealizace. (Stehlíková, N., 2007, str. 16-17)

(Hejný, M., 2005, str. 176) *Hovoří o strategické motivaci. K tomu, aby žák udržel trvalejší zájem o jistou oblast lidské činnosti, musí pociťovat tuto činnost jako něco obohacujícího, přínosného, radostného. Proto je strategická motivace matematiky závislá na dobrém klimatu hodin matematiky a na zkušenosti žáků, že tato práce je zajímavá a smysluplná. Strach motivaci tlumí, radost z úspěšné seberealizace ji umocňuje – nezávisle na tom, zda jde o výborného nebo slabého žáka. Strategická motivace tedy vyžaduje znalost zájmových dominant žáků a volbu přiměřených úloh, které jim učitel předkládá.*

(Hejný, M., 2007, str. 4) Motivace vychází z touhy žáka porozumět věci, kterou nezná. Je nutné, aby si sám uvědomoval, že danou věc chce pochopit. Žáci jsou zvídaví a je zapotřebí poskytnout jim podnětné prostředí. Pokud jim není poskytnuto, jejich motivace je utlumována, což je zásadní problém.

Skinner mluví o efektivních způsobech naučení tomu, co stojí za to umět. Rozpracoval teorii programového učení, které je založeno na čtyřech zásadách. Učení musí být aktivní (učící se rozhoduje, vybírá z alternativ), motivované (perspektiva kladného zpevnění), úspěšné (obtížnost stoupá pozvolna, jde se po malých krocích a žák posiluje své učební sebevědomí), využívající moderní techniky. (Helus, Z., 2007, str. 120)

Úlohy by měly žáky povzbuzovat k řešení problémů, tvorbě hypotéz, rozhodování, rozvíjení strategie hry, stavění stavebnic atd. Zvolené situace by měly podporovat aktivní zapojení žáků, pomáhat jim porozumět užitečnosti požadované znalosti a dodat jim motivaci investovat čas a úsilí najít řešení. (Stehlíková, N., 2007, str. 24)

K motivaci dětí a posilování zájmu žáků o matematiku je vhodné využít slovních úloh se zajímavou tematikou a různých hříček. (Blažková, R., 2000, str. 77, 78) *Aby děti zvládly řešení složených slovních úloh, musí se naučit uvědoměle a s pochopením řešit slovní úlohy jednoduché, tj. slovní úlohy, ve kterých se vyskytuje jedna operace. Slovní úlohy by měly být pro děti přitažlivé svými náměty. Měly by obsahovat činnosti dětem blízké, mohou vycházet z reality, mohou se dramatizovat, graficky znázorňovat apod. Poskytujeme dětem podněty k tomu, aby si slovní úlohy vytvářely samy.*

2.5 Porozumění

(Cockburn, A., 2007) Autorka se domnívá, že děti potřebují více strategií, aby si vybraly tu, co jim vyhovuje. Důležité jsou správnost a rychlost, ty jsou měřítkem pokroku. Děti mají různou perspektivu, důležité jsou praktické ilustrace, které žáci mohou sdílet s učiteli i s ostatními.

U porovnávání je důležité pochopit a propojit fakt, že pokud jeden prvek je o víc než něco větší než druhý, znamená to, že druhý je o méně než něco menší než ten první. Pro porozumění úloh je vhodné využívat ilustrací a obrázků. Žáci mohou mít různé obrázky a ty přikládat k nim náležejícím úlohám. Následně mohou probrat svůj postup ve dvojicích. V hodinách matematiky je vhodné využívat i různé hry (domino, bingo). Doporučuje se práce se stovkovou tabulkou.

(Simon, H. 2006) Porozumění přirozenému číslu jako číslu kardinálnímu je klíčem k matematice. Autor se odvolává na švýcarského psychologa Jeana Piageta. Pojem čísla jako čísla kardinálního chápeme jako stálou vlastnost spočítaného množství. To, že poslední číslovku chápeme jako počet, není pro dítě samozřejmé. Nepochopení se projevuje, například pokud žák není schopen rozeznat, že je ve dvou řadách vedle sebe stejný počet prvků, pokud jsou v jedné řadě prvky umístěny dále od sebe. Děti na rozdíl od dospělých nenastolují mezi oběma množinami vzájemně jednoznačný vztah, a proto potřebují spočítat počet prvků v obou množinách. Dítě ještě nevěří ve stálost výsledků počítání v prostoru a čase. Žáci, kteří mají s počítáním předmětů málo zkušeností, nezvládají odhady množství, většinou udají největší množství, ke kterému mají nějaký vztah, tj. „maximální číslo". Učitel může získat vhled do dětské představy čísel skrze „kaskádu odhadů". Žáci se často zdráhají odhadovat, skrze odhad lze však žákům zprostředkovat zkušenosti týkající se představy o množství určitých předmětů. Žák je schopen abstrahovat, pokud je schopný o činnostech a jevech mluvit, plánovat je a předvídat jejich výsledky. Základní početní úkony představují abstraktní verze konkrétních činností a jevů. *Slovní úlohy by měly zdůraznit praktickou stránku matematiky a kromě toho ukázat, zda dítě matematiku pochopilo.* (str. 43) Žák, který má dobrou paměť, je schopen zdánlivě s porozuměním řešit většinu slovních úloh, protože si pamatuje „napovídající" slova. Žáci počítají i nesmyslné úlohy, protože očekávají, že učitel zkoumá jejich početní dovednosti a chtějí mu předložit výsledek. Autor zdůrazňuje nutnost konfrontovat žáky se situacemi, které si umí představit, vymodelovat a vypočítat. Obtíže s výpočtem slovní úlohy se mohou projevit i tím, že žák si přemění úlohu záměrně tak, aby byl schopen ji vypočítat. Místo násobení zvolí ke zpracování sčítání, které dobře zvládá.

Na naší škole je častým problémem nepřipravenost žáků na školní docházku. Často jsou pozadu oproti dětem z podnětného prostředí, které chodily do školky. Vzhledem k tomu, že dyskalkulie se často začíná projevovat teprve po několika letech školní docházky, myslím si, že je možné využívat postupy pro žáky se znevýhodněním i v běžné třídě. Je to způsob jak předejít následným problémům. Jedná se o rozvoj matematických dovedností, tyto metody tedy nemohou uškodit ani žákům, kteří jinak matematice rozumí bez větších obtíží.

(Blažková, R., 2000) Při počítání po jedné, je nutné, aby dítě vždy vidělo pod názvem čísla příslušný počet prvků, tedy aby se řadu čísel neučilo jako říkanku bez obsahu. Vybudování množiny všech přirozených čísel spolu s přirozeným uspořádáním těchto čísel je jedním ze základních úkolů ve vyučování matematice. Pro pochopení přirozených čísel a operací s nimi je nezbytné správné počítání prvků po jedné.

U víceciferných čísel je nutné, aby žáci správně pochopili princip poziční desítkové soustavy. Vhodná je ilustrace víceciferných čísel na příkladech čísel, které nás bezprostředně obklopují. Při nácviku porovnávání čísel s obrázky většinou žáci přiřazují prvky jedné skupiny prvkům druhé skupiny, vytvářejí tedy dvojice. Následně již určují počet prvků každé ze skupin a porovnávají přirozená čísla. Teprve po řádném procvičení nerovnosti mezi čísly probíráme o kolik je jedno číslo větší, či menší než druhé. Autoři upozorňují na problematiku grafického zápisu porovnávání dvou obrázků. Porovnávané předměty by měly být stejně velké, aby nedocházelo k záměně porovnávání velikosti předmětů a počtů předmětů. Při využívání číselné osy je nutné správně formulovat pravidlo pro porovnávání čísel. Chybné je využívat k porovnání velikosti čísel vzdálenost od bodu nula, vzhledem k tomu, že výrok „čím dále od nuly, tím větší číslo“ neplatí v záporných číslech, zbytečně může být položen základ pro budoucí nepochopení záporných čísel. Vhodnější je formulace, že při porovnávání dvou čísel, číslo větší je vždy napravo. Ve slovních úlohách jsou často využívány vztahy „o několik více“, „o několik méně“, „několikrát více“, „několikrát méně“. Žáci často mají obtíže s rozlišením těchto vztahů a se správnou interpretací vyjádření. Zásadně nesmí být žáci vedeni k tomu, aby využívali mnemotechnickou pomůcku „více“ přičítáme, „méně“ odečítáme, neboť ve slovních úlohách může slovo „více“ značit i úlohu na odčítání a slovo „méně“ úlohu na sčítání. *Porovnávání přirozených čísel vychází ze správného chápání vztahů „více“, „méně“, „stejně“, které se opírá o porovnání množin – skupin.* (str. 32)

Při činnostním učení mají pracovat všechny děti. Žáci mají čísla před sebou. Je nutné nechat žáky, aby hovořili o tom, co dělají. Nesmí se bát klást otázky, ať už spolužákům či učiteli. Je doporučeno vytvořit vztah model-číslo, vhodné jsou názorné pomůcky. Obsah se přizpůsobuje vyspělosti jednotlivých žáků, je kladen důraz na individualizaci, ale i skupinovou práci, při které si žáci navzájem radí. Učitel slouží jako rádce a pomocník. Zásadní je postupovat od konkrétního k abstraktnímu, vracet se k již probranému učivu a opakovaně se ujišťovat, že žáci učivu porozuměli. (Rosická, Z., 2007, str. 51)

(Hejný, M., Kuřina, F., 2009, str. 160-161) Zabývali se diagnostikou formalismu v písemném sčítání. Sčítání je kognitivní dovednost, provádíme jej tedy s porozuměním. *Žák zvládl písemné sčítání, rozumí-li mu sémanticky, kalkulativně a strukturálně. Sémantické porozumění se týká schopnosti modelovat reálnou situaci příslušnou početní operací, ale také schopnosti interpretovat prováděný početní výkon reálným obsahem. Kalkulativní porozumění se týká porozumění prováděnému algoritmu, zde např. pochopení kroku „přenesení čísla do sousedního levého sloupce“. Strukturální porozumění znamená pochopení základních souvislostí, zde např. porozumění poziční soustavě. Je to sloup porozumění aritmetice vůbec a zasahuje do mnoha jejích pojmů a postupů.*

Vhodným prostředkem k zjištění formalizmu v sémantickém porozumění jsou úlohy s antisignálem. Druhou možností je vymýšlení slovních úloh k zadané úloze. Kalkulativní porozumění lze prokázat skrze doplňování chybějících číslic například v úloze 3_ + _2 = 48 nebo skrze číselné hádanky.

(Molnár, J., Schubertová S., Vaněk V., 2007) Rozlišují termín formální a formalistický poznatek. Jako formální označují provádění úprav s algebraickými výrazy, řešení rovnic, zapsání matematického poznatku vzorcem. *Znakem formálnosti je abstrakce. Abstrahování od konkrétního obsahu přineslo vynikající výsledky např. ve formální logice. Použití formálních operací v matematice nemusí vést k formalismu.* Jako formalistické získávání vědomostí označují autoři mechanické a verbální naučení vzorcům a probírané látce bez skutečného pochopení. Znaky formalistického vyučování jsou například převaha formy nad obsahem, kdy žákům unikají souvislosti, odříkávání pouček bez jejich pochopení, převaha pamětního učení nad porozuměním. Žáci jsou schopni vyřešit úlohy, ale nejsou schopni určit kroky, které provedli, a zdůvodnit svůj postup. Naučení se algoritmům bez jejich pochopení vede k tomu, že žáci jsou schopni řešit pouze úlohy, u nichž znají schéma či vzorec, ale nejsou schopni vyřešit úlohy jiného typu, i když jsou jednodušší. Formalistické znalosti jsou povrchní a žáci je rychle zapomenou. Formálnost je tedy v pořádku, pokud žáci rozumí úkonům, které provádí a jsou schopni odůvodnit vzorce, které používají.

Toto vysvětlení mi pomohlo pochopit problém formálnosti. Stále mám totiž dojem, že pamětné učení je někdy v hodinách matematiky nutné, a zdálo se mi, že při snaze vyhnout se formalizmu bych od něj měla upustit. Formální znalosti je tedy možné předkládat, pokud žáci rozumí tomu, co dělají.

Hlavním důvodem, proč u žáků k formalismu dochází, je špatná práce učitele. Učitel by neměl být pouhým „podatelem" poznání. Měl by žákům usnadňovat učení, uspořádávat učební materiál, pomáhat žákovi stanovovat cíle, zabývat se individuálními schopnostmi žáků. Organizovat společné aktivity, dávat žákům prostor k diskusi. Učitel se stává modelem učícího se jedince a sám se zapojuje do učebních aktivit.

Důležitá je příprava budoucích učitelů. I dnes jsou učitelé, kteří nebyli seznámeni s myšlenkami moderního školství. Způsobuje to pak zbytečné dohady v zaměstnání. Pokrokový učitel je na některých školách považován za ničivý element. Důležitá je podle mne koncepce školy, na níž by se měli podílet všichni učitele, aby byli schopni spolu diskutovat, předávat si poznatky o žácích a jejich pokrocích a novinkách v oboru.

(Molnár, J., Schubertová S., Vaněk V., 2007, Hejný, M., Kuřina, F., 2009)

K pochopení konstruktivistické výuky je vhodné znát desatero konstruktivismu.

Aktivita – Výsledky matematiky jsou formulovány do pouček a definic. Důležitější je však aktivita, skrze kterou k poznání docházíme.

Řešení úloh – Člověk hledá souvislosti a řeší problémy ve svém životě. Tento proces probíhá i v matematice. Součástí života je tedy i tvorba matematických modelů reality.

Konstrukce poznatků – Informace získáváme z různých zdrojů a můžeme je předávat druhým. Poznatky jsou však nepřenosné a vznikají pouze v mysli jedince.

Zkušenosti – Vytváření poznatků se opírá o informace, jejich vytvoření je podmíněno zkušenostmi. Zkušenosti žák získává ze života, měl by mít příležitost získávat zkušenosti i ve škole při experimentování a řešení úloh.

Podnětné prostředí – Nutnou podmínkou je příznivé klima třídy a tvořivý učitel, který předkládá žákům úlohy, které podněcují žákovu tvořivost.

Interakce – Sociální interakce pozitivně ovlivňuje získávání poznatků žáků, měli by být schopni o problémech diskutovat a naučit se argumentovat.
Reprezentace a strukturování – Žáci se postupně učí třídit a strukturovat dílčí matematické poznatky. Vznikají obecnější a abstraktnější pojmy.
Komunikace – S interakcí úzce souvisí komunikace. Aby žáci mohli diskutovat o problémech, musí se postupně naučit různé jazyky matematiky, symboliku a neverbálně se vyjadřovat.
Vzdělávací proces – Abychom mohli říci, že žák plně pochopil matematiku, musí žák porozumět souvislostem, zvládnout určitá matematická pravidla a být schopen je aplikovat.
Formální poznání – K tomu často dochází při transmisivním či instruktivním vyučování. Žáci jsou schopni si informace zapamatovat, ale nejsou schopni je využít.

(Hejný, M., 2007a, str. 3) *Již v předškolním věku většina dětí umí zjistit, že dvě panenky a tři panenky dohromady dá pět panenek. Klíčem k nalezení výsledku „pět“ je proces počítání po jedné. Po mnohanásobném opakování podobných výpočtů již dítě nemusí proces výpočtu dělat, protože v jeho vědomí je uložen poznatek 2 + 3 = 5 jako automatizovaný spoj. Proces počítání byl nahrazen konceptem spoje a byl uchopen v jazyce znaků. Automatizací spoje 2 + 3 → 5 vývoj poznatku nekončí. V další etapě dojde ve vědomí dítěte k vytvoření proceptu, tj. k takové asociace 2 + 3 ↔ 5, která umožní kdykoli a okamžitě jednu ze stran spoje nahradit stranou druhou. Jinak řečeno již v nápisu 2 + 3 žák vidí číslo 5 a naopak v čísle 5 vidí jeho možné rozklady a mezi nimi i 2 + 3.*

Musím se přiznat, že když jsem před dvěma lety vyučovala první ročník, nebyla seznámena s proceptem. Ve své výuce jsem se držela učebnice, která rozvoj asociace nerozvíjí. Bohužel se to projevilo nyní ve výsledcích žáků, a to v pozdějším období.

2.6 Strategie

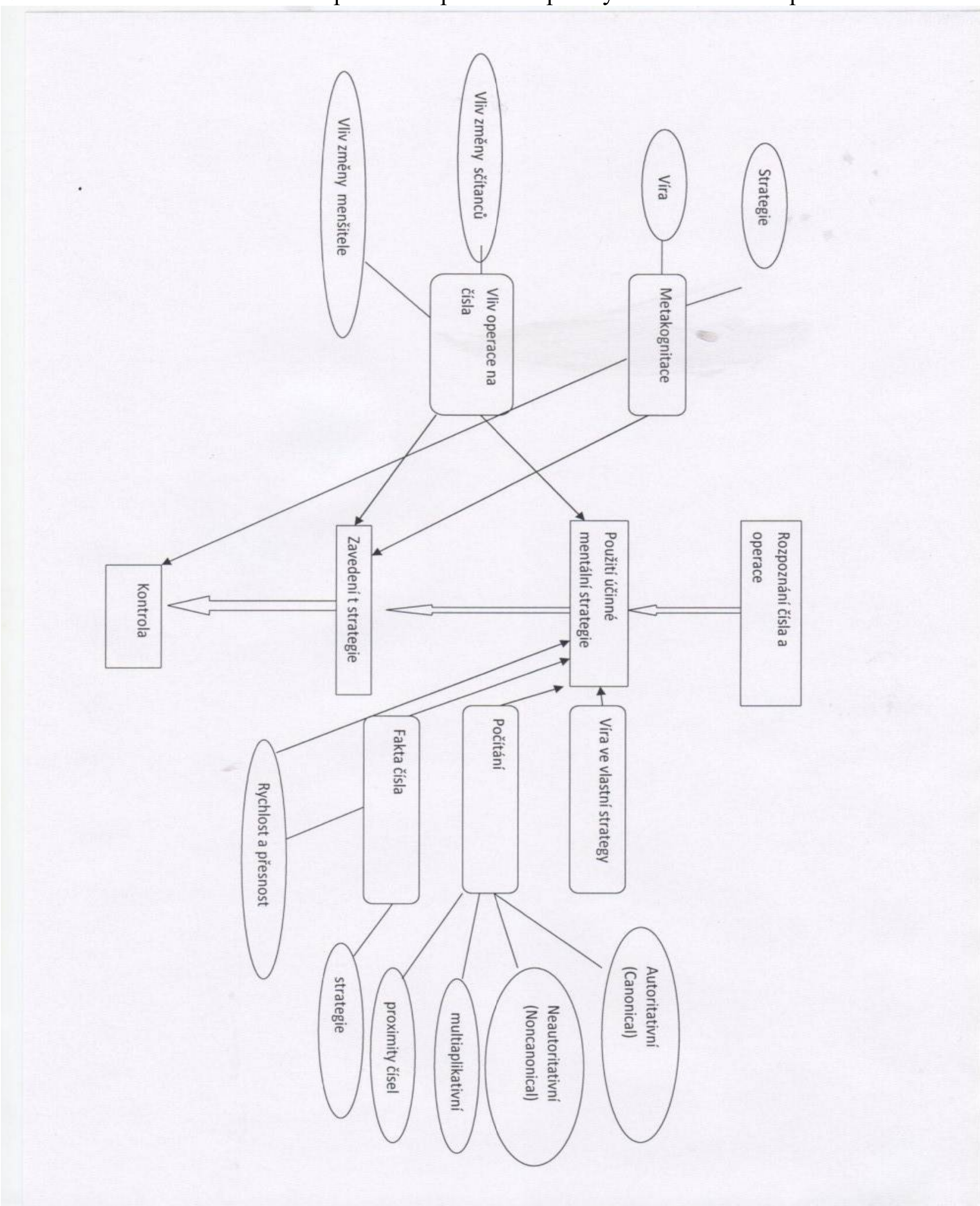
(Heirdsfield, A. M., 2004) Autorka se zabývala početními strategiemi u žáků třetího ročníku. Ukázalo se, že vztah mezi mentálním počítáním zpaměti a smyslem pro čísla je komplexní. Počítání zpaměti může být výsledkem úspěšného použití mentální strategie, která vykazuje smysl pro čísla (přesnost a flexibilita). Přesnost může být výsledkem úspěšného použití učitelem naučeného psaného postupu (přesnost a neflexibilita). Výzkumy ukázaly, že někteří studenti umějí počítat zpaměti bez pochopení čísel. Aby žáci byli schopni manipulovat mentálně s čísly, je nutné, aby plně porozuměli rozdělení čísel. Nejen tak, že číslo 45 lze rozdělit na 4 desítky a 5 jednotek, ale i na 3 desítky a 15 jednotek. Zdá se, že žáci by měli znát čísla nejen jako symboly, ale uvědomit si i jejich přirozenost jako násobky. Například že 100 je deset desítek a číslo 10 je nejen jedna desítka, ale i deset jednotek.

Dále shrnula různé varianty používaných strategií sčítání a odčítání od různých autorů (tab. 1). Diskutovaná strategie je mentální představa algoritmu pera a papírů, protože někteří autoři ji považují za neúčinnou strategii. V jejím článku jsou diskutovány i preference pro strategie od jednotlivých autorů. Někteří považují za nejvíce sofistikovanou metodu, metodu shlukování.

Tabulka 1 : Mentální strategie pro sčítání a odčítání.

