

**Univerzita Karlova v Praze**

**Pedagogická fakulta**

Katedra matematiky a didaktiky matematiky



**Vybrané objekty v neeuklidovských metrikách**

**Selected Objects in Non-euclidian metrics**

**Autor: Jiří Bruna**

**Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.**

**Praha 2012**

*Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením  
Doc. RNDr. Jaroslava Zhoufa, Ph.D. V práci jsem použil informační zdroje  
uvedené v seznamu literatury*

*V Praze dne 22. června 2012*

\_\_\_\_\_  
*Jiří Bruna*

*Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce Doc. RNDr. Jaroslavu Zhoufovi, Ph.D., za jeho cenné rady, připomínky a ochotu číst několik verzí této práce, zvláště pak v hektickém týdnu před odevzdáním. Dále bych rád poděkoval Veronice Netolické za její morální a psychickou podporu.*

# Obsah

Úvod.....	6
1 Manhattanská metrika v odborných textech.....	8
2 Metrický prostor a metrika.....	10
2.1 Definice pojmů metrický prostor a metrika.....	10
2.2 Metrika v rovině.....	13
3 Manhattanská metrika.....	16
4 Kružnice v manhattanské metrice.....	20
5 Elipsa v manhattanské metrice.....	27
6 Hyperbola v manhattanské metrice.....	51
7 Parabola v manhattanské metrice.....	67
8 Příklady.....	86
8.1 Zadání příkladů.....	86
8.2 Návod k řešení vybraných úloh.....	88
Závěr.....	91
Literatura.....	93

## **Abstrakt**

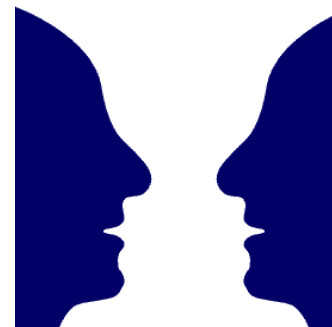
Tato bakalářská práce zkoumá tvar kružnice, elipsy, hyperboly a paraboly v manhattanské metrice pomocí elementárních matematických postupů. Vytváří tak materiál vhodný ke studiu této problematiky, aniž by kladla velké nároky na matematické znalosti čtenáře. Text je doplněn četnými ilustracemi, z nichž většina byla vytvořena v programu GeoGebra. K hlavním hypotézám týkajících se tvaru výše zmíněných objektů je podán důkaz. V době svého vzniku představuje práce svým zaměřením a rozsahem ojedinělý materiál v česky psané odborné literatuře. Zmíněn je také přínos, který zabývání se touto tematikou může mít pro budování otevřené mysli.

## **Abstract**

This bachelor thesis studies the shape of a circle, ellipse, hyperbola and parabola in the taxicab metric, using elementary mathematical methods. It thus constitutes a material suitable for the study of this topic without special requirements regarding knowledge in the field of mathematics on the part of the reader. There is a number of illustrations accompanying the text, most of them created using GeoGebra software. Major hypotheses concerning the shape of the above mentioned objects are supplied with a proof. With its scope and margin, the paper represents a unique work in mathematical literature written in the Czech language at the time of its creation. The secondary benefit of the development of an open mind is mentioned as well.

## Úvod

Je velmi pravděpodobné, že pokud různí lidé dostanou za úkol představit si kružnici, většině z nich přijde na mysl jakési dokonalé kolo, krásně oblé, postrádající hrany. Kdyby jim pak tázající se ukázal čtverec postavený na vrchol a tvrdil by, že i takto může kružnice vypadat, asi by se zpočátku nesetkal s příliš velkým pochopením. Některé věci se prostě zdají být nad slunce jasnější. Zdá se být zřejmé, že jedna a jedna jsou dvě, že na obrázku vidíte dva na sebe hledící obličejce (obr. 1) a že čím déle jdete, tím dále jste od místa, ze kterého jste vyšli.



Obr. 1: *Optický klam* [1]

Jenže stačí se na věc podívat z trochu jiné perspektivy, a otevřou se nové obzory, do té doby skryté. Když totiž počítáte se zbytky po dělení dvěma, jedna a jedna nejsou dvě, ale nula, a možná, že když se na obrázek podíváte znovu, z obrysu tváří vznikne pohár. No, a když se vydáte správným směrem a urazíte cestu dlouhou přes čtyřicet tisíc kilometrů, pak třeba zjistíte, že místo, na kterém jste se právě ocitli, až podezřele hodně připomíná to, na němž jste udělali první krok. S kružnicemi je to stejné. Stačí se na ně podívat optikou jiného přístupu, a mění tvar. O tom ale až později.

Touto drobnou filozofickou úvahou jsem se snažil čtenáři přiblížit motivaci, která stála za výběrem tématu této práce. Jak známo, matematika nepřináší člověku, který ji studuje, pouze znalosti, ale také druhotný benefit. Může se jednat o rozvoj abstraktního myšlení či prostorové představivosti. V centru zájmu této práce však stojí budování otevřené mysli. Matematika by se v jistém smyslu dala přirovnat ke hraní her. Vytvoří se pravidla, v podobě premis, a poté se podle nich hraje, tedy odvozují se vztahy a souvislosti. Různé hry mají různá pravidla. Ačkoli se ve fotbale zápolí jinak než v házené, princip hry je stejný. Získávat body vstřelováním míče do branky a těchto bodů nahromadit co nejvíce. Stejně tak v matematice mohou dva objekty vypadat zcela odlišně a přitom v principu být tím samým.

Cílem této bakalářské práce je vytvořit jádro materiálu, který by pomohl ukázat matematiku na středních školách a v dalších stupních vzdělávání ve světle nositele oné důležité schopnosti zaujímat různé úhly pohledu, měnit pravidla hry a podle nich

docházet k netušeným zjištěním, prolomit dogma. Teorii k tomuto účelu vybranou považují za více než vhodnou, protože mění představy elementární geometrie, tedy oblast přístupnou širokému spektru lidí.

Tento základ bude doplněn četnými ilustracemi pro názornost a příklady pro procvičení a osvojení si řešené problematiky. Nejdříve se budu zabývat metrikou, která v analogii matematiky a her představuje ony pomyslné variace pravidel. Pojem bude důkladněji vysvětlen později, v pár slovech lze říci, že jde o jakousi formalizaci konceptu vzdálenosti v matematice. Zbytek práce se zaměří na zkoumání toho, jak se geometrická reprezentace kuželoseček mění v závislosti na zvolené metrice. Středem pozornosti se stane Manhattanská metrika. V ní bude postupně odvozován tvar kružnice, elipsy, hyperboly a paraboly.

Na rozdíl od některých odborných publikací, například *Encyclopedia of Distances* [2], je práce zaměřena také na didaktickou stránku věci a formou by měla být přístupnější neodborné veřejnosti, především ve své první polovině díky motivačním příkladům a ukázkám souvislosti s reálným světem. V žádném případě se nesnaží obsáhnout ohromné množství poznatků souvisejících s metrikami, ale naopak systematicky rozvinout základní pochopení tohoto pojmu, a tak čtenáře obohatit nejen přímo, ale, jak už bylo uvedeno výše, i nepřímo.

## 1 Manhattanská metrika v odborných textech

Další motivací pro sepsání této práce je i snaha vytvořit český materiál zabývající se touto tematikou poněkud zevrubněji. Zatímco například anglicky psané publikace týkající se kuželoseček v manhattanské metrice existují (i když jejich dostupnost je záležitost úplně jiná), podobné materiály v češtině prakticky neexistují. Co se základních informací jako definice týče, krátké internetové hledání nabídne dosti odkazů, ovšem z kuželoseček je obvykle diskutována nanejvýš kružnice. Některé z těchto zdrojů jsou citovány v příslušných kapitolách dále v textu.

Co by tato práce měla nabídnout oproti běžně dostupným materiálům, jsou důkazy, které často chybí anebo jsou psány anglicky, a navíc obvykle technicky náročně. Proto v drtivé většině případů uvádím důkazy vlastní.

Velmi užitečným zdrojem informací o manhattanské metrice je server *taxicabgeometry.net* (v anglickém jazyce) [3], který uvádí i odkazy na odborné články (sekce Research). Bohužel zde sekce Conics (kuželosečky, v angličtině plným názvem conic sections) není dostupná, avšak několik odborných textů je k dispozici ke stažení právě v sekci Research. Nejdiskutovanější kuželosečkou je zde parabola, pravděpodobně z důvodů, které budou uvedeny později v práci. Jedním ze základních zdrojů pro tuto kuželosečku v manhattanské metrice je text Josepha M. Mosera a Freda Kramera *Lines and parabolas in Taxicab Geometry* [4] a dále *Taxicab Geometry: Another Look at Conic Sections* Davida Inyho [5].

Protože hledání zdrojů nebylo vždy jednoduché, značná část použité literatury byla objevena až v průběhu psaní práce, když už daná problematika byla prozkoumána samostatně. Tyto zdroje pak mohly být použity ke zpětnému ověření toho, co již bylo zpracováno. Sem by patřila například webová stránka Jima Wilsona *Taxi Cab Geometry with Technology: Some Exploration materials* [6] nebo v mnoha ohledech této bakalářské práci podobný materiál Christiny Janssen *Taxicab Geometry: Not the Shortest Ride Across Town (Exploring Conics with a Non-Euclidian Metric)* [7]. Veškerá shoda je ale, s výjimkou citovaných pasáží, čistě náhodná. Inspirace k hlubšímu prozkoumávání tvaru hyperboly pro různé situace přišla z *General Equation For Taxicab Conics And Their Classification* [8].



Pro alternativní přístup k odvozování tvaru kuželoseček v manhattanské metrice odkazují na *Pyramidal sections in Taxicab Geometry* [9] od Richarda Laatsche.

## 2 Metrický prostor a metrika

### 2.1 Definice pojmů metrický prostor a metrika

Koncept vzdálenosti je všudypřítomný. Ať už člověk cestuje jakýmkoli dopravním prostředkem, vzdálenost do cílové destinace je podstatnou informací. Nemusí se přitom jednat o vzdálenost vyjádřenou v metrech či kilometrech. Například při cestě hromadnou dopravou může být jednotkou vzdálenosti dvojice za sebou následujících stanic. V matematice je myšlenka vyjadřování vzdálenosti formalizována v pojmu metrický prostor. Definici parafrazuji z [10].

Definice: *Metrickým prostorem* nazýváme dvojici  $(M, d)$ , kde  $M$  je neprázdňá množina a  $d$  je zobrazení kartézského součinu množiny  $M$  do reálných čísel, splňující následující axiomy pro libovolná  $x, y, z$ , která jsou prvky  $M$ :

1. Axiom nezápornosti:  $d(x, y) \geq 0$
2. Axiom totožnosti:  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. Axiom symetrie:  $d(x, y) = d(y, x)$
4. Trojúhelníkovou nerovnost:  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Zobrazení  $d$ , které splňuje tyto podmínky, se říká *metrika*.

