

Univerzita Karlova v Praze, Přírodovědecká fakulta

Ústav hydrogeologie, inženýrské geologie a užitá geofyziky



**Modelování asymptotických stavů zemin pomocí metody
oddělených prvků**

Bakalářská práce

Řešitel: Jan Jerman

Studijní program: Geologie

Studijní obor: Hospodaření s přírodními zdroji

Vedoucí práce: Doc. RNDr. David Mašín, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem závěrečnou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje a literaturu. Tato práce ani její podstatná část nebyla předložena k získání jiného nebo stejného akademického titulu.

V Praze dne 28.8.2012

Obsah

1. Úvod.....	1
2. Asymptotické stavy.....	2
2.1. Obecné zákonitosti.....	2
2.2. Kompresní asymptotické stavy a stavy s konstantním objemem.....	3
2.2.1. Izotropní zatěžování.....	5
2.2.2. Konstantní objem.....	6
2.2.3. Asymptotic state boundary surface (ASBS).....	7
2.2.4. Experimentální ověření asymptotických stavů.....	8
2.3. Asymptotické stavy zemin v extenzním režimu.....	9
2.4. Modelování asymptotických stavů zemin.....	11
3. Metoda oddělených prvků – charakteristika simulací.....	13
3.1. Vlastnosti modelu.....	13
3.1.1. Ovlivnění přesnosti modelu.....	14
3.2. Postup simulací.....	15
4. Výsledky vlastních simulací metodou oddělených prvků.....	16
4.1. Kompresní asymptotické stavy a stavy s konstantním objemem.....	16
4.1.1. Konstantní objem – kritický stav.....	16
4.1.2. Kompresní asymptotické stavy.....	17
4.1.3. Překonsolidace.....	18
4.2. Extenzní asymptotické stavy.....	19
4.3. Shrnutí výsledků simulací.....	20
4.4. Porovnání výsledků $\psi_e > 0$ a $\psi_e < 0$	21
5. Závěr.....	26
6. Seznam použité literatury.....	27

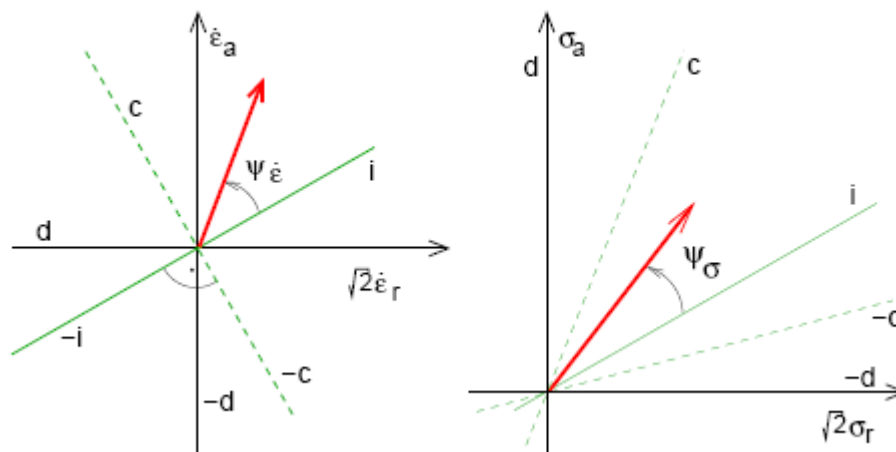
1. Úvod

Asymptotické stavy jsou jednou z nejzajímavějších vlastností zrnitých materiálů. Tyto stavy jsou definované jako stavy dosažené po dostatečně dlouhém zatěžování s konstantním směrem přetvoření. Jsou to atraktory chování zemin. Každý směr přetvoření je vztažen k asymptotickému stavu v prostoru střední napětí proti pórovitosti, kde se nazývají čáry normální konsolidace. Limitním asymptotickým stavem pro zatěžování s nulovou změnou objemu je kritický stav. Naopak vrcholový stav není asymptotickým stavem. Asymptotické stavy byly zkoumány též experimentálně, obecně například pomocí axisymetrických triaxiálních testů s kontrolou přetvoření. Mnoho autorů se zaměřilo na specifické asymptotické stavy, ne však na jejich studiu v širším měřítku. První část této práce je zaměřena na rešerši veškerých dosud známých obecných informací o asymptotických stavech. Dále jsou popsány základní charakteristiky modelu metodou oddělených prvků, který je použit a který byl vytvořen Mašínem (2012a). Jeho pomocí jsou simulovány záporné směry přetvoření ($\psi_\epsilon < 0$). Tyto výsledky jsou porovnány s výsledky Mašína (2012a), kterým byly simulovány kladné směry přetvoření ($\psi_\epsilon > 0$). Cílem experimentální práce je potvrzení výsledků Mašína (2012a), který se zabýval jak obecně známými asymptotickými stavy, tak stavy v extenzi a definoval „čáru normální extenze“. Poté jsou porovnány získané hodnoty z obou prací a je diskutována validita podmínek plasticity.

2. Asymptotické stavy

2.1 Všeobecné zákonitosti

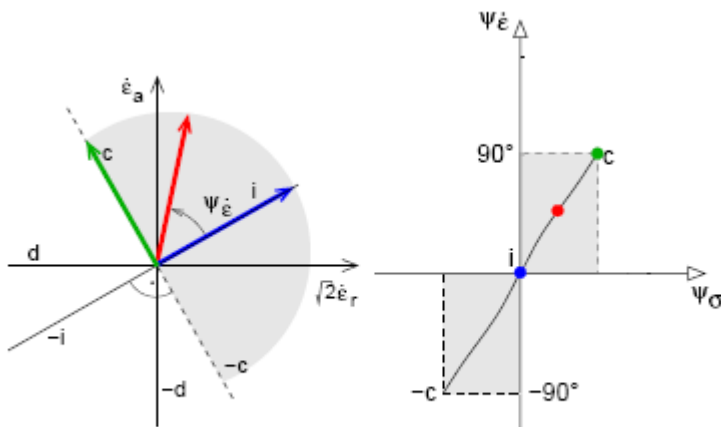
Asymptotický stav je definovaný jako stav dosažený po dostatečně dlouhém zatěžování s konstantním směrem přetvoření. Prvotně se pojem asymptotické stavy objevil jako zobecnění koncepce kritických stavů (Gudehus, 1977). Jsou to atraktory chování zemín, tedy stavy, do kterých systém směřuje a v nekonečném čase jich dosáhne, a je jich dosaženo nezávisle na jejich počátečním stavu (Gudehus a Mašín, 2009). Zeminy jsou schopné si pamatovat předchozí zatížením, ale při jistém typu deformace vzorky dosáhnou stavu, ve kterém ztratí svou paměť (Peňa et al., 2005). V celé práci, pokud nebude řečeno jinak, se budu zabývat axisymetrickými stavy napětí a přetvoření. Tensor přetvoření je tedy plně charakterizován axiálními ϵ_a a radiálními komponenty ϵ_r . Stejně tak tensor napětí je dán axiálním napětím σ_a a radiálním napětím σ_r . Pro snadnější znázornění asymptotických stavů se definují úhly ψ_σ a ψ_ϵ . Úhel ψ_σ charakterizuje směr napětí v prostoru σ_a proti $\sqrt{2}\sigma_r$, kdežto ψ_ϵ definuje směr přetvoření v prostoru ϵ_a proti $\sqrt{2}\epsilon_r$. Dále jsou definovány následující speciální směry úhlů ψ_σ a ψ_ϵ : směr „i“, který značí izotropní zatížení ($\sigma_a = \sigma_r$ a $\epsilon_a = \epsilon_r$), zatímco „c“ značí podmínky kritického stavu a „d“ nedosažitelný teoretický limit asymptotického chování, znázorněno na obr. 1 (Gudehus a Mašín, 2009). Asymptotické chování bylo původně nazváno jako swept-out-memory (Gudehus et al., 1977) a dnes jej nazýváme asymptotickým chováním zeminy (Peňa et al., 2005). Dále byly asymptotické stavy nazývány jako limitní stavy (Gudehus a Mašín, 2009).



Obrázek 1: Definice úhlů ψ_ϵ a ψ_σ , „i“ – izotropní směr, „c“ – kritický stav, „d“ – limitní asymptotický stav (Mašín, 2012a).

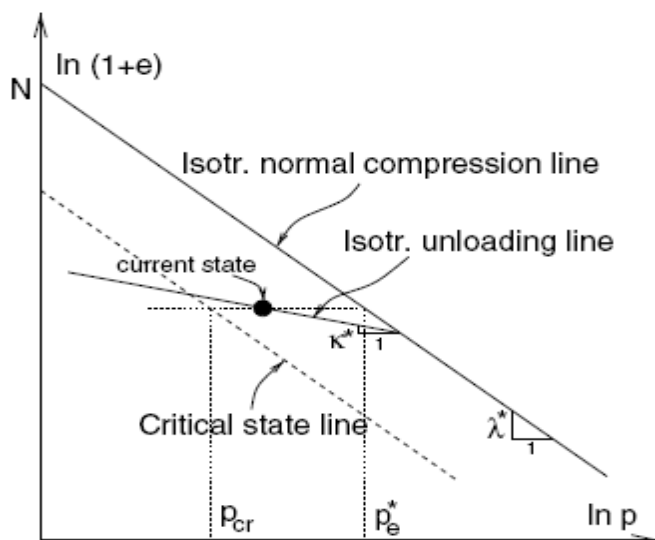
2.2 Kompresní asymptotické stavy a stavy s konstantním objemem

Kompresní asymptotické stavy a stavy s konstantním objemem jsou na obr. 2 znázorněny šedě a ohraničeny limitními stavy, což jsou linie označené $-c$ a $+c$, které značí kritický stav. Mezi $-c$ a $+c$ leží kompresní asymptotické stavy s hodnotami $-90 < \psi_\epsilon < 90^\circ$. Deformace s konstantní hodnotou ψ_ϵ tedy vede ve výsledku k asymptotickému stavu charakterizovanému konstantní hodnotou ψ_σ . Je třeba podotknout, že každý ψ_ϵ souvisí s jednoznačnou asymptotickou hodnotou ψ_σ , jak je demonstrováno na obr. 2. Důležitou vlastností kompresních asymptotických stavů je, že jich může být dosaženo kompresí s konstantním ψ_ϵ z nulového stavu napjatosti (Mašín, 2012a).



Obrázek 2: Znáznornění kompresních asymptotických stavů. Šedě je vyznačena plocha jim odpovídající, zeleně kritický stav, modře izotropní stav a červeně libovolný úhel ψ_ϵ a jemu odpovídající úhel ψ_σ (Mašín, 2012a).

Každý asymptotický stav je také vymezen v prostoru středního napětí p a čísla pórovitosti e (Mašín, 2012a). Střední napětí p je definováno jako $p=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3$, kde se v našem případě $\sigma_2=\sigma_3$. Číslo pórovitosti je popsáno jako objem pórů dělený objemem pevné fáze ve vzorku (Atkinson, 1994). V zobrazení $\ln p$ proti $\ln (1+e)$ jsou asymptotické stavy obecně nazývané čáry normální konsolidace, jak uvádí například Atkinson (1994). Všechny čáry normální konsolidace, tedy kompresní asymptotické stavy, leží mezi izotropní čarou normální konsolidace a čarou kritických stavů, viz obr. 3. Pro čáru normální konsolidace se obecně používá zkratky NCL (*normal compression line*).



Obrázek 3: Kompresní asymptotické stavy zemín (zde obecně čáry normální konsolidace) leží mezi izotropní čárou normální konsolidace a čárou kritických stavů. Dále je zde definováno Hvorsevovo ekvivalentní napětí p_e (Mašín a Herle, 2005).