Strategie	Příklady
Počítání	28 + 35: 28,29,30…. (počítání po jedné) 52-24: 52,51,50 …(počítání zpátky po jedné)
Rozdělení zprava doleva	28+35: 8+ 5=13, 20+30=50, 63 52 -24: 12- 4=8, 40 - 20 =20, 28 odčítací 4+8=12, 20+20=40, 28 sčítací
Rozdělení zleva doprava	28+35: 20+ 30=50, 8+5=13, 63 52-24:40-20=20, 12- 4=8, 28 odčítací 20+20=40 4+8=12 sčítací
Kumulativní součet nebo rozdíl	28+35: 20+30=50, 50+8=58, 58+5=63 52-24: 50-20=30, 30+2=32, 32-4=28
Shlukování zprava doleva	28+35: 28+5=33, 33+30=63 52-24: 52-4=48, 48-20=28 odčítací 24+8=32, 32+20=52, 28 sčítací
Shlukování zleva doprava	28+35: 28+30=58, 58+5=63 52-24 : 52-20=32, 32-4=28 odčítací 24+20=44, 44+8=52, 28 sčítací
Kompenzační	28+35: 30+35=65, 65-2=63 52-24: 52-30=22, 22+6 =28 odčítací 24+26=50, 50+2=52, 26+2= 28 sčítací
Dorovnávací	28+35: 30+33=63, 52-24: 58-30=28 odčítací 22+28=50, 28 sčítací
Mentální představa pero a papír algoritmus	Děti používají metodu písemného sčítání či odčítání, kterou se naučily ve třídě. Čísla si představují pod sebou jako na papíře a provádějí operace zprava doleva.

Graf 1 : Znázornění mentálních početních procesů u přesných a flexibilních počtářů.



Dá se říci, že u přesných a flexibilních počtářů jsou faktory ovlivňující matematické dovednosti komplexní (graf 1). Myšlenkové pochody závisí na úlohách, které jsou žákům předloženy. Různé číselné kombinace a operace vyžadovaly rozdílné aspekty přístupu. Schopnost vybrat si vhodnou strategii byla podložena číselným porozuměním, porozuměním vlastnostem čísel, znalostí, jak ovlivní operace číslo a důvěrou ve vlastní strategie.

U přesných a neflexibilních žáků se prokázalo, že nemají propojené poznatky. Jejich výsledky však byly přesné, protože většinou využívali strategie od učitele. Žáci si své výsledky nekontrolovali, věřili pravděpodobně svému postupu. Na rozdíl od první skupiny nevyužívali různé strategie.

Učitelé by se měli zaměřit na rozvíjení smyslu pro čísla a myšlení místo toho, aby se spolehli na psané postupy výpočtů. Tak si budou žáci vážit svých strategií víc, než kdyby využívali strategie zavedené učitelem. Žáci musí být podporováni v rozvoji efektivních strategií skrze porozumění. To může být podporováno diskusí ve třídě.

(Lemaire, P., Callies, S., 2009) Výsledky jejich práce prokázaly, že žáci častěji využívají metodu celkového rozkladu, nežli částečného při sčítání, nebo obě strategie stejně při odčítání. Výběr strategie je podmíněn věkem počtáře. Většina výzkumníků souhlasí, že k řešení aritmetických problémů je zapotřebí rozkódovat číslice, v dlouhodobé paměti najít aritmetická fakta, dočasně udržet průběžné výsledky a sčítat číslice. K řešení úloh žáci i dospělí využívají mnoha strategií, přímou strategii řešení, kdy správný výsledek najdou ve své paměti, a různé transformační strategie. V celkovém rozkladu obě dvoumístná čísla rozkládají na desítky a jednotky. V částečném rozkládají pouze druhé číslo. Ukázalo se, že mladší žáci využívají strategii celkového rozkladu méně nežli starší žáci.

(Blažková, R., 2000) Autoři upozorňují na zásadní nevhodnost rozdělování obou sčítanců u sčítání dvojciferných čísel, neboť tento návyk způsobuje chyby v odčítání.

Odčítání (Abdullah, N. S., Sivasubramaniam, P., 2010) Ve své studii se zaměřil na zlepšení výsledků žáků při odčítání skrze přeskupování u jednomístných a dvoumístných čísel. Pro svůj výzkum vybral šest žáků čtvrtého ročníku malajské základní školy. Zkoumal efektivitu metody nazvané „Zkratka pro odčítání“. Tato metoda má nahradit tradiční metodu „půjčování si“, která byla využívána k vyučování odčítání skrze přeskupování. Metoda zahrnuje pouze tři kroky.

Úloha: 93 – 57 = ?

Krok 1: Zaokrouhlit menšence na nejbližší desítku, 57 na 60.

Krok 2: Odečíst číslo 60 od 93, 93 – 60 = 33.

Krok 3: Přičíst hodnotu potřebnou k doplnění 57 na 60, tj. 3 k 33. 33 + 3 =36.

Tudíž 93 – 57 = 36.

Tato metoda využívá odčítání bez přeskupování v úloze, kde je tradičně využíváno. Je využíváno pouze dopočítávání, odčítání bez přechodu a sčítání.

Myslím, že se jedná o zajímavou alternativu pro žáky, kteří mají problém v odčítání s přechodem.

(Simon, H. 2006) Autor uvádí časté chyby, které mohou, ale nemusí, vést k podezření na dyskalkulii. U počítání za pomocí prstů se žáci často spletou o jednotku. Počítání na prstech je jednou z prvních strategií, při které žák může provádět operace bez jiných názorných pomůcek. Žák, který s čísly zachází nejistě, rád setrvává u strategie, která dodává správný výsledek. U počítání za pomocí prstů se žáci často spletou o 5, 10, 15. U počítání s většími čísly si žák při výpočtech musí pamatovat, kolikrát ruce využil. K chybnému výsledku s odchylkou jedna také dochází, pokud žák v duchu sčítá po číselné řadě.

Obrácení pořadí číslic v čísle je jednou z nejznámějších chyb u dětí. Pro dospělého je zápis samozřejmý, vznikl dlouhým historickým vývojem. Jedná se o společenskou dohodu, že číslice vpravo má nejnižší hodnotu (jednotky), vlevo od ní je počet desítek atd. Rozložení čísla 254 jako 2 x 100 + 5 x 10 + 4 x 1 lze pochopit po pochopení násobení a sčítání. Teprve až žák pochopí tuto souvislost, má možnost si plně uvědomit, proč jsou pozice čísel důležité. Pokud se objevuje problém obracení číslic po druhém ročníku, může se jednat o dítě, které upřednostňuje směr „zprava doleva“.

Přestože provádění písemných výpočtů odporuje vnímání dítěte a redukuje čísla na bezvýznamné řetězce značek, je stále považováno za typickou náplň výuky matematiky. Při něm se počítá zprava doleva, což odporuje naší přirozenosti. Oproti tomu stojí počítání zpaměti, při kterém se zaměřujeme nejprve na velké části (desítky) a posléze na malé části (jednotky), které je bližší celkové konkrétní činnosti přičítání nejprve většího čísla.

2.7 Technologie

V současnosti si v oblasti softwarového vybavení může učitel vybrat z různých kupovaných programů na CD-ROMech, případně volně stahovaných programů, které se dají rozdělit na programy, které může učitel využít ve výuce a programy, které se dají použít pro procvičování. *Vychází se z toho, že každá pomůcka, která podpoří názor a zpestří hledání postupu řešení úloh, se má ve výuce použít.* (Kubeš J., 2005). Pro zajímavost uvádím výběr nejznámější programů a odkazy na webové adresy, kde lze najít podrobnější informace.

Programy na CD - ROM

Programy z titulů Chytré dítě pro 1. stupeň ZŠ. (Než začne matematika - Matematika 1 - Matematika 2+3, Matematika 4+5). Jedná se o kompletní řadu o matematice, zaměřenou na výuku pro 1. stupeň ZŠ. Zahrnuje celé učivo matematiky 1. stupně, přičemž CD -ROM **Než začne matematika** probírá čísla 11-20, pak počítání do 20 bez přechodu desítky (sčítání typu 10 + 6, příklady typu 14 – 4, 10 + 10 a 20 – 10 atd.), počítání do 20 s přechodem desítky (sčítání s přechodem přes desítku, sčítání tří sčítanců apod.). Program obsahuje přehledně uspořádaný, samostatný soubor obrázků a animací, které mohou učitelé použít ve své přípravě vyučovacích hodin. Je zvláště vhodný i pro výuku na interaktivních tabulích. http://www.jablko.cz/matematika.

TS Matematika 1 - 4 zábavnou formou procvičuje problematické partie učiva matematiky z 1. až 4. ročníku ZŠ. Na CD TS jsou příklady na pamětné i písemné sčítání, odčítání, násobení a dělení. Kromě podrobného procvičování jednotlivých typů příkladů je možno si zvolit „pohádkovou" variantu, kde dítě postupně řeší jednotlivé typy příkladů, čímž pomáhá hlavnímu hrdinovi překonat všechny nástrahy temných sil a dostat se úspěšně do cíle. http://pachner.inshop.cz/inshop/matematika-strana-4/

Ferdova matematika pro 1. třídu a Ferdova matematika pro 2. třídu (2000) je výukový CD-ROM z řady titulů Učíme se s Ferdou. Ovládání celého programu Ferdova matematika pro 1. třídu je snadné a intuitivní. U každé kapitoly je možnost

nastavení počtu příkladů a časový limit na jeden příklad. Kapitoly: Číslo, číslice, množství, Číselná řada do 10, Porovnávání do 10, Sčítání do 10, Odčítání do 10, Číselná řada do 20, Porovnávání do 10, Sčítání do 20 bez přechodu přes desítku, Odčítání do 20 bez přechodu přes desítku, Sčítání do 20 s přechodem přes desítku s rozkladem, Odčítání do 20 s přechodem přes desítku s rozkladem, Sčítání do 20 s přechodem přes desítku bez rozkladu, Odčítání do 20 s přechodem přes desítku bez rozkladu. Program je zvlášť vhodný pro výuku na interaktivních tabulích.
http://pachner.inshop.cz/inshop/matematika-strana-4/

Alík – Veselá matematika (2000) je vhodný zejména pro žáky 1. - 3. tříd základních škol, rozvíjí matematické schopnosti a logické myšlení, zvláště v první části je sčítání v oboru do 20. V osmi různých hrách se děti procvičí ve sčítání, odčítání, násobení, dělení a porovnávání čísel podle velikosti. Děti se ocitnou v různých prostředích a situacích. Například pomáhají Alíkovi zvítězit v přetahování lanem nebo na střelnici sčítají zásahy do terčů apod. Součástí je i pracovní sešit s příklady, ve kterých je možné zvolit přesný typ procvičované látky a počítat jen tento typ příkladů. Hry jsou rozděleny do tří úrovní obtížnosti, při volbě nového hráče je možné zvolit, do kolika už hráč umí počítat - do 10, do 20 nebo do 100. Za správně vyřešené příklady získává hráč dukátky, které se mu střádají v pokladničce - prasátku. Získané dukátky může ve velkém Alíkově hračkářství vyměnit za hračky do svého pokojíčku.
http://www.silcom-multimedia.cz/tituly/al3/index.htm

Didakta Matematika (2000) CD-ROM slouží k procvičování matematiky v těchto číselných oborech: celá čísla, záporná čísla, desetinná čísla, zlomky. Procvičují se následující operace: sčítání, odčítání, násobení, dělení, porovnávání.
http://www.silcom-multimedia.cz/tituly/dma/index.htm

Programy dostupné na internetu

Program 4321 Matematika (2004) je souhrnný název pro dva výukové programy základů matematiky. Autorem programu je Bc. Petr Šatka, student Vysokého učení technického v Brně, který se s od roku 2004 věnuje tvorbě výukového software a je autorem šesti výukových programů. Jeho výukové programy jsou určeny pro žáky druhého a třetího ročníku základní školy a jsou hlavně zaměřeny na procvičování učiva sčítání a odčítání v oboru do 20 s přechodem přes základ 10. Program je rozdělen na tři

části. V první části se vyvozuje učivo názorem, kde se děti při manipulaci s virtuálními kolečky naučí rozkládat přičítané číslo. Zde správně pochopí postup sčítání čísel s přechodem přes desítku. Správné pochopení základních principů sčítání přes základ 10 je pro dítě velmi důležité a manipulace s kolečky, která je pro dětskou představivost vhodnější než abstraktní práce s číslem, mu to umožní. Ve druhé části si žáci pomáhají rozkladem přičítaného čísla. Zde rozvíjejí dovednosti získané v první části. Po zvládnutí této části následuje neméně důležitá část třetí. Ve třetí části se již osvojené učivo procvičuje.
http://snadnamatematika.ic.cz/index.php?akce=autor

Další programy lze najít na internetu, např. na serveru www.slunecnice.cz, který je nejpřístupnějším serverem a největším český katalogem světového i domácího shareware a freeware pro Windows a PDA. Na této adrese lze zdarma stáhnout program Matematika 1, jako autor je uveden DundrSoftware, který umožňuje procvičování příkladů sčítání a odčítání.

Vzhledem tomu, že se potvrdilo, že žáci jsou v kalkulativním počítání na různých úrovních a připravování individuální práce je časově náročné, pokládám různé počítačové programy za vhodný doplněk ve výuce. Někteří žáci mají přístup k internetu i doma a mohli by programy využívat na samostatné procvičování. Považuji programy za motivační. Nejenže žáci procvičují matematiku, ale seznamují se i s technologiemi, což je v dnešní době nutnou devizou do budoucna. Role učitele může být v tom, že děti naučí s programy pracovat, upozorní na jejich možnosti. Zvláště mladší děti je možné přitáhnout pohádkovou formou některých programů, ve které se nejvíc uplatňuje škola hrou.

3 Moje edukační strategie

Žáky, kteří se stali předmětem tohoto zkoumání, vyučuji již od první třídy. V té době jsem byla ve druhém ročníku Pedagogické fakulty a přednášky na fakultě výrazně ovlivnily můj styl výuky. Do výuky jsem se snažila žákům zapojovat myšlenky z učebnice Fraus, přestože jsem oficiálně učila podle učebnice Prodos. S žáky jsme využívali stovkovou tabulku, autobus, pyramidy, schody. Také jsem cíleně zařazovala slovní úlohy s antisignálem. V učebnici Prodos se taková úloha během první třídy vyskytla pouze jednou. Pokud by byla využívána pouze učebnice, byla by velká pravděpodobnost, že by žáci využívali k řešení úloh pouze návodná slova. Během první třídy měli žáci na stolech nalepené měřítko, na dveřích jsme měli totéž. Měřítko na dveřích se ukázalo jako vhodnější vzhledem k vertikálně rostoucím číslům. V budoucnu bych žákům měřítko vyrobila ve vertikální poloze. Během první třídy si žáci neuvědomují čtení zleva doprava, a proto je pro ně vertikální růst čísel srozumitelnější nežli horizontální.

V září 2010 jsem žákům zadala test z matematiky. Během druhého ročníku jsem navazovala na zkušenosti z první třídy a dále se nechávala inspirovat přednáškami na fakultě. Přestože jsem dále vyučovala podle učebnice Prodos, již jsem byla schopnější uvědomovat si její nedostatky. Na učebnici Fraus jsem nepřešla, protože jsem se domnívala, že by byla pro žáky obtížná. Zároveň si myslím, že je vhodné seznámit s touto učebnicí i rodiče žáků, což by šlo velice těžko, protože s většinou nepřicházím pravidelně do styku a někteří se nedostavují ani na třídní schůzky.

Jsem toho názoru, že nezáleží na učebnici, kterou člověk používá, ale na tom, zda má „otevřenou mysl" k inovativním způsobům vyučování. Každoročně navštěvuji školení Tvořivé školy (český jazyk v 1. třídě, využití interaktivní tabule, matematika, anglický jazyk). Nemohu říci, že vždy souhlasím se vším, co je na přednáškách prezentováno, ale jsem schopna si z nových informací vzít ty, o kterých si myslím, že budou přínosné výuce a prospějí žákům. Pokud se zamyslím nad protichůdnými edukačními strategiemi, transmisivní a konstruktivistickou, řekla bych, že osciluji přesně od prostředku ke konstruktivistickému pólu. Netroufla bych si však říci, že jsem založením pouze konstruktivistická. Mám však velkou výhodu díky kolektivu, vedení na své škole, ale nakonec i žákům, které učím. Od mých žáků se neočekává, že se přihlásí k přijímacím zkouškám na víceleté gymnázium, a proto nejsem tlačena splnit požadavky těchto testů. Většina mých kolegyní má na výuku podobný názor jako já, a jsou tedy tolerantní k zvýšenému hluku ve třídě. I vedení mě podpořilo v mé snaze hlouběji pochopit žákovské chyby a nechalo mě realizovat s žáky individuální konzultace ve chvíli, kdy za mě učil asistent pedagoga.

Můj příběh, aneb jak nás ovlivňuje znalost jednoho naučeného postupu.

Úloha: Jirka a Martin mají dohromady 35 kuliček. Jirka má o 1/3 kuliček více než Martin.

Kolik kuliček má Martin?

Příběh: Tato úloha mi byla předložena k vyřešení ve 4. ročníku studia na vysoké škole. Po řešení úloh se zlomky na předchozích seminářích jsem se domnívala, že je jednoduchá. Začala jsem si kreslit koláč, čokoládu a vyznačovat jejich části. Úloha však „nefungovala". Došlo mi, že je zapotřebí jiného postupu, stále jsem nebyla schopná úlohu vyřešit. Z časových důvodů mi bylo vyučující napovězeno. „Co to znamená, když Vám někdo řekne, že má o 1/3 vyšší plat než vy?" V tuto chvíli mi došlo, že nemohu dělit celek na třetiny, jako jsem se snažila doposud, ale na sedminy. Úlohu jsem zdárně vyřešila.

Komentář: Úloha, která byla určena pro 6. ročník, se mi jevila na první pohled snadná. Zdálo se mi, že úloha je pro mě explicitní. Narážela jsem však stále na neúspěch. Musela jsem zkoušet jiné postupy řešení. Ukázalo se, že zlomky, které nikdy nebyly mou silnou stránkou, stále nechápu. Snažila jsem se použít jen jeden známý postup řešení s pomocí různých modelů. Teprve po nápovědě jsem si dovedla matematickou situaci představit. Myslím, že nedorozumění vyšlo z toho, že jsem se do té doby setkala jen s jedním typem úloh.

3.1 Sčítání s přechodem přes 10 za pomoci rozkladu

Vzhledem k obtížnosti rozkladu jsem se rozhodla žáky vyučovat počítání bez jeho použití. Zjistila jsem, že v zahraničí se též úspěšně vyučuje bez rozkladu. V učebnicích Prodos je při přechodu přes deset využíváno rozkladu. Přesto je však na jeho procvičení zařazeno vždy jen jedno až dvě cvičení. Následující úlohy jsou vždy graficky znázorněny tak, že na rozbor žáci nemají místo. Očekávají snad autoři, že po jednom cvičení si žáci postup zautomatizují natolik, že budou schopni rozklad používat bez vedlejšího zápisu?

Při využívání rozkladu žáci naráží na mnoho úskalí. Především by bylo logické rozkládat vždy číslo menší, ale v učebnicích se vždy rozkládá číslo na druhém místě.

Problém

3 + 8 =

1) Žáci nepoznají, které číslo je lepší rozdělit. (Po nácviku žáci přemýšleli, které číslo mají rozdělit i u příkladu do deseti: např. 3 + 5 = ?)

2) Žáci si jedno z čísel rozdělí. Nastává problém dopočítání do deseti do druhého čísla. Číslo deset je fiktivním číslem.

3 + 8 =

7

3) Správně rozdělit druhé číslo.

3 + 8 =

7 1

4) Sečíst všechna tři čísla.

3 + 7 + 1 =

Sčítání čísla A a B. Při sčítání s rozkladem je výhodné vybrat si pro rozklad číslo menší. Často jsou však žáci vedeni v učebnicích k tomu, aby si vybrali číslo na druhém místě. Řekněme, že číslo B je menší. K číslu A si musí žák doplnit hodnotu do deseti z čísla B. Nazvěme tuto hodnotu C. Zbytek z čísla B po odebrání C nazvěme D. Následný součet je tedy A + C + D.

Problém- dopočítat do deseti z čísla B k číslu A. Rozdíl B – C = D. Uvědomit si, že konečný součet je tedy A + C + D.

Místo dvou čísel tedy žáci pracují se 4 čísly a fiktivní 10.

4 Výběr vzorku

Ve své třídě mám 14 žáků. Většinou se jedná o žáky ze socio-kulturně znevýhodněného prostředí (14 žáků je romského etnika). Pro sledování jsem vybrala 7 žáků. Záměrně jsem nevybírala žáky opakující ročník a žáky, kteří jsou do třídy integrovaní a vzdělávají se dle programu praktické školy. Na začátku experimentů ve druhé třídě jsem si vybrala 6 dětí. Bohužel jedna z vybraných žákyň letos kvůli zdravotním obtížím do školy nenastoupila a já byla nucena vybrat náhradníka. Po této zkušenosti jsem pro jistotu zařadila žáků sedm. U některých žáků je problémem i vysoká absence. Projevuje se i tím, že žáci nezvládají látku. Jejich rodiče se zřídka aktivně zajímají o prospěch svého dítěte a málokdy přijdou žákům pro domácí úkoly a procvičují s nimi zameškanou látku. Někteří rodiče by snad žákům i rádi pomohli, bohužel je pro ně někdy látka třetí třídy již obtížná. Vzhledem k tomu, že často zařazuji do výuky i úlohy, které se neobjevují v učebnicích, chybějící žáci mají posléze s těmito úlohami obtíže.