Následující příklad lépe objasní uvedené definice. Za množinu  $M$  zvolme množinu všech stanic pražského metra (obr. 2). Necht' zobrazení  $d$  přiřadí každé dvojici stanic nezáporné celé číslo takové, že je rovno nejmenšímu počtu spojnic mezi jednotlivými stanicemi, které je potřeba projet, než se cestující dostane z jedné stanice do druhé. Tedy například:

$$d(\text{Pankrác}, \text{Pankrác}) = 0,$$

nebo

$$d(\text{Muzeum}, \text{Hlavní nádraží}) = 2 = d(\text{Hlavní nádraží}, \text{Muzeum})$$

Nyní už stačí jen ověřit, že takto zavedené zobrazení splňuje výše uvedené axiomy.



Obr. 2: Plánek pražského metra [11]

Axiom nezápornosti, který říká, že vzdálenost mezi dvěma prvky množiny  $M$  nemůže být záporná, je zřejmě splněn, neboť buďto cestující neprojde žádnou spojnici, pokud setrvává ve stejné stanici, nebo jich projede kladný počet.

Pokud jde o axiom totožnosti, jenž vyžaduje, aby se vzdálenost mezi dvěma prvky množiny  $M$  rovnala 0, právě tehdy když se jedná o jeden a ten samý prvek, převedme ho na složený výrok

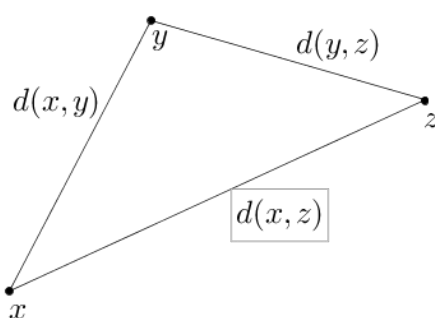
$$(d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y) \wedge (x = y \Rightarrow d(x, y) = 0).$$

Ukažme, že obě implikace platí. Pokud se  $d(x, y) = 0$ , potom cestující neprojel žádnou spojnici, tedy nachází se v téže stanici, a tedy  $x = y$ . A naopak je-li  $x = y$ , pak se jedná o cestu z téže stanice do té samé, z čehož plyne, že počet spojnic, který je nutno projet, je roven nule.

Protože jakoukoli cestu je možno absolvovat jedním i druhým směrem projetím stejných spojnic, jen v opačném pořadí, a protože pokud by existovala nejkratší cesta

(cesty) v jednom směru, pak by byla stejně dlouhá a také nejkratší i v druhém směru, je takto definovaná vzdálenost mezi dvěma stanicemi stejná v jednom i druhém směru. Axiom symetrie je tedy rovněž splněn.

Poslední z axiomů klade na zobrazení  $d$  požadavek, aby vzdálenost mezi prvky  $x$  a  $z$  byla stejná nebo kratší než součet vzdáleností mezi prvky  $x$  a libovolným prvky  $y$  a mezi prvky  $y$  a  $z$ , jak ukazuje obr. 3.



Obr. 3: Trojúhelníková nerovnost

V případě pražského metra tedy například, že vzdálenost mezi Můstkem a Dejvickou je menší nebo rovna součtu vzdáleností mezi Můstkem a Malostranskou a Malostranskou a Dejvickou nebo že vzdálenost mezi stanicemi Zličín a Nádraží Holešovice je menší nebo rovna součtu vzdáleností mezi Zličínem a Palmovkou a Palmovkou a Nádražím Holešovice.

Že je tato podmínka splněna, lze dokázat sporem. Předpokládejme, že existuje alespoň jedna taková trojice stanic  $x, y, z$  takových, že  $d(x, z) > d(x, y) + d(y, z)$ . Pravou stranu nerovnice lze interpretovat jako cestu složenou z jedné z nejkratších cest mezi  $x$  a  $y$  a z jedné z nejkratších cest spojujících  $y$  a  $z$ . Pak ale tato cesta je též cestou mezi  $x$  a  $z$  a je podle předpokladu kratší než jakákoli jiná mezi těmito dvěma body. Ovšem protože je to nejkratší cesta, pak  $d(x, z)$  musí být rovno  $d(x, y) + d(y, z)$ . Ovšem předpoklad říká, že  $d(x, z)$  je větší než  $d(x, y) + d(y, z)$ . Což je spor, tedy musí platit původní tvrzení.

Metrika se ovšem nemusí týkat pouze vzdálenosti mezi místy či body. Jako příklad může posloužit tzv. Hammingova vzdálenost, čili metrika, která přiřazuje dvěma textovým řetězcům číslo, které odpovídá počtu míst, na kterých se tyto dva řetězce liší.

Tedy například Hammingova vzdálenost řetězců kočka a čočka je rovna jedné, protože se liší právě na jedné pozici [12].

## 2.2 Metrika v rovině

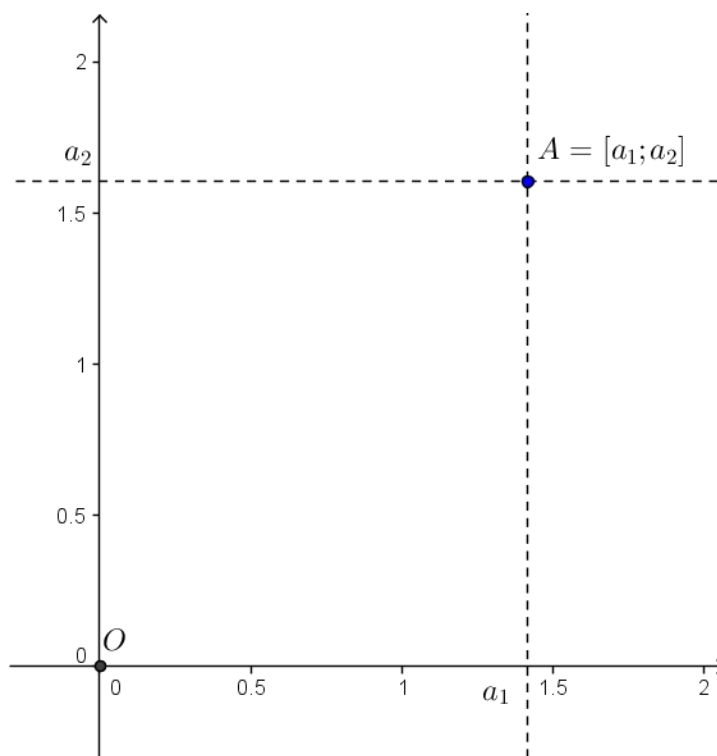
Vzhledem k tomu, že následující kapitoly se budou zabývat metrikami, které vyjadřují vzdálenost dvou bodů v rovině, a to v závislosti na jejich souřadnicích, bylo by záhodno krátce připomenout, co to souřadnice bodu vlastně jsou. Zde vyjděme z geometrické představy. Nejprve v rovině zavedeme tzv. *kartézskou soustavu souřadnic*. Dále cituji [13, str. 9, 10]:

„Dvojice číselných os  $x, y$  v rovině, pro které platí

1. obě osy jsou navzájem kolmé,
2. jejich průsečíku odpovídá na obou osách číslo 0,

se nazývá kartézská soustava souřadnic v rovině a označuje se  $Oxy$ . Bod  $O$  se nazývá počátek kartézské soustavy souřadnic a přímky  $x, y$  se nazývají souřadnicové osy.

Máme-li nyní dány v rovině kartézskou soustavu souřadnic  $Oxy$  a libovolný bod  $A$ , můžeme vést bodem  $A$  rovnoběžku se souřadnicovými osami. Rovnoběžka s osou  $y$  protne osu  $x$  v bodě odpovídajícím nějakému číslu – označme jej  $a_1$ . Podobně vedeme-li bodem  $A$  rovnoběžku s osou  $x$ , získáme na ose  $y$  číslo  $a_2$ . Čísla  $a_1, a_2$  se nazývají souřadnice bodu  $A$  v kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$ .



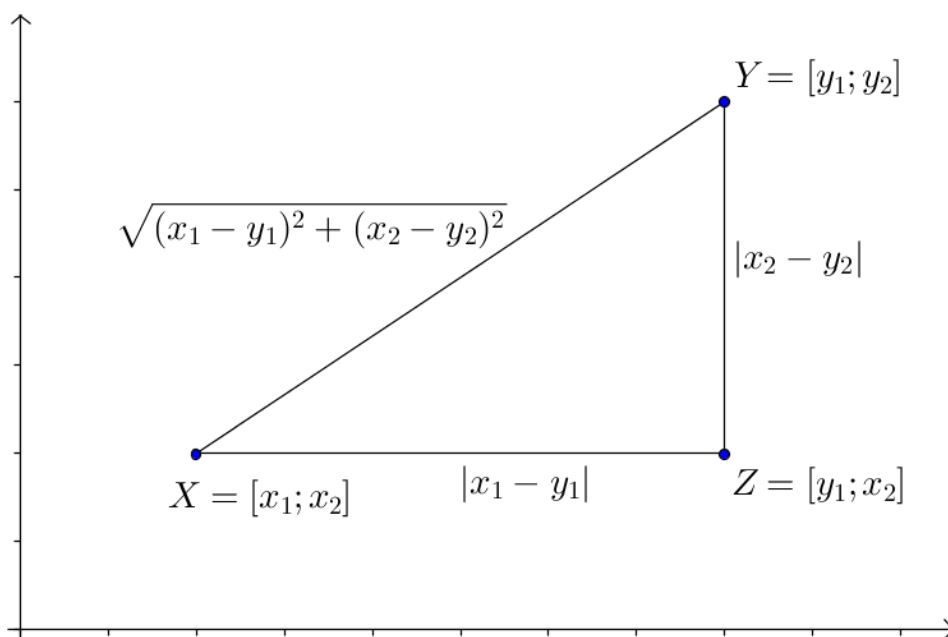
Obr. 4: *Souřadnice bodu v rovině*

Chceme-li vyjádřit, že bod  $A$  má souřadnice  $a_1, a_2$ , píšeme  $A[a_1; a_2]$  (případně  $A = [a_1; a_2]$ , pozn. autora). Dvojice souřadnic je uspořádaná. Pořadí souřadnic nemůžeme zaměnit.“ Vysvětlení pojmu souřadnic ilustruje obr. 4.

Nyní, když víme, co to jsou souřadnice bodu, můžeme zavést metriky, které s nimi pracují. Intuici měření vzdálenosti nejvíce odpovídající je tzv. *euklidovská metrika*. Jde o metriku, se kterou se student setkává běžně v hodinách syntetické i analytické geometrie a v níž tedy útvary vypadají tak, jak by se zdálo přirozené. Je definována následujícím předpisem:

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Kde  $X$  a  $Y$  jsou body v rovině takové, že  $X = [x_1; x_2]$  a  $Y = [y_1; y_2]$  a  $d(X, Y)$  je vzdálenost mezi těmito dvěma body.