Poloha dané čáry normální konsolidace je dána stupněm překonsolidace (OCR), viz rovnice (1):

$$OCR = \frac{p_e}{p}, \quad (1)$$

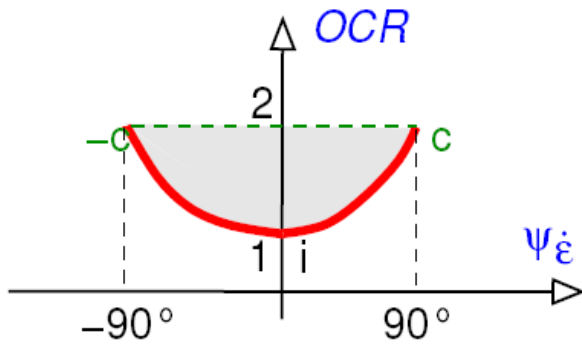
kde p_e je Hvorsevovo ekvivalentní napětí, definováno jako střední napětí na izotropní čáře normální konsolidace za daného čísla pórovitosti, viz obr. 3 (Mašín a Herle, 2005).

Druhá možnost stanovení polohy čáry normální konsolidace je pomocí relativního čísla pórovitosti r_e , které je definováno v rovnici (2) jako:

$$r_e = \frac{e - e_d}{e_c - e_d}, \quad (2)$$

s e_d a e_c jako minimálním číslem pórovitosti, respektive číslem pórovitosti v kritickém stavu za daného středního napětí (Gudehus a Mašín, 2009).

Z výše uvedeného vyplývá závislost OCR na hodnotě ψ_σ pro kompresní asymptotické stavy, viz obr. 4.



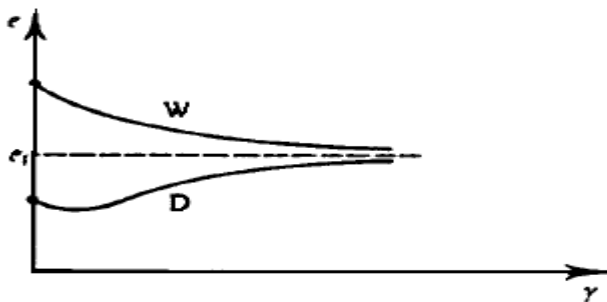
Obrázek 4: Závislost stupně překonsolidace (OCR) na směru přetvoření ψ_ϵ .

Rovnice (3) pro NCL je:

$$\ln(1 + e) = N - \lambda \ln\left(\frac{pe}{pr}\right), \quad (3)$$

kde pr je referenční napětí s hodnotou 1kPa a pe je Hvorsevovo ekvivalentní, viz obr. 3 (Mašín a Herle, 2005).

Při smýkání zemin, které mají hodnotu čísla pórovitosti v kritickém stavu vyšší než číslo pórovitosti ($e < e_c$), dochází k dilatanci, viz obr. 5, a v prostoru napětí je ψ_σ vyšší než v kritickém stavu. Takovéto chování zeminy odpovídá vrcholovému stavu. Tento stav není asymptotickým stavem, nicméně se ukazuje, že mu pravděpodobně odpovídá (Mašín, 2012a).



Obrázek 5: V dolní části dilatující zemina procházející vrcholovým stavem, v horní zemina, kde dochází jen ke kontraktanci (Atkinson, 1994).

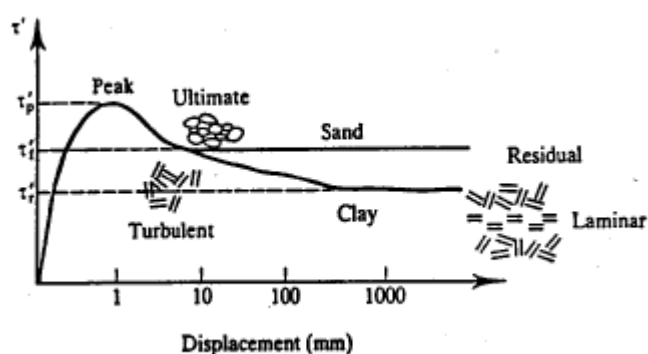
2.2.1 Izotropní zatěžování

Pro izotropní zatěžování platí, že $\sigma_a = \sigma_r$ a $\epsilon_a = \epsilon_r$ (Atkinson, 1994). Izotropní asymptotický stav je definován hodnotou $\psi_\epsilon = 0^\circ$, nicméně hodnoty úhlu ψ_σ se mohou lišit od nuly díky anizotropii v zemině (Mašín, 2012). Ke kompresi dochází primárně díky změně polohy zrn a tuhost se tak zvyšuje od kypré k ulehlé zemině. Základní chování zeminy při izotropní kompresi je popsáno na obr. 3, kde

izotropní kompresi odpovídá „isotr. normal compression line“ – tedy izotropní čára normální konsolidace. Asymptotickým stavem pro izotropní zatěžování je tudíž izotropní čára normální konsolidace, která nezávisí na počáteční pórovitosti a na historii zatěžování. Stupeň překonsolidace (OCR) = 1.

2.2.2 Konstantní objem

Asymptotický stav se zachováním konstantního objemu (isochorická deformace) se nazývá kritický stav (Gudehus a Mašín, 2009). Je charakterizován hodnotami $\psi_e = \pm 90^\circ$ a na obr. 2 je označen písmenem „c“. Během smýkání při konstantním σ_r zeminy finálně dosahují kritického stavu, kde při dalším smýkání již nedochází k deformaci. Tento stav je nezávislý na počáteční pórovitosti a na historii zatěžování. Zemina se na smykové ploše při dostatečně dlouhém posunutí dostává do stavu turbulentního tečení, kterého může dosáhnout pouze za určité, tedy kritické, pórovitosti. Po dosažení kritického stavu může dojít k deformaci pouze v případě dosažení tzv. reziduálního stavu. K tomu dochází u zemin složených z plochých částic, zejména jílových, po velmi dlouhém posunutí. Částice přestanou být na smykové ploše uloženy turbulentně, ale uspořádávají se do laminární polohy, kdy mají mnohem menší odpor, viz obr. 6 (Atkinson, 1994).



Obrázek 6: Znárodnění vrcholového, kritického a reziduálního stavu (Atkinson, 1994).

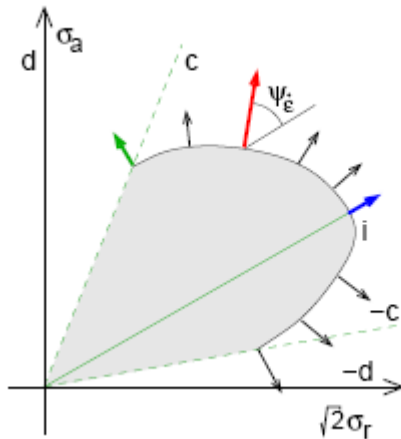
Kritické stavy jsou jednoznačně vymezeny v prostoru střední napětí vs. pórovitost (obr. 4) a střední napětí vs. deviatorové napětí, kde v obou případech tvoří čáru kritických stavů. Ve speciálním případě kritického stavu je odpovídající hodnota úhlu ψ_σ přímo vztažena ke kritickému úhlu vnitřního tření podle rovnice (4):

$$\tan \psi_\sigma (\pm c) = \pm \left(\frac{2\sqrt{2} \sin \varphi c}{3\sqrt{3} \sin \varphi c} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3} M, \quad (4)$$

kde $M = q/p$ v kritickém stavu ($p = (\sigma_a + 2 \sigma_r)/3$, $q = \sigma_a - \sigma_r$) dle Mašína (2012a).

2.2.3 Asymptotic state boundary surface (ASBS)

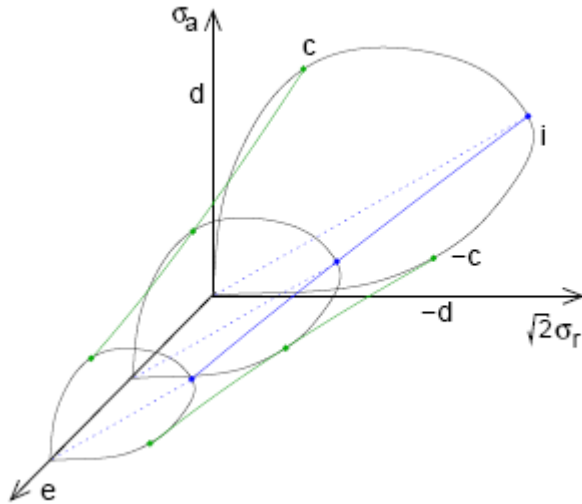
Asymptotic state boundary surface je definována jako obálka všech asymptotických stavů zeminy (Mašín, 2012a). Pro znázornění je zobrazena na obr. 7 v prostoru σ_a proti $\sqrt{2}\sigma_r$, a na obr. 8 v prostoru napětí proti pórovitosti v případě axisymetrického stavu napětí. Tato plocha je jinde též nazývána jako swept-out-memory surface (Mašín a Herle, 2005). ASBS je obecně čtyřrozměrná, v našem případě axisymetrického napětí ji lze zobrazit trojrozměrně.



Obrázek 7: Průřez ASBS za konstantního čísla pórovitosti (Mašín, 2012a).

State boundary surface (SBS) je definován na rozdíl od ASBS jako hranice všech přípustných stavů zeminy v prostoru napětí vs. číslo pórovitosti. Je to obecně prostor ve čtyřrozměrném prostoru třech hlavních komponent tenzoru napětí \mathbf{T} a čísla pórovitosti e (Mašín a Herle, 2005).

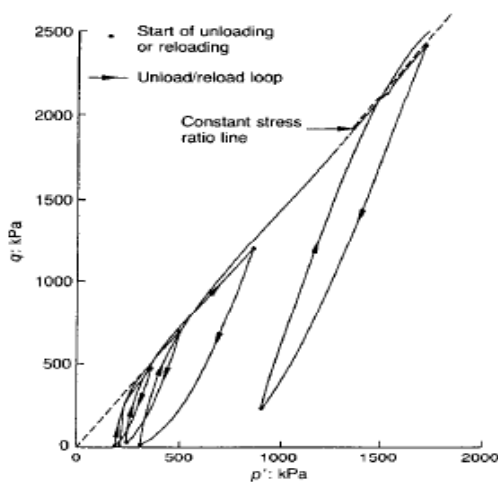
Jak bylo potvrzeno například Mašínem a Herlem (2005), že asymptotic state boundary surface je blízkou aproximací state boundary surface a obecně je považováno, že se tyto dvě plochy shodují (Mašín, 2012a).



Obrázek 8: Asymptotic state boundary surface v prostoru napětí vs. pórovitost v případě axisymetrického stavu napětí (Mašín, 2012a).

2.2.4 Experimentální ověření asymptotických stavů

Kritický stav a chování zemin při normální kompresi jsou velmi dobře experimentálně zdokumentovány. Obecněji kompresní asymptotické stavy byly studovány a potvrzeny Chu a Lo (1994), kteří provedli axisymetrické triaxiální testy na pískách s řízeným přetvořením. Zaznamenali specifický vztah mezi směrem přetvoření a asymptotickým směrem napětí. Dále také bylo potvrzeno, že asymptotické stavy nejsou ovlivněny cyklickým zatěžováním, viz obr. 9. Asymptotické chování bylo také testováno na jílech, viz Topolnicki (1990), který potvrdil nezávislost asymptotického směru napětí na předchozí historii zatěžování.



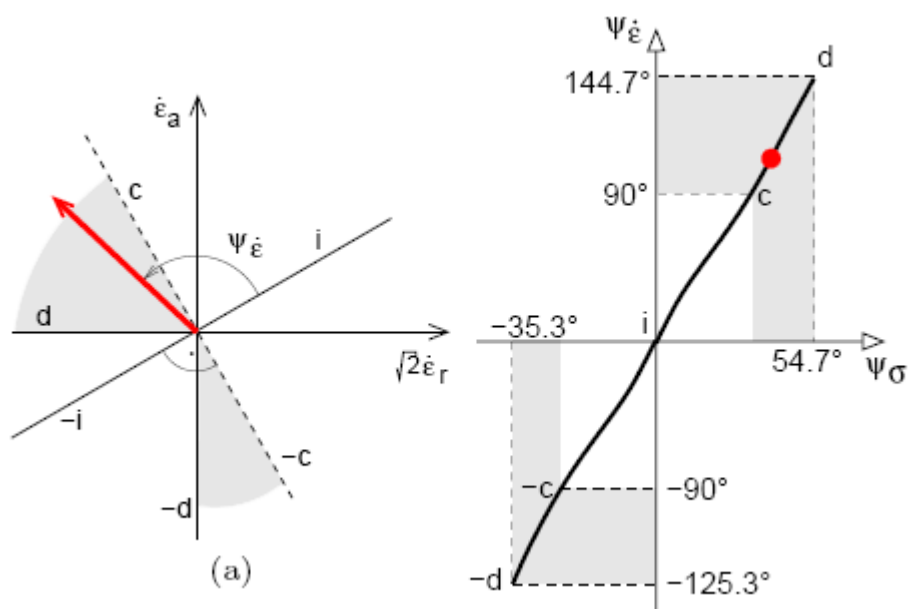
Obrázek 9: Cyklické zatěžování písku a jeho vliv na asymptotický směr napětí (Chu a Lo, 1994).