Sociální klima třídy je relativně dobré. Přestože ve třídě je několik žáků s poruchami chování, díky malému počtu žáků ve třídě (14), je situace únosná. Od první třídy se žáky snažím vést k porozumění druhým, toleranci a ochotě si pomáhat. Dva žáci mají sklony k agresivnímu chování, jsem nucena na to brát ohledy zejména při skupinové práci a práci ve dvojicích. Abych předešla konfliktům mezi žáky, mají při skupinové práci možnost pracovat individuálně. Někdy je nutná spolupráce asistenta pedagoga. V první a druhé třídě jsem měla asistenta k dispozici všechny hodiny, letos do mé třídy přichází na dvě hodiny denně. Snažím se jeho pomoci využívat při práci ve skupinách, pracuje s žáky, kteří mají poruchy učení či chování.

Věk uvádím k únoru 2012 (roků; měsíců). Jména žáků jsou změněna.

Pavel chlapec 9;11

Ze zprávy psychologa v květnu první třídy.

Projevy ADHD, malá schopnost sebeovládání působí v kolektivu rušivě a je méně přizpůsobivý. Nechodil do přípravného ročníku, do mateřské školy chodil jen krátce. Měl odklad školní docházky. Lehce podprůměrná úroveň rozumových schopností, tomu odpovídající slovní zásoba a způsob vyjadřování. Byl diagnostikován jako školsky oslabené dítě se speciálními vzdělávacími potřebami.

Rodinné zázemí

Pochází z nepodnětného a sociálně znevýhodněného prostředí. Rodina (matka a 3 děti) žijí v jedné místnosti na ubytovně, podmínky pro domácí přípravu a klidný domácí režim má omezené. Rodina je sledována odborem sociální péče, otec již získal do péče dva starší sourozence, proběhl již i soud o svěření ostatních sourozenců do jeho péče, ten však rozhodl, že zůstanou u matky. Neustálé rozpory v rodině se negativně projevují na chování, soustředění a domácí přípravě žáka. Matka chlapce nezvládá. Zajímá se pouze o výchovné problémy, studijní výsledky syna ji příliš nezajímají. Přestože v první třídě měl žák velké problémy, momentálně patří k nejlepším ve třídě.

Počet zameškaných hodin ve druhém pololetí druhé třídy 98. Počet zameškaných hodin za první pololetí třetí třídy 56 z 374.

Libor chlapec 8;11

Ze zprávy psychologa v květnu první třídy.

Do školy nastoupil v termínu, chodil do mateřské školy. Rozumové schopnosti jsou aktuálně mírně nadprůměrné, je klidný, spolupracuje velmi dobře.

Rodinné zázemí

Chlapec žije v domácnosti s matkou a babičkou, sourozence nemá. Otce nevídá. Matka se o syna zajímá, pravidelně se informuje o jeho prospěchu. Chlapec chodí do školní družiny, kde vypracovává domácí úkoly.

Počet zameškaných hodin ve druhém pololetí druhé třídy 124. Počet zameškaných hodin za první pololetí třetí třídy 49 z 374.

Miloš chlapec 10;1

Ze zprávy psychologa v květnu první třídy.

Chodil do mateřské školy a do přípravného ročníku. Do školy šel po odkladu školní docházky. Rozumové schopnosti odpovídají lepšímu průměru. Chlapec je živý, pozornost je kolísavá, projevuje rysy hyperaktivity ADHD.

Rodinné zázemí

Je identické dvojče Šimona, žije s matkou, otec je kubánské národnosti. Chlapec otce vídá, ale nežije s ním. Matka se o vzdělání syna zajímá. Uvědomuje si výchovné problémy spojené s jeho diagnózou. Chlapec chodí do školní družiny, kde vypracovává domácí úkoly. Matka se s ním učí i doma.

Počet zameškaných hodin ve druhém pololetí druhé třídy 37. Počet zameškaných hodin za první pololetí třetí třídy 9 z 374.

Šimon chlapec 10;1

Ze zprávy psychologa v květnu první třídy.

Chodil do mateřské školy a do přípravného ročníku. Do školy šel po odkladu školní docházky. Rozumové schopnosti odpovídají lepšímu průměru. Projevuje se výrazný

psychomotorický neklid, kolísavá pozornost, rysy ADHD. Při únavě se zvyšuje chybovost.
Rodinné zázemí
Je identické dvojče Miloše, žije s matkou, otec je kubánské národnosti. Chlapec otce vídá, ale nežije s ním. Matka se o vzdělání syna zajímá. Uvědomuje si výchovné problémy spojené s jeho diagnózou. Chlapec chodí do školní družiny, kde vypracovává domácí úkoly. Matka se s ním učí i doma.
Počet zameškaných hodin ve druhém pololetí druhé třídy 12. Počet zameškaných hodin za první pololetí třetí třídy 19 z 374.

Monika dívka 8;7
Ze zprávy psychologa v květnu první třídy.
Chodila do přípravné třídy. Je snaživá, klidná, motivovaná. Je nejmladší z celé třídy. Rozumové schopnosti odpovídají lepšímu průměru.
Rodinné zázemí
Žije v úplné rodině, má dva starší sourozence, kteří navštěvují stejnou školu, a jednu mladší sestru. Rodinné zázemí je podnětné, rodiče se zajímají o výsledky vzdělávání. Přestože je nejmladší ve třídě, je nejlepší žačkou. Projevuje se u ní silná vnitřní motivace zůstat nejlepší. Je však kamarádská, ochotná pomoci ostatním s prací.
Počet zameškaných hodin ve druhém pololetí druhé třídy 65. Počet zameškaných hodin za první pololetí třetí třídy 73 z 374.

Tamara dívka 9;9
Ze zprávy psychologa v květnu první třídy.
Aktuální úroveň rozumových schopností je v dolní části pásma průměru. Chodila do přípravného ročníku. V kolektivu je málo sdílná, mluví tiše, zdlouhavě. Lepší jsou výkony v oblasti schopností neverbálních, ve verbální oblasti zhoršuje výkon malá slovní zásoba a horší vyjadřování.
Rodinné zázemí
Dívka žije v úplné rodině, sourozence nemá. Rodiče se o školní prospěch zajímají. V první třídě měla velké obtíže s komunikací, byla velmi stydlivá. Od druhé třídy se

interakce se spolužáky i učiteli zlepšila, momentálně se do kolektivu zařazuje zcela bez problémů.
Počet zameškaných hodin ve druhém pololetí druhé třídy 190. Počet zameškaných hodin za první pololetí třetí třídy 136 z 374.

Vendula dívka 9;4
Ze zprávy psychologa v květnu první třídy.
Do školy šla v termínu. Rozumové schopnosti odpovídají průměru. Projevy SPU dyslexie a dysortografie, projevuje se neklid, pozornost je kolísavá. Těžko zvládá analýzu a syntézu slov.
Rodinné zázemí
Relativně podnětné prostředí. Do školy chodí i starší bratr. Matka měla možnost navštěvovat s dcerou speciální pedagožku, aby se zlepšila schopnost analýzy a syntézy, této možnosti však nevyužila. Přestože se s dcerou doma učí, nepodařilo se dohonit nedostatky, a dívka doposud velmi špatně píše a čte.
Počet zameškaných hodin ve druhém pololetí druhé třídy 45. Počet zameškaných hodin za první pololetí třetí třídy 97 z 374.

Dnes je již všeobecně známé, že pro učení je vhodnější vnitřní motivace nežli vnější. Vnější motivaci většina žáků nemá. Jejich rodiče se zajímají spíše o výchovné problémy. Monika je silně vnitřně motivovaná, je nejlepší ze třídy a snaží se nejlepší zůstat. Případné neúspěchy bere velmi vážně. Miloš a Pavel se jí snaží vyrovnat. Když jsem Monice začala ve druhé třídě dávat dodatečnou práci ve chvílích, kdy měla zadanou práci hotovou, začali pracovat rychleji, aby ji dostali také. Žádný z žáků však není přehnaně soutěživý, většinou se šikovní žáci snaží pomáhat ostatním.

5 Cíle experimentů

Experimenty jsem rozdělila do tří fází. V první fázi jsem zkoumala řešení slovních úloh žáků, které řešily problematiku porovnávání čísel. Během navštěvování druhé třídy psali žáci z dané oblasti tři testy. Moji snahou bylo pozorovat případné zlepšení v jejich sémantickém porozumění. Ve druhé fázi se žáci zabývali řešením úloh na sčítání a odčítání do sta; cílem bylo zjistit jejich kalkulativní dovednosti a identifikovat případné neporozumění. Ve třetí fázi jsem opět zkoumala jejich sémantické porozumění skrze test o pěti úlohách.

Všechny testy žáci vypracovávali v kmenové třídě během hodin matematiky.

Cíly experimentů bylo.

1) Hledat cesty, jak zvýšit sémantické porozumění slovních úloh u žáků. Některé slovní úlohy z učebnice jsou žákům málo srozumitelné, protože obsahují slova a slovní spojení, kterému žáci romské národnosti stěží rozumí. Text těchto úloh jsem upravovala do kontextu běžného života žáků. Někdy jsem celou úlohu nahradila úplně jinou, žákům srozumitelnou, ale matematicky stejnou.

2) Vyvrátit či potvrdit, že je pro romské žáky srozumitelnější kontext financí, nežli jiné kontexty. Proto jsem záměrně zadávala úlohy tak, aby se mohl uvedený předpoklad projevit. V testu vždy byla úloha s kontextem z oblasti finance a stejný typ úlohy s jiným kontextem.

3) Popsat řešitelské strategie, které žáci využívají k výpočtům.

4) Zjistit, zda jsou žáci schopni dovednost porovnání čísel projevit v sémantickém prostředí stejně dobře jako v prostředí strukturálním.

6 Fáze 1

6.1 Příprava experimentu

Již před těmito testíky jsme podobné úlohy vypracovávali. Úlohy jsem vymýšlela vlastní. Typy úloh jsem konzultovala s prof. Hejným ještě před tím, než jsem začala pracovat na diplomové práci. Podle desatera konstruktivizmu se snažím docílit toho, aby úlohy byly pro žáky srozumitelné a reálné. Všechny úlohy řešily problematiku porovnávání. Do úloh jsem se snažila zařazovat různorodé kontexty (finance, čas, kroky, stavy ze života žáků). Před prvním zadáním úlohy s více řešeními jsem přemýšlela, jak nejlépe otázku formulovat, aby si žáci uvědomili rozdíl mezi úlohami, které mají jednoznačnou odpověď a úlohami s více řešeními. Rozhodovala jsem se mezi formulací: „Jak daleko asi? Jak daleko může být?“ Nakonec jsem začala používat tázací slovo „může“. Většina žáků již od druhé třídy rozuměla tomu, že se jedná o úlohu, kde je někdy možné více než jedno řešení. Žáci věděli, že u těchto úloh jsem ráda, když napíší tři řešení.

Vzhledem k tomu, že pouze někteří žáci jsou schopni číst s porozuměním, zadání úloh jsem jim předčítala já, aby výsledky nebyly ovlivněny. Další úlohu jsem vždy četla teprve poté, když všichni žáci byli připraveni na další úkol. Netrvala jsem na písemných odpovědích k slovním úlohám. Ve druhé třídě činilo žákům psaní stále potíže a snaha soustředit se na správnost písemného projevu by mohla ovlivnit jejich soustředění na matematické úlohy. Kromě toho by to bylo také časově velmi náročné. Při řešení slovních úloh si v hodinách odpovědi vždy celou větou říkáme nahlas. Je to pro mě ukazatel kontroly porozumění úlohy. Jinak žáci mají v podstatě dvě možnosti řešení, sčítání a odčítání. Je pro mě důležité vědět, že ví, co počítají. Již od první třídy jsme procvičovali úlohy s antisignálem, a proto jsou žáci zvyklí dávat si pozor na formulace zadání. Správný výsledek žáci zaznamenávají kroužky.

Do přílohy přidávám skenované práce žáků. Na začátku svých experimentů jsem nevěděla, že do žákovských řešení by nemělo být vpisováno. Během rozboru úloh s žáky jsem jim ponechala volnost, aby si své výpočty upravili. Také jsem jim zapomněla zdůraznit, aby své testy nepodepisovali. V experimentech z letošního roku jsem se již této chyby nedopouštěla a u řešení z druhého ročníku jsem jména žáků přebarvila a podepsala je dle jmen, která jsem jim dala v experimentech.

Po každém testu jsem s žáky individuálně rozebírala jejich řešení. Někdy se tomu tak stalo i během výuky, kdy jsem poprosila asistenta pedagoga, aby pracoval s ostatními žáky, a já se mohla plně věnovat jednotlivým žákům. Měla jsem možnost častěji rozebírat jejich postupy v odpoledních hodinách, kdy se nacházeli ve školní družině. V druhém testu u třetí úlohy jsme si společně ověřili správnost výsledku odkrokováním vzdálenosti na toalety. Nejproblematičtější bylo žákům přiblížit situaci z páté úlohy. Situaci jsem se snažila znázornit na počitadle, posléze na dvou počitadlech. U některých žáků velmi dobře zafungovala číselná osa, jiní však stále nerozuměli. Postavila jsem vedle sebe dva žáky. Změřili jsme, jak jsou velcí, a řekli jsme si, že třetí žák je větší než menší a menší nežli větší. U většiny žáků znázornění zafungovalo. Při nácviku úloh se také stávalo, že žáci do výsledku zařadili i krajní body.

6.2 Výběr úloh

Pro lepší porovnání testů jsem zadala při druhém a třetím testu stejné slovní úlohy. Mezi testy byl velký časový rozestup, nehrozilo tedy, že by si žáci odpovědi pamatovali z předešlého rozboru. Změnila jsem však čísla na vyšší, aby úlohy pro žáky nebyly příliš jednoduché. Pouze u čtvrté úlohy jsem nemohla čísla příliš změnit, aby množství sourozenců bylo reálné. U páté úlohy u druhého a třetího testu jsem záměrně ponechala i stejná čísla. Zajímalo mě, zda po půl roce došlo u žáků k zlepšení.

Přesné zadání testů je v příloze.

První úloha se zaměřovala na porovnání dvou financí.

Druhá úloha se zabývala porovnání času, jednalo se o úlohu s více řešeními.

Třetí úloha porovnávala vzdálenosti s veličinou kroky, jednalo se o úlohu s více řešeními.

Čtvrtá úloha byla zaměřena na porovnání dvou stavů.

Pátá úloha řešila porovnání čísel omezených shora i zdola. Vždy se jednalo o stav.

6.3 Databáze výsledků žáků ve druhé třídě

Tabulka 2 : Databáze výsledků z druhé třídy.

Test řešení	1. úloha	2. úloha	3. úloha	4. úloha	5. úloha
12.11.2010	A21	víc než 10	méně než 22	P19	4,5
7.12.2010	M12	méně než 18	víc než14	P4	15,16,17
3.6.2011	M 20	méně než 30	víc než 24	P7	15,16,17

Test Libor	1. úloha	2. úloha	3. úloha	4. úloha	5. úloha
12.11.2010	OK	1 řešení	1 řešení	OK	**x8**
7.12.2010	OK	OK 7 řešení	OK 7 řešení	OK	OK
3.6.2011	OK	1 řešení	1 řešení	OK	1 řešení

Test Pavel	1. úloha	2. úloha	3. úloha	4. úloha	5. úloha
12.11.2010	OK	**x nic**	**x M22**	OK	**x nic**
7.12.2010	OK	OK 6 řešení	OK 6 řešení	OK	**x nic**
3.6.2011	OK	1 řešení	1 řešení	OK	1 řešení

Test Šimon	1. úloha	2. úloha	3. úloha	4. úloha	5. úloha
12.11.2010	OK	2 řešení	1 řešení	OK	1 řešení
7.12.2010	OK	OK 6 řešení	OK 3 řešení	OK	OK
3.6.2011	OK	OK 4 řešení	OK 4 řešení	OK	OK

Test Miloš	1. úloha	2. úloha	3. úloha	4. úloha	5. úloha
12.11.2010	OK	1 řešení	OK 3 řešení	OK	1 řešení
7.12.2010	OK	OK 6 řešení	OK 4 řešení	OK	OK
3.6.2011	OK	OK 7 řešení	OK 4 řešení	OK	**x 16,17,13,14,15**

Test Monika	1. úloha	2. úloha	3. úloha	4. úloha	5. úloha
12.11.2010	OK	1 řešení	1 řešení	OK	nejprve dvě řešení,1 škrtla, OK
7.12.2010	nepřítomna				
3.6.2011	OK	1 řešení	1 řešení	OK	1 řešení

6.4 Analýza databáze

Úloha, kterou žák vyřešil správně, je označena OK. V tabulce 2 uvádím i počet řešení u úloh s více možnostmi řešení. I jedno řešení považuji za správné. Pokud jich žák napsal víc, je to pro mě ukazatel, že si opravdu uvědomuje existenci více možností. U některých žáků je jedno řešení možná i důsledkem lenosti. Chybná řešení jsou označena tučně.

První i čtvrtou úlohu měli žáci vždy správně. V porovnávání tedy nehrálo roli, zda se jednalo o finance či jiný stav. Porovnání dvou stavů žákům nečinilo problémy.

Zlepšení v porozumění porovnávání se jasně projevilo u Pavla. U prvního testu bylo vidět, že si nevěděl rady s úlohami s více řešeními. Bylo příjemným zjištěním, že v druhém testu měl již správně vše, kromě páté úlohy.

Podle očekávání se pátá úloha ukázala jako nejproblematičtější. Bylo vidět, že dochází k zlepšení, při posledním testu se spletl pouze Miloš. Je u něj znát, že nejde o úplné nepochopení, správně soubor ohraničil z jedné strany.

7 Fáze 2

7.1 Příprava a realizace

Úlohy jsem vybírala tak, abych obsáhla látku sčítání a odčítání do sta. Zařadila jsem úlohy na sčítání a odčítání do 10 bez přechodu, do 20 bez přechodu přes základ 10, s přechodem přes 10, úlohy dvouciferných čísel do 100. Poměr úloh na sčítání a odčítání byl relativně v rovnováze. Do úloh jsem zařadila úlohu na práci s nulou. Úlohu na odčítání s přechodem do 100 jednociferného malého čísla. Po prvním návrhu úloh se ukázalo, že některé číslice se v úlohách objevují dvakrát častěji nežli jiné. Upravila jsem tedy zadání tak, abych zachovala gradaci a číslice se objevovaly ve stejných poměrech. Dbát jsem musela též na citlivost na rozložení znaků. Některé číslice jsem měla zařazeny hned pod sebou a byla jsem prof. Hejným upozorněna, že by

takové grafické rozložení znaků mohlo ovlivnit žákovské soustředění. Překvapilo mě, jak časově a intelektuálně náročné bylo sestavit testík o 13 úlohách.
Zajímala mě nejen chybovost, ale také jaké strategie žáci využijí k jejich počítání.

7.2 Průběh experimentů

První test

První test proběhl 17. 1. 2012 při hodině matematiky. Žáci měli samostatně vypočítat 13 úloh na sčítání a odčítání do 100. K dispozici měli počitadla. Možnosti vzít si počitadlo využili 4 žáci. První žákyně odevzdala vypracované úlohy po minutě. Poslední žák odevzdal po 7 minutách. Přítomno bylo 10 žáků. Tři z žáků používali prsty. V období před prvním testem bylo probíráno násobení a dělení.

Druhý test

Druhý test proběhl 24. 1. 2012, týden po prvním testu, během běžného vyučování opět v hodině matematiky. Přítomno bylo 7 žáků. Jeden z nich neabsolvoval první test. Možnosti vzít se počitadlo využili dva žáci, jeden z nich ho nakonec vůbec nepoužil. Žáci byli upozorněni, aby si své výpočty zkontrolovali. První žákyně odevzdala test po 2 minutách, poslední po 8. Před testem byla probírána geometrie, obvody čtyřúhelníků. Byly použity stejné úlohy jako při prvním testu. Oproti prvnímu testu byly úlohy seřazeny podle obtížnosti. Také byly přidány dvě úlohy, jako návodné úlohy k úloze 95 – 25 = ? Po prvním testu se totiž projevilo, že žáci úlohu počítali jako úlohu s přechodem.

7.3 Databáze chyb v úlohách

Tabulka 3 : Databáze chyb v úlohách.

	žák	Libor		Pavel		Tamara		Šimon		Miloš		Monika		▲
	test	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	
1	6+0													0
2	8-0			0					k					1
3	3+6								17					1
									?					
4	9-6			15						2				2
				znam						o-1				
5	14+3				11									1
					znam									
6	17+4				13	22			13					3
					znam	o +1			znam					
7	28+51													0
8	85+5				9									1
					chybí0									
9	24+17	46				k		32						2
		o+5						o -9						
10	43+39	52			k									1
		o-30												
11	45-29	15k	6	64	24k	34	24	74k			6			8
		o-1	o -10	zn o10	9-5		9-5	znam			o-10			
12	71-68	97k17	1	17		17	17		11	13	11			8
		?	o -2	8-1		8-1	8-1		o+8	o+10	o+8			
13	95-25	-	50k	-	60	-	60	-	60k	-		-		4
			o -20		o -10		o -10		o -10					
14	96-25	-	49k	-		-	69k	-		-	66	-		3
			5-6				5-6				o -5			
15	97-25	87	60			68		62		62				5
		?	?			8+7=15		o-10		o-10				
	počet chyb *	5	5	4	5	4	4	3	4	3	3	0	0	

Úlohy 13 a 14 nebyly v prvním testu zadány.
* Počet chyb žáků v úlohách. (v 1. testu z celkového počtu 13, v druhém testu 15)
▲ Počet chyb v úloze. (z celkového počtu 12, u úloh 13 a 14 z počtu 6)
Vysvětlivky: znam (záměna znaménka), ? vznik chyby nejsem schopna určit, k (při výpočtu žák výpočet korigoval)

7.4 Analýza databáze

Potvrdil se všeobecně známý fakt, že odčítání je pro žáky těžší než sčítání (tab. 3). U druhého testu by bylo možné uvažovat o chybovosti ke konci testu vzhledem k únavě a ztrátě soustředění žáků. Toto podezření nelze považovat za relevantní, protože u prvního testu byly úlohy na sčítání a odčítání promíchány a chybovost v odčítání byla též větší než ve sčítání.