Obr. 5: Vzdálenost bodů v euklidovské metrice

Jak vyplývá z obr. 5, euklidovská metrika přiřazuje dvěma bodům jejich vzdálenost rovnou délce úsečky, která je spojuje, neboť  $|x_1 - y_1|$  a  $|x_2 - y_2|$  jsou délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku  $XZY$  a délka úsečky  $XY$  se rovná délce přepony tohoto trojúhelníku, kterou lze spočítat pomocí Pythagorovy věty jako

$$|XY| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Protože euklidovská metrika stejně jako další metrika uvedená v této podkapitole nejsou hlavním předmětem práce, vynechám důkaz toho, že splňují výše zmíněné čtyři axiomy metriky, s tím, že by mohl čtenáři posloužit jako vhodné procvičení.

Metriky v rovině můžou ale vypadat zcela odlišně. Tak například tzv. *maximová metrika* je definována jako

$$d(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

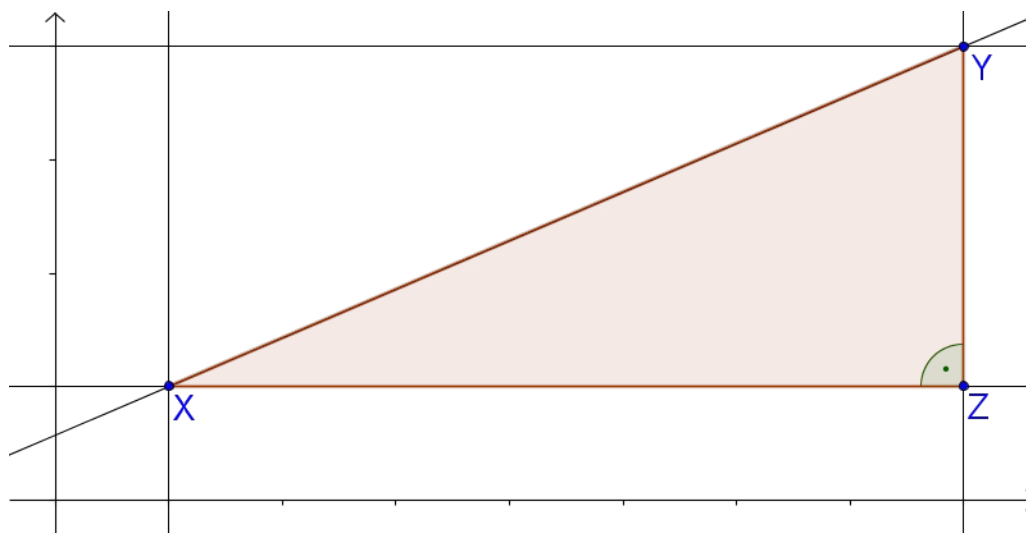
kde  $X$  a  $Y$  jsou body v rovině takové, že  $X = [x_1; x_2]$  a  $Y = [y_1; y_2]$ ,  $d(X, Y)$  je vzdálenost mezi těmito dvěma body a  $\max\{a, b\}$  je maximum  $a$  a  $b$  [10]. Tedy použijeme-li obr. 5, zjistíme, že tato metrika nepřiznává vzdálenost dvou bodů jako délku přepony pravoúhlého trojúhelníku  $XZY$ , ale jako délku jeho nejdelší odvěsny.





Jestliže jediným kritériem toho, aby cesta byla nejkratší, je skutečnost, že každý pohyb se koná rovnoběžně s jedním z výše uvedených dvou směrů, znamená to, že pokud se přehází pořadí těchto pohybů, sice se cesta změní, nicméně stále povede z bodu  $X$  do bodu  $Y$  (protože pokud bychom chápali jednotlivé posuny jako vektory, jejich složení není závislé na pořadí) a bude mít stále stejnou délku (protože žádný z pohybů není ubrán a ani žádný nový není přidán). Tedy každá taková cesta je stejně dlouhá jako modře vyznačená trasa vedoucí přes bod  $Z$ . Ta by se dala chápat, jako že doručovatel nejdříve vykoná všechny pohyby ve směru od  $X$  k  $Z$  a poté všechny ve směru od  $Z$  do  $Y$ . Výhodou tohoto uspořádání je jeho jednoduchá interpretace, a je tedy výhodné použít ho k definici metriky, která doručovateli umožní mít dobrý přehled o vzdálenosti, která dvě místa dělí.

Kdybychom zanesli zjednodušený plán Manhattanu do roviny tak, že jedny ulice by byly rovnoběžné s osou souřadnic  $x$  a ostatní rovnoběžné s osou  $y$ , mohli bychom jednotlivým místům přiřadit souřadnice. Bodu  $X$  tedy budou náležet souřadnice  $[x_1; x_2]$  a bodu  $Y$  souřadnice  $[y_1; y_2]$ , jak vyplývá z obr. 7. Protože je trojúhelník  $XZY$  pravoúhlý a jeho odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, je souřadnice bodu  $Z$  na ose  $x$  stejná jako ta bodu  $Y$  a souřadnice na ose  $y$  stejná jako ta bodu  $X$ . Tedy  $Z = [y_1; x_2]$ .



Obr. 7: Pravoúhlý trojúhelník k bodům  $X$  a  $Y$

Nyní je možné vyjádřit vzdálenost cesty pomocí součtu délek dvou modrých úseček:

$$d(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

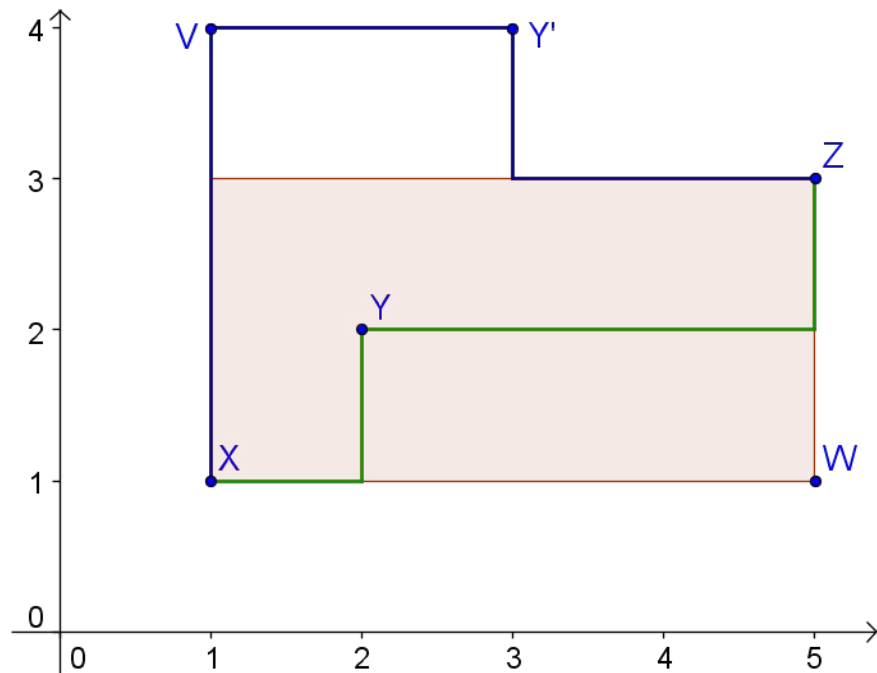
Za zmínku jistě stojí fakt, že při této vzájemné pozici bodů lze vzdálenost vyjádřit bez absolutních hodnot, jen s opačným pořadím jednotlivých souřadnic, ovšem pokud by se tato pozice změnila, už by to nemuselo platit. Předpis uvedený výše je univerzální a umístění jednotlivých bodů v něm nehraje roli. Navíc nezáleží ani na tom, jak jsou ulice dlouhé, je tedy použitelný i pro takové situace, kdy pohyb rovnoběžný s osami je libovolně malý.

Metrice charakterizované výše uvedeným předpisem se říká *manhattanská metrika*. Některé zdroje uvádějí i sumová, například Ptáčník v [14, str. 10]. V [15] se pro změnu hovoří o Newyorské metrice. V ní, jak vyplývá z obr. 5, není vzdálenost rovna velikosti přepony pravoúhlého trojúhelníku, ale součtu velikostí jeho odvěsen.

Ještě než přistoupíme k hlavní náplni této práce, zbývá dokázat, že manhattanská metrika opravdu metrikou je, tedy že splňuje čtyři axiomy uvedené v podkapitole 2.1. Už z předpisu je patrné, že vzdálenost dvou bodů nemůže být záporná, protože se jedná o součet dvou absolutních hodnot. Pokud jsou body  $X$  a  $Y$  totožné, pak jsou totožné i jejich souřadnice, tedy absolutní hodnoty z rozdílů jednotlivých složek jsou rovny nule, a vzdálenost je tedy rovna nule. Není možné, aby dva různé body měly nulovou vzdálenost, neboť by se lišily alespoň v jedné souřadnici, a alespoň jedna z absolutních hodnot by tedy byla nenulová. Axiom totožnosti je tím splněn. Už z intuitivní představy manhattanské metriky lze usuzovat, že vzdálenost bodů  $X$  a  $Y$  je rovna vzdálenosti  $Y$  a  $X$ , protože vždy můžeme počítat se stejnými odvěsnami. Formálně, jestliže změníme pořadí bodů a dosadíme do předpisu, změní se pořadí jednotlivých složek v absolutních hodnotách. Protože ale pro každá dvě reálná čísla  $A$  a  $B$  platí, že  $B - A = -(A - B)$ , pak  $|Y - X| = |-(X - Y)| = |X - Y|$ . Hodnota výrazu tedy není závislá na pořadí bodů a axiom symetrie je splněn.

Co se trojúhelníkové nerovnosti týče, splnění tohoto axiomu je dobře odvoditelné z obr. 8. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že vzájemná pozice bodů  $X$  a  $Z$  je taková, že jednotlivé souřadnice bodu  $Z$  jsou větší než ty bodu  $X$ , tak jak to obrázek ukazuje (pro ostatní případy by byla situace analogická).