Studium asymptotických stavů pomocí laboratorních experimentů je značně komplikované, neboť experimenty probíhají standardně s kontrolovaným napětím a ne přetvořením, jak je vyžadováno při studiu asymptotických stavů. S velikostí deformace se složitost provedení experimentu při zachování homogenní deformace zvyšuje.

2.3 Asymptotické stavy zemin v extenzním režimu

Asymptotické chování v extenzi je velmi málo známé a prozkoumané (Mašín, 2012a). Poprvé bylo zmíněno Gudehusem a Mašínem (2009). Extenzní asymptotické stavy dosud nebyly experimentálně ověřeny a jejich existence je odvozena pouze z teoretických modelů (Mašín, 2012a).

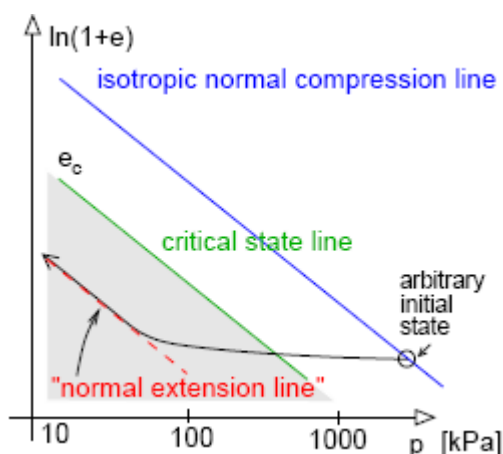
Asymptotické stavy v extenzi jsou dosaženy po přetvoření při konstantním ψ_ε po extenzních drahách, tedy při zvětšování objemu (Mašín, 2012a).



Obrázek 10: Zobrazení extenzních asymptotických stavů, jim odpovídající plochy označeny šedě (Mašín, 2012a).

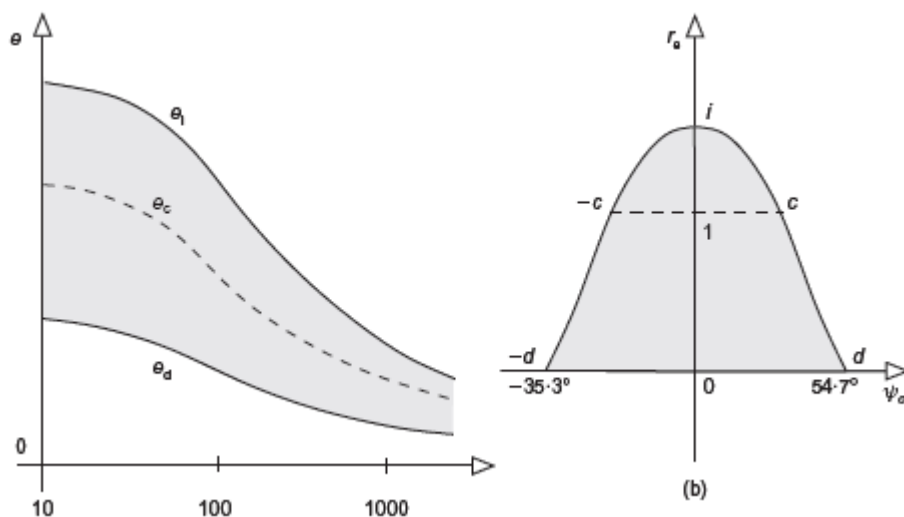
Směry přetvoření vedoucí k extenzním asymptotickým stavům jsou zobrazeny na obr. 10, kde jsou plochy odpovídající extenzi zobrazeny šedě. Limitní hodnoty ψ_σ a ψ_ε jsou označeny d pro $\sigma_a = 0$ a $-d$ pro $\sigma_r = 0$. Maximální hodnoty $|\psi_\sigma|$ v limitních stavech $\pm d$ odpovídají mobilizovaným úhlům vnitřního tření rovným 90° . Vztah mezi ψ_σ a ψ_ε pro dráhy asymptotické extenze je patrný z obr. 10 (Mašín, 2012a).

Každý extenzní asymptotický stav je také spojen se svou stopou v prostoru středního napětí vs. číslo pórovitosti. Tyto linie se nazývají čáry normální extenze, jak uvádí Mašín (2012a), viz obr. 11.



Obrázek 11: Znáznornění čáry normální extenze v prostoru střední napětí vs. číslo pórovitosti. Oblasti asymptotických stavů v extenzi znázorněna šedě (Mašín, 2012a).

Minimální číslo pórovitosti e_d reprezentuje čáru normální extenze pro stavy $\pm d$. Protože přetvoření při konstantním ψ_ε v extenzních asymptotických stavech zahrnuje zvětšení objemu a snížení středního napětí, tyto stavy nemohou být dosaženy ze stavu s nulovou napjatostí (Mašín, 2012a). Z toho vyplývá, že $e < e_c$ a tedy $re < 1$. Dále je definováno axial splitting s $\sigma_r = 0$ a $\varepsilon_a = 0$ a axial discing $\sigma_a = 0$ a $\varepsilon_r = 0$, značeno d , respektive $-d$. Toto jsou nedosažitelné limitní stavy. Tyto stavy jsou spojeny s limitním číslem pórovitosti e_d a $re=0$ (Gudehus a Mašín, 2009), viz. Obr. 12.

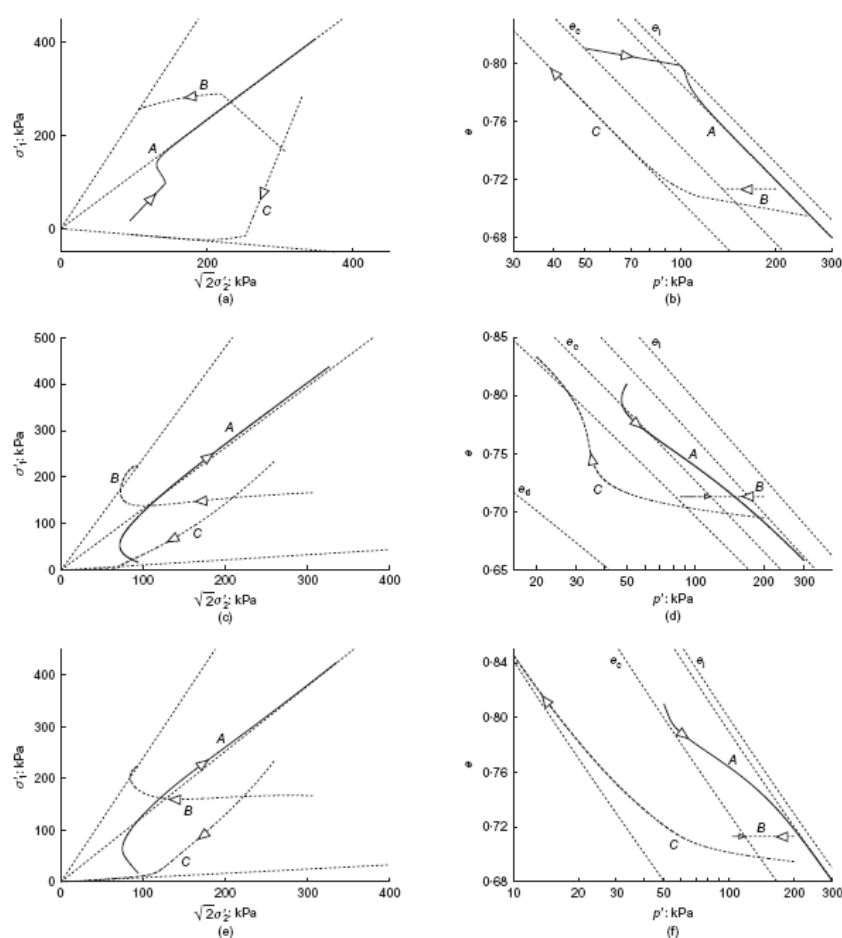


Obrázek 12: Grafické znázornění extenzních asymptotických stavů, jež leží mezi e_c a e_d na levém obrázku a $re = 0$ až 1 na pravém (Gudehus a Mašín, 2009).

2.4 Modelování asymptotických stavů zemin

Kompresní asymptotické stavy jsou předpovídány konstitučními modely na bázi mechaniky kritických stavů (Mašín, 2012a), jako je Modifikovaný Cam clay model (Roscoe a Burland, 1968), hypoplastický model (Mašín, 2005) nebo hypoplastický Cam clay model (Mašín, 2012b).

Na obr. 13 jsou jako příklad uvedeny grafické výsledky tří modelů a jejich porovnání, a to Modifikovaný Cam clay model (Roscoe a Burland, 1968), hypoplastický model pro písčité materiály (von Wolffensdorff, 1996) a hypoplastický model pro jíly (Mašín, 2005). Tyto modely předpovídají jak kompresní, tak extenzní chování zemin.



Obrázek 13: Asymptotické vlastnosti: Modifikovaného Cam clay modelu (a, b), von Wolffensdorffova modelu (1997) (c, d), Mašínova modelu (2005) (e, f). Asymptotické stavy odpovídající směrům zatížení A, B a C označeny tečkovanými čarami. Limity čísla pórovitosti e_i , e_c a e_d označeny tečkovanými čarami s označením (Gudehus a Mašín, 2009).

K prokázání asymptotických vlastností předchozích tří modelů jsou na obr. 13 zobrazeny dráhy vedoucí k asymptotickým stavům. Na obr. 13(a), (c) a (e) je závislost čísla pórovitosti na středním

napětí a na obr. 13(b), (d) a (f) jsou směry napětí. Směr A je kompresní a jeho hodnota $\psi_\epsilon \approx 54.7^\circ$, směr B je isochorický (směr „c“ na obr. 10) a odpovídá tedy $\psi_\epsilon = 90^\circ$. Směr C je extenzní s $\psi_\epsilon = -110^\circ$. Počáteční hodnoty A, B a C neodpovídají asymptotickým stavům, které jsou označeny tečkovanými liniemi. Jak je z obr. 13 patrné, asymptotické stavy jsou atraktory – stavy, kterých zemina dosáhne za konstantním směru přetvoření, nezávisle na počátečním stavu. Obr. 13 potvrzuje, že matematické modely předpovídají existenci extenzních asymptotických stavů, přestože nejsou experimentálně potvrzeny. Proč tomu tak je může být znázorněno na příkladu na obr. 10, který ukazuje celkový tvar ASBS se znázorněním části odpovídající extenznímu asymptotickému stavu. Modely byly vyvinuty, aby dokázaly předpovídat vrcholové stavy. Těch je dosaženo při zatěžování po neměnných směrech zatížení (jako příklad lze uvést odvozený triaxiální test s $\sigma_r = 0$). Je experimentálně dokázáno, že takovéto zatížení (s počátečním $r_e < 1$) vede k většímu mobilizovanému úhlu vnitřního tření než k odpovídajícímu $\pm c$. Směr přetvoření ve vrcholovém stavu je tedy dilatantní. Aby bylo možné graficky reprezentovat tento stav, state boundary surface pro $r_e < 1$ dosahuje do oblasti $|\psi_\sigma| > |\psi_{\sigma(+c)}|$, jak je patrné z obr. 10 (Mašín, 2012a). Jak dokázali Mašín a Herle (2005), ASBS je brána jako odpovídající SBS, z čehož vyplývá, že modely založené na mechanice kritických stavů implicitně předpovídají extenzní asymptotické stavy, přestože nebyly vytvořeny s tímto úmyslem.