Ve **sčítání** celkem 9 chyb.
U úloh na sčítání se třikrát jednalo o záměnu znaménka. Jednou žák přičetl o jednu více.
85 + 5 = 9 (žák zapomněl připsat 0)
3 + 6 = 17 (domnívám se, že chyba vznikla nepozorností)

24+17	46				k		32
	o+5						o -9
43+39	52			k			
	o-30						

V **odčítání** celkem 31 chyb.

45-29	15k	6	64	24k	34	24	74k			6
	o-1	o - 10	zn o10	9-5		9-5	znam			o-10

Číslo 4 na místě jednotek značí, že žáci odčítají větší číslo od menšího bez ohledu na to, zda se nachází v menšenci či menšiteli.

71-68	97k17	1	17		17	17		11	13	11
	?	o -2	8-1		8-1	8-1		o+8	o+10	o+8

Číslo 7 na místě jednotek značí, že žáci odčítají větší číslo od menšího bez ohledu na to, zda se nachází v menšenci či menšiteli.

Zdá se, že žáci počítají 71 – 60, ale zapomenou odečíst číslo 8.

95-25		50k		60		60		60k
		o - 20		o - 10		o - 10		o - 10

Vzniká podezření, že žáci mají chybně zafixovaný spoj 9 – 2. Druhou možností časté chybovosti je, že počítají úlohu, jakoby se jednalo o přechod přes 10, a ubírají desítku.

96-25		49k				69k				66
		5-6				5-6				o -5

Číslo 9 na místě jednotek značí, že žáci odčítají větší číslo od menšího bez ohledu na to, zda se nachází v menšenci či menšiteli.
U Miloše (výsledek 66) se jedná o chybný spoj 9 – 6, současně zapomíná ubrat 5 z menšitele.

97-25	87	60			68		62		62
	?				8+7=15		o-10		o-10

Žáci se často pletou o deset. Domnívám se, že je to způsobeno tím, že ví, že při přechodu musí deset přidat při sčítání a ubrat při odčítání. Bohužel toto dělají, i pokud se o přechod nejedná.

7.5 Chyby žáků

Tabulka 4 : Chyby žáků.

	chyb	*	▲	Použití počitadla či prstů	Zajímavá zjištění
Libor	10	7	7	Při obou testech využil možnosti vzít si počitadlo. Zároveň používal prsty.	Zásadní problém v odčítání.
Pavel	9	3	2,5		Čtyři chyby byly způsobeny záměnou znamének. U odčítání se projevuje problém jednotek v menšenci a menšiteli.
Tamara	8	1,5	3		U odčítání se projevuje problém jednotek v menšenci a menšiteli. Představa čísel je dobrá. Výsledky se většinou neliší o více nežli 10.
Šimon	7	5	5	Při obou testech využil možnosti vzít si počitadlo. Při druhém testu měl počitadlo na stole, ale nepoužil ho.	Dvakrát zaměnil znaménko. Představa čísel je dobrá. Výsledky se neliší o více nežli 10.
Miloš	6	1	2,5	Využíval prsty.	Představa čísel je dobrá. Výsledky se neliší o více nežli 10. Vzniká podezření na chybný spoj 9 – 2 = ?
Monika	0	1	2	Využila prsty.	Kalkulativně velmi schopná, oba testy zvládla bez chyby a nejrychleji ze třídy.

Vysvětlivky:
Chyb: Počet chyb z 28.
*: Čas 1. test v minutách
▲: Čas 2. test v minutách

7.6 Časté chyby, aneb na co dávat pozor

To, že se někdy žák splete ve znaménku, bych nepovažovala za zásadní problém, chybovat je lidské (tab.4). Tato chyba může být způsobena nepozorností. Někdy se zdá, že žák automaticky používá znaménko, které se mu do úlohy lépe hodí. Ne že by snad chtěl podvádět, ale úloha 17 - 4 se zdá jednodušší nežli 17 + 4.

Žáci odčítali na pozici jednotek větší číslo od menšího bez ohledu na to, zda se nacházelo v menšenci či menšiteli. Toto považuji za velký problém v porozumění úlohám. Například v úloze 45 - 29 žáci nejprve odebrali dvě desítky ze čtyř desítek. Jak je možné ubrat posléze devět z pěti, když pětka je to, co někdo má a devítka to, co mu chci vzít?

Objevil se i problém „nedořešení“ úlohy. Žáci odečetli desítky, ponechali jednotku v menšenci, ale zapomněli odebrat jednotku v menšiteli.

8 Fáze 3

8.1 Příprava a realizace

Návrhy slovních úloh

Porovnávání

Martin jde do školy 35 minut. Lucka je ve škole rychleji. Jak dlouho jí může cesta trvat?

Anička má panenku velkou 54 cm. Její kamarádka Julka má menší panenku. Jak velká může být panenka Julky?

Marek má 67 korun. Olina má 99 Kč. Jana má víc než Marek a méně než Olina. Kolik může mít Jana korun?

S antisignálem

Pepa poztrácel 17 pastelek. Nyní má 24. Kolik pastelek měl na začátku roku?

Děda o Vánocích snědl 28 kusů cukroví. Zbývá 51 kousků. Kolik cukroví babička napekla před Vánoci?

Martina dostala k Vánocům peníze. Koupila si panenku za 43 Kč. Ještě má 39 Kč. Kolik peněz dostala k Vánocům?

Sčítání

Ota má 51 korun. Petr 28 Kč. Mohou si dohromady koupit knihu za 71 Kč?

Odčítání

Honza měl 97 Kč. Koupil si pastelky za 25 Kč. Kolik má korun?

Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Kolik jich má nyní?

Výběr úloh

Jedním z cílů bylo zadat dvě podobné úlohy, kde v jedné se bude jednat o stav finance a v druhé o jiný stav, a zjistit, zda bude u žáků menší chybovost při počítání se stavem finance. Obě úlohy byly s antisignálem.

1) OZ(17) + S2(24) = S(?)
3) S(?) – OZ(43) = S2(39)

Jedna z úloh byla řetězová na odčítání.

4) S(95) – OZ(9) – OZ2 (6) = S(?)

Dále úloha na sčítání, kde do výsledku bylo zakomponováno i porovnávání čísel.

2) S(51) + S2(28) = S(?)
$? \geq 71$

Poslední úloha byla na porovnávání čísel ohraničených shora i zdola.

5) S(58) ‹ S(?)‹ S(63)

8.2 Zadání slovních úloh

1) Pepa poztrácel 17 pastelek. Nyní má 24. Kolik pastelek měl na začátku roku?
2) Ota má 51 korun. Petr má 28 korun. Mohou si dohromady koupit knihu za 71 korun?
3) Martina dostala k narozeninám peníze. Koupila si panenku za 43 Kč. Ještě má 39 Kč. Kolik peněz dostala k narozeninám?
4) Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Ztratil 6 kartiček. Kolik jich má nyní?
5) Jenda má na Facebooku 58 kamarádů. Franta má 63 kamarádů. Eliška má více než Jenda a méně než Franta. Kolik kamarádů může Eliška mít?

8.3 Průběh experimentu

Úlohy jsem zadala žákům třetí třídy 30. 1. 2012 v kmenové třídě. První žáci se začali hlásit po 8 minutách. Doporučila jsem jim, aby si úlohy zkontrolovali. Úlohy žáci odevzdali po 13 minutách. (Libor a Vendula 30. 1. 2012 nebyli ve škole a test vypracovávali 31. 1. 2012. Vendule jsem zadání úloh četla, jelikož má problém se čtením a nechtěla jsem, aby byl ovlivněn výsledek její práce. Práci odevzdala po 8 minutách. Libor úlohy vypracovával 14 minut.)

8.4 Databáze řešení žáků

Tabulka 5 : Zápis výsledků žáků.

	Šimon	Pavel	Tamara	Miloš	Monika	Vendula	Libor
1	37	17+24=41	17+24=41	24+17=41	41	7	40
2	79-71=8	51+28=79 ano	51+28=79	51+28=79 Ano	51+28=79 ano, zbyde 8	51+28=80 můžou	Ano můžou
3	K 4-43=39	43+39=82	43-39=16	43+39=82	82-43=39	43+39=82	72
4	9-6=3	95-9-6=70	95-9-6=80	(95-9)-6=80	95-9-6=80	80	79
5	59,60,61,62	59,90,61,62	58,60,70, 65,63	59,60,61,62	59,60,61,62 možností?	61	J víc 63,94,59 100 F méně 58,44,53
*	1,3	4	3,5			1	1,3,4,5

Vysvětlivky: * chybné úlohy

Tabulka 6 : Analýza databáze.

	Analýza databáze
Libor	Měl většinu výsledků špatně, pravděpodobně následek nepozornosti. Páté úloze neporozuměl.
Pavel	Pouze u čtvrté úlohy chybný výsledek, spletl o desítku.
Tamara	U třetí úlohy nerozeznala antisignál. Páté úloze neporozuměla.
Šimon	U první úlohy chybný výsledek. Třetí úlohu měl původně správně. Při korekci opravil na chybné řešení. Při rozboru již řešil opět správně, proto považuji jeho řešení za správné. Jeho porozumění slovním úlohám je dobré.
Miloš	Odpovídal celými větami. Jeho porozumění slovním úlohám je bez problémů.
Monika	Odpovídala celými větami. Její porozumění je dobré. Zarážející je odpověď u páté úlohy, kde označuje výsledky jako možnosti.
Vendula	Vendula přehazuje desítky a jednotky v zápisech úloh, i když je počítá správně. Jako jediná nerozeznala, že se u první úlohy jedná o antisignál. Ve třetí úloze ho však rozeznala. Je jediná, u koho mohl mít vliv stavu finance na správnost řešení.

8.5 Rozbor prací

1) OZ(17) + S2(24) = S(?)

Ze sedmi žáků šest poznalo, že se jedná o úlohu s antisignálem. Z toho měli čtyři žáci úlohu správně, dva se spletli ve výpočtu (tab. 5).

Aby nedošlo k tomu, že Vendule jiný žák při diskusi pouze řekne správné řešení, nechala jsem ji konzultovat s žákyní, která není do experimentu zahrnuta a úlohu měla též chybně (tab.6).

Vendula a jiná žákyně diskutují o první úloze.

V: Já si ukážu 24 a mínus 17. (Ukazuje na počitadle). 7.

U: Já sem teď napíši ta čísla, 24 – 17 = 7. To jste vypočítaly. Znovu vám přečtu zadání. (Učitel čte zadání). Tak si to řekněme s vaším výsledkem. Na začátku roku měl 7 pastelek, poztrácel 17, teď má 24?

V: To je nějaký divný.

U: Poztrácel 17. A teď má 24. Kolik pastelek měl na začátku roku?

V: 7.

Ž2: Ne 24.

U: Teď má 24.

V: Tak si ještě dokoupil?

Ž2: Kolik ztratil?

V: Ztratil 17.

Ž2: Já už vím, to je 27? Že měl?

V: Ne, on měl 17 a jemu se poztrácely, měl 17.

Ž2: Počkej, ale když se mu ztratilo 17, tak mohl mít jakoby víc pastelek.

V: No.

U: Teď jich má kolik?

V: 24.

U: A já se ptám, kolik jich měl na začátku roku.

V: Na začátku roku?

Ž2: A to si můžeme vymyslet jakýkoliv číslo?

Dále s použitím počitadla zkoušely dosazovat různá čísla, než dospěly ke správnému výsledku.

2) **S(51) + S2(28) = S(?)**

   ? ≥ 71

Všichni počítali správně, až na jednu chybu ve výpočtu. Dle očekávání úlohu na sčítání rozeznali všichni.

3) **S(?) – OZ(43) = S2(39)**

? – 43 = 39

Ze sedmi žáků šest rozeznalo, že se jedná o úlohu s antisignálem.

Úlohu 43 + 39 = 82 řešili procesem tři žáci.

Při této strategii dominuje zadané pořadí číslic v textu, nikoliv jejich sémantika.

U žáků nerozhoduje, co je stav a co je operátor.

Řešení konceptem 82 – 43 = 39 dva žáci. Jeden žák došel k chybnému výsledku. Do řešení zapsal pouze výsledek, nelze proto určit, zda postupoval procesem či koncepterm.

4) **S(95) – OZ(9) – OZ2 (6) = S(?)**

Pět žáků vypočítalo slovní úlohu správně. Dva se spletli ve výpočtu.

U Šimona se projevilo podezření na jinou interpretaci. Viz dále zajímavá zjištění.

5) **S(58) ‹ S(?)‹ S(63)**

Tato úloha se ukázala jako nejproblematičtější. Byla nejzajímavější z ohledu individuálního rozboru s žáky. Čtyři žáci napsali všechna řešení. Jedna žákyně jedno správné řešení. Jedna do oboru zahrnula i krajní body.

Nejvíce mě překvapilo, že Libor, který tento typ úloh řešil správně ve druhé třídě, prohlásil, že úloze neporozuměl. Zajímalo mě, jak budou úlohu vysvětlovat jiní žáci. Nejprve se Liborovi snažil úlohu vysvětlit Miloš, Libor jeho vysvětlení nepochopil. Poté se o vysvětlení pokusila Monika. Přestože Libor na závěr tvrdil, že úloze porozuměl, myslím, že bude nutné se o tom přesvědčit v budoucnu. Zdálo se, že na řešení pouze přistoupil.

Libor vysvětluje svůj postup.

L: Já myslel tu Elišku, že jako má víc, já jsem tady Jenda víc, jakože může mít ta Eliška 63, 94 a tak, 59 a 100 může mít jako kamarádů. A Franta jakože má míň, takže jsem tady napsal 58, jako míň Eliška má a 44 a 53 může mít, jako míň Eliška.

Miloš se snaží vysvětlit pátou úlohu Liborovi.

L: To jsem vůbec nechápal. (Ukazuje na pátou úlohu).

L: (Čte si znovu zadání.)

Mi: Takže jsme si řekli, že Jenda má těch 58.

L: A Eliška měla víc než Jenda, 63, 94.

Mi: Může být 59.

L: No, však to tam mám. 63,94.

Mi: 63 jo?

L: No. Vždyť tady je 58.

Mi: No jo, ale nesmíš mít víc než 63.

L: No jo, to je Jenda, ale Eliška má víc, chápeš!

Mi: Já vím.

L: Ale já nejsem u Franty.

Mi: Ale chápeš, ty to musíš udělat mezi nimi jakoby. To musíš dávat jako víc čísel do té 62. Nesmíš dát to číslo co tam je už. Chápeš?

L: Ale tady je Jenda má na Facebooku 58. A tady více než Jenda. Více než Jenda. Takže já jsem to udělal víc než Jenda, kolik má. Chápeš?

Mi: Počkej. (Znovu čte zadání úlohy).

U: Nechcete si to zkusit nějak ukázat třeba na počitadle nebo na obrázku.

Mi: Kreslí počítač (obr.1).

Obrázek 1 : Milošův nákres.

Mi: 58 k (jako kamarádů), kreslí větší počítač a Franta má 63 (63 k). Eliška má více než Jenda a méně než Franta. Takže může mít.

L: Eliška může mít víc než Jenda.

Mi: Může mít třeba 59.

L: Však to tam mam.

Mi: 60,61, 62 může mít.

L: A 90.

Mi: A už ne. Může mít víc než počkat, Jenda, ale nemůže mít víc než Franta. Chápeš, ale to nemůžeš jako mít to číslo. Míň než Franta, ten má 63. 62 může mít jenom, ne už 63. Už to chápeš?

L: Ne.

Monika se snaží vysvětlit pátou úlohu Liborovi.

M: Jenda má 58 kamarádů. To víš.

L: No.

M: Frantík má 63 kamarádů. Eliška má více než Jenda a méně než Franta. Kolik kamarádů může Eliška mít? Kolik může mít Eliška?

L: Víc než Jenda?

M: Hm.

L: 94,59,100 může mít.

M: Ne.

L: Jo.

M: Ne, víc než Jenda.

U: Můžeš mu klidně něco nakreslit, jestli mu to chceš nějak ukázat.

(Monika napsala vedle sebe čísla 58,59,60,61,62)

M: Víc než Jenda, třeba Jenda má 58, tak kolik může mít víc?

L: Víc?

M: No, než 58.

L. 59.

M: Potom?

L: 60.

M: Potom třeba?

L: 61.

M: A ještě?

L: 62.

M: A ještě něco nebo ne?

L: Ne

M: No tak vidíš, protože ty když si dáš 90, tak už by to bylo i víc než Franta.

L: Jo???

M: No. 90 a takhle už nech, ani tohle (škrtá 63, obr. 2), to bys měl stejně jak Franta.

L: No už to chápu.

U: Tak schválně. Proč to tedy nemůže být těch 94?

L: Protože to může být jenom víc než to 58.

U: No a 94 je přece víc než 58.

L: No.

U: Proč to tedy nemůže být 94, když je to víc než 58. Tak může mít Eliška 94 kamarádů?

L: Jo.

M: Ne. Nemůže, protože Eliška má více než ten Jenda a méně než Franta. Takže může, nebo ne?

L: Ne.

M: No, tak vidíš, protože to by měla víc než Franta a ona nemá víc.

L: A jo vlastně. Aha. Takže to nemůže mít, protože by měla víc než Franta.

U: A může to být třeba 53, co jsi tady napsal?

L: 53, jako Franta?

U: Eliška.

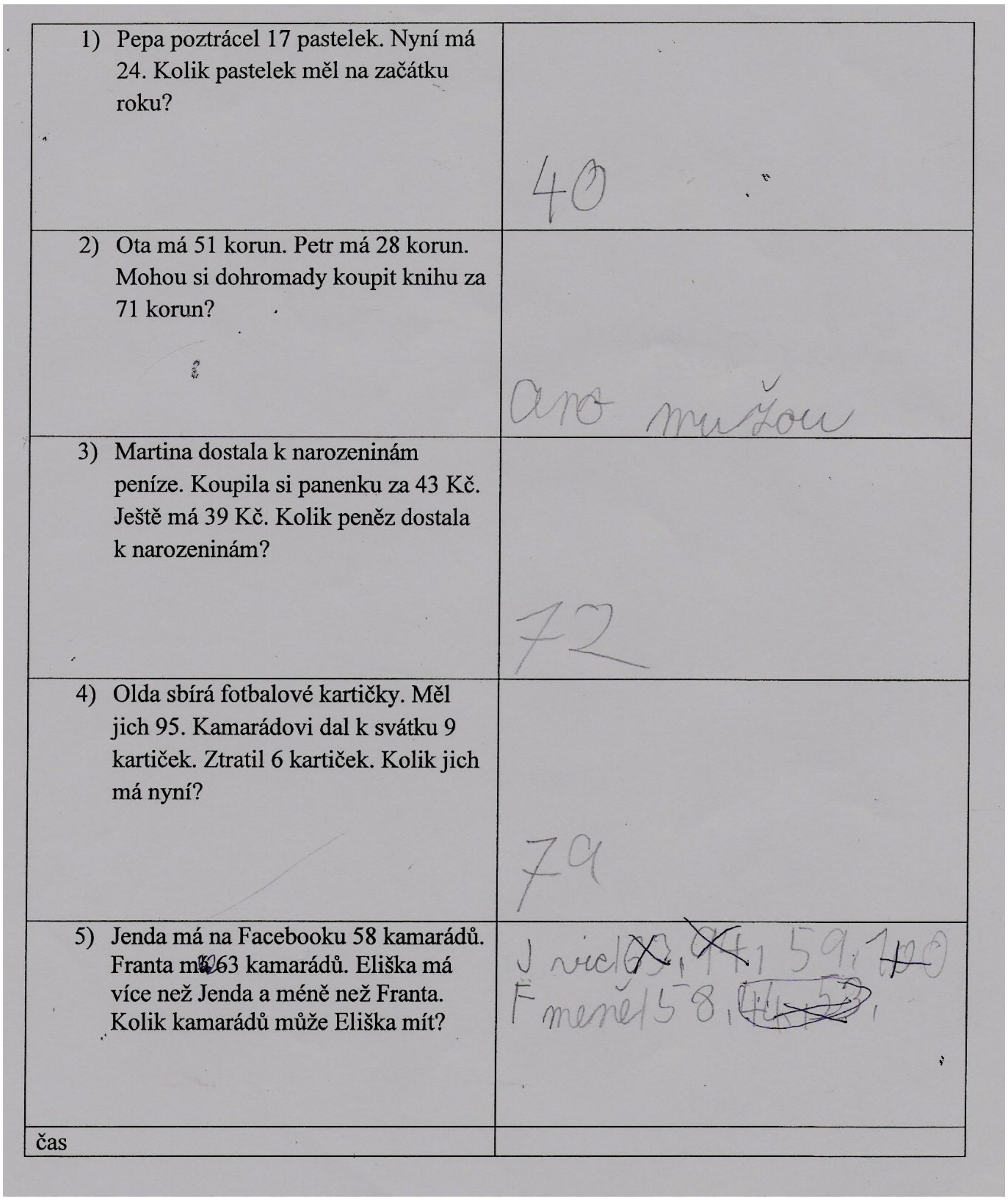
L: Eliška víc než Jenda, ne.