Pokud se bod  $Y$  nachází v obdélníku ohraničeném rovnoběžkami s osami procházejícími body  $X$  a  $Z$ , je součet vzdálenosti mezi  $X$  a  $Y$  a vzdálenosti  $Y$  a  $Z$  (zelený

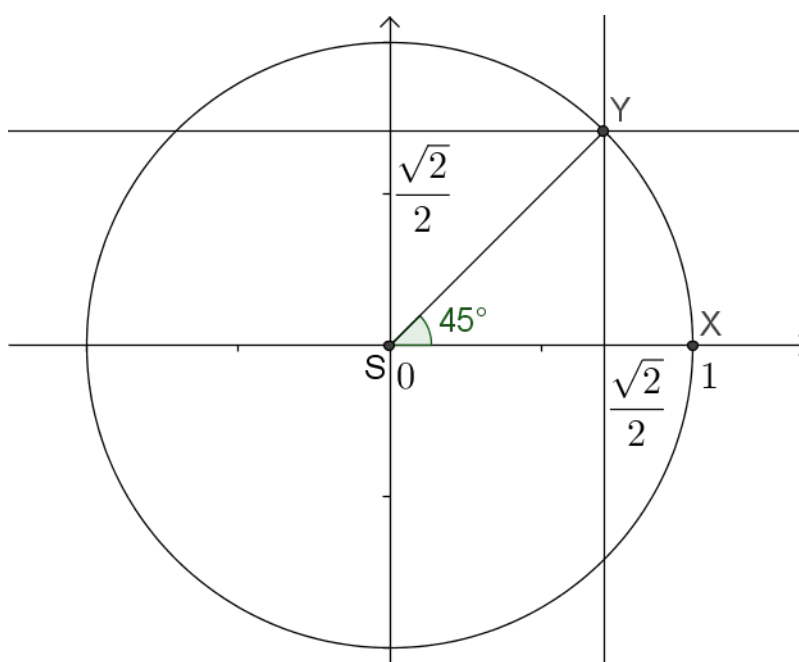


Obr. 8: Trojúhelníková nerovnost v manhattanské metrice

systém úseček) roven součtu délek odvěsen pravoúhlého trojúhelníka  $XWZ$ , což, jak bylo zmíněno výše, je ekvivalentní s vyjádřením vzdálenosti v manhattanské metrice. Pokud ovšem bod  $Y$  nebude ve zmíněném obdélníku ležet (na obrázku znázorněno bodem  $Y'$ ), pak délka alespoň jedné modré úsečky rovnoběžné se souřadnicovou osou (na obrázku rovnoběžné s osou  $y$ ) je větší než délka odvěsny trojúhelníku  $XWZ$  s ní rovnoběžné. Z obrázku je jasně vidět, že zatímco součet délek modrých úseček rovnoběžných s osou  $x$  je rovný délce odvěsny  $XW$ , součet délek zbylých modrých úseček je větší než délka odvěsny  $WZ$ , a to o dvojnásobek délky úseku, kterým úsečka  $XV$  přesahuje obdélník. Součet vzdáleností mezi body  $X$  a  $Y'$  a  $Y'$  a  $Z$  je tedy větší než vzdálenost bodů  $X$  a  $Z$ , čímž je splněn i poslední z axiomů.

## 4 Kružnice v manhattanské metrice

Tato kapitola se bude zabývat interpretací kružnice v manhattanské metrice. Jak už bylo naznačeno v úvodu, její tvar se poněkud změní. K pochopení toho, proč se tak děje, je podstatné uvědomit si, jak je kružnice definována. Středoškolská definice říká, že kružnice je množina bodů, které mají od daného pevného bodu (středu), stejnou kladnou vzdálenost (poloměr). Toto není jediné vymezení tohoto pojmu, avšak tato práce z něj bude vycházet.



Obr. 9: Kružnice v euklidovské metrice

Protože v manhattanské metrice se vzdálenost určuje jinak než v metrice euklidovské, vzdálenost mezi bodem na kružnici tak, jak vypadá v euklidovské metrice, a středem není v té manhattanské stejná pro všechny body na kružnici ležící. (obr. 9). Například vzdálenost bodů  $S$  a  $X$  je podle zavedení metriky rovna

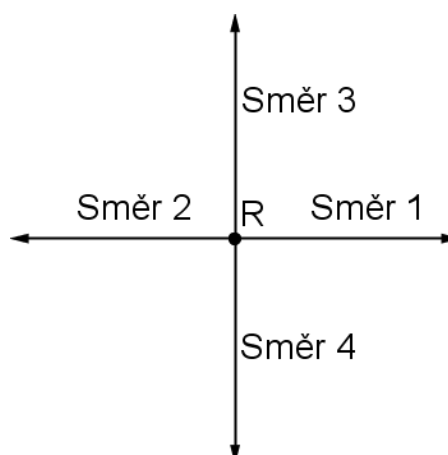
$$d(S, X) = |0 - 1| + |0 - 0| = 1,$$

kdežto vzdálenost bodů  $S$  a  $Y$  se rovná

$$d(S, Y) = \left| 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \sqrt{2}.$$

Jestliže tedy kružnice v manhattanské metrice existuje, musí mít jiný tvar. Než jej ale odvodíme, uvažujme následující příklad. V kybernetické laboratoři sestrojili

miniaturního robota, který se ovšem může pohybovat pouze čtyřmi směry. První a druhý směr jsou navzájem opačné, stejně jako třetí a čtvrtý. Libovolný směr z první dvojice je potom kolmý na oba směry druhé dvojice, jak ukazuje obr. 10.



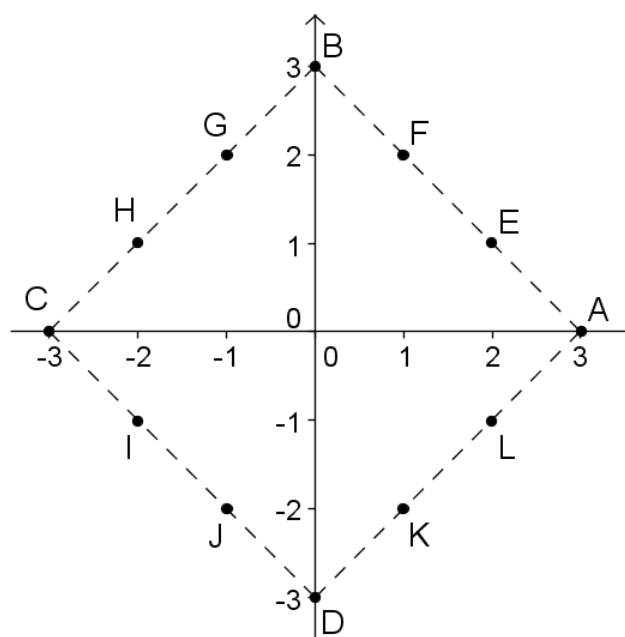
Obr. 10: *Směry pohybu robota*

Vědci chtějí zjistit, kam až může robot dojet z jednoho pevně určeného stanoviště, má-li k dispozici vždy stejné omezené množství energie, za předpokladu, že se pohybuje efektivně (vždy používá maximálně jeden směr z každé dvojice směrů, což mu brání v cyklickém pohybu atp.) a spotřebovaná energie je přímo úměrná dráze, kterou urazil.

Z prvního předpokladu plyne, že délka každé robotovy cesty se bude rovnat vzdálenosti počátečního a koncového bodu v manhattanské metrice, zvolíme-li souřadný systém, který má osy rovnoběžné s dvojicemi směrů. Pokud do úvahy zahrneme druhý předpoklad, zjistíme, že každá cesta bude mít stejnou délku. Množina všech koncových bodů robotových cest je tedy, podle definice kružnice, rovna kružnici v manhattanské metrice.

Nejdříve zkusme zakreslit několik koncových bodů robotovy cesty. Pevnému stanovišti robota přiřadíme počátek souřadné soustavy. Řekněme, že množství energie, kterou má robot k dispozici, mu stačí k uražení cesty délky 3. Pokud robot zvolí svou dráhu tak, že se vydá jedním ze čtyř směrů a nebude ho měnit, pak se určitě dostane do koncových bodů  $A = [3; 0]$ ,  $B = [0; 3]$ ,  $C = [-3; 0]$  a  $D = [0; -3]$ . Jakkoli klikatá může cesta robota být, stejně jako v případě doručovatele pizzy na Manhattanu, je, co se délky a koncového bodu týče, shodná s cestou, kterou robot projede, pokud nejdříve

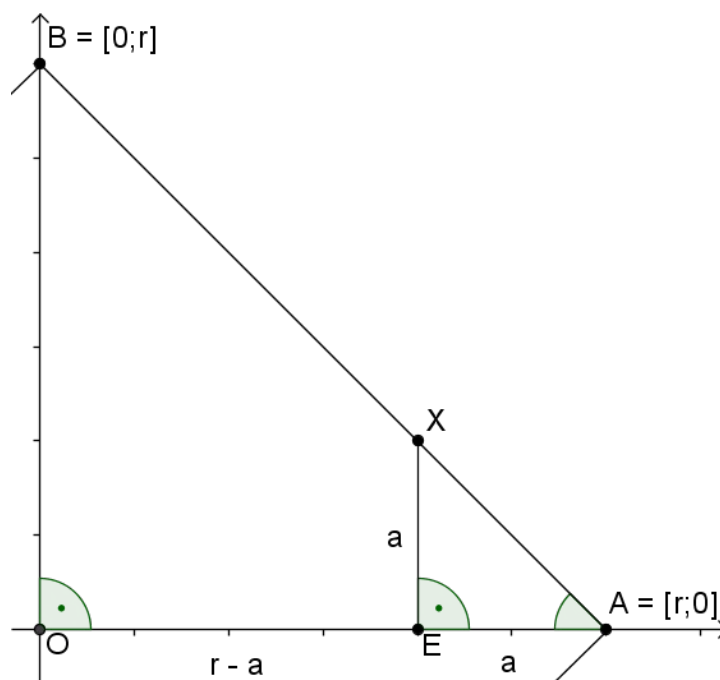
pojede směrem jedním a pak druhým (to proto, že rozhodující je součet délek úseků v jednotlivých směrech). Pro jednoduchost proto vyberme jenom tyto ze dvou úseků složené cesty. Zvolme ty z nich, které mají délku jednoho úseku 2 a druhého 1. Získáme 8 koncových bodů:  $E = [2; 1]$ ,  $F = [1; 2]$ ,  $G = [-1; 2]$ ,  $H = [-2; 1]$ ,  $I = [-2; -1]$ ,  $J = [-1; -2]$ ,  $K = [1; -2]$ ,  $L = [2; -1]$ . Na obr. 11 jsou všechny tyto body znázorněny. Přerušovanou čarou je naznačen pravděpodobný tvar manhattanské kružnice.



Obr. 11: Předpokládaný tvar manhattanské kružnice

Chceme-li nyní dokázat, že tento útvar je opravdu kružnicí, musíme ukázat:

- (1) Všechny jeho body mají skutečně stejnou vzdálenost od středu.
- (2) Žádný další bod tuto vlastnost nemá.



Obr. 12: Ilustrace k první části důkazu

Vlastnost (1) dokažme<sup>1</sup> pro obecnou kružnici s poloměrem  $r$  a středem v počátku. Tento střed je zvolen pro jednoduchost, důkaz pro libovolný střed by byl analogický. Nyní bez újmy na obecnosti zvolme bod  $X$  na spojnici bodů  $A$  a  $B$ . Situace je znázorněna na obr. 12. Jak je vidět,  $|OA| = |OB| = r$ .