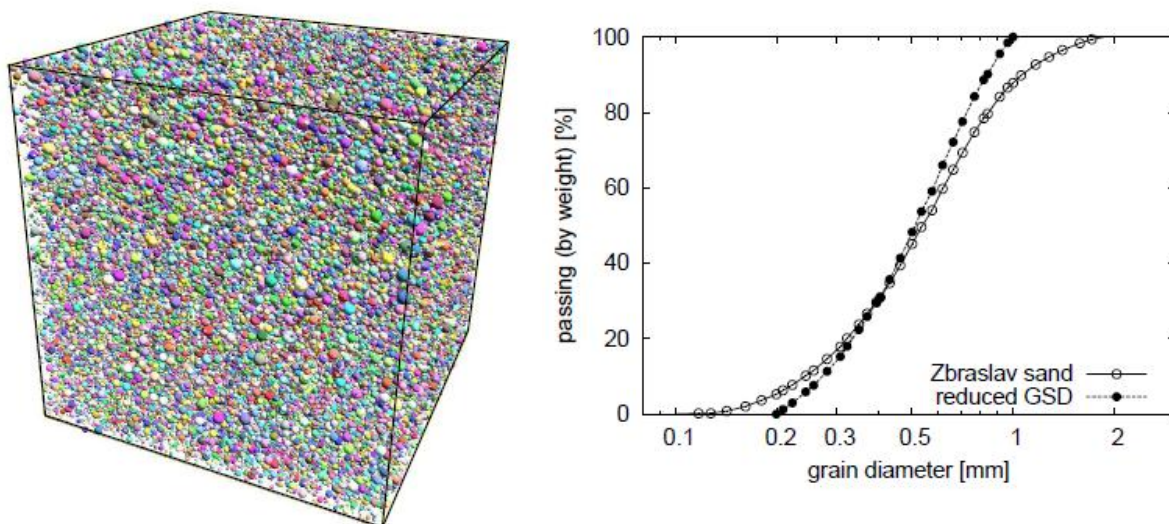
Bylo také potvrzeno, že pro daný hypoplastický model je možné odvodit explicitní formulaci pro asymptotic state boundary surface (Mašín a Herle, 2005), kde bylo též potvrzeno, že ASBS je blízkou aproximací SBS, ale nejsou naprosto totožné. Dále byl studován vliv konstitučních parametrů na tvar ASBS, pro parametry odpovídající jílovitým zeminám daný hypoplastický model předpovídá obdobný tvar jako Modifikovaný Cam clay model. Ukázalo se, že kompletní tvar ASBS závisí na materiálových parametrech a že byly předdefinovány jen izotropní a kritické asymptotické stavy (Mašín a Herle, 2005). Z toho vyplývá, že kompletní tvar ASBS nemůže být předepsaný a priori, jako je tomu u elasto-plastických modelů, což se ukázalo jako významná limitace hypoplastických modelů. Mašín (2012b) vytvořil nový typ hypoplastického modelu, který předpovídá jakýkoli předdefinovaný tvar ASBS a asymptotický směr přetvoření.

3. Metoda oddělených prvků – charakteristika simulací

V metodě oddělených prvků (DEM – discrete element method) není zemina uvažována jako kontinuum, ale je složena z jednotlivých prvků. Simulace probíhá ve dvou fázích. Nejdříve jsou počítány interakční síly mezi jednotlivými elementy, kterým je dovoleno lehce se překrývat, což nahrazuje deformaci povrchových vrstev částic. Dále je aplikován Druhý Newtonův zákon, který určuje pro každý prvek výsledné zrychlení, které je pro nalezení nové pozice integrováno podle času. Toto se opakuje, dokud není simulace dokončena (Cundall a Strack, 1979).

3.1 Vlastnosti modelu

Při modelování vzorku bylo využito 3D DEM softwaru Yade. Veškeré poznatky, postupy a vlastnosti modelu v kapitole 3.1 a 3.2, pokud není uvedeno jinak, jsou čerpány z práce Mašína (2012a) a bylo jich využito při vlastních simulacích za účely této práce. Model je složen z elastických kulových částic. Aby byl eliminován vliv hranic modelu, jsou použity periodické hraniční podmínky, tedy že vlastní modelovaná jednotka je obklopena totožnými jednotkami v jejím okolí. Aby modelovaný vzorek reprezentoval skutečnou zeminu, byly vytvořeny částice různých velikostí podle vzoru zrnitostního rozložení zbraslavského písku, viz obr. 14. Z modelu jsou vyjmuty částice nad 1 mm a pod 0.2 mm, tento vzorek je na obr. 14 popsán jako „reduced GSD“.



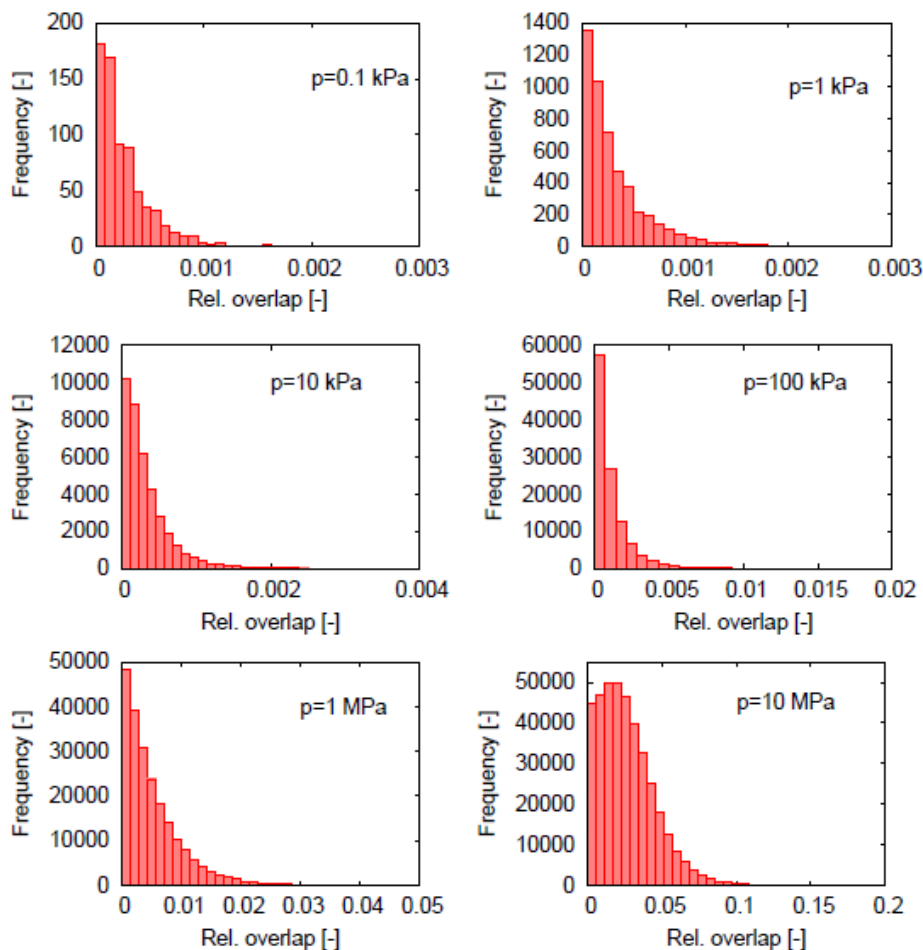
Obrázek 14: Vlevo periodická buňka použitá v simulacích sestávající z 150 000 částic. Vpravo znázornění zrnitostního rozložení zbraslavského písku spolu s redukovaným vzorkem určeným pro simulace (Mašína, 2012a).

Vzorek sestává z 150 000 kulových částic modelovaných tak, aby odpovídal zrnitostní křivce zbraslavského písku. Částice jsou náhodně rozloženy a v počátku nejsou v kontaktu. Periodická buňka

je krychlová, jak je znázorněno na obr. 14, a její velikost je 31 mm. Tento vzorek byl vygenerován pouze jednou a použit ve všech následujících simulacích – všechny výsledky tedy reprezentují odezvu jednoho vzorku zeminy. Mašín (2012a) potvrdil, že když byl vygenerován jiný vzorek, bylo dosaženo identických výsledků.

3.1.1. Ovlivnění přesnosti modelu

Zvýšení počtu a velikosti překryvů mezi částicemi snižuje přesnost simulací. Při napětí okolo 1 MPa dosahuje maximální relativní překrytí 2% a hodnota 1 MPa je brána jako přibližný limit přesnosti daných simulací. Například při napětí 10 MPa dosahuje relativní překrytí hodnoty 10%, z čehož vyplývá, že výsledky za takovýchto tlaků jsou již neobjektivní. Relativní překrytí pro hodnoty napětí 0,1 kPa, 1kPa, 10kPa, 100kPa, 1MPa a 10MPa jsou znázorněny na obr. 15. Je z něj také patrné, že při zvyšování hodnoty středního napětí výrazně roste počet kontaktů mezi částicemi.

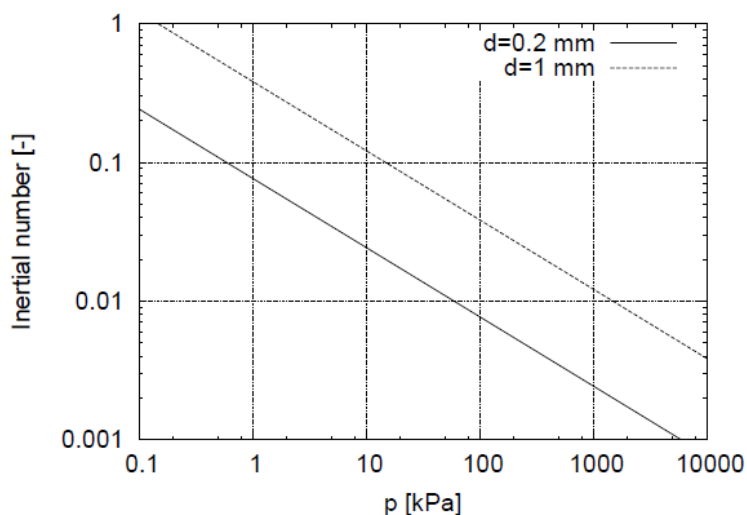


Obrázek 15: Znázornění relativních překrytí společně s jejich množstvím pro hodnoty 0,1 kPa, 1kPa, 10 kPa, 100 kPa, 1 MPa a 10 MPa (Mašín, 2012a).

Výsledky simulací metodou oddělených prvků jsou v dynamickém režimu ovlivněny rychlostí deformace. Vliv globálního koeficientu tření μ^* na rychlost deformace může být popsána bezrozměrnou proměnnou I nazvanou *inertial number*, definovanou pro obecné zatěžování v rovnici (5) jako:

$$I = ||D||d \sqrt{\frac{2\rho_s}{p}} \quad (5)$$

kde p je střední napětí, D je tenzor rychlosti deformace, d je poloměr částic a ρ_s je hustota pevných částic ve vzorku. Pro nízké hodnoty *inertial number* (přibližně pro $I < 10^{-2}$), pozorovaný koeficient tření nezávisí na rychlosti deformace. Pro vyšší hodnoty I globální koeficient tření roste společně s rostoucím I . Na obr. 16 jsou znázorněny hodnoty I vypočtené pro nejmenší ($d = 0.2$ mm) a největší ($d = 1$ mm) částice ve vzorku, který byl simulován. Simulace probíhají za konstantního tenzoru rychlosti deformace a za konstantní hustoty pevných částic ρ_s . *Inertial number* tedy závisí pouze na úrovni napětí a roste s klesajícím středním napětím. Při nízkých hodnotách napětí je I výrazně vyšší než hodnota $I = 10^{-2}$, u které lze předpokládat relevantnost výsledků. Závislost I na středním napětí je možným důvodem, proč nebyly pozorovány konstantní hodnoty úhlu ψ_o a byla pozorována jasná závislost ψ_o na úrovni středního napětí. Tento problém je velmi obsáhlý a bude předmětem dalšího výzkumu v diplomové práci.