U: Takže co tam bylo za chybu. Co jsi spletl?

L: Takových těch 94.

M: Tohle bylo špatně (ukazuje na chybné výsledky větší než 63). A ještě něco?

L: Ne.



1) Pepa poztrácel 17 pastelek. Nyní má 24. Kolik pastelek měl na začátku roku?	40
2) Ota má 51 korun. Petr má 28 korun. Mohou si dohromady koupit knihu za 71 korun?	ano můžou
3) Martina dostala k narozeninám peníze. Koupila si panenku za 43 Kč. Ještě má 39 Kč. Kolik peněz dostala k narozeninám?	72
4) Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Ztratil 6 kartiček. Kolik jich má nyní?	79
5) Jenda má na Facebooku 58 kamarádů. Franta má 63 kamarádů. Eliška má více než Jenda a méně než Franta. Kolik kamarádů může Eliška mít?	J víc ~~63~~, ~~44~~, 59, ~~100~~ F méně 58, ~~44~~, ~~53~~,
čas	

Obrázek 2 : Liborovo řešení.

M: Ještě tyhle dva (škrtá výsledky 44 a 53).

U: Ty jsi tady psal o Jendovi a o Frantovi, ale na koho jsme se ptali?

L: Jak na koho?

M: Na Elišku.

L: No.

U: Tak to shrneme. Kolik Eliška může mít?

L: Víc. 59,60,61,62.

M: A může mít těch 44 anebo 53?

L: Ne.

M: No tak vidíš, takže to nejde.

L: No. Pochopil jsem to.

Miloš vysvětluje Tamaře

Mi: Tady jsi asi měla chybu v tom, že Jenda měl počkat 58 kamarádů a Franta měl 63 kamarádů. A Eliška má víc než Jenda a míň než Franta. Takže by mohla mít těch 59,60,61,62. Jenom do té 62.

U: Co myslíš, Tamaro?

T: Já nevím, já jsem to ještě ani nepochopila.

U: (Znovu přečetla zadání.)

T: Takže třeba jako 60?

U: Třeba 60, může to být třeba 50?

T: Ne.

U: Proč ne?

T: Ne, protože to by muselo být víc a míň.

Mi: Může to být 100?

T: Ne. Musí to být nějak mezi to.

9 Zajímavá zjištění

9.1 Miloš

Tabulka 7 : Milošovo řešení zkoumaných úloh.

									Miloš	
95-25		50k		60		60		60k		
		o -20		o - 10		o -10		o - 10		
96-25		49k				69k				**66**
		5-6				5-6				**o -5**
97-25	87	60			68		62		**62**	
	?				8+7=15		o-10		**o-10**	

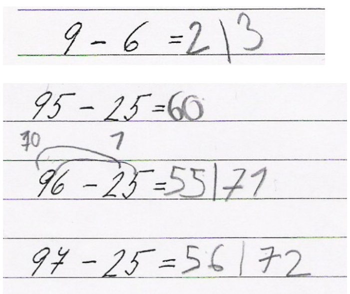
9-6			15						**2**	
			znam						**o-1**	

Při analýze testů se ukázalo podezření, že žáci mají špatně zafixovaný spoj 9 – 6 = 3. Projevilo se to u Miloše u úlohy 9 – 6 = ? a úloh 13, 14 a 15 (tab.7).

Snažila jsem se zjistit, zda se jedná o náhodu, či o špatně zažitý spoj.

27. 1. 2012 jsem zadala Milošovi a Monice opět druhý test. Monika měla test opět bez chyby.

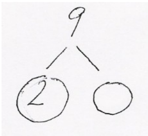
Miloš opět vypočítal 9 – 6 = 2, 95 – 25 = 60, 96 – 25 = 55, 97 – 25 = 56 (obr.3).



Obrázek 3 : Milošovo řešení.

Výsledky za svislou čarou byly doplněny při konzultaci s Monikou.

Stejný den jsem těmto žákům zadala úlohy na rozklad čísel. Mezi úlohami byly i úlohy na rozklad čísla (obr.4, podrobněji v příloze).



Obrázek 4 : Úloha na rozklad čísel.

9 – 2

95 – 25

97 – 25

Monika měla úlohy bezchybně. Miloš měl správně všechny úlohy kromě sledovaných a úlohy 45 – 29, kde výsledek spletl o +10.

Sledované úlohy rozložil následovně.

9 – 2 = 6

95 – 25 = 60

97 – 25 = 62

Ukázalo se tedy, že v jeho mysli je vskutku špatně zafixován spoj 9 – 6 = 3.

Následovně jsem požádala Moniku, aby s Milošem prošla jeho test a zkusila mu vysvětlit úlohy, kde udělal chybu. 9 – 6 = 2

Protokol diskuse mezi Milošem a Monikou.

U: Ukážu ti Milošovo příklady, ty mu zkusíš říct, kde udělal chybu a zkusíš mu vysvětlit, proč tu chybu dělá. Jak se to stane. Dávej dobrý pozor.

M: (Prochází Milošovo příklady). Tam má chybu.

U: Tady má chybu. Přečti nám ten příklad Miloši.

Mi: 9 – 6 = 3 (v zápisu 9 – 6 = 2)

U: Co se ti stalo s tou 2?

Mi: Jsem si to splet, jako tady třeba.

Ve chvíli, kdy si Miloš uvědomil, že chybně počítal úlohu 9 – 6 = 2, okamžitě ukázal na poslední tři úlohy a prohlásil: „ Tam dole to mám taky špatně“.

Mi: 95 – 25 = 50? (přemýšlí) 45

U: Jak to počítáš?

Mi: Teď jsem si vzpomněl, že 9 – 2= 5, jsem si vzpomněl. Teda 6.

U: Ukaž si to na prstech.

Mi: (ukazuje si 9 na prstech).

M: Ukaž 9, uber 2, to je 70 a ještě těch 5.

Mi: Takže to je 65.

M: Ne, 70, protože ještě tady máš tu 5.

Miloš kouká z okna.

M: (Znovu ukazuje). Tady máš 9. Tady 2. Takže si ukážeš 9, vezmeš 2. Je 70 a potom si vezmeš ty čísla malinký. Takže 5 – 5 je 0. Teď tam dáš 70.

U: Zkusí Miloš sám další příklad?

Mi: Já už to mám několik dní, že se mi to takhle děje, mám problém s tou 9. Že jí si dám tu 9, a tohle si dám pryč, já si myslím, že tohle se dá vždycky taky tohle to pryč. Že se to nepočítá jako.

U: Tak jak to má být.

M: Jak jsem ti to teď říkala na tomto příkladu (ukazuje 95 – 25), tak to zkus udělat.

M : (opakuje) Tady je 9 a tady 3 (přeřekla se, ukazovala na 2).

Mi: Jo to je 70, no to vím.

M: Potom tyhle dvě 5. Řekneš si 5 – 5 je 0.

Mi: Je to 56 tohle vlastně. (Ukazuje na další úlohu 96 – 25)

M: Ne ne.

Mi: To je 56, protože tady tohle bere i tady tu číslici. (Miloš si zapamatoval, že správný výsledek úlohy 9-2 je o jednu jinak, než si myslel, místo 7, si zafixoval 5.)

M: Milane, řekni si 9, tady máš tu 2, to si vypočítal, to je 70. Teďko 6 – 5 je kolik?

Mi: 6 – 5 je jedna, to říkám.

M: Tady má být kolik?

Mi: 56.

M: Ne ne ne! Teďko si to říkal, 70 a tady má být 1. 70 a tamta 1. Tak kolik to má být?

Mi: 71.

U: Zvládne teď Miloš tu poslední úlohu sám (97 – 25)?

Mi: Přemýšlí. 68.

U: Zkus to říkat, jak to říkala Maruška.

Mi: 70, tady (ukazuje na 7) vezmu 5. 7 – 5 = 2.

U: Takže kolik?

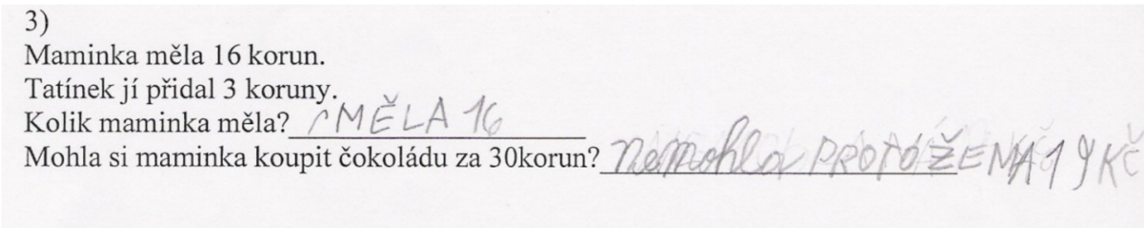
Mi: 72.

9.2 Šimon

Příběh 1

Úloha: Maminka měla 16 korun. Tatínek jí přidal 3 koruny. Kolik maminka měla? Mohla si maminka koupit čokoládu za 30 korun? (vlastní úloha)

Příběh: Tuto úlohu jsem zadala žákům druhé třídy 7. 1. 2011. Již před zadáním jsem si všimla nejasnosti v první otázce. Záměrně jsem ji však nepřeformovala, zajímalo mě, jak na to žáci budou reagovat. Všichni počítali úlohu 16 + 3 = ? (ne všichni se dopočítali ke správnému výsledku 19). Pouze jeden žák odpověděl, že maminka měla 16 korun. Dále uvedl, že čokoládu si koupit nemohla, protože měla 19 korun (obr.5).


3)
Maminka měla 16 korun.
Tatínek jí přidal 3 koruny.
Kolik maminka měla? MĚLA 16
Mohla si maminka koupit čokoládu za 30korun? nemohla PROTOŽE MA 19 KČ

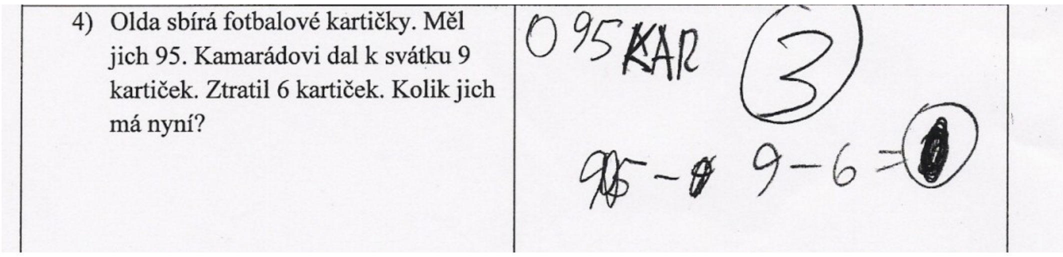
Obrázek 5 : Šimonovo řešení 1 (Šimon přepisoval odpověď, jelikož ji původně napsal tiskacím písmem).

Komentář: Již delší dobu se žákům snažím zadávat i úlohy s antisignálem (netýká se této úlohy). Před řešením úloh kladu otázky k zadání (Co již víme? Co máme vypočítat? Na co se nás ptají?). Žáci v úlohách se signálem nemají potíže, bohužel málokdy rozumí tomu, co počítají. (Jedná se i o jazykový problém.) Tento žák, který na úloze pracoval nejdéle, se snažil pochopit příběh ukrytý za úlohou. Je vidět, že o úloze přemýšlel. Považuji ho za první vlaštovku v mém úsilí naučit žáky, aby se při řešení úloh pečlivě snažili porozumět zadání. Pro příště, aby nemohlo dojít k dvojí interpretaci, bych změnila zadání: „Maminka našetřila 16 korun.“

Příběh 2

Úloha: Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Ztratil 6 kartiček. Kolik jich má nyní? (vlastní úloha)

Příběh: Tuto úlohu jsem zadala žákům třetí třídy 30. 1. 2012. Všichni žáci počítali úlohu 95 – 9 – 6 = ? (ne všichni žáci se dopočítali ke správnému výsledku 80). Pouze jeden žák zapsal úlohu 9 – 6 = 3 (obr.6).



Obrázek 6 : Šimonovo řešení 2.

Komentář: Šimon během výpočtu korigoval svůj postup. Ze zápisu je znát, že Šimon nejprve začal počítat úlohu podle mé interpretace, poté se nad ní hlouběji zamyslel a svůj výpočet upravil. Proto jsem se rozhodla využít možnosti individuálního rozboru úlohy. Ukázalo se, že Šimon interpretoval otázku tak, že počítal, kolik kartiček má kamarád. Jeho řešení jsem tedy uznala jako možné. Pro příště bych úlohu zadalo následovně. „Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Pak Olda 6 kartiček ztratil. Kolik kartiček Oldovi zůstalo?“

Na Šimonově reakci je vidět, že některé úlohy se dají interpretovat možnými způsoby. Jako jediný ze třídy často interpretuje úlohu jinak než já a přesto způsobem, který nelze označit jako chybný.

10 Mé komentáře k strategiím

Po prostudování literatury jsem byla překvapena, kolik strategií může být pro řešení úloh využíváno. Pochopila jsem, že různé strategie jsou vhodné pro různé typy úloh. Poznatek mě vedl k hlubšímu zamyšlení nad nimi. Uvědomila jsem si, že i já využívám různé strategie. Uvažuji nad tím, zda je dobré žáky s nimi záměrně seznamovat, nebo je nechat aby si sami přišli na jejich existenci a vhodné využití, jelikož se vyvíjí s věkem jedince. Pokud budu žákům předkládat úlohy různých typů, pokusí se vytvářet různé strategie, nebo budou využívat jen ty, které již ovládají? Strategie dělím podle tabulky 1 v teoretické části.

10.1 Strategie celkového rozkladu

Proces numerické operace sčítání 65 + 29 = ? probíhá v mysli žáka ve čtyřech krocích.

1) Číslo 65 rozloží na čísla 60 a 5, číslo 29 rozloží na čísla 20 a 9.
2) Žák respektuje poziční hodnotu číslic v čísle a sčítá 60 + 20 = 80, získá první mezivýsledek 80.
3) Žák sečte čísla 5 + 9 = 14 a získá tak druhý mezivýsledek 14.
4) Sečte oba mezivýsledky 80 + 14 = 94.

Při této strategii žáci mohou zapomenout přičíst desítku. Úloha má čtyři kroky, kde žáci mohou udělat chybu ve výpočtu.

Při rozboru prací se ukázalo, že žáci, kteří využívají strategii celkového rozkladu, mají velkou chybovost v písemném odčítání při vodorovném zápisu. Je to způsobeno tím, že při této operaci jednotlivá čísla, tedy menšence i menšitele, chápou jako dvě samostatně stojící číslice (př. číslo 42 se skládá z číslic 4, 2). Nevyužívají nebo zřejmě nechápou poziční hodnotu číslic v čísle. Ve skutečnosti pak příklad v oboru přirozených čísel 0-100 řeší jako sérii příkladů v oboru přirozených čísel 0-10. Proto odčítají vždy menší číslo od většího jak v jednotkách tak desítkách - př. 73 – 28 → (7 – 2) + (8 – 3) → 55.

Například proces numerické operace odčítání 65 – 29 = ? probíhá v mysli žáka v pěti krocích.

1) Číslo 65 rozloží na číslice 6 a 5, číslo 29 na číslice 2 a 9. S těmito číslicemi následně „zachází“ jako s přirozenými čísly v oboru 0 – 10 (jednotkami).
2) Odečte dvojici čísel 6 a 2, najde číslo 4.
3) Číslo 4 napíše do výsledku na pozici desítek.
4) Odečte dvojici čísel 5 a 9, najde číslo 4.
5) Číslo 4 napíše do výsledku na pozici jednotek.

Výsledek v tomto chybném postupu je tedy 44.

10.2 Strategie částečného rozkladu

Za vhodnější považuji strategii částečného rozkladu. U sčítání i odčítání je v ní používáno méně kroků nežli ve strategii celkového rozkladu. Je však náročnější na porozumění desítkové soustavě a poziční hodnotě číslic v čísle.

Proces numerické operace odčítání 65 – 29 = ? probíhá v mysli žáka ve třech krocích.

1) Rozloží menšitele na desítky a jednotky 29 → 20 + 9.
2) Odečte od menšence nejprve číslo desítek 65 – 20 = 45, získá mezivýsledek 45.
3) Od mezivýsledku odečte číslo jednotek 45 – 9 = 36.

Na rozdíl od předešlé strategie (rozpadu čísel na číslice) je tento postup správný a žák má do výpočtu vhled. Poslední krok výpočtu je sice přechod přes desítku, ale žák zde použije mentální aritmetiku, neboť tyto operace již umí paměťově, nebo využije prsty.

Tato strategie se vyskytuje i u sčítání. I zde výpočet 65 + 29 = ? obsahuje pouze tři kroky.

1) Druhého sčítance rozloží na desítky a jednotky 29 → 20 + 9.
2) K prvnímu sčítanci přičte číslo desítek 65 + 20 = 85, získá mezivýsledek 85.
3) K mezivýsledku přičte číslo jednotek 85 + 9 = 94.

10.3 Kumulativní součet nebo rozdíl

U numerické operace sčítání je tento postup velmi podobný strategii částečného rozkladu. Oproti té je zde navíc první krok rozložení prvního čísla na desítky a jednotky. U žáků, kteří již používají mentální aritmetiku, se domnívám, že je tento krok zbytečný. Rozhodně je však vhodnější nežli strategie celkového rozkladu.

U numerické operace sčítání 28 + 35 = ? zahrnuje čtyři kroky.

1) Rozloží číslo 28 na čísla 20 a 8, číslo 35 na čísla 30 a 5.
2) Sečte čísla desítek 20 + 30 = 50, získá první mezivýsledek 50.
3) K mezivýsledku přičte jednotky z prvního sčítance 50 + 8 = 58, získá druhý mezivýsledek 58.
4) K mezivýsledku 58 přičte jednotky z druhého sčítance 58 + 5 = 63.

V odčítání považuji za velmi riskantní třetí krok, ve kterém se přičítá.

Například u úlohy 52 – 24 = ?

1) Rozloží číslo 52 na čísla 50 a 2, číslo 24 na čísla 20 a 4.

2) Odečte desítky 50 – 20 = 30, získá první mezivýsledek 30.
3) Přičte jednotky z menšence 30 + 2 = 32, získá druhý mezivýsledek 32.
4) Odečte od druhého mezivýsledku jednotky z menšitele 32 – 4 = 28.

10.4 Rozdělení zprava doleva

Během druhé třídy jsme často při nácviku porozumění desítkám a jednotkám čísla rozkládali na desítky a jednotky. Při sčítání žádný z žáků nepostupuje od jednotek. Ve své podstatě žák využívá postup jako při písemném sčítání se zápisem čísel pod sebe. Tento postup jsem zatím se svými žáky neprobírala. Oproti celkovému rozkladu má opět o krok navíc, a tedy vyšší riziko chybovosti.

Proces numerické operace sčítání 28 + 35 = ? probíhá v mysli žáka ve čtyřech krocích.

1) Rozloží číslo 28 na čísla 20 a 8, číslo 35 na čísla 30 a 5.
2) Sečte jednotky 8 + 5 = 13, získá první mezivýsledek 13.
3) Sečte desítky 20 + 30 = 50, získá druhý mezivýsledek 50.
4) Sečte oba mezivýsledky 13 + 50 = 63.

Tuto strategii ani při numerické operaci odčítání nevyužívá žádný žák. I pro mě je tato strategie nová. Považuji ji za velmi komplikovanou a náchylnou k chybám. Největší obtíží je opět sčítání v kroku čtyři.

Proces numerické operace odčítání 52 – 24 = ? probíhá v mysli žáka rovněž ve čtyřech krocích.

1) Menšence rozdělí tak, aby vyšlo číslo, od kterého lze odečíst jednotky menšitele. $52 \rightarrow 40 + 12$.
2) Odečte číslo jednotek v menšiteli od daného čísla 12 – 4 = 8, získá tak první mezivýsledek 8.
3) Od desítek zbylých v menšenci odečte desítky z menšitele 40 – 20 = 20, získá tak druhý mezivýsledek 20.
4) Sečte oba mezivýsledky 8 + 20 = 28.

10.5 Počítání

Představuje strategii, kdy žák odpočítává po jedné a nevyužívá výhody desítkové soustavy. Předpokládá to však zautomatizovanou číselnou řadu.

Proces numerické operace sčítání 28 + 35 = ? probíhá následovně.

28,29,30….(počítá po jedné)

Proces numerické operace odčítání 52 – 24 = ? probíhá následovně.

52,51,50…(počítá zpátky po jedné)

Tuto strategii žáci využívají u malých čísel, pokud nevyužívají strategii získání výsledku z paměti – mentální aritmetiku (neznají správný výsledek rovnou). Část žáků k výpočtům používá prsty. V první třídě využívali prsty zcela běžně. S rozvojem porozumění číslům a automatizaci spojů prsty postupně přestali využívat. U dvoumístných čísel již tuto strategii nevyužívají, protože je velmi zdlouhavá. Pokud ji žák využije u vysokých čísel, většinou se přepočítá. Důvodem je zřejmě nepochopení desítkové soustavy a může ukazovat na nefunkční úroveň matematických dovedností. V odborné literatuře se objevují argumenty proti využívání prstů. Já se domnívám, že jejich použití je odůvodněné, pokud by žák jinak nebyl schopen úlohu vyřešit. Jedná se o způsob, jak dojít ke správnému výsledku.

10.6 Strategie dopočítávání u úloh typu 82 – 78 = ?

Zajímavá strategie na odčítání dvouciferných čísel s malým rozdílem je strategie dopočítávání po jedné zprava doleva.

Například úloha 82 – 78 = ? probíhá v mysli žáka ve dvou krocích.