Protože trojúhelníky  $OAB$  a  $EAX$  jsou podobné podle věty  $uu$ , tak pokud  $|EA| = a$ , pak i  $|EX| = a$ . Odtud plyne

$$d(O, X) = |OE| + |EX| = (r - a) + a = r.$$

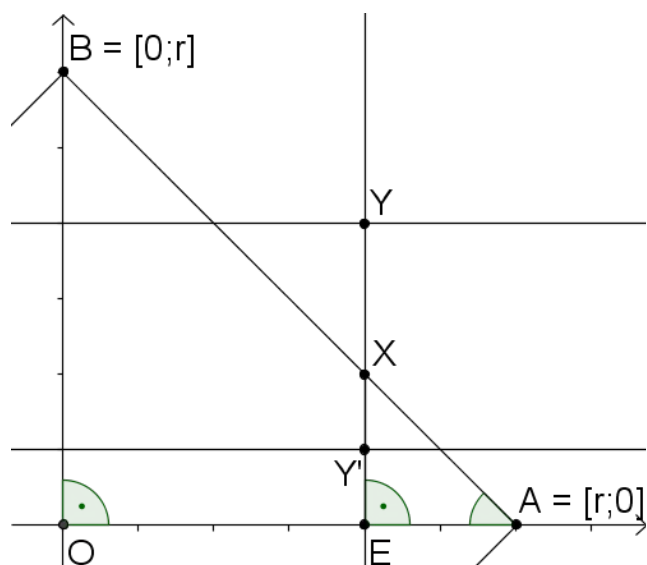
A protože  $X$  je libovolně zvolený bod, mají všechny body útvaru vzdálenost od středu rovnou  $r$ .

Důkaz tvrzení (2) provedeme pro stejnou obecnou kružnici jako v (1). Rozdělme ho na dva případy. Nejprve uvažujme, že bod  $Y$ , který útvaru nenáleží, leží vně čtverce ohraničeného body  $K = [r; r]$ ,  $L = [-r; r]$ ,  $M = [-r; -r]$ ,  $N = [r; -r]$ , kde  $r$  je poloměr kružnice. Pak zřejmě absolutní hodnota alespoň jedné souřadnice tohoto bodu je větší než  $r$ . Vzhledem k tomu, že souřadnice středu jsou  $O = [0; 0]$ , pak po dosazení do předpisu metricky dostaneme alespoň v jedné absolutní hodnotě hodnotu větší než  $r$ .

<sup>1</sup> Původní myšlenka první části důkazu byla inspirována krátkým vysvětlením Mgr. Dereka Pilouse v jedné z hodin analytické geometrie.

A protože přičtením druhé absolutní hodnoty celkovou hodnotu výrazu nesnížíme, je určitě větší než  $r$ .

Pokud bod  $Y$  náleží tomuto čtverci, pak povedeme-li tímto bodem rovnoběžky se souřadnicovými osami, protnou kružnici ve dvou až čtyřech bodech. Jeden z těchto průsečíků označme  $X$  (obr. 13). Vzdálenost bodu  $Y$  (resp.  $Y'$ ) od středu je rovna součtu délek odvěsen pravoúhlého trojúhelníku  $OEY$  (resp.  $OEY'$ ). Zatímco součet délek odvěsen trojúhelníku  $OEX$  je roven  $r$ , jedna z odvěsen trojúhelníku  $OEY$  je delší (u trojúhelníku  $OEY'$  kratší) než příslušná odvěsna trojúhelníku  $OEX$ , tedy vzdálenost

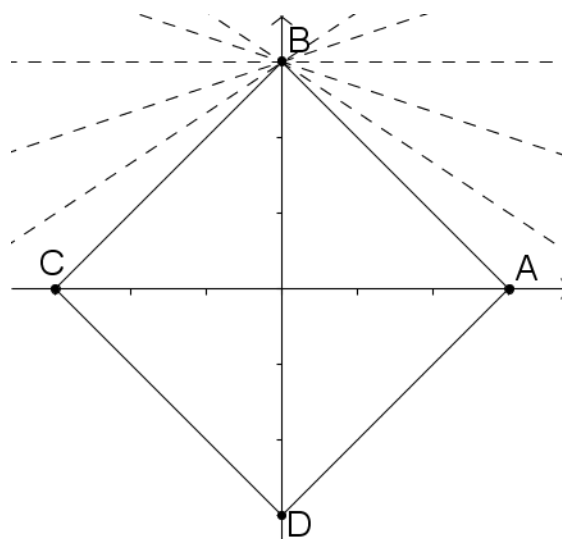


Obr. 13: Ilustrace k druhé části důkazu

bodů  $O$  a  $Y$  je větší než  $r$  (u bodů  $O$  a  $Y'$  je menší než  $r$ ), což bylo dokázat.



Tvar manhattanské kružnice podstatným způsobem nejen ovlivňuje některé její vlastnosti, ale i vyvolává otázku, jaké názvosloví zvolit při jejím popisu. Především, že jsem neobjevil žádnou literaturu, která by se touto problematikou zabírala, a tak použiju názvosloví vlastní, takové, které mi přijde intuitivní. Zatímco u kružnice v euklidovské metrice nemá velký smysl mluvit o vrcholech, zde zřejmě

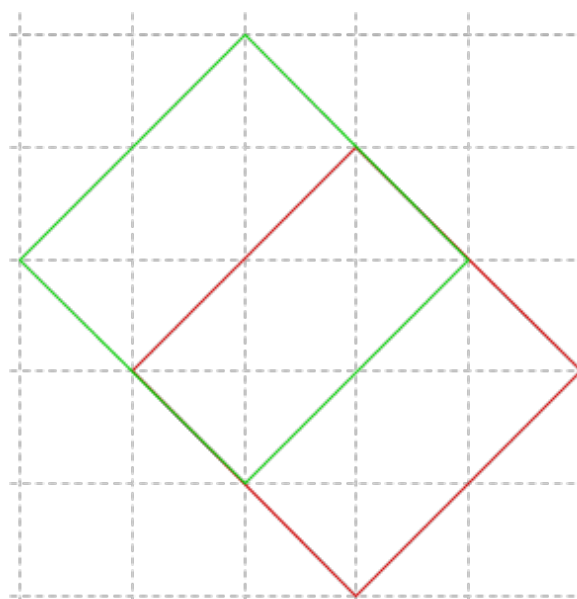


Obr. 14: Tečny ke kružnici

ano. Proto budu body s největším rozdílem v  $x$ -ové, respektive  $y$ -ové souřadnici oproti středu kružnice nazývat vrcholy kružnice. Na obr. 14 to jsou body  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$ . Spojnice mezi těmito vrcholy budu nazývat stranami kružnice.

Některé vlastnosti manhattanské kružnice se velmi liší od vlastností té v euklidovské metrice. Pokud budeme hledat tečny ke kružnici (tedy přímky, které mají s kružnicí společný právě jeden bod), rychle zjistíme, že s výjimkou vrcholů v žádném bodě tečna sestrojít nelze a vrcholy jich pro změnu lze vést nekonečně mnoho. Na obr. 14 je čárkovanou čarou zobrazeno několik tečen procházejících bodem  $B$ .

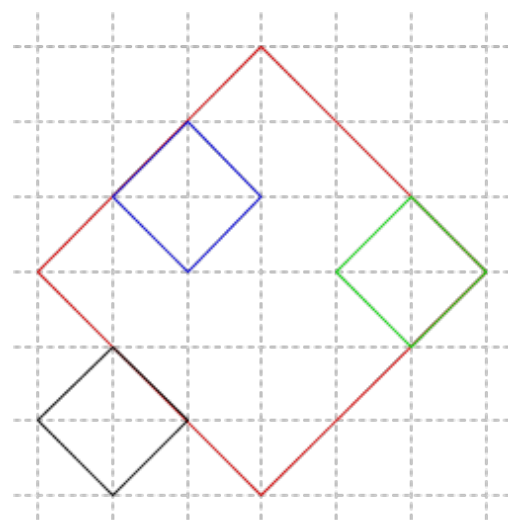
Další vlastnost, kterou se liší kružnice v manhattanské metrice od té v euklidovské, je počet průsečíků dvou kružnic. Rozlišme dva případy – dvě kružnice se stejným poloměrem a dvě kružnice s různým poloměrem. V prvním z nich v euklidovské metrice můžou mít kružnice žádný, jeden, dva, nebo nekonečně mnoho průsečíků, přičemž poslední případ nastává pouze, pokud mají kružnice stejný střed. V manhattanské metrice mohou mít kružnice rovněž žádný,



Obr. 15: Nesousstředné kružnice se stejným poloměrem

jeden, dva, nebo nekonečně mnoho, rozdíl je ale v tom, že poslední případ nemusí nastat pouze, pokud je střed kružnic stejný bod, ale i v případě, že vznikne jedna kružnic vhodným posunutím druhé. Jeden z takových případů je ukázán na obr. 15.

V případě, že se poloměry kružnic různí, je situace odlišná. V euklidovské metrice, můžou mít takové kružnice pouze žádný, jeden, a nebo dva průsečíky. V manhattanské navíc může nastat i situace, kdy dvě kružnice s různým poloměrem mají nekonečně mnoho společných bodů. To v případě, že se dotýkají alespoň z části stranami (obr. 16).



Obr. 16: Průsečíky kružnic s různým poloměrem

Co se symetrie týče, manhattanská a euklidovská kružnice se v něčem shodují, na

stranu druhou také ale rozcházejí. Ačkoli jsou obě kružnice středově souměrné podle středu, osová souměrnost manhattanské je omezena pouze na osy procházející kromě středu také vrcholem nebo středem stran. Pravdivost těchto tvrzení se dá odvodit ze symetrií čtverce.

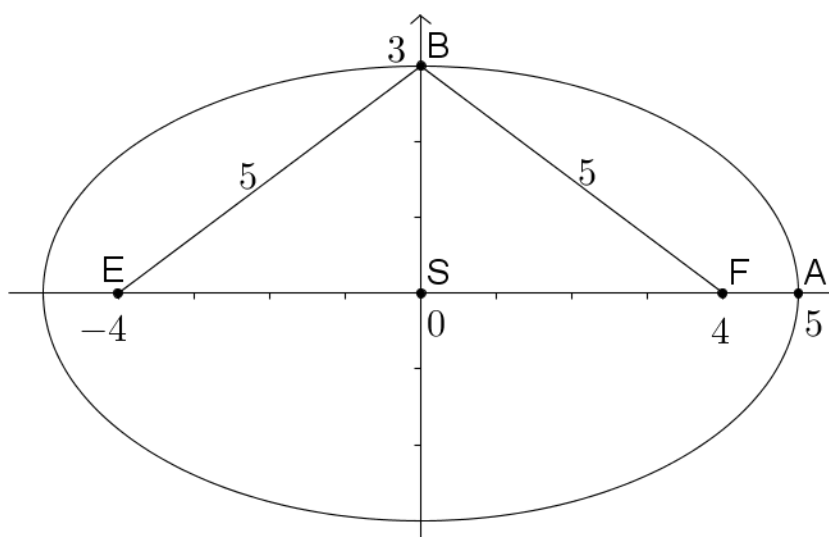
## 5 Elipsa v manhattanské metrice

Nyní, když jsme ukázali, jaký vliv má změna definice vzdálenosti na tvar kružnice, přirozeně se nabízí otázka, jak se tato změna projeví na tvaru dalších geometrických útvarů. Z nich bude strategicky výhodné začít manhattanskou elipsou, protože, jak bude zdůvodněno později, kružnice se ukáže velmi nápomocná při odvozování jejího tvaru.