Obrázek 16: Závislost *inertial number* na středním napětí pro nejmenší a největší částice, které byly simulovány (Mašín, 2012a).

3.2 Postup simulací

Vzorky byly nejdříve zatěžovány podle $\psi_\epsilon = 0^\circ$ až do předepsané hodnoty středního napětí (výčet hodnot pro účely této práce vypsán v kapitole 3), potom byl směr zatěžování změněn na požadovanou hodnotu ψ_ϵ a vzorky byly smýkány, dokud nebylo dosaženo asymptotického stavu. Tento postup byl použit u všech simulací normálně konsolidovaných vzorků, pouze s různým ψ_ϵ .

U překonsolidovaných vzorků bylo nejdříve přitěžováno podle $\psi_\epsilon = 0^\circ$ až do dosažení $p = 1000$ kPa, po kterém došlo k odlehčení podle $\psi_\epsilon = 180^\circ$. Odlehčení vedlo až do různých předepsaných tlaků, z nichž došlo ke smýkání podle $\psi_\epsilon = 90^\circ$ až do asymptotického stavu.

4. Výsledky vlastních simulací metodou oddělených prvků

V této kapitole jsou shrnuty výsledky simulací vytvořených za účely této práce. Veškeré hodnoty ψ_ϵ , které byly simulovány, jsou:

$\psi_\epsilon = -55^\circ, -75^\circ, -90^\circ, -95^\circ, -100^\circ$ a -110° .

U každého ψ_ϵ byla simulace provedena pro více stavů středního napětí, a to pro normálně konsolidovaný stav:

$p = 1$ kPa, 3 kPa, 7 kPa, 10 kPa, 30 kPa, 70 kPa, 100 kPa, 300 kPa, 700 kPa a 1000 kPa.

Dále byly provedeny testy překonsolidovaných vzorků pro hodnotu $\psi_\epsilon = -90^\circ$ při odlehčení z 1000 kPa, a to pro stavy napětí:

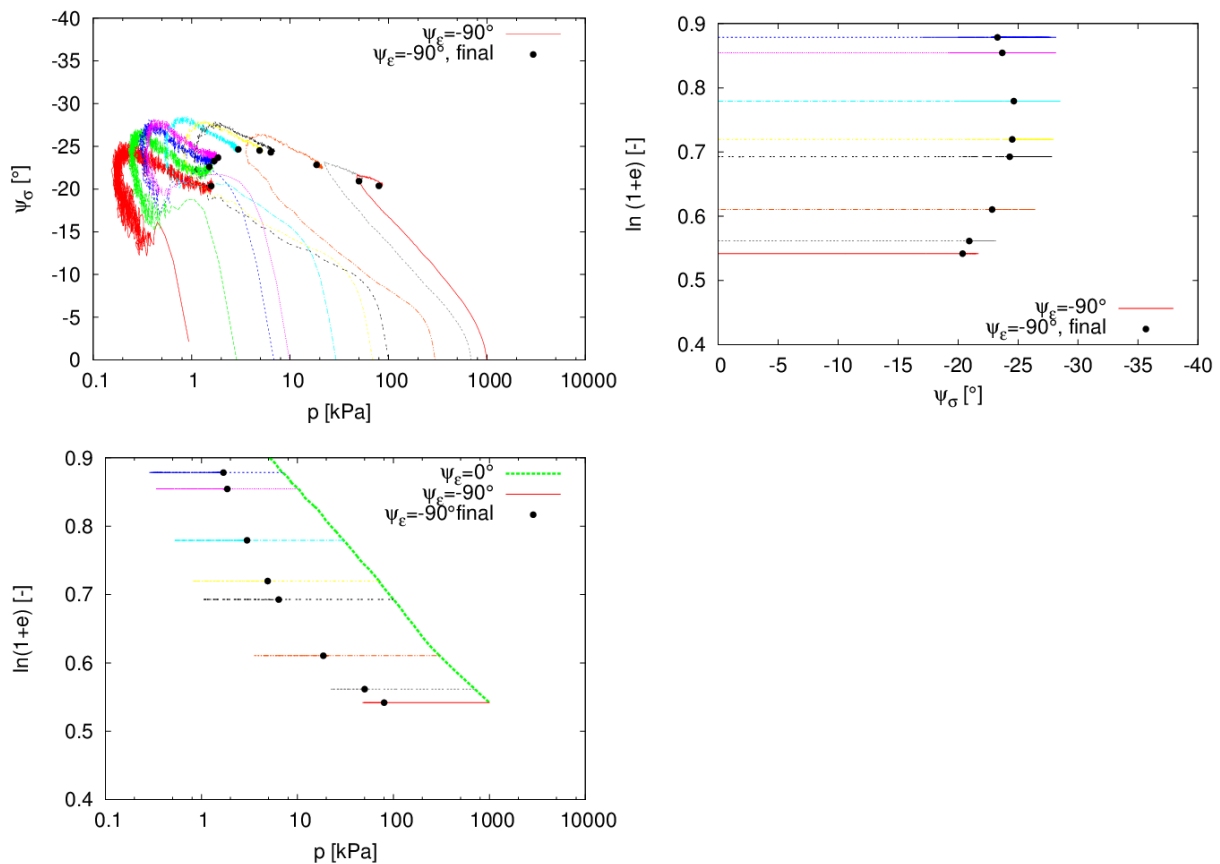
$p = 1$ kPa, 7 kPa, 30 kPa, 70 kPa a 300 kPa.

Veškeré simulace probíhaly podle postupů popsanych v kapitole 3.2, jen pro jiné hodnoty ψ_ϵ a p .

4.1 Kompresní asymptotické stavy a stavy s konstantním objemem

4.1.1 Konstantní objem – kritický stav

Stav s konstantním objemem (isochorický) je definovaný úhlem $\psi_\epsilon = \pm 90^\circ$, viz obr. 1, kde je vyznačen jako „c“ a „-c“. Obr. 17 ukazuje výsledky simulací s konstantním objemem normálně konsolidovaných vzorků, směr zatěžování byl $\psi_\epsilon = -90^\circ$, tedy „-c“.



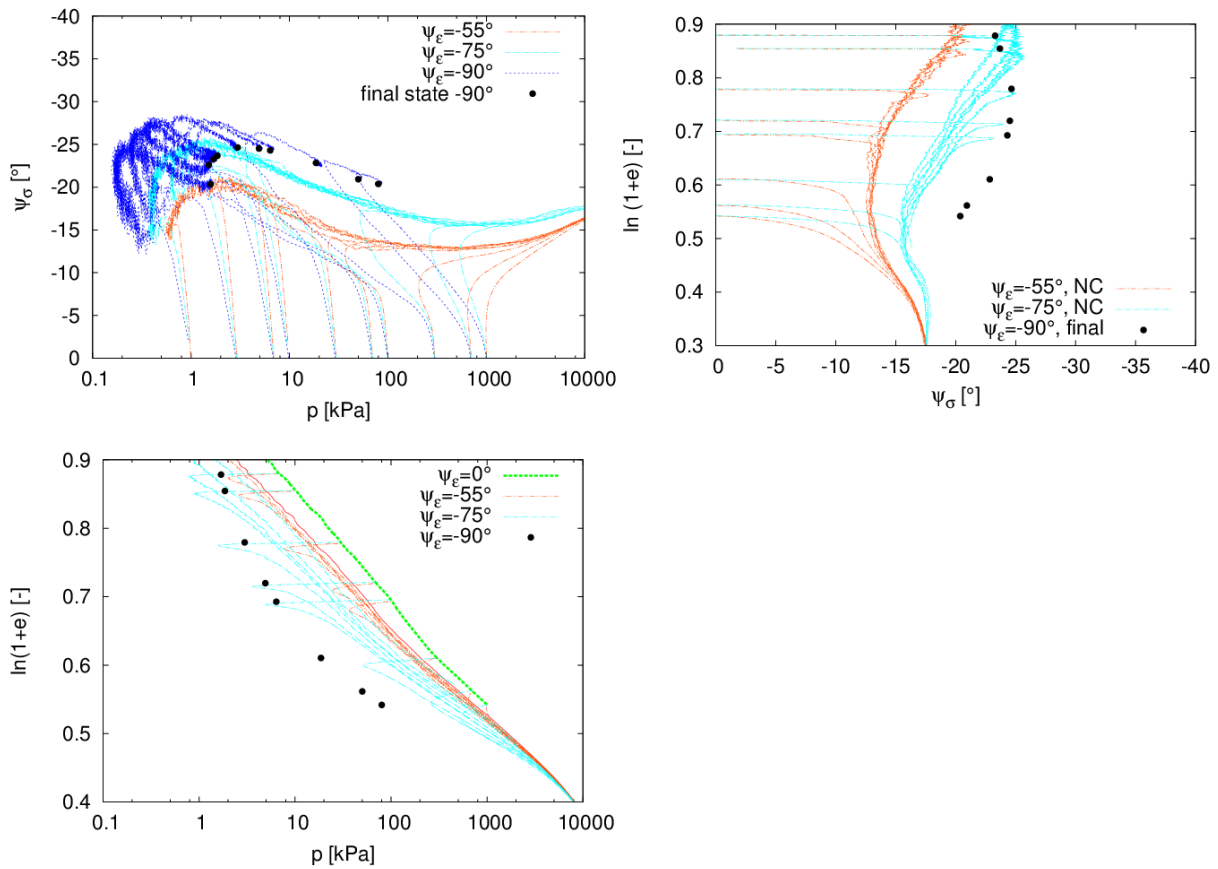
Obrázek 17: Výsledky testů na normálně konsolidovaných vzorcích pro $\psi_\varepsilon = -90^\circ$. Znáznorněny v prostoru ψ_σ proti p , $\ln(1+e)$ proti ψ_σ a $\ln(1+e)$ proti p .

Na obr. 17 jsou výsledky znázorněny ve třech prostorech, a to: p proti ψ_σ , $\ln(1+e)$ proti $\ln p$ a ψ_σ proti $\ln(1+e)$. V prostoru p proti ψ_σ je jasně patrné, že finální hodnoty ψ_σ nejsou konstantní, jak by se dalo usuzovat z teorie. Předpokládané důvody jsou diskutovány v kapitole 3.1.1. Tento poznatek se shoduje s výsledky pro $\psi_\varepsilon > 0$ z práce Mašína (2012a). Z výsledků $\psi_\varepsilon > 0$ a $\psi_\varepsilon < 0$ by tedy plynulo, že úhel vnitřního tření v kritickém stavu, který je na ψ_σ přímo závislý, by nebyl konstantou. V prostoru $\ln(1+e)$ proti p tvoří finální stavy čáru kritických stavů.