1) Porovná čísla a zjistí, že obě čísla jsou blízká.
2) Počítá kroky (po jedné) od nižšího čísla k vyššímu 79,80,81,82, tedy 4.

Pro vhodné využití této strategie je nutné, aby si žáci uvědomili, že čísla se liší o malý rozdíl. Pokud by žáci byli seznámeni pouze s touto strategií, bylo by pro ně velmi nevýhodné její využívání u úloh s velkým rozdílem čísel.

10.7 Shlukování zprava doleva

Tuto strategii žáci nevyužívají. Je obdobou strategie částečného rozkladu. Žák rozkládá druhé číslo, stejně jako u strategie částečného rozkladu, ale nepřičítá nejprve desítky, ale jednotky.

Proces numerické operace sčítání 28 + 35 = ? probíhá v mysli žáka ve třech krocích.

1) Druhého sčítance rozloží na desítky a jednotky 35 → 30 + 5.
2) K prvnímu sčítanci přičte nejprve jednotky 28 + 5 = 33, získá mezivýsledek 33.
3) K mezivýsledku přičte desítky 33 + 30 = 63.

10.8 Kompenzační a dorovnávací

Tyto strategie považuji za mentálně velmi náročné. Zahrnují více operací a představují vyšší riziko chybovosti (zaokrouhlování, dopočítání do nejbližší desítky, sčítání a následné odečítání dopočítaného čísla).

Kompenzační strategie 28 + 35 = ? probíhá ve čtyřech krocích.

1) Mentálně zaokrouhlí číslo 28 na desítky → 30.
2) Dopočítá chybějící číslo do 30 → 28 + 2 = 30, získá tedy mezivýsledek 30.
3) Mezivýsledek přičte k druhému sčítanci 30 + 35 = 65, získá tedy druhý mezivýsledek 65.
4) Od druhého mezivýsledku odečte číslo přidané u druhého kroku 65 – 2 = 63.

Dorovnávací strategie 28 + 35 = ? probíhá ve čtyřech krocích.

1) Mentálně zaokrouhlí číslo 28 na desítky → 30.
2) Dopočítá chybějící číslo do 30 → 28 + 2 = 30, získá tedy mezivýsledek 30.
3) Přidané číslo z druhého kroku odečte od druhého sčítance 35 – 2 = 33, získá tedy druhý mezivýsledek 33.
4) Sečte první a druhý mezivýsledek 30 + 33 = 63.

10.9 Mentální představa

Mentální představa aneb algoritmus pero a papír, představa písemného sčítání a odčítání se svislým zápisem. S touto strategií žáci nebyli seznámeni. Nikdo s žáků ji nepoužil. V budoucnu se s ní žáci budou seznamovat, aby byli schopni ji aplikovat na počítání ve vyšším oboru přirozených čísel. Tuto strategii využívají žáci, kteří mají problém s porozuměním desítkové soustavě a poziční hodnotě číslic v čísle. Žáci počítají zdánlivě správně (mají správné výsledky). Ve skutečnosti jim však tato strategie v dlouhodobém horizontu bude bránit v rozvoji matematických představ. To znamená, že žák se naučí pouze mechanismus, ale počítá úlohy bez porozumění.

10.10 Strategie Venduly při odčítání

Její strategie funguje při odčítání bez přechodu přes desítku, bohužel stejně postupovala i u odčítání s přechodem.

Proces numerické operace odčítání 65 – 29 = ? řešila následovně.

1) Rozložila čísla na desítky a jednotky.
2) Odečetla desítky 60 – 20 = 40.
3) Porovnala čísla na pozici jednotek.

V menšiteli je o 4 víc, přičetla 4. Tento postup mě velmi překvapil, neuvažovala o odčítání, nýbrž jednotky porovnávala. Strategie samotná je velmi zajímavá. Bohužel nepropojila poznatek, že menšitele ubíráme.

11 Interpretace

1) Slovní úlohy žáci řešili ve většině případů správně. Oproti slovním úlohám v učebnicích, úlohy v experimentu zvládali bez větších obtíží, protože byly z jejich běžného života.
2) Neprokázalo se, že by romští žáci lépe rozuměli úlohám z kontextu finance, nežli úlohám s jiným kontextem.
3) Ukázalo se, že žáci využívají i strategie, kterým nebyli vyučováni. V odčítání se projevily nedostatky ve strukturálním porozumění.
4) Většinou jsou žáci schopni dovednost porovnání využít v sémantickém prostředí, pokud je jim známý kontext. Závažnější obtíže se projevily u úloh, kde se jednalo o porovnání tří stavů.

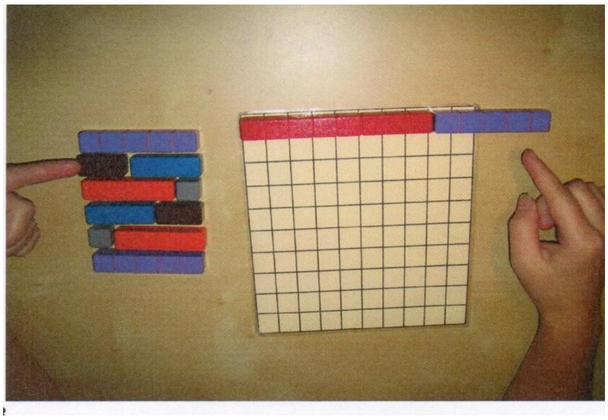
12 Reflexe a diskuse

Odhalení formalizmů

V sémantickém porozumění žáků se neprokázaly závažné projevy formalizmu. Domnívám se, že díky zadávání různorodých úloh, se mi ve třídě podařilo formalizmu předejít u většiny žáků. V budoucnu chci vyzkoušet úlohy na odhalení formalizmů v kalkulativním porozumění skrze chybějící číslice (např. v úloze 3_+ _2 = 48).

Stovková tabulka

Na lepší porozumění desítkám a jednotkám hodlám více využívat síť 10x10 - stovkovou tabulku. Na jejích kladech se shodují tvůrci učebnice Fraus, tvůrci koncepce Tvořivé školy i speciální pedagožka Renata Wolfová, která se zaměřuje na nápravu chyb v porozumění struktuře přirozených čísel. V některých publikacích stovková tabulka začíná od nuly. Já jsem se rozhodla pro stovkovou tabulku od jedničky. Na každém řádku je tedy jedna desítka. Myslím, že pro žáky je tato forma jasnější. PaedDr. Renata Wolfová nejvíce využívá prázdnou stovkovou tabulku, na kterou žáci zpočátku přikládají dřevěné hranoly (obr.7). Je možno využívat i zalaminované pásky desítek, jednotek. Po zacvičení je vhodné nevyužívat barevnosti z důvodu nevhodné fixace na barvu. Později je třeba přistoupit k mentální orientaci na síti 10x10 a cílem je automatizace číselné řady a početních operací.



Obrázek 7 : Práce s hranoly.

Triáda

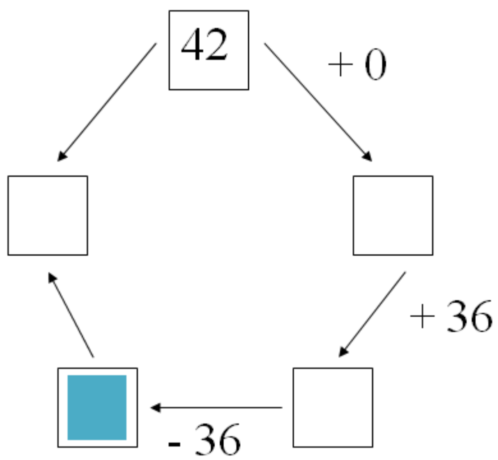
V příštím cyklu s první třídou bych se více zaměřila na rozvoj pochopení triádě. V učebnicích jsou na procvičování úlohy, kdy jsou zadaná tři čísla, a žák má vytvořit čtyři úlohy. Je pravda, že i schopní počtáři měli s těmito úlohami obtíže. Jasně se projevovalo neporozumění propojení triádě, bohužel jsem v minulosti na toto nekladla dostatečný důraz. Nyní již vím, že je důležité rozvíjet asociace $4 + 3 \leftrightarrow 7$, aby si žák vytvořil procept.

Geometrie

Reedukace ve třídě prostřednictvím didaktických cvičení a her. Důraz je kladen na zlepšení schopností nutných k rozvoji matematických dovedností. (Simon 2006) Podle autora má geometrie mnoho výhod pro práci se slabšími žáky. Žáci rozeznávají struktury, nalézají analogie, slovně vyjadřují souvislosti, logicky myslí, rozvíjejí představivost. Geometrie tedy rozvíjí instrumentální didaktické cíle. I v geometrii je vyžadována schopnost počítání s čísly, rozvíjí tedy aritmetiku. Žáci necítí geometrii jako matematiku, proto je skrze ni možné přitáhnout k matematice i žáky, kteří se jí bojí. U žáků převažuje zobrazování, nepropojí si cvičení s matematikou. Dalším způsobem nenásilného rozvoje matematického porozumění je skrze stavby z kostek. Prostorové zobrazování krychlí propojuje dva vzdělávací cíle, řízení se pravidly a rozvoj prostorové představy. Taková cvičení lze zahrnout i do jiných předmětů, například výtvarné výchovy. V českém jazyce lze využít cvičení na hledání chybějícího prvku množiny. Žáci ze zadaných písmen tvoří kombinace slov. Následně je jedno ze slov vypuštěno ze seznamu. Žáci se snaží najít chybějící slovo. Rozvíjí tím schopnost abstrakce, učí se rozeznávat pravidla, rozvíjet mentální operace a rozvíjet porozumění pro stálost počtu prvků v čísle.

Přičtení a odečtení stejného čísla

Během příprav experimentů jsem si uvědomila, že zjistit, zda žáci rozumí číslům, lze prostřednictvím pochopení principu, že odečtením a následným přičtením stejného čísla se počáteční číslo nezmění. Například 45 + 36 – 36 = ? Budou žáci počítat výsledek, nebo si uvědomí, že výsledkem je počáteční číslo?



Obrázek 8 : Úloha typu had.

Zkusila jsem zadat žákům úlohu typu had (obr. 8), do kterého jsem zařadila přičtení a odečtení stejného čísla. Žáci měli možnost vyplnit pouze pole za sledovanými jevy, které bylo barevně znázorněno. Zajímavé bylo, že kromě dvou žáků, všichni vyplnili všechna pole, přestože většinou si snaží práci ulehčit. Pouze dva žáci vyplnili jen barevné pole. Při následném individuálním rozboru se ukázalo, že počítali celou řadu, jen nevybarvená pole nevyplnili. Abych byla schopna určit, zda to bylo způsobeno neporozuměním tomuto principu či zvykem počítat úlohy postupně za sebou, musel by být experiment ucelený a promyšlenější. Chci se v budoucnu na tento jev zaměřit po hlubším studiu literatury na toto téma.

Učebnice

Jako jeden ze závazků do budoucna si ukládám, seznámit se s řadami učebnic matematiky na trhu. Jedním z důvodů je zadání slovních úloh. Již v první třídě, kdy žáci začínají číst, jsou úlohy graficky zadávány tak, že jsou rozdělena slova na konci řádků. Pro žáky byly tyto úlohy nepochopitelné.

Například

Otázka ke slovní úloze byla zadána.

Kolik řed-

kviček zasadili?

Žáci byli velmi zmateni a ptali se, co je to kvička. V látce českého jazyka ještě nebylo probíráno dělení slov na konci řádku.

V učebnicích pro třetí třídu se často objevují úlohy s látkou z prvouky. Například byl zadán počet hus a údaj, že kachen je o X méně. Otázka zněla, kolik je drůbeže. Žáci správně vypočítali počet kachen. Žádný z nich však nevěděl, že v závěrečném výpočtu je potřeba sčítat, protože nevěděli, že kachny i husy jsou drůbež (přestože jsme si před řešením úlohy pojem vysvětlili). Podobná úloha řešila množství pšenice a žita. Vím jistě, že úlohy žáci nevyřešili vzhledem k problémům v sémantice. Stejný typ úloh, kde byl zadán počet chlapců a údaj, že dívek bylo o X méně, a cílem bylo spočítat děti dohromady, žáci řešili bez problémů.

Je možné, že žáci běžných škol, vyrůstající v podnětném prostředí, nemají se slovní zásobou v učebnici problémy. V době, kdy jsem jako učitelka nastupovala do první třídy, nebyly mé znalosti o matematice tak hluboké, abych správně určila kritéria podle kterých vybrat učebnici pro výuku svých žáků. Věřím, že najdu učebnici, která bude vyhovovat mým představám. Taková učebnice by žákům neměla předkládat pouze jednu strategii výpočtů. Upřednostnila bych učebnici s větším množstvím nabízených strategií, případně takovou, která strategie nepředkládá vůbec. Vzhledem k tomu, že se i nadále hodlám zabývat touto problematikou, doufám, že za dva roky, kdy budu znovu učit první třídu, budu schopna možné strategie žákům předkládat sama.

13 Závěr

Učím třetí třídu na základní škole v Praze, kde převažují žáci romské národnosti. Během výuky matematiky v první třídě jsem narážela nepochopení slovním úlohám ze strany žáků Zajímalo mě, zda je to způsobeno problémy v kalkulativní oblasti nebo v porozumění slovním úlohám. Proto jsem se rozhodla na tuto problematiku ve výuce zaměřit. Jelikož se pozorování vztahovalo na období druhé třídy a první pololetí třetí třídy, zaměřila jsem se na matematické dovednosti tohoto období, tj. řešení slovních úloh a numerických operací v oboru 0 - 100.

Práce splnila cíl diagnostický i edukativní. Přínosem byla nejen pro mě, ale i pro žáky, se kterými jsem po dobu roku a půl pracovala. Mám na mysli nejen žáky z vybraného vzorku, ale i z celé třídy. Pozitivním zjištěním bylo, že se u žáků v sémantickém prostředí neprokázaly závažnější projevy formalizmů. Zásadním zjištěním práce bylo, že pro romské žáky je nutné u slovních úloh vycházet z kontextů, které jim jsou známé. Pokud úloze sémanticky nerozumí, nejsou schopni ji ani vyřešit. Při řešení pro ně nesrozumitelných úloh se nepokouší odhadnout ani jejich smysl. Neúspěch při řešení slovních úloh brzdí jejich individuální pokroky a motivaci. Slovní úlohy, které předpokládají u žáků rozvinutou slovní zásobu, jsou pro romské žáky nevhodné. Je tedy nutné, aby učitel žáky znal a uměl přizpůsobit obsah úloh jejich potřebám v porozumění. Učitel se nemůže spoléhat na slovní úlohy v učebnicích, protože v sobě mohou ukrývat dvojsmyslnou interpretaci.

Pokud jsou žákům předkládány sémanticky srozumitelné úlohy, jsou schopni po procvičení vypočítat i úlohy na porovnávání různých stavů nebo úlohy složené, které se mohou zdát obtížné. I zde se projevuje nutnost neustálého procvičování a zamýšlení se nad vhodným sémantickým zadáváním úloh.

Žáci zvládli numerický proces sčítání a odčítání. Mají funkčně zvnitřněnou poziční hodnotu desítek a jednotek, orientují se v oboru přirozených čísel 0 – 100. Ukázalo se, že někteří žáci v numerickém procesu odčítání si neuvědomují rozdíl mezi menšencem a menšitelem. Využívání strategie celkového rozkladu u odčítání je vede k odčítání většího čísla jednotek od menšího bez závislosti na tom, zda se nachází na pozici menšitele nebo menšence. Potvrdil se předpoklad z odborné literatury, že strategie celkového rozkladu je nevhodná.

Před tím, než jsem začala pracovat na diplomové práci, zadávala jsem žákům testy a zjišťovala jejich chyby. Nebyla jsem však schopná odhalit původ těchto chyb. Nezamýšlela jsem se nad tím, čím jsou chyby způsobeny. Žáky jsem pouze hodnotila, neuvědomovala jsem si hloubku skutečností, které mohu prostřednictvím testu odhalit.

Během práce jsem získala mnoho zkušeností pro svou další praxi učitelky. Podařilo se mi odhalit oblasti výuky, ve kterých mají žáci určité nedostatky. Nyní jsem schopnější určit, kde vznikají chyby žáků, předvídat rizika metodických postupů. Uvědomila jsem si nutnost potřeby většího individuálního přístupu k žákům. Při studiu literatury jsem se seznámila s mnoha zajímavými náměty a postupy i zahraničních autorů. Zpracování výsledků testů je velmi časově náročné, ale pochopila jsem, že tak mohu identifikovat mnoho chyb v myšlení žáků. Hodlám i nadále žáky vyučovat různými styly a zkoušet nové nápady.

Čím více jsem se věnovala rozboru žákovských prací, možným způsobům nápravy a strategiím, tím více jsem si uvědomovala své rezervy v diagnostice. S politováním si uvědomuji, že po roce a půl stále není tato práce úplná. Toto zajímavé a důležité téma by si zasloužilo dlouhodobější výzkum. Jsem však přesvědčena, že práce byla pro mě velkým přínosem a studium odborných materiálů mě obohatilo. Doufám, že díky diplomové práci budu lepší učitelkou. Těším se na svou budoucí první třídu a rozhodně využiji poznatky k tomu, aby úroveň matematických dovedností mých budoucích žáků byla ještě lepší než těch současných.

14 Literatura

ABDULLAH, N. S.; SIVASUBRAMANIAM, P. Shortcut for Subtraction. *Procedia Social and Behavioral Sciences*. 2010, 8, 101–105. ISSN 1877-0428. Dostupný z http://www.sciencedirect.com/science?_ob=MiamiImageURL&_cid=277811&_user=640812&_pii=S1877042810021191&_check=y&_origin=&_coverDate=31-Dec-2010&view=c&wchp=dGLzVBA-zSkzS&md5=8cd9bbd95b3e09c532067f67adcf6752/1-s2.0-S1877042810021191-main.pdf. [cit. 2011-12-1].

AUNIO, P.; NIEMIVIRTA, M. Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences. 2010,* 20, 427–435. ISSN: 1041-6080. Dostupný z http://www.helsinki.fi/~niemivir/AunioNiemivirtaL&ID2010.pdf. [cit. 2011-12-8].

BLAŽKOVÁ, R.; MATOUŠKOVÁ, K.; VAŇUROVÁ, M., aj. *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy*. Brno : Paido, 2000. ISBN 80-85931-89-3.

BRYANT, P., CHRISTIE, C., RENDU, A. Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identity, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*. ISSN 0022-0965. 1999, 74, 194–212. Dostupný z http://www.sciencedirect.com/science?_ob=MiamiImageURL&_cid=272403&_user=640812&_pii=S0022096599925171&_check=y&_coverDate=1999-11-01&view=c&wchp=dGLzVBA-zSkzk&md5=c2113886f3405e385e5ce0d6fc21201a/1-s2.0-S0022096599925171-main.pdf. [cit. 2011-12-4].

CANOBI, K. H. Children’s profiles of addition and subtraction understanding. *Journal of Experimental Child Psychology*. 2005, 92(3), 220-46. ISSN 0022-0965. Dostupný z http://www.sciencedirect.com/science?_ob=MiamiImageURL&_cid=272403&_user=640812&_pii=S0022096505000871&_check=y&_origin=mlkt&_coverDate=30-Nov-2005&view=c&wchp=dGLbVlV-zSkzV&md5=fdeaa3688fea7024458383fb0c829dfd/1-s2.0-S0022096505000871-main.pdf.[cit. 2011-12-14].

CANOBI, K. H. Individual differences in children’s addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development.* 2004, 19, 81–93. ISSN 0885-2014. Dostupný z http://www.sciencedirect.com/science?_ob=MiamiImageURL&_cid=272077&_user=640812&_pii=S0885201403000662&_check=y&_coverDate=2004-01-01&view=c&wchp=dGLbVlS-zSkzk&md5=78c94a282e749c89e2ca99b3b927f4ce/1-s2.0-S0885201403000662-main.pdf [cit. 2011-12-4].

COCKBURN, A. *Mathematical understanding 5-11. A Practical Guide to Creative Communication in Primary Maths.* Cromwell Press LTD., 2007. ISBN 978-1-44129-4509-9. Dostupný z http://books.google.cz/books?id=z8kB5TYizVIC&pg=PA1&lpg=PA1&dq=cockburn+mathematical+understanding+5-11&source=bl&ots=uxQs-

iMhiT&sig=ysy2ZXwqf3vcrzSrrYeWQS73KrI&hl=cs&ei=P-iKTtbeNcOh8QOKq6n0BA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=2&ved=0CCQQ6AEwAQ#v=onepage&q&f=false. [cit. 2011-10-4].

FONTANA, D. *Psychologie ve školní praxi*. Praha : Portál, 2003. ISBN 80-7178-626-8.

GHAZALI, M.; OTHNAME, A. R.; ALIAS, R.; SALEH, F. Development of Teaching Models for Effective Teaching of Number Sense in the Malaysian Primary Schools. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. 2010, 8, 344–350. ISBN 1877-0428. Dostupný z http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042810021531. [cit. 2011-12-22].

GUTSTEIN, E.; ROMBERG, T. A.: Teaching children to add and subtract. *The Journal of Mathematical Behavior.* 1995, 14, 3, 283-324. ISSN: 0732-3123.

HEIRDSFIELD, A. M.; COOPER, T. J. Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior*. 2004, *23*(4), pp. 443-463. ISSN 07323123. Dostupný z http://eprints.qut.edu.au/1133/1/1133.pdf. [cit. 2011-12-1].

HEJNÝ, M. *Schéma – pilíř matematické znalosti*. Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007. s 3. ISBN 80-969414-7-X.
Dostupný z http://www.p-mat.sk/pytagoras/zbornik2007/003_Hejny_Schema.pdf. [cit. 2011-12-12].