Stejně tak jako v předchozí kapitole, začneme definicí elipsy a stejně jako v předchozí kapitole použijeme tu středoškolskou: Nechť jsou dány dva různé body (např.  $E$  a  $F$ ) a délka  $2a > |EF|$ . Elipsa je množina všech bodů  $X$  v rovině, pro které platí:

$$|XE| + |XF| = 2a$$

Jinými slovy elipsa je množina všech takových bodů v rovině, u kterých je součet vzdáleností od jednoho a druhého ohniska stejný. Obr. 17 ukazuje elipsu v euklidovské metrice. Body  $E$  a  $F$  jsou její ohniska a bod  $S$ , tedy bod ležící ve středu úsečky spojující ohniska, je střed elipsy.



Obr. 17: *Elipsa v euklidovské metrice*

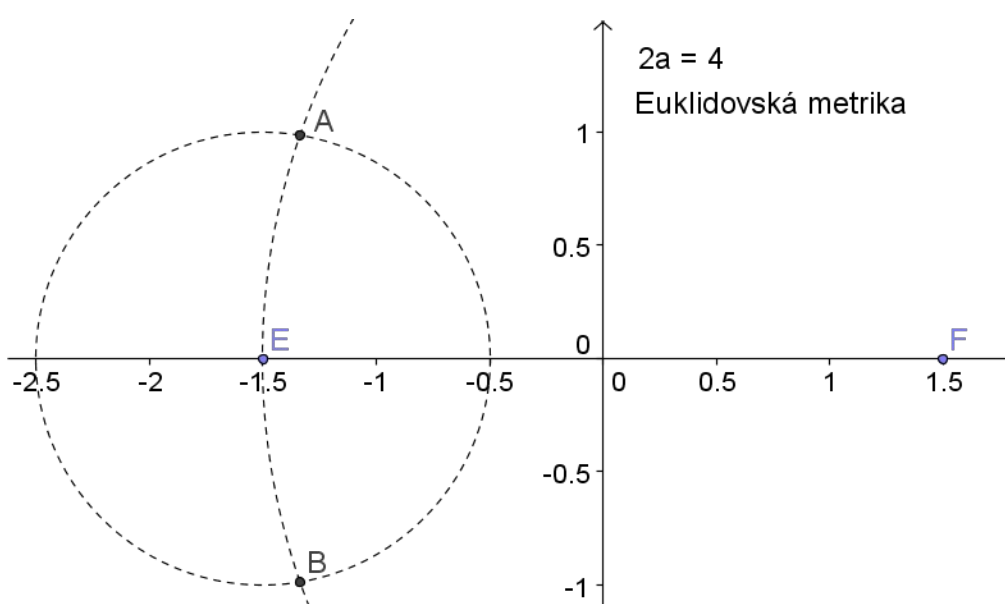
Ovšem i zde lze ukázat, že pokud elipsa v manhattanské metrice existuje, musí mít jiný tvar. Protože ačkoli při euklidovském měření délky je pro všechny body vzdálenost  $2a = 10$ , tak pokud uvažujeme definici vzdálenosti v manhattanské metrice, tak pro bod  $A$  platí

$$|AE| + |AF| = 9 + 1 = 10.$$

Zatímco pro bod  $B$  dostáváme

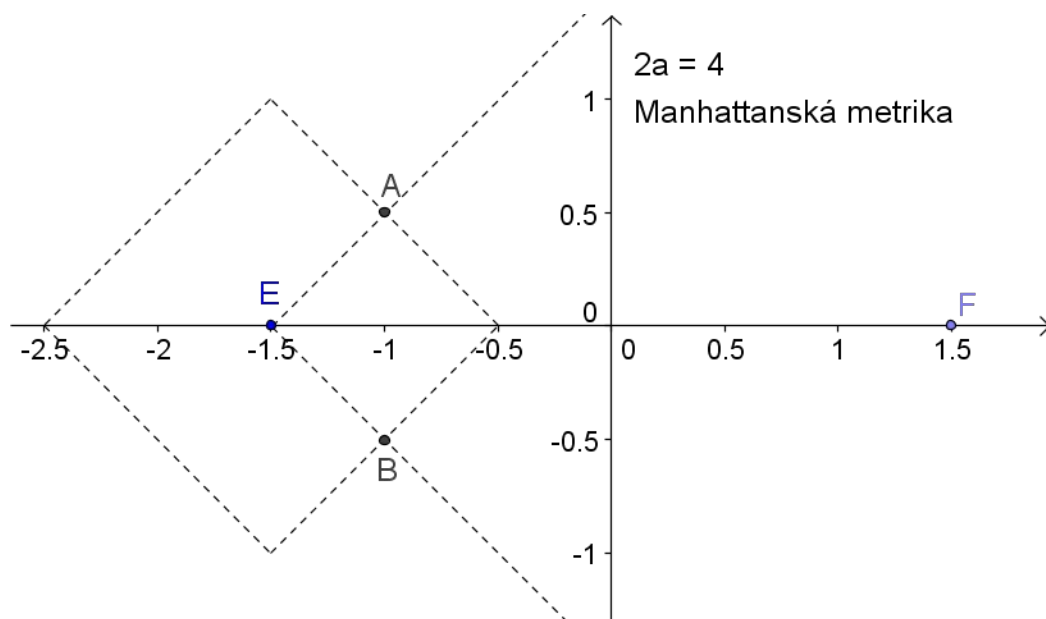
$$|BE| + |BF| = 7 + 7 = 14.$$

Nyní se tedy přirozeně nabízí otázka, jak tvar manhattanské elipsy odvodit. I když způsobů, jak tohoto cíle dosáhnout, je zajisté povícero, jeden z nich byl už nastíněn v úvodu této kapitoly. Řekněme například, že bod na elipse je od ohniska  $E$  vzdálen polovinu  $a$  a od ohniska  $F$  tři poloviny  $a$ . Protože kružnice je množina všech bodů, které mají od daného bodu stejnou vzdálenost, leží hledaný bod v průsečíku dvou kružnic se středy v ohniscích a poloměrem rovným příslušné vzdálenosti (obr. 18 a obr. 19).



Obr. 18: *Bodová konstrukce elipsy v euklidovské metrice*

Kdybychom tedy vzali všechny průsečíky všech dvojic kružnic takových, že každá z kružnic by měla střed v jiném ohnisku a součet poloměrů by byl  $2a$ , pak zcela jistě dostaneme elipsu. Tomuto postupu se říká bodová konstrukce elipsy.



Obr. 19: Bodová konstrukce elipsy v manhattanské metrice

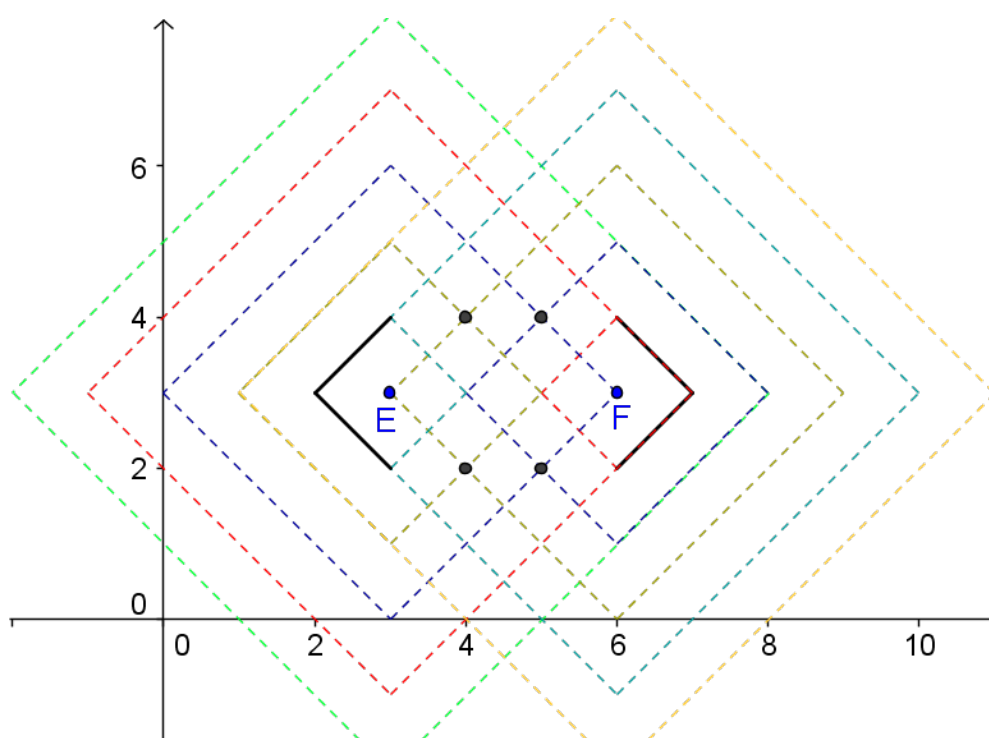
Zde je vhodné poznamenat, že skutečnost, že tento postup vytvoří elipsu, neplyne jen z toho, že každý průsečík zmíněných dvojic kružnic leží na elipse. Mohlo by se totiž stát, že by existoval i bod nebo body na elipse, které pomocí bodové konstrukce vytvořit nejdou. Jinými slovy to, že nějaký postup objeví body nějakého útvaru, ještě neznamená, že je jím možné najít všechny. Avšak zde je patrné, že libovolný bod na elipse se dá interpretovat jako průsečík dvou kružnic se středy v ohniscích, a tedy výsledný útvar bude úplná elipsa.

Nevýhodou bodové konstrukce je, že není v možnostech člověka ani počítače vygenerovat za omezený čas nekonečně mnoho jednotlivých bodů. Mohli bychom ji ovšem použít k vytvoření si představy o tvaru elipsy, o které poté dokážeme, že je správná.

Jak bylo řečeno dříve, dvě manhattanské kružnice mohou mít nekonečně mnoho společných bodů, i když nemají stejný střed či poloměr. Bylo by proto výhodné, kromě dalších kombinací poloměrů, vytipovat právě ty, pro které tento případ nastává. Pro začátek uvažujme, že ohniska leží na přímce rovnoběžné s osou  $x$  a vzdálenost  $2a$  je o délku  $d$  delší než  $|EF|$ .