4.1.2 Kompresní asymptotické stavy

Kompresní asymptotické stavy studované v experimentech vedou po drahách ležících mezi hodnotami $\psi_\varepsilon = 0^\circ$ až -90° . Výsledky simulací pro dané směry ψ_ε konvergují k jedinečnému asymptotickému stavu, což je zřejmé ze všech částí obr. 18. Stejně jako u kritického stavu, ψ_σ není konstantou závislou pouze na ψ_ε , ale je ovlivněn též středním napětím. Z obr. 18 je zřejmé, že došlo k potvrzení teorie, že vyšší hodnota ψ_ε vede k navýšení ψ_σ , to vše pro dané střední napětí. Modře označený úhel $\psi_\varepsilon = -75^\circ$ má pro dané střední napětí ve všech případech vyšší hodnotu ψ_σ než

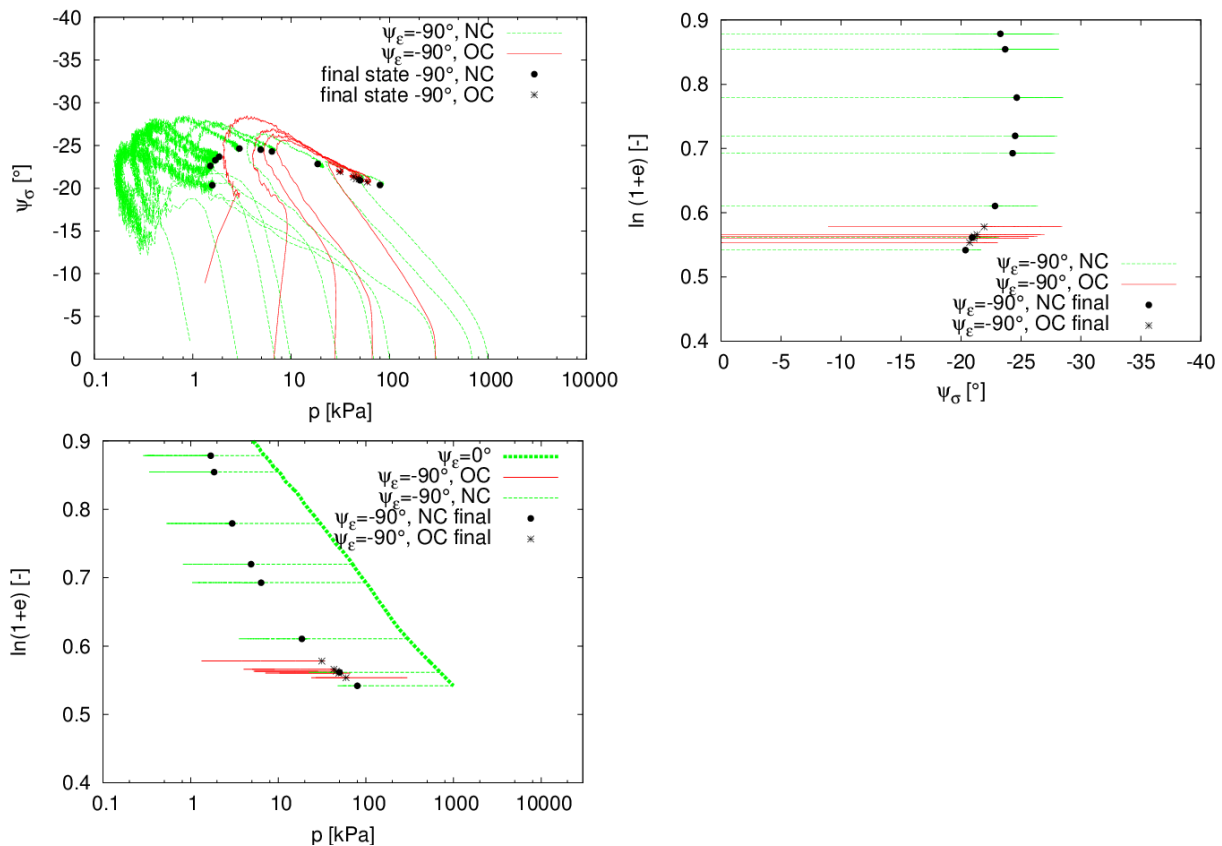
oranžově označený $\psi_\varepsilon = -55^\circ$. Tyto výsledky se kvalitativně shodují s výsledky pro $\psi_\varepsilon > 0$ z práce Mašína (2012a).



Obrázek 18: Kompresní asymptotické stavy s $0^\circ > \psi_\varepsilon < -90^\circ$ a stav s konstantním objemem. Výsledky DEM simulací v prostoru ψ_σ proti p , čáry normální konsolidace v $\ln(1+e)$ proti ψ_σ a $\ln(1+e)$ proti p .

4.1.3 Překonsolidace

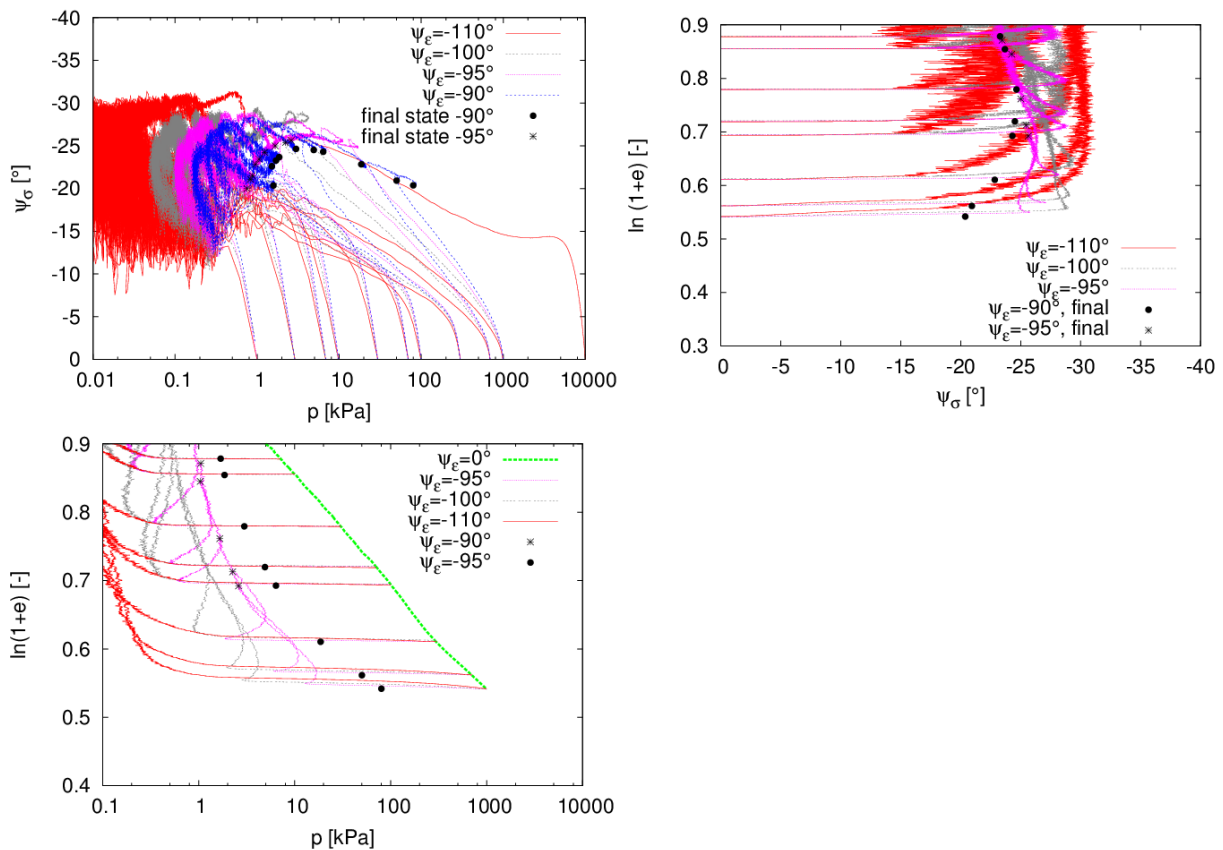
Další výpočty byly vytvořeny za účelem potvrzení nezávislosti isochorického asymptotického stavu na počátečních podmínkách i pro $\psi_\varepsilon < 0$. Postup simulace byl stejný jako v práci Mašína (2012a), jenž je popsán v kapitole 2.2, s tím rozdílem, že ψ_ε bylo rovno -90° a ne 90° . Všechny tyto vzorky tedy měly totožné počáteční číslo pórovitosti, ale různé relativní číslo pórovitosti r_e (tedy různá čísla překonsolidace OCR). Na obr. 19 jsou pro porovnání výsledky jak normálně konsolidovaných vzorků, tak překonsolidovaných. Asymptotické stavy překonsolidovaných se přesně shodují se stavy dosaženými po normální kompresi. Tyto výsledky se podle předpokladů shodují s výsledky Mašína (2012a) pro $\psi_\varepsilon > 0$.



Obrázek 19: Znázornění výsledků $\psi_\epsilon = -90^\circ$ u normálně konsolidovaných vzorků v porovnání s výsledky vzorků překonsolidovaných též pro hodnoty $\psi_\epsilon = -90^\circ$.

4.2 Extenzní asymptotické stavy

Simulování extenzních asymptotických stavů probíhalo stejným způsobem jako u kompresních asymptotických stavů, jen s tím rozdílem, že $\psi_\epsilon < -90^\circ$. Maximální hodnota úhlu ψ_ϵ , u kterého byly prováděny simulace, byla $\psi_\epsilon = -110^\circ$. Podle zjištění Mašina (2012a) byly výsledky u větších úhlů ψ_ϵ nejasné a nepochopitelné díky velmi nízkým hodnotám tlaků při dosažení asymptotického stavu. Simulace tedy nebyly provedeny pro vyšší hodnoty než $\psi_\epsilon = -110^\circ$. Výsledky experimentů jsou znázorněny na obr. 20. V prostoru $\ln(1+e)$ proti p tvoří křivky jasně čáry normální extenze.

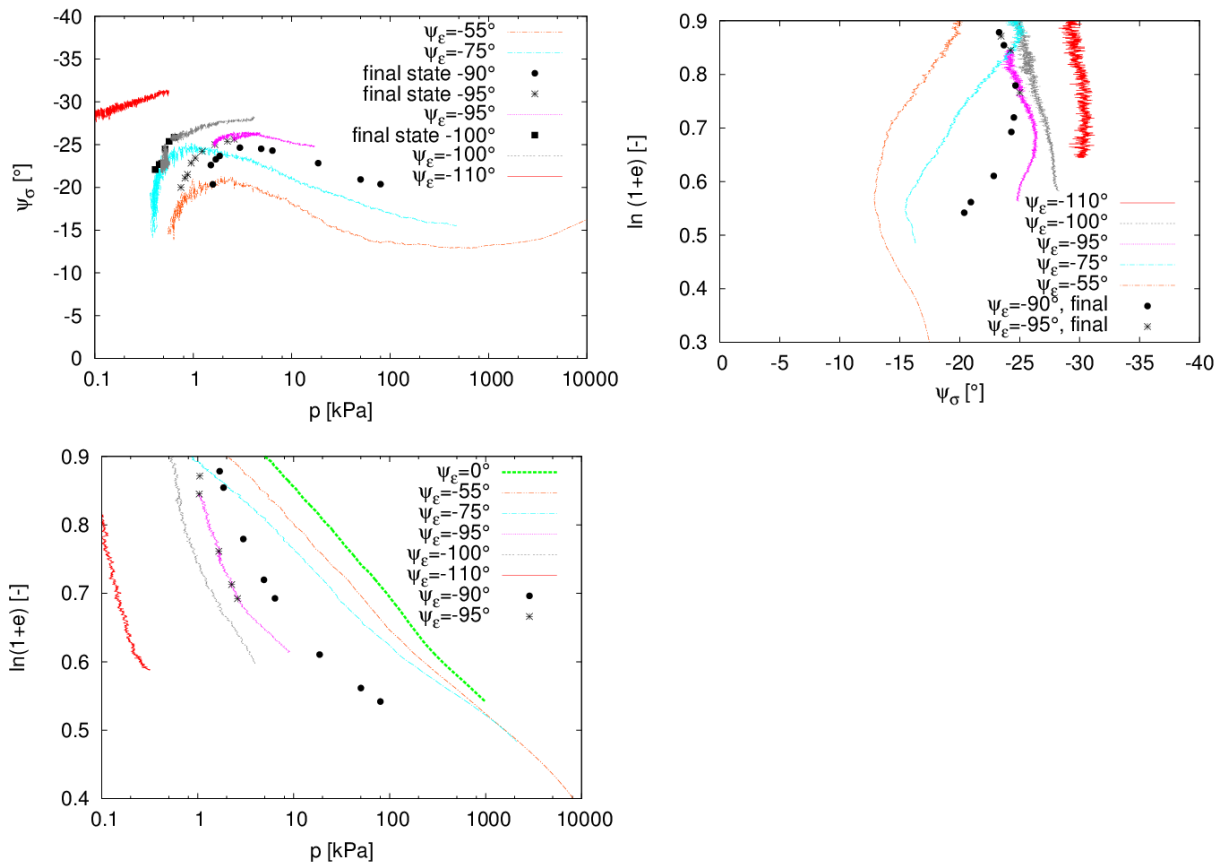


Obrázek 20: Extenzní asymptotické stavy s $\psi_\epsilon = -95^\circ$, -100° a -110° společně s kritickým stavem s $\psi_\epsilon = -90^\circ$. Výsledky simulací DEM v prostoru ψ_σ proti p , čáry normální extenze v $\ln(1+e)$ proti ψ_σ a $\ln(1+e)$ proti p .