HEJNÝ, M.; KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika.* Praha : Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J.; STEHLÍKOVÁ, D. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004. s. 212. ISBN 80-7290-189-3. Dostupný z http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_59.pdf. [cit. 2011-1-28].

HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ, J. Schéma triády – klíč k porozumění aritmetice - část 2. *Kritické listy* 2007, *26.* © Kritické myšlení o. s. ISSN1214-5823. Dostupný z http://www.kritickemysleni.cz/klisty.php?co=26/!triady2.[cit. 2011-11-24]

HELUS, Z. *Sociální psychologie pro pedagogy*. Praha : Grada Publishing, a.s., 2007. ISBN 978-80-247-1168-3.

CHENG, ZI-JUANG. Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study. *The Journal of Mathematical Behavior.* 2012, 31,1, 29–47. ISSN 07323123. Dostupný z http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312311000496. [cit. 2011-12-7].

KUBEŠ, J.; HOSNEDL, J.; ZDRÁHALOVÁ, M., aj. *Počítače ve výuce přírodovědných předmětů*. Plzeň : Fraus, 2005. ISBN 80-7238-333-7.

LEMAIRE, P.; CALLIES, S. Children's strategies in complex arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology*. 2009 103, (1), 49-65. ISSN 0022-0965. Dostupný z http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleListURL&_method=list&_ArticleListID=1891038259&_sort=r&_st=13&view=c&_acct=C000032305&_version=1&_urlVersion=0&_userid=640812&md5=82db204ef11f83fbcdcc055bc6a20a00&searchtype=a. [cit. 2011-11. 25].

MAHPOP, bin H.; SIVASUBRAMANIAM, P. Addition of Whole Numbers with Regrouping using the "Soroban." *Procedia Social and Behavioral Sciences*. 2010, 8, 50–56. ISSN 1877-0428. Dostupný z http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428/8 [cit. 2011-12-18].

MOLNÁR, J.; SCHUBERTOVÁ, S.; VANĚK, V. Konstruktivismus ve vyučování matematice. *Zpráva Univerzity Palackého v Olomouci - v rámci řešení projektu Evropského sociálního fondu OP RLZ: „Modulární přístup v počátečním vzdělávání učitelů přírodovědných předmětů pro střední školy" číslo CZ.04.1.03/3.2.15.2.0263.* 2007. Dostupný z http://esfmoduly.upol.cz/texty/konstr_m.pdf

RASMUSSEN, C., Ho, E.; BISANZ, J. Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 2003, 85, 89–102. ISSN 0022-0965. Dostupný z http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022096503000316. [cit. 2011-12-1].

ROBINSON, K. M.; DUBÉ, A. K. Children's understanding of addition and subtraction concepts. *Journal of Experimental Child Psychology*. 2009,103, 532–545. ISSN 0022-0965. Dostupný z http://www.sciencedirect.com/science?_ob=MiamiImageURL&_cid=272403&_user=640812&_pii=S002209650800194X&_check=y&_origin=&_coverDate=31-Aug-2009&view=c&wchp=dGLzVlV-zSkzk&md5=0c556e2c7e68339950ee696415c3cdf1/1-s2.0-S002209650800194X-main.pdf. [cit. 2011-12-7].

ROBINSON, K. M.; NIMOWSKI, J. E.; GRAY, M. L. Children's understanding of the arithmetic concepts of inversion and associativity. *Journal of Experimental Child Psychology*. 2006, 94, 349–362. ISSN 0022-0965. Dostupný z http://www.sciencedirect.com/science?_ob=MiamiImageURL&_cid=272403&_user=640812&_pii=S0022096506000415&_check=y&_origin=article&_coverDate=31-Aug-2006&view=c&wchp=dGLzVlV-zSkWz&md5=cb82504772767d9bf81513b9d7c21712/1-s2.0-S0022096506000415-main.pdf. [cit. 2011-12-1].

ROSECKÁ, Z. *Malá didaktika činnostního učení*, Brno : Tvořivá škola, 2007. ISBN 80-903397-3-5.

SIMON, H. *Dyskalkulie: jak pomáhat dětem, které mají potíže s početními úlohami.* Praha : Portál, s.r.o., 2006. ISBN 80-7367-104-2.

SINGULE, F. *Americká pragmatická pedagogika*. John Dewey a jeho američtí následovníci, Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1991. ISBN 80-04-20715-4. Dostupný z http://www.tf.jcu.cz/getfile/793f191b0713ff6a. [cit. 2011-12-8].

SPILKOVÁ, V. a kol. *Proměny primárního vzdělávání v ČR*, Praha : Portál, s.r.o., 2005. ISBN 80-7178-942-9.

STEHLÍKOVÁ, N. (ed.). *Náměty na podnětné vyučování v matematice.* Praha : UK v Praze – PedF, 2007. ISBN 978-81-7290-342-9.

WOLFOVÁ, R. *Podpora rozvoje matematických dovedností*, PPP pro Prahu 3+9, pracovní materiály.

Učebnice

HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2 : učebnice pro 2. ročník základní školy. 1. díl.* Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-768-7.

HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2 : učebnice pro 2. ročník základní školy. 2. díl.* Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-769-4.

MOLNÁR, J.; MIKULENKOVÁ, H. *Matematika 3. ročník, 1. díl*, Olomouc : Prodos, 1997. ISBN 80-85806-78-9.

MOLNÁR, J.; MIKULENKOVÁ, H. *Matematika 3. ročník, 2. díl*, Olomouc : Prodos, 1997. ISBN80-85806-90-8.

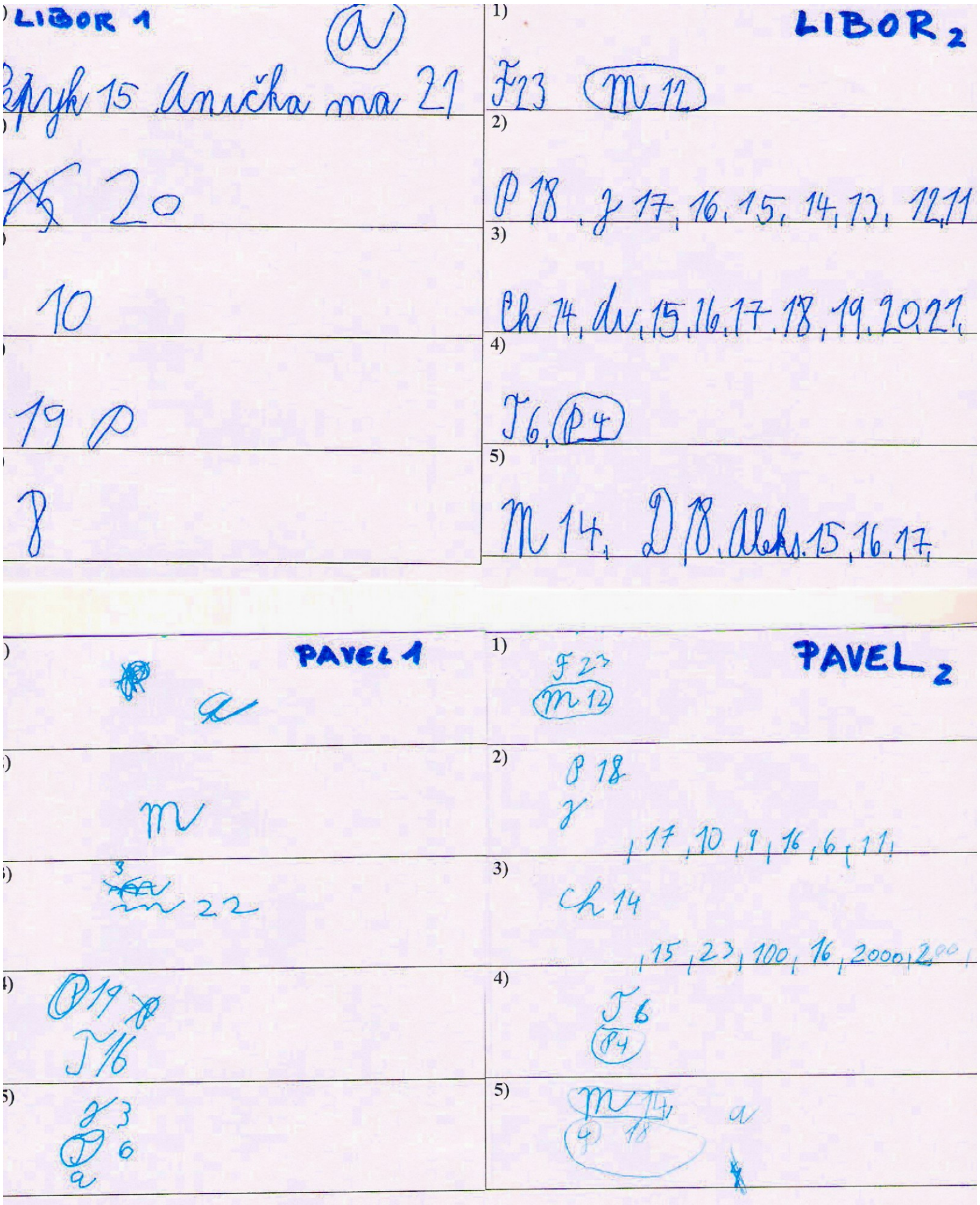
15 Přílohy

15.1 Experiment fáze 1

12. listopadu 2010	
1) Pepík má 15 korun, Anička má 21 korun. Kdo má víc?	
2) Jirkovi trvá cesta do školy 10 minut. Marušce trvá cesta do školy déle než Jirkovi. Kolik minut jí může cesta trvat?	
3) Modrý bazén je dlouhý 22 kroků. Červený bazén je kratší. Kolik kroků může být červený bazén dlouhý?	
4) Tomáš má 16 pastelek. Pavel má 19 pastelek. Kdo má víc pastelek?	
5) Jenda má 3 sourozence. Tereza 6 sourozenců. Anička má víc než Jenda a méně než Tereza. Kolik může mít Anička sourozenců?	

7. prosince 2010	
1) Franta má 23 korun. Martina má 12 korun. Kdo má míň?	
2) Petr píše úkol 18 minut. Jitka má úkol napsaný dříve než Petr. Jak dlouho může Jitce trvat napsat úkol?	
3) Chlapecké toalety jsou 14 kroků daleko. Dívčí jsou dál. Kolik kroků daleko mohou být dívčí toalety?	
4) Tomáš má 6 sourozenců. Pavel má 4 sourozence. Kdo má míň sourozenců?	
5) Mirek má 14 triček. Dana má 18 triček. Alex má víc triček než Mirek a míň než Dana. Kolik může mít Alex triček?	

Žákovská řešení prvního a druhého testu z druhé třídy.



MILOŠ 1

1) P 15 a 21 anička má víc

2) J 10 M 20

3) M 22 a 12 13 16

4) T 16 P 14 Pavel

5) J 3 T 6 Tereza a 5

MILOŠ 2

1) F 23 M 12 Martina

2) P 18 J 5 7 8 9 10 12

3) Ch 14 D 20 23 24 26

4) T 6 P 4 Pavel

5) M 14 D 18 a 15 16 17

6)

ŠIMON 1

P 15 a 21

J 10 M 16 15

M 22 Č 15

T 16 Pa 19

J 3 T 6 a 5

ŠIMON 2

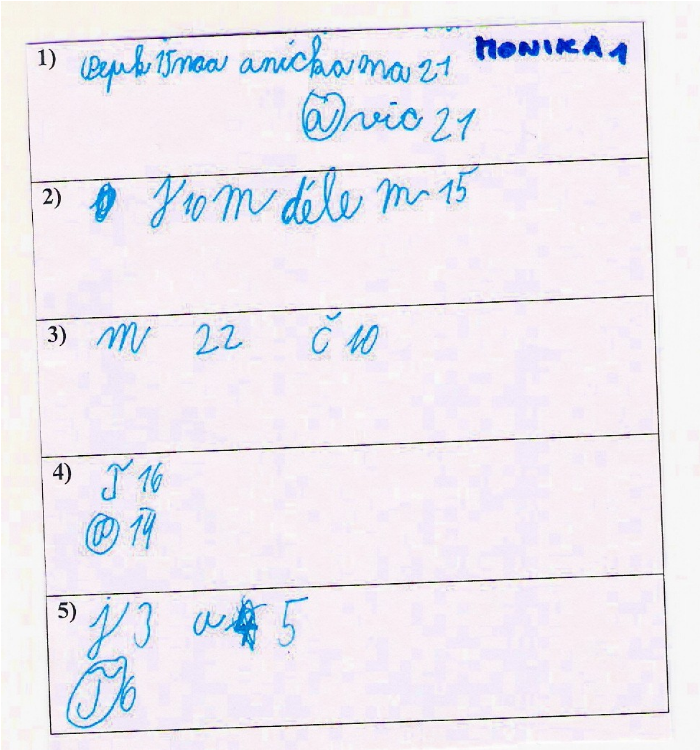
1) F 23 M 12 13 14

2) P 18 J 1 3 5 6 7 8

3) Ch 14 Či 20 34 40

4) T 6 P 4

5) M 14 D 18 a 15 16 17



MONIKA 1

1) eepuk 15 naa anička ma 21
a víc 21

2) J 10 m déle m 15

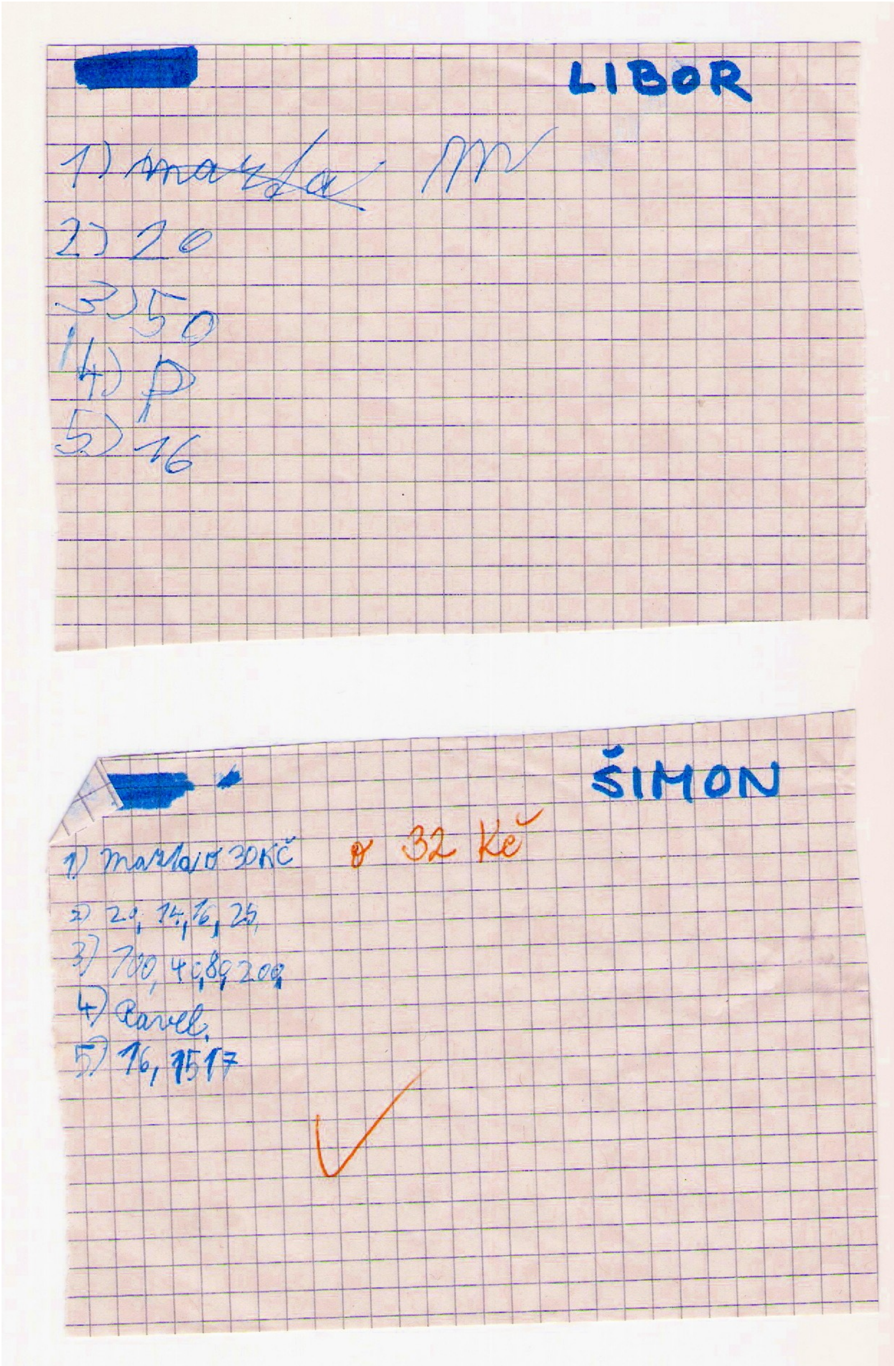
3) m 22 č 10

4) J 16
a 14

5) j 3 a 5
J 6

3. června 2011	
1) Franta má 52 korun. Martina má 20 korun. Kdo má míň?	
2) Petr píše úkol 30 minut. Jitka má úkol napsaný dříve než Petr. Jak dlouho může Jitce trvat napsat úkol?	
3) Chlapecké toalety jsou 24 kroků daleko. Dívčí jsou dál. Kolik kroků daleko mohou být dívčí toalety?	
4) Tomáš má 8 sourozenců. Pavel má 7 sourozenců. Kdo má míň sourozenců?	
5) Mirek má 14 triček. Dana má 18 triček. Alex má víc triček než Mirek a míň než Dana. Kolik může mít Alex triček?	

Žákovská řešení třetího testu z 3. 6. 2011.


[redacted] LIBOR

1) ~~marta~~ m

2) 20

3) 50

4) P

5) 16

[redacted] ŠIMON

1) Marta o 30 Kč o 32 Kč

2) 20, 14, 16, 25,

3) 100, 40, 80, 200

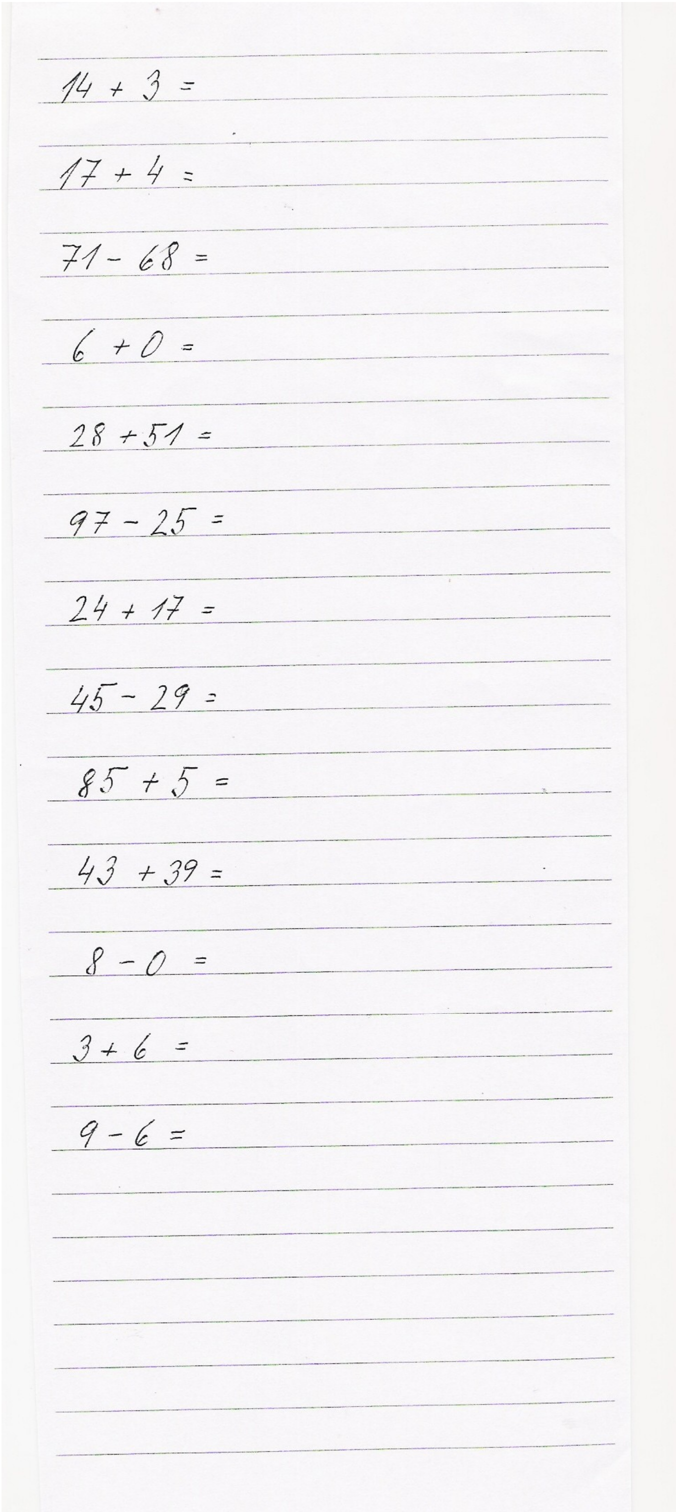
4) Pavel,

5) 16, 15 17


MILOŠ
OK
PAVEL
MONIKA

15.2 Experiment fáze 2

Zadání prvního testu 17. 1. 2012 (reálná velkost A4).