Začněme tak, že kružnice se středem v ohnisku  $E$  bude mít poloměr  $2a$  a ta se středem v druhém ohnisku  $F$  a poté postupně první poloměr zmenšujeme a druhý o stejný díl

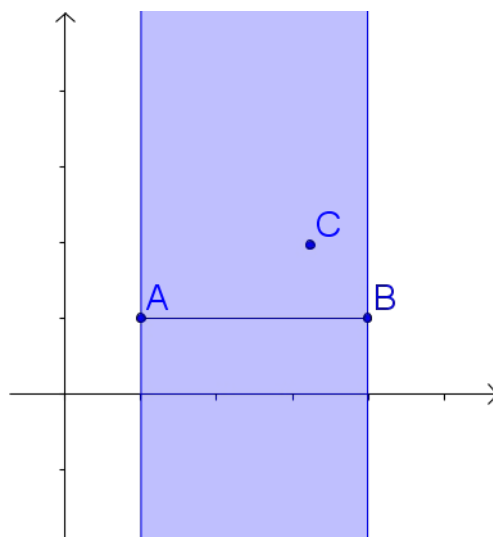
zvětšujeme. Nejprve nedostaneme žádné průsečíky, protože první kružnice bod  $F$  přesahuje. Jakmile ale od prvního z poloměrů odebereme polovinu  $d$  a druhý o tuto vzdálenost zvětšíme, dostaneme situaci, kdy jsou dvě kružnice do sebe zaklíněny (zelená a červená kružnice na obr. 16), a mají tedy nekonečně mnoho společných bodů. Jak se poloměr první dále zmenšuje a poloměr druhé dále zvětšuje, nastávají případy, kdy kružnice mají dva průsečíky. Od okamžiku, kdy jsou poloměry stejně velké, se už situace symetricky opakuje. Obr. 20 ilustruje situaci vybranými kombinacemi poloměrů. Součty poloměrů kružnic stejné barvy se rovnají  $2a = 5$ ,  $|EF| = 3$ , a tedy  $d = 2$ . Černou barvou jsou vyznačeny průsečíky příslušných kružnic.



Obr. 20: Výsledek bodové konstrukce

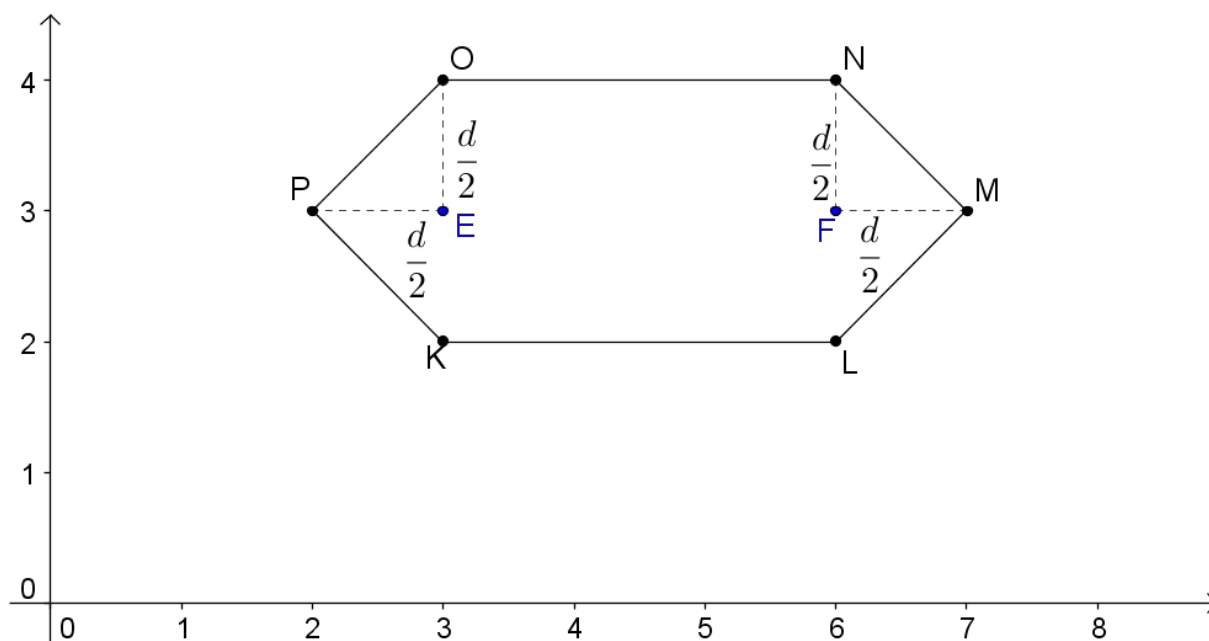
Na obrázku je možné si všimnout toho, že všechny čtyři samostatné průsečíky mají od úsečky  $EF$  stejnou vzdálenost, a to polovinu  $d$ . (Za vzdálenost bodu a úsečky považujeme nejmenší ze vzdáleností bodu a libovolného bodu na dané úsečce. V případě, kdy je úsečka rovnoběžná se souřadnicovou osou a bod leží uvnitř nebo na hranici pásu, který vytyčují kolmice na danou úsečku procházející jejími krajními body (pás je vyznačen modře na obr. 21), je zjevně nejmenší taková vzdálenost rovna délce kolmice na úsečku procházející daným bodem, tedy stejně jako v euklidovské metrice). Zdá se tedy, že průsečíky kružnic, které vznikly tak, že dvě kružnice se

protínaly, nikoli dotýkaly stranami, by mohly všechny být od úsečky  $EF$  stejně vzdáleny.



Obr. 21: *Pás*

Výsledná situace pro elipsu, která byla použita pro ilustraci bodové konstrukce, by vypadala tak, jak ukazuje obr. 22.

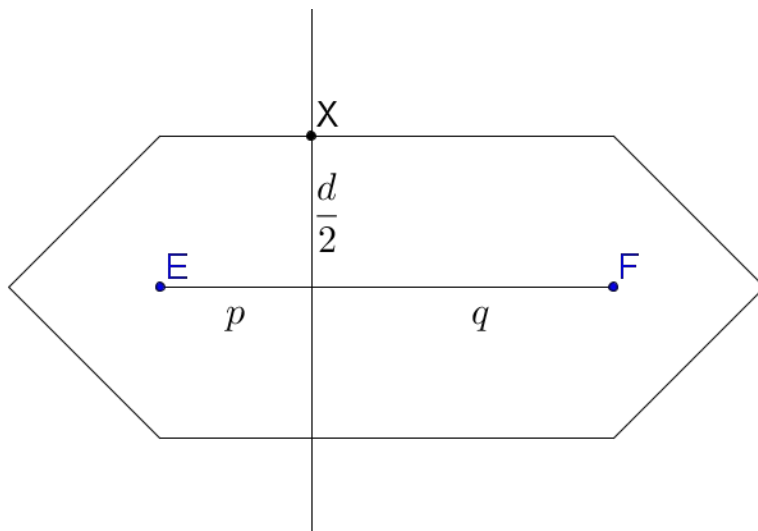


Obr. 22: *Popis elipsy pro speciální polohu ohnisek*

Zkusme tedy dokázat, že tento tvar skutečně odpovídá manhattanské elipse. Stejně jako v případě kružnice rozdělíme důkaz do dvou částí:

- (1) Ukážeme, že každý bod tohoto útvaru splňuje vlastnost požadovanou od bodu na elipse.
- (2) Žádný další bod tuto vlastnost nesplňuje.

Ačkoli je útvar na obr. 22 předpokládanou elipsou pro jedno určité zadání, může dobře ilustrovat obecný případ, pokud vynecháme konkrétní údaje. Jediné, co budeme požadovat, je, aby ohniska ležela na přímce rovnoběžné s osou  $x$  a délka  $2a$  přesahovala délku úsečky  $|EF|$  o  $d$ . První část důkazu rozdělme taktéž na dvě části. V té první se zaměříme na body ležící v pásu ohraničeném kolmicemi na úsečku  $EF$ , které procházejí ohnisky. Veďme libovolným bodem  $X$  předpokládané elipsy, který současně leží ve výše zmíněném pásu, rovnoběžku s osou  $y$  (obr. 23).



Obr. 23: Důkaz pro části rovnoběžné s osou  $x$

Jak bylo popsáno dříve, vzdálenost tohoto bodu od úsečky  $EF$  je právě polovina  $d$ . Dále je z obrázku patrné, že rovnoběžka s osou  $y$  rozdělila úsečku  $EF$  na dvě úsečky. Označme jejich velikosti  $p$  a  $q$ . Musí tedy platit:

$$p + q = |EF|$$

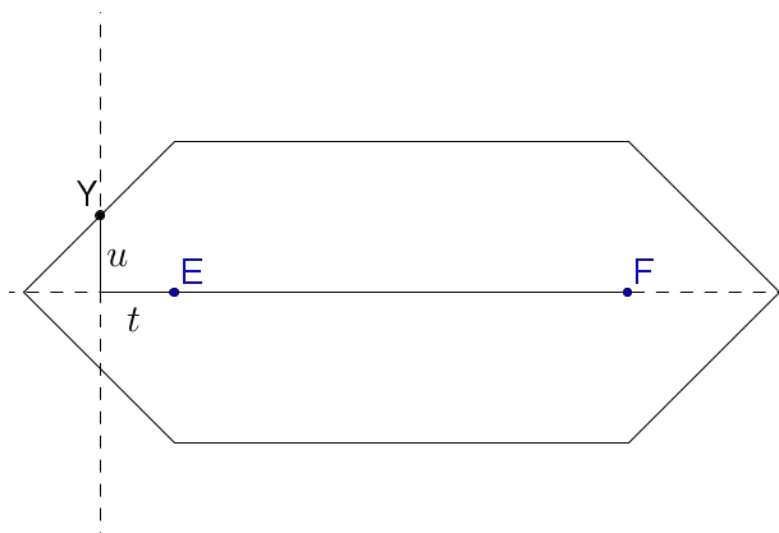
V případě, že bod  $X$  volíme tak, že má stejnou  $x$ -ovou souřadnici jako jedno z ohnisek, pak sice úsečka  $EF$  není rozdělena na dvě části, nicméně protože pak jedna z velikostí  $p$ ,  $q$  je rovna nule, zatímco druhá má velikost právě  $|EF|$ , je výše uvedená rovnost také splněna. Nyní označme  $s$  jako součet vzdáleností  $|EX|$  a  $|FX|$ . Platí tedy:



$$s = |EX| + |FX| = \left(p + \frac{d}{2}\right) + \left(q + \frac{d}{2}\right) = p + q + d = |EF| + d = 2a$$

Tím je dokázáno, že příslušné body v pásu opravdu splňují vlastnosti kladené na bod na elipse.