4.3 Shrnutí výsledků simulací

Na obr. 21 jsou shrnuty všechny asymptotické stavy získané z daných simulací používajících metodu oddělených prvků pro $\psi_\epsilon < 0$. Při tvoření tohoto obrázku byly vybírány křivky reprezentující asymptotické stavy subjektivně, bylo nutné rozhodnout, kdy bylo asymptotického stavu opravdu dosaženo. U hodnot úhlu $\psi_\epsilon = -90^\circ$ jsou za asymptotické hodnoty považovány finální stavy. Při smýkání u této hodnoty nedochází k žádné změně čísla pórovitosti, viz obr. 17. U $\psi_\epsilon = -95^\circ$ je viditelná křivka reprezentující asymptotický stav u nižších čísel pórovitosti, což je patrné ze všech částí obr. 20, ale u vyšších e je nutné asymptotický stav znázorňovat finálními stavy jako u $\psi_\epsilon = -90^\circ$. Tento fakt je nejzřejmější na obr. 21 v prostoru ψ_σ proti p , kde finální stavy jasně navazují na křivku asymptotických stavů. U úhlů ψ_ϵ vzdálenějších od $\psi_\epsilon = -90^\circ$ (tedy $\psi_\epsilon = -55^\circ$, $\psi_\epsilon = -75^\circ$, $\psi_\epsilon = -100^\circ$ a $\psi_\epsilon = -110^\circ$) dochází při kompresi (respektive extenzi) k výraznějším změnám čísla pórovitosti a středního napětí podél asymptotických stavů. U těchto úhlů byly vybrány části křivek z grafů na obr. 18 a 20, které byly dosaženy pro různé počáteční stavy napětí. Tyto křivky jsou tedy brány jako reprezentující asymptotické stavy, neboť bylo dosaženo stejných, často na sebe navazujících, stavů při testech za

různých napětí. Tento postup identifikace asymptotických stavů byl převzat z práce Mašína (2012a) a subjektivně aplikován na data z vlastních simulací.

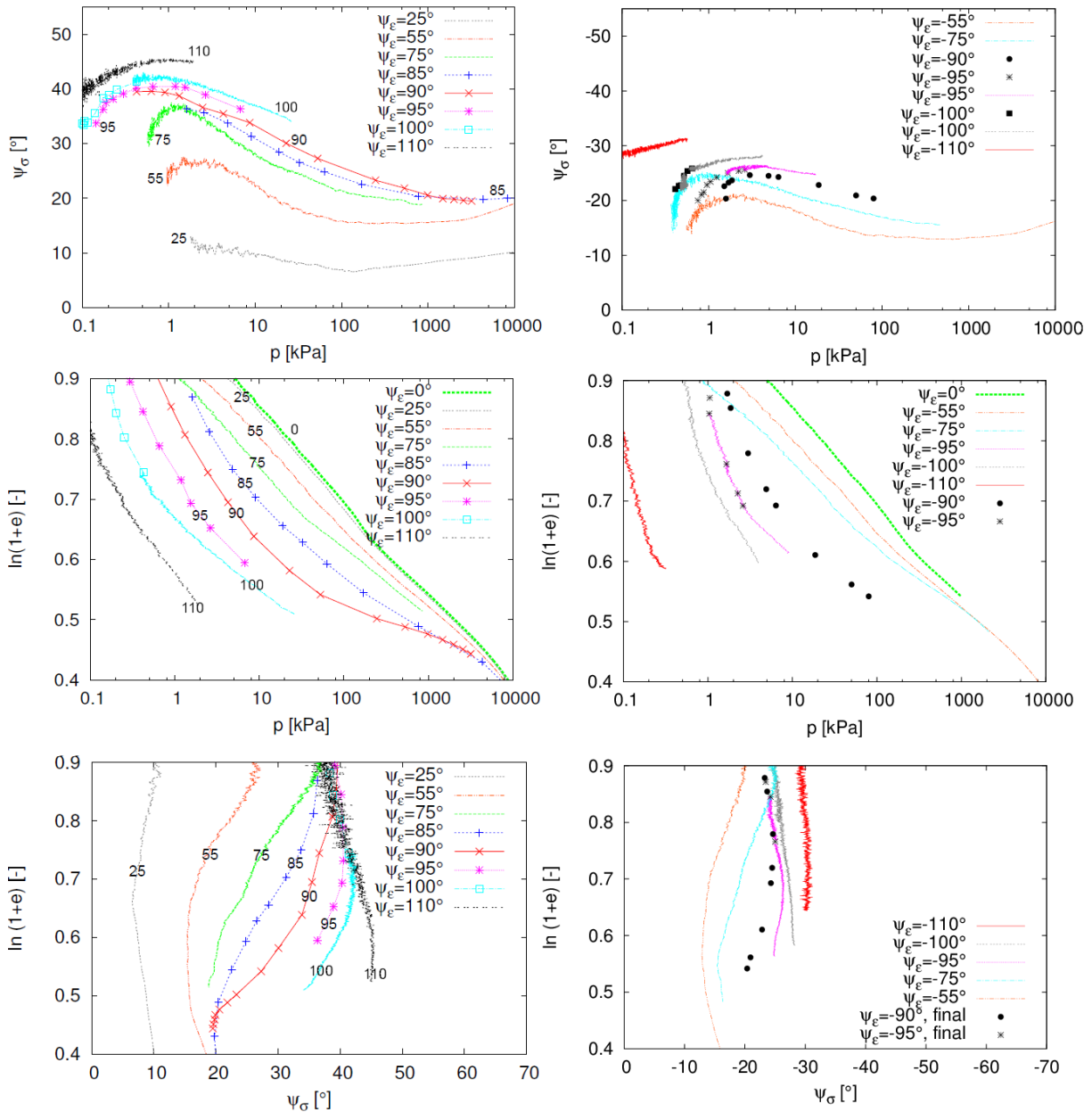


Obrázek 21: Asymptotické stavy vzorku kulových částic, shrnutí výsledků simulací DEM v prostoru ψ_σ proti p , čáry normální konsolidace (respektive extenze) v $\ln(1+e)$ proti ψ_σ a $\ln(1+e)$ proti p .

4.4 Porovnání výsledků $\psi_\epsilon > 0$ a $\psi_\epsilon < 0$

Na obr. 22 jsou zobrazeny veškeré dosažené asymptotické stavy získané v simulacích a to jak pro $\psi_\epsilon > 0$ získané Mašínem (2012a), tak pro $\psi_\epsilon < 0$ získané za účely této práce. Z výsledků je patrné, že jsou jak pro kladné, tak pro záporné hodnoty kvalitativně stejné a liší se pouze kvantitativně. Je třeba podotknout, že pro úhel $\psi_\epsilon < 0$ byly simulace provedeny pro rozmezí tlaků 1kPa až 1000kPa, kdežto Mašín (2012a) je prováděl v rozmezí 1kPa až 10 000kPa. Tento fakt vede k tomu, že například v prostoru $\ln(1+e)$ proti p jsou asymptotické stavy znázorněny pro $\psi_\epsilon < 0$ jen u vyšších čísel pórovitosti. Pro účely této práce nebyly provedeny simulace s takto vysokými počátečními stavy napětí, neboť, jak bylo zjištěno a publikováno Mašínem (2012a), u takto vysokých tlaků jsou již výsledky značně neobjektivní díky velkému překrývání jednotlivých částic. V prostoru $\ln(1+e)$ proti p , kde jsou zobrazeny čáry normální konsolidace, respektive extenze, dochází u záporných hodnot již u

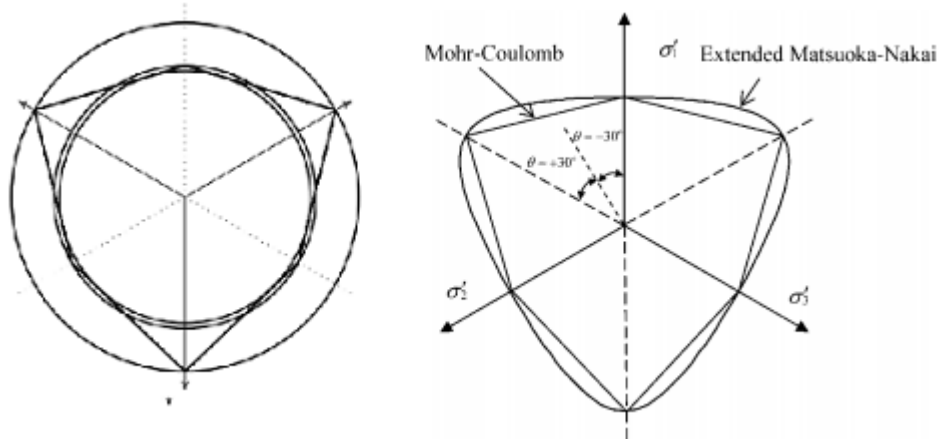
nižších čísel pórovitosti ke stáčení křivek (viz. $\psi_\varepsilon = -90^\circ, -95^\circ$ a -100°) směrem k izotropní čáře normální konsolidace. Tento fakt lze s největší pravděpodobností přičíst vlivu *inertial number*. Všeobecně z kvalitativního hlediska jsou veškeré nesoulady mezi pro $\psi_\varepsilon > 0$ a $\psi_\varepsilon < 0$ v prostoru nižších a vyšších napětí. U hodnot napětí, které leží mezi hodnotami 10kPa a 100kPa, jsou výsledky kvalitativně totožné.



Obrázek 22: Porovnání veškerých výsledných asymptotických stavů pro hodnoty $\psi_\varepsilon < 0$ (vpravo) s hodnotami $\psi_\varepsilon > 0$ (vlevo). $\psi_\varepsilon > 0$ zpracováno Mašínem (2012a), $\psi_\varepsilon < 0$ zpracováno pro účely této práce.

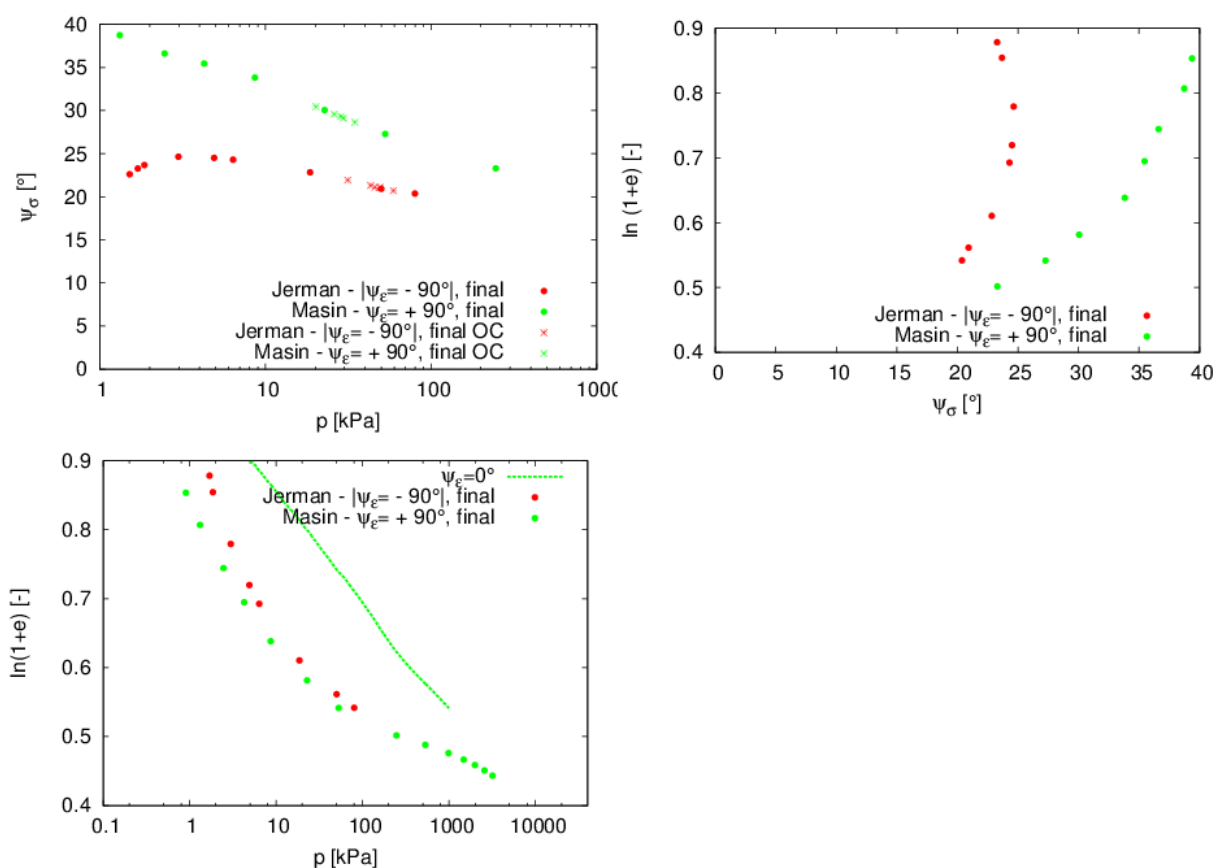
V dalším kroku byla vyhodnocována vhodnost jednotlivých podmínek plasticity k simulaci mnou získaných výsledků. Plochy plasticity předpovídají možný úhel vnitřního tření ve směrech jednotlivých hlavních napětí. Předpoklady známé z podmínek plasticity znázorněných na obr. 23 (Mohr-

Coulombova a Matsuoka –Nakai podmínka plasticity) byly, že hodnoty ψ_σ by měly být nižší pro $\psi_\epsilon < 0$ oproti výsledkům Mašína (2012a) u $\psi_\epsilon > 0$.