14 + 3 =

17 + 4 =

71 - 68 =

6 + 0 =

28 + 51 =

97 - 25 =

24 + 17 =

45 - 29 =

85 + 5 =

43 + 39 =

8 - 0 =

3 + 6 =

9 - 6 =

Výsledky prvního testu

	žák	D	K	Li	P	Mi	T	Š	A	LR	M	chyb
	úloha											
1	14+3		18									1
2	17+4						22					1
3	71-68	30	2	97	17	13	17		29	9		8
4	6+0	6										1
5	28+51	31										1
6	97-25	78	52	87		62	68	62	58	73		8
7	24+17		37	46				32				3
8	45-29	21	25	15	64		34	74				6
9	85+5											
10	43+39	89		52		80						3
11	8-0	0	8		0							3
12	3+6											
13	9-6				15	2						2
	chyb	7	6	5	4	4	4	3	2	2	0	

Zadání druhého testu

$6 + 0 =$

$8 - 0 =$

$3 + 6 =$

$9 - 6 =$

$14 + 3 =$

$17 + 4 =$

$28 + 51 =$

$85 + 5 =$

$24 + 17 =$

$43 + 39 =$

$45 - 29 =$

$71 - 68 =$

$95 - 25 =$

$96 - 25 =$

$97 - 25 =$

Výsledky druhého testu

úloha		P	Li	Š	T	B	Mi	M	
1	6+0								
2	8-0								
3	3+6			17					1
4	9.6								
5	14+3	11				11			2
6	17+4	13		13		13			3
7	28+51								
8	85+5	9							1
9	24+17								
10	43+39								
11	45-29	24	6		24		6		4
12	71-68		1	11	17		11		4
13	95-25	60	50	60	60				4
14	96-25		49K		69	81	66		4
15	97-25		60			75			2
		5	5	4	4	4	3	0	

Žákovská řešení

Monika (1. test, 2. test)

14 + 3 = 17
17 + 4 = 21
71 - 68 = 3
6 + 0 = 6
28 + 51 = 79
97 - 25 = 72
24 + 17 = 41
45 - 29 = 16
85 + 5 = 90
43 + 39 = 82
8 - 0 = 8
3 + 6 = 9
9 - 6 = 3

6 + 0 = 6
8 - 0 = 8
3 + 6 = 9
9 - 6 = 3
14 + 3 = 17
17 + 4 = 21
28 + 51 = 79
85 + 5 = 90
24 + 17 = 41
43 + 39 = 82
45 - 29 = 16
71 - 68 = 3
95 - 25 = 70
96 - 25 = 71
97 - 25 = 72

Tamara (1. test, 2. test)

14 + 3 = 17

17 + 4 = 22

71 - 68 = 17

6 + 0 = 6

28 + 51 = 79

97 - 25 = 68

24 + 17 = 41

45 - 29 = 34

85 + 5 = 90

43 + 39 = 82

8 - 0 = 8

3 + 6 = 9

9 - 6 = 3

6 + 0 = 6

8 - 0 = 8

3 + 6 = 9

9 - 6 = 3

14 + 3 = 17

17 + 4 = 21

28 + 51 = 79

85 + 5 = 90

24 + 17 = 41

43 + 39 = 82

45 - 29 = 24

41 - 68 = 17

95 - 25 = 60

96 - 25 = 69

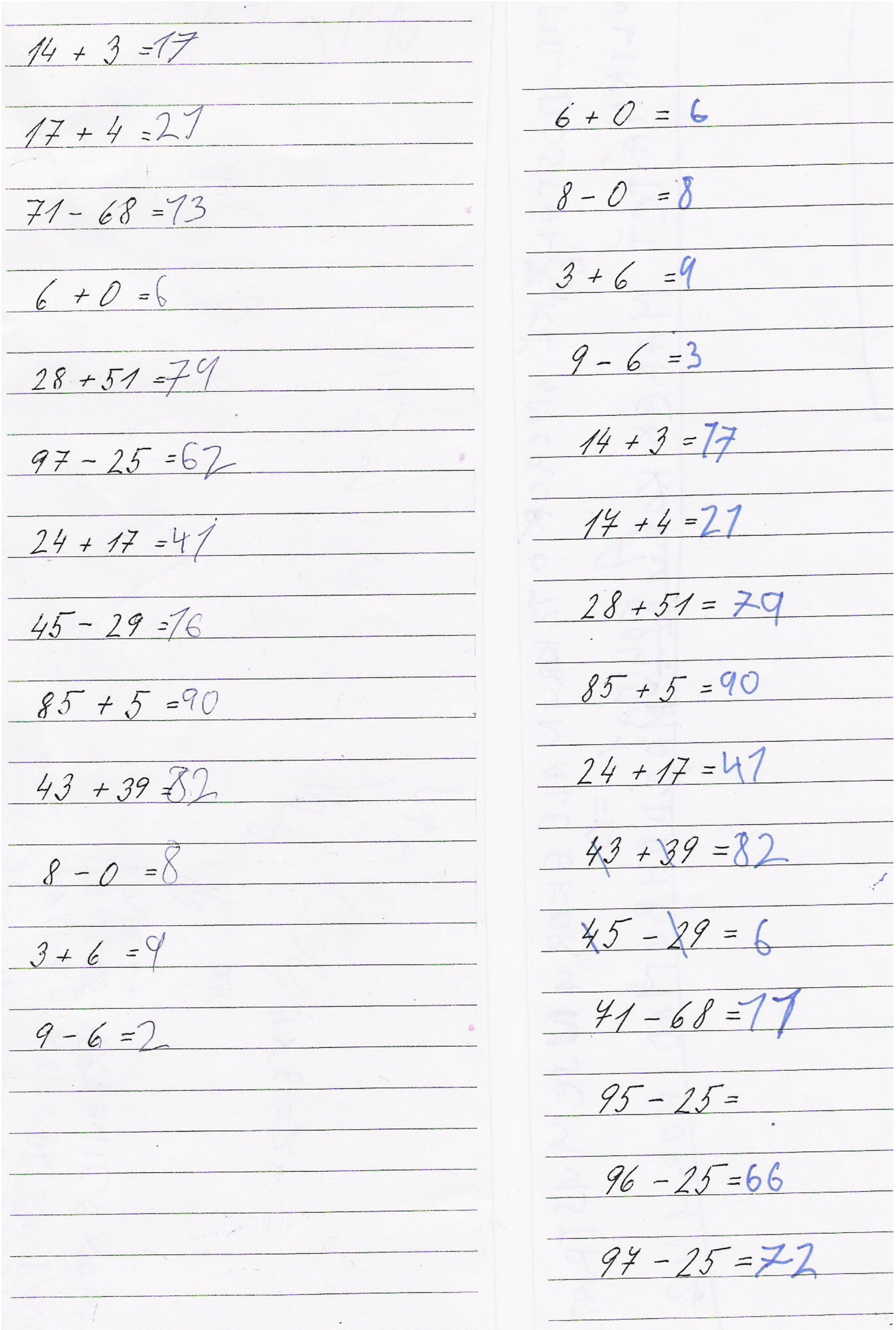
97 - 25 = 72

Šimon (1. test, 2. test)

14 + 3 = 17
17 + 4 = 21
71 − 68 = 3
6 + 0 = 6
28 + 51 = 79
97 − 25 = 62
24 + 17 = 32
45 − 29 = 74
85 + 5 = 90
43 + 39 = 82
8 − 0 = 8
3 + 6 = 9
9 − 6 = 3

6 + 0 = 6
8 − 0 = 88
3 + 6 = 17
9 − 6 = 3
14 + 3 = 17
17 + 4 = 73
28 + 51 = 79
85 + 5 = 90
24 + 17 = 41
43 + 39 = 82
45 − 29 = 16
71 − 68 = 11
95 − 25 = 60
96 − 25 = 71
97 − 25 = 72

Miloš (1. test, 2. test)


14 + 3 = 17
17 + 4 = 21
71 - 68 = 13
6 + 0 = 6
28 + 51 = 79
97 - 25 = 62
24 + 17 = 41
45 - 29 = 16
85 + 5 = 90
43 + 39 = 82
8 - 0 = 8
3 + 6 = 9
9 - 6 = 2

6 + 0 = 6
8 - 0 = 8
3 + 6 = 9
9 - 6 = 3
14 + 3 = 17
17 + 4 = 21
28 + 51 = 79
85 + 5 = 90
24 + 17 = 41
43 + 39 = 82
45 - 29 = 6
71 - 68 = 11
95 - 25 =
96 - 25 = 66
97 - 25 = 72

Úlohu 95-25 zapomněl vypočítat, ústně mi správné řešení sdělil ihned po testu.

Pavel (1. test, 2. test)

$14 + 3 = 17$

$17 + 4 = 21$

$71 - 68 = 17$

$6 + 0 = 0$

$28 + 51 = 79$

$97 - 25 = 72$

$24 + 17 = 41$

$45 - 29 = 64$

$85 + 5 = 90$

$43 + 39 = 82$

$8 - 0 = 0$

$3 + 6 = 9$

$9 - 6 = 15$

$6 + 0 = 6$

$8 - 0 = 8$

$3 + 6 = 9$

$9 - 6 = 3$

$14 + 3 = 11$

$17 + 4 = 13$

$28 + 51 = 79$

$85 + 5 = 9$

$24 + 17 = 41$

$43 + 39 = 82$

$45 - 29 = 24$

$41 - 68 = 3$

$95 - 25 = 60$

$96 - 25 = 71$

$97 - 25 = 72$

Libor (1. test, 2. test)

14 + 3 = 17
17 + 4 = 21
71 − 68 = 97
6 + 0 = 6
28 + 51 = 79
97 − 25 = 87
24 + 17 = 46
45 − 29 = 15
85 + 5 = 90
43 + 39 = 52
8 − 0 = 8
3 + 6 = 9
9 − 6 = 3

6 + 0 = 6
8 − 0 = 8
3 + 6 = 9
9 − 6 = 3
14 + 3 = 18
17 + 4 = 21
28 + 51 = 79
85 + 5 = 90
24 + 17 = 41
43 + 39 = 82
45 − 29 = 6
71 − 68 = 1
95 − 25 = ~~60~~ 50
96 − 25 = 49
97 − 25 = 60

15.3 Experiment fáze 3

Zadání slovních úloh 30. 1. 2012.

1) Pepa poztrácel 17 pastelek. Nyní má 24. Kolik pastelek měl na začátku roku?	
2) Ota má 51 korun. Petr má 28 korun. Mohou si dohromady koupit knihu za 71 korun?	
3) Martina dostala k narozeninám peníze. Koupila si panenku za 43 Kč. Ještě má 39 Kč. Kolik peněz dostala k narozeninám?	
4) Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Ztratil 6 kartiček. Kolik jich má nyní?	
5) Jenda má na Facebooku 58 kamarádů. Franta má 63 kamarádů. Eliška má více než Jenda a méně než Franta. Kolik kamarádů může Eliška mít?	
čas	

Žákovská řešení

Vendula

1) Pepa poztrácel 17 pastelek. Nyní má 24. Kolik pastelek měl na začátku roku?	~~42−17=7~~ 7 24−71=7
2) Ota má 51 korun. Petr má 28 korun. Mohou si dohromady koupit knihu za 71 korun?	51+28=80 80 mužou
3) Martina dostala k narozeninám peníze. Koupila si panenku za 43 Kč. Ještě má 39 Kč. Kolik peněz dostala k narozeninám?	43+39=82 mela 82
4) Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Ztratil 6 kartiček. Kolik jich má nyní?	80
5) Jenda má na Facebooku 58 kamarádů. Franta má 63 kamarádů. Eliška má více než Jenda a méně než Franta. Kolik kamarádů může Eliška mít?	5 61
čas	

Libor

1) Pepa poztrácel 17 pastelek. Nyní má 24. Kolik pastelek měl na začátku roku?	40
2) Ota má 51 korun. Petr má 28 korun. Mohou si dohromady koupit knihu za 71 korun?	ano můžou
3) Martina dostala k narozeninám peníze. Koupila si panenku za 43 Kč. Ještě má 39 Kč. Kolik peněz dostala k narozeninám?	72
4) Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Ztratil 6 kartiček. Kolik jich má nyní?	79
5) Jenda má na Facebooku 58 kamarádů. Franta má 63 kamarádů. Eliška má více než Jenda a méně než Franta. Kolik kamarádů může Eliška mít?	J víc| ~~63~~, ~~94~~, 59, ~~100~~ F méně| 58, ~~44, 53~~,
čas	

Miloš

1) Pepa poztrácel 17 pastelek. Nyní má 24. Kolik pastelek měl na začátku roku? ROKU	PETA MĚL NA ZAČÁTKU 41 PASTELEK. 24+17=41
2) Ota má 51 korun. Petr má 28 korun. Mohou si dohromady koupit knihu za 71 korun? 51+28=79	OTA A PETR MAJÍ DOHROMADI 79 KČ TAGŽE ANO.
3) Martina dostala k narozeninám peníze. Koupila si panenku za 43 Kč. Ještě má 39 Kč. Kolik peněz dostala k narozeninám? 43+39=82	MARTÍN A DOSTALA K NAROZENINAM 82 KČ.
4) Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Ztratil 6 kartiček. Kolik jich má nyní? $(\overset{86}{95-9})\overset{80}{-6}=80$	OLA MA TĚT 80 KARTIČEK.
5) Jenda má na Facebooku 58 kamarádů. Franta má 63 kamarádů. Eliška má více než Jenda a méně než Franta. Kolik kamarádů může Eliška mít?	ELIŠKA MÁ 59, 60, 61, 62,
čas	

Tamara

1) Pepa poztrácel 17 pastelek. Nyní má 24. Kolik pastelek měl na začátku roku?	17 + 424 = 41
2) Ota má 51 korun. Petr má 28 korun. Mohou si dohromady koupit knihu za 71 korun?	51 + 28 = 79
3) Martina dostala k narozeninám peníze. Koupila si panenku za 43 Kč. Ještě má 39 Kč. Kolik peněz dostala k narozeninám?	43 − 39 = 16
4) Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Ztratil 6 kartiček. Kolik jich má nyní?	95 9 6 95 − 9 − 6 = 80
5) Jenda má na Facebooku 58 kamarádů. Franta má 63 kamarádů. Eliška má více než Jenda a méně než Franta. Kolik kamarádů může Eliška mít?	58 | 60 | 70 | 65 63
čas	

Šimon

1) Pepa poztrácel 17 pastelek. Nyní má 24. Kolik pastelek měl na začátku roku?	P-17 MÁ 24P 37
2) Ota má 51 korun. Petr má 28 korun. Mohou si dohromady koupit knihu za 71 korun?	O51KČ P28KČ 79-71=8
3) Martina dostala k narozeninám peníze. Koupila si panenku za 43 Kč. Ještě má 39 Kč. Kolik peněz dostala k narozeninám?	M 4-43=39
4) Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Ztratil 6 kartiček. Kolik jich má nyní?	O95KAR 3 95-9-6=
5) Jenda má na Facebooku 58 kamarádů. Franta má 63 kamarádů. Eliška má více než Jenda a méně než Franta. Kolik kamarádů může Eliška mít?	58 | 59, 60, 61, 62 63 58
čas	

43-39=4

Monika

1) Pepa poztrácel 17 pastelek. Nyní má 24. Kolik pastelek měl na začátku roku?	~~[illegible]~~ 24-7 Pepa měl 41 Pastelek a na konci roku ~~měl~~
2) Ota má 51 korun. Petr má 28 korun. Mohou si dohromady koupit knihu za 71 korun? O51 P28 51+28=79	Ondra a Petrem si mohou koupit dohromady mají 79Kč. a když si koupej knihu zbyde 8Kč.
3) Martina dostala k narozeninám peníze. Koupila si panenku za 43 Kč. Ještě má 39 Kč. Kolik peněz dostala k narozeninám? 82-43=39	~~Martině zůstalo 39 kč~~ ~~a~~ martina měla 82 kč koupila si panenku za 43kč a zbylo jí 39Kč.
4) Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Ztratil 6 kartiček. Kolik jich má nyní? ~~IL~~95-9-6=80	oldovi zbylo 80 ~~kč~~ kartiček.
5) Jenda má na Facebooku 58 kamarádů. Franta má 63 kamarádů. Eliška má více než Jenda a méně než Franta. Kolik kamarádů může Eliška mít? J58 F63 E59	Jenda má nejméně a nejvíce má Frantík a více má Eliška ~~má~~ může mít 59,60,61,62 možnosti.
čas	

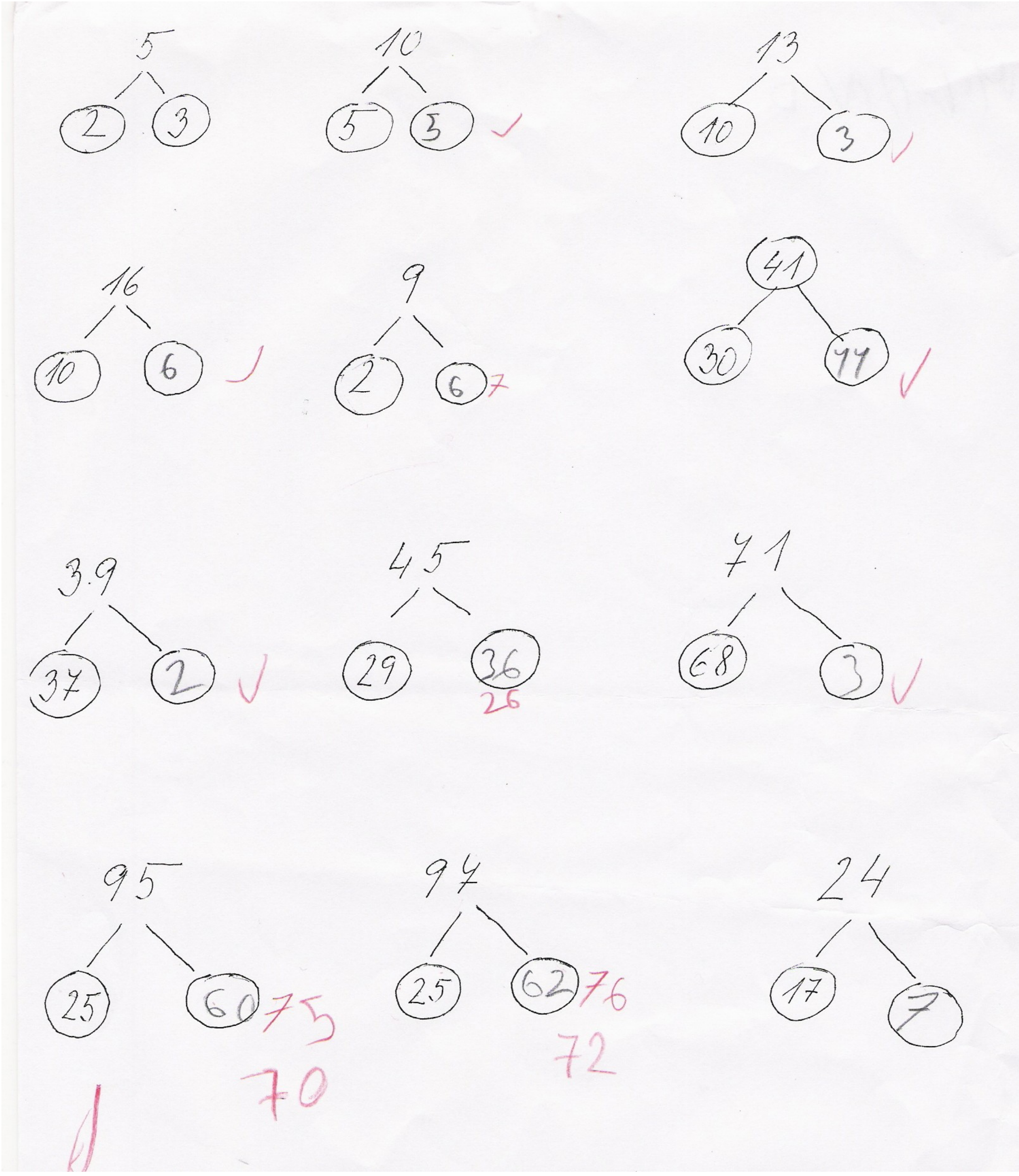
1) ~~Pepa měl~~ 24-17=7

Pavel

1) Pepa poztrácel 17 pastelek. Nyní má 24. Kolik pastelek měl na začátku roku?	$17+24=\boxed{41}$
2) Ota má 51 korun. Petr má 28 korun. Mohou si dohromady koupit knihu za 71 korun?	ANO $51+28=79$
3) Martina dostala k narozeninám peníze. Koupila si panenku za 43 Kč. Ještě má 39 Kč. Kolik peněz dostala k narozeninám?	$43+39=\boxed{82}$
4) Olda sbírá fotbalové kartičky. Měl jich 95. Kamarádovi dal k svátku 9 kartiček. Ztratil 6 kartiček. Kolik jich má nyní?	$95-9-6=\boxed{70}$
5) Jenda má na Facebooku 58 kamarádů. Franta má 63 kamarádů. Eliška má více než Jenda a méně než Franta. Kolik kamarádů může Eliška mít?	59,60,61,62
čas	

15.4 Dodatečné experimenty

Milošovo řešení rozkladů



Červené zápisy v řešení vznikly během následné diskuse.

Miloš (druhý test podruhé)

6 + 0 = 6

8 − 0 = 8

3 + 6 = 9

9 − 6 = 2 | 3

14 + 3 = 17

17 + 4 = 21

28 + 51 = 79

85 + 5 = 90

24 + 17 = 41

43 + 39 = 82

45 − 29 = 16

71 − 68 = 3

95 − 25 = 60

70 1

96 − 25 = 55 | 71

97 − 25 = 56 | 72