Obrázek 23: Zobrazení podmínek plasticity, vlevo Mohr - Coulombova proti Drucker – Pragerově (Griffiths a Huang, 2009). Vpravo Mohr- Coulombova proti Matsuoka – Nakai (Maiolino a Luong, 2009).

Na obr. 24 jsou porovnány výsledky $\psi_\epsilon > 0$ (Mašín, 2012a) s výsledky $\psi_\epsilon < 0$. Toto detailní porovnání výsledků bylo provedeno pro úhel $\psi_\epsilon = 90^\circ$, respektive $\psi_\epsilon = -90^\circ$. Porovnání je znázorněno v prostoru ψ_σ proti p , $\ln(1+e)$ proti ψ_σ a $\ln(1+e)$ proti p . V prostoru ψ_σ proti p jsou pro úplnost uvedeny také výsledky překonsolidovaných vzorků, které, jak již bylo řečeno dříve, přesně kopírují výsledky normálně konsolidovaných vzorků. Výsledky $\psi_\epsilon > 0$ a $\psi_\epsilon < 0$ se liší pouze kvantitativně, kvalitativně pouze u velmi nízkých tlaků, což je způsobeno pravděpodobně *inertial number*. V rozmezí napětí 10kPa a 100kPa jsou křivky téměř rovnoběžné. V prostoru $\ln(1+e)$ proti p tvoří finální stavy pro $\psi_\epsilon > 0$ a $\psi_\epsilon < 0$ jasně rovnoběžné čáry normální konsolidace.

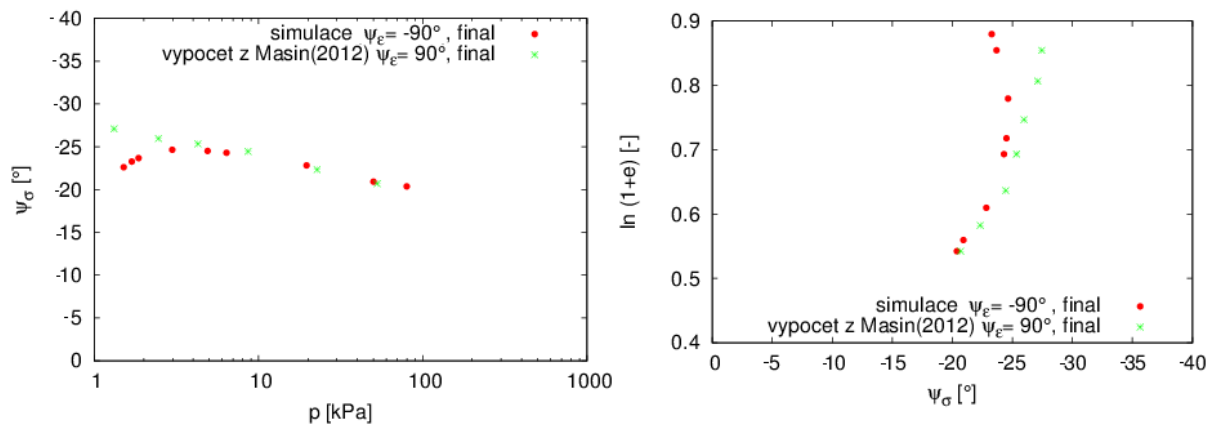


Obrázek 24: Porovnání finálních asymptotických stavů pro $\psi_\epsilon > 0$ (Mašín, 2012a) znázorněných zeleně a výsledků $\psi_\epsilon < 0$ znázorněných červeně. Vše v prostorech ψ_σ proti p , $\ln(1+e)$ proti ψ_σ a $\ln(1+e)$ proti p . V prostoru ψ_σ proti p jsou znázorněny pro úplnost též výsledky překonsolidovaných vzorků. Úhel $\psi_\epsilon = 90^\circ$, respektive -90° .

Dále byly z výsledků Mašína (2012a) pro $\psi_\epsilon = 90^\circ$ vypočítány teoretické hodnoty úhlu ψ_σ pro hodnoty $\psi_\epsilon = -90^\circ$. A to podle rovnice (6) (Mašín, 2012a):

$$\tan \psi_\sigma (\pm c) = \pm \left(\frac{2\sqrt{2} \sin \varphi c}{3 \mp \sin \varphi c} \right) \quad (6)$$

Takto spočítané hodnoty jsou znázorněny na obr. 25 zeleně jako „výpočet z Mašín (2012)“. Ty jsou porovnány s výsledky simulací pro $\psi_\epsilon = -90$, které jsou na obr. 25 zobrazeny barvou červenou. Z obou grafů na obr. 25 je dobře viditelné, že nízké hodnoty středního napětí (respektive vyšší čísla pórovitosti) se výsledky rozcházejí. Tento fakt lze připsat vlivu *inertial number* u nízkých tlaků, kde dosahuje vyšších hodnot, než je jeho limitní hodnota a výsledky již nejsou plně relevantní. Naopak u hodnot středního napětí 10 až 100kPa (viz prostor ψ_σ proti p na obr. 25), kde by výsledky neměly být výrazně ničím ovlivněny, jsou prakticky totožné. Získané výsledky se přesně shodují a na detailní zjištění platnosti jednotlivých podmínek plasticity bude zaměřen další výzkum.



Obrázek 25: Porovnání výpočtů teoretických výsledků pro $\psi_\epsilon = -90^\circ$ vypočtených z dat Mašina (2012a) s výsledky simulací pro $\psi_\epsilon = -90^\circ$.

5. Závěr

V této práci byly popsány asymptotické stavy zrnitých materiálů a jejich charakteristické vlastnosti. Byly shrnuty obecné zákonitosti – podle teorie je směr napětí, dosažený po dostatečně dlouhém zatížení s konstantním směrem zatěžování, považován za konstantní. V rámci teorie byly představeny extenzní asymptotické stavy a popsána „čára normální extenze“, společně s tím bylo ukázáno, že v konstitučních modelech založených na mechanice kritických stavů jsou zabudovány extenzní asymptotické stavy, přestože s tímto úmyslem nebyly vytvořeny. Dále byly provedeny simulace metodou oddělených prvků, kde, přestože nemohlo docházet drcení částic, došlo ve všech případech k dosažení asymptotických stavů. Tento fakt byl zjištěn Mašínem (2012a) a potvrzen v této práci pro záporné hodnoty směru přetvoření. Mašín (2012a) z toho soudí, že asymptotické chování je základní vlastností partikulárních látek způsobenou změnou pozice částic a hromadění napětí při zatěžování v okolí čáry normální konsolidace. Stejně jako u Mašína (2012a) nebyl potvrzen předpoklad, že ψ_σ pro daný úhel ψ_ε je konstantní, ale ve výsledcích simulací byl závislý na hodnotě hlavního napětí. To je přičítáno u nízkých tlaků závislosti inertia ratio na středním napětí a u vysokých tlaků vysokému relativnímu překrytí jednotlivých částic. Nakonec byly srovnány výsledky pro $\psi_\varepsilon > 0$ a $\psi_\varepsilon < 0$, kde byl potvrzen předpoklad odvozený z podmínek plasticity, že u $\psi_\varepsilon < 0$ bude dosaženo nižších hodnot ψ_σ než u $\psi_\varepsilon > 0$ pro stejné hodnoty hlavního napětí a $|\psi_\varepsilon|$. Teoretické hodnoty ψ_σ pro $\psi_\varepsilon < 0$, vypočítané z výsledků Mašína (2012a) na základě předpovědi Mohr – Coulombovy podmínky plasticity, se v rozmezí středních napětí 10 až 100kPa přesně shodují s výsledky simulací pro $\psi_\varepsilon > 0$.

6. Seznam použité literatury

ATKINSON J.: *Introduction to the Mechanics of Soils and Foundations*. 2. vydání. Shoppenhangers Road, Maidenhead, Berkshire, SL6 2QL, England: McGraw - Hill Book Company Europe, 1993. ISBN 0-07-707713-x

CUNDALL, P.A., STRACK, O.D.L. A discrete numeric model for granular assemblies. *Géotechnique*. 1979, 29(1), 47–65

GRIFFITHS, D. V. a JINSONG HUANG. Observations on the extended Matsuoka–Nakai failure criterion. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. 2009, č. 33, 1889–1905. DOI: 10.1002/nag.810

GUDEHUS, G., MAŠÍN, D.: Graphical representation of constitutive equations. *Géotechnique*. 2009 59(2), 147–151

GUDEHUS, G., M GOLDSCHIEDER a H. WINTER.: Mechanical properties of sand and clay and numerical integration methods: some sources of errors and bounds accuracy. *Finite Elements in Geomechanics*. 1977, 121 – 150

CHU, J. a S. C. R. LO.: Asymptotic behaviour of a granular soil in strain path testing. *Géotechnique*. 1994, 65 – 82

MAÏOLINO, Siegfried a Minh PHONG LUONG. *Measuring discrepancies between coulomb and other geotechnical criteria: Drucker-Prager and Matsuoka-Nakai*. Lisbon, Portugal: 7 th EUROMECH Solid Mechanics Conference, 2009. Dostupné z: http://web.univ-ubs.fr/limatb/EG2M/Disc_Seminaire/ESMC2009/papers/GS-CM/pap_0552_GS-CM.pdf

MAŠÍN, D.: A hypoplastic constitutive model for clays. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2005, 29(4), 311–336

MAŠÍN, D.: Asymptotic behaviour of granular materials, In: *Granular Matter*. [v tisku]. 2012a. GRMA-D-11-00107

MAŠÍN, D.: Hypoplastic Cam-clay model. In: *Géotechnique*. [v tisku]. 2012b.

MAŠÍN, D., HERLE, I.: State boundary surface of a hypoplastic model for clays. *Computers and Geotechnics*. 2005, 32(6), 400–410

PEÑA A. A., HERRMANN, H. J., LIZCANO, A., ALONSO – MARROQUÍN, F.: Investigation of the asymptotic states of granular materials using discrete element model of anisotropic particles *Powders and Grains*. Taylor and Francis, London. 2005 pp. 697–700

TOPOLNICKI, M., GUDEHUS, G., MAZURKIEWICZ B. K.: Observed stress-strain behaviour of remoulded saturated clays under plane strain conditions. *Géotechnique*. 1990, 40(2), 155–187

ROSCOE, K.H., BURLAND, J.B.: On the generalised stress-strain behaviour of wet clay. *Engineering Plasticity*. Cambridge University Press, Cambridge. 1968, 535–609

VON WOLFFERSDORFF, P. A. A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*. 1997. 1, 251–271.