Nyní zaměříme pozornost na body zbylé. Bez újmy na obecnosti uvažujme právě ty, které jsou blíže ohnisku  $E$ . Jelikož  $E$  je středem kružnice o poloměru  $d/2$ , na jejíž části leží uvažované body, má každý z těchto bodů od ohniska  $E$  vzdálenost rovnou poloměru této kružnice. Protože ohniska  $E$  a  $F$  mají stejné  $y$ -ové souřadnice, je i rozdíl  $y$ -ových souřadnic bodu  $F$  a libovolného uvažovaného bodu ( $Y$ ) stejný jako rozdíl  $y$ -ových souřadnic bodu  $E$  a tohoto bodu. Označme tuto velikost jako  $u$ . Nechť je rozdíl  $x$ -ových souřadnic ohniska  $E$  a uvažovaného bodu  $Y$  rovna  $t$  (obr. 24).



Obr. 24: Důkaz pro části, které nejsou rovnoběžné s osou  $x$

Musí tedy platit:

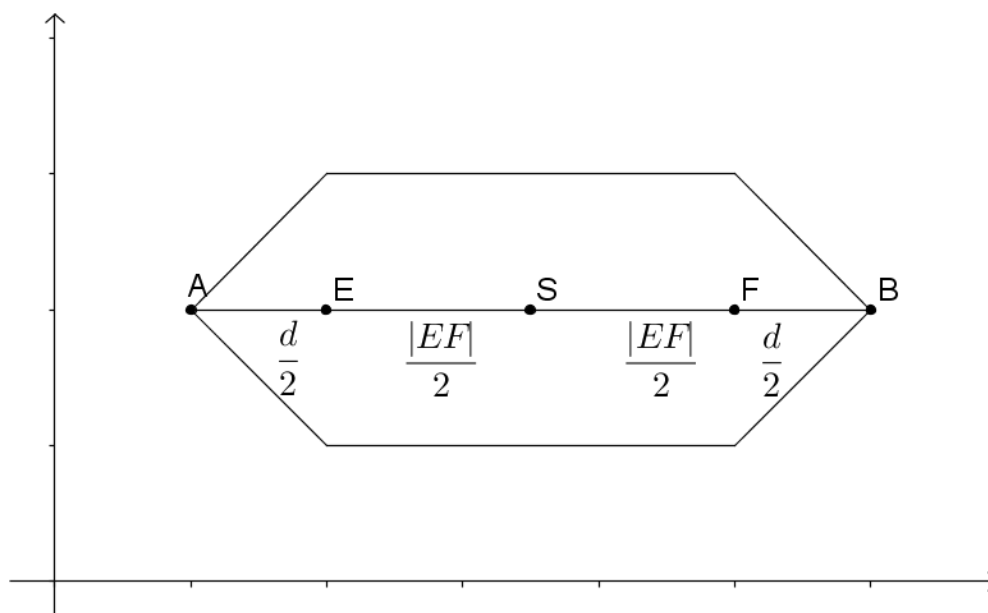
$$u + t = \frac{d}{2}$$

Dále je patrné, že rozdíl  $x$ -ových souřadnic bodů  $F$  a  $Y$  je o  $|EF|$  větší než  $t$ . Označme  $v$  jako součet vzdáleností  $|EY|$  a  $|FY|$ . Z definice vzdálenosti v manhattanské metrice dostáváme:

$$v = |EY| + |FY| = (u + t) + (u + |EF| + t) = 2u + 2t + |EF| = d + |EF| = 2a$$

Pro body blíže ohnisku  $F$  by byl postup důkazu analogický. Všechny zbylé body tedy splňují vlastnosti bodů ležících na elipse, čímž je část (1) důkazu dokončena.

Než přistoupíme k druhé části, zkusme ukázat jednu důležitou vlastnost dvou speciálních bodů elipsy, které v důkazu figurují. Nejprve nazvěme střed úsečky  $EF$  středem elipsy a označme jej  $S$ . Všimněme si, že přímka  $EF$  protíná předpokládanou elipsu ve dvou bodech. Označme je  $A$  a  $B$ . Tvrdíme: Necht'  $S = [m; n]$ . Pak  $A = [m-a; n]$  a  $B = [m+a; n]$ .



Obr. 25: Vzdálenosti mezi význačnými body elipsy

O pravdivosti tvrzení rychle přesvědčí pohled na obr. 25. Jelikož je  $S$  středem  $EF$  musí platit:

$$|SA| = \frac{|EF|}{2} + \frac{d}{2} = \frac{|EF| + d}{2} = \frac{2a}{2} = a = |SB|$$

Z toho již plyne, že  $x$ -ová souřadnice bodu  $A$  je o  $a$  menší než  $m$  a  $x$ -ová souřadnice bodu  $B$  je o  $a$  větší než  $m$ .

Samotná druhá část důkazu pak přibližně kopíruje důkaz tvaru manhattanské kružnice. S tím rozdílem, že zde nejdříve prodiskutujeme body ležící mimo pás ohraničený přímkami kolnými na osu  $x$  a procházejícími body  $A$  a  $B$ . Bez újmy na obecnosti uvažujme body, které jsou blíže bodu  $A$ . Je důležité uvědomit si, že protože bod  $A$  leží na elipse, je součet vzdáleností tohoto bodu od jednotlivých ohnisek roven  $2a$ . A navíc, tento součet je právě roven velikosti součtu rozdílů  $x$ -ových souřadnic bodu  $A$  a jednotlivých ohnisek, protože tento bod leží na přímce  $EF$  a má tak stejnou  $y$ -ovou souřadnici jako ohniska. Vyjádřeno rovnicí dostáváme

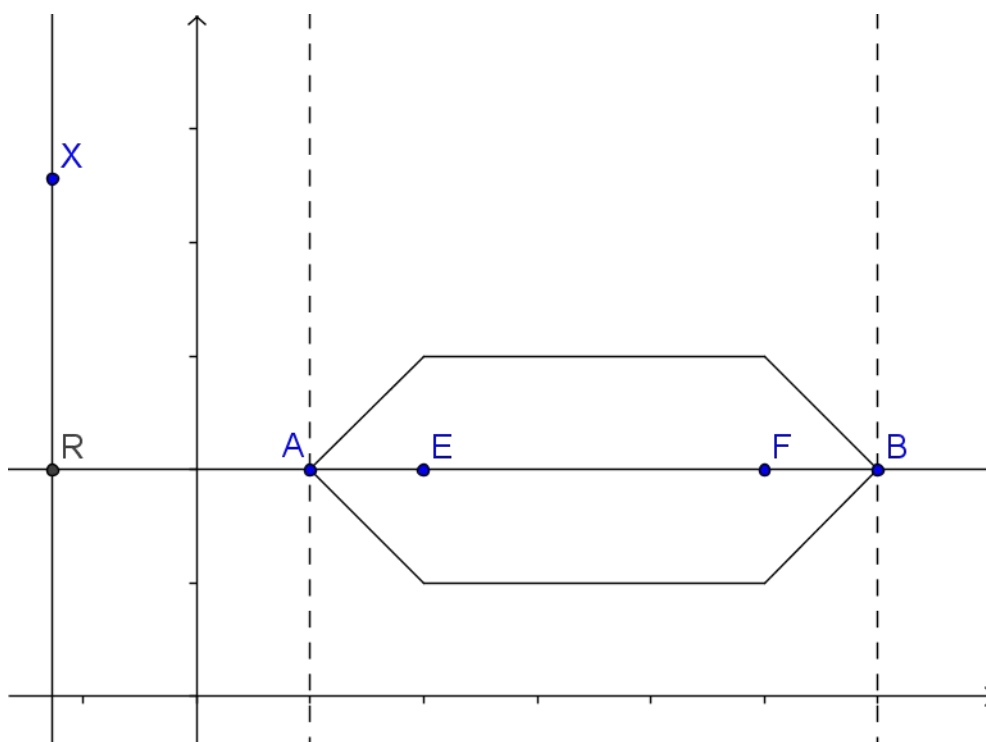
$$2a = |a_1 - e_1| + |a_2 - e_2| + |a_1 - f_1| + |a_2 - f_2| = \\ = |a_1 - e_1| + 0 + |a_1 - f_1| + 0 = |a_1 - e_1| + |a_1 - f_1|,$$

kde  $A = [a_1; a_2]$ ,  $E = [e_1; e_2]$  a  $F = [f_1; f_2]$ .

Veďme bodem  $X$ , ležícím mimo pás rovnoběžku s osou  $y$ . Ta protne přímku  $EF$  v jednom bodě, označme jej  $R$  (obr. 26). Všimněme si, že platí:

$$|EX| + |FX| \geq |ER| + |FR|$$

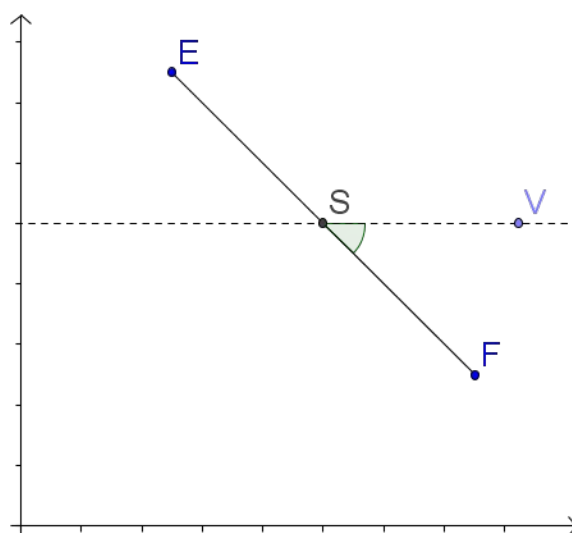
Rovnost nastává pouze tehdy, jsou-li body  $X$  a  $R$  totožné. To proto, že oba mají stejné  $x$ -ové souřadnice. V případě, že se jejich  $y$ -ové souřadnice liší, pak je levá strana nerovnice větší než pravá, protože rozdíl  $y$ -ových souřadnic bodu  $X$  a jednotlivých ohnisek je nenulový.



Obr. 26: Důkaz pro body mimo pás

Nyní, protože bod  $R$  má stejnou  $y$ -ovou souřadnici jako bod  $A$ , ale v  $x$ -ové souřadnici má větší vzdálenost od jednotlivých ohnisek než bod  $A$ , je patrné, že i součet vzdáleností od jednotlivých ohnisek (označme jako  $r$ ) je větší než ten u  $A$ . A protože bod  $A$  leží na elipse, je velikost  $r$  větší než  $2a$ . Tím pádem je i  $|EX| + |FX|$  větší než  $2a$ , tedy takový bod  $X$  nemůže náležet příslušné elipse.





Obr. 28: *Vzájemná poloha ohnisek  $s$  vyznačeným středem a úhlem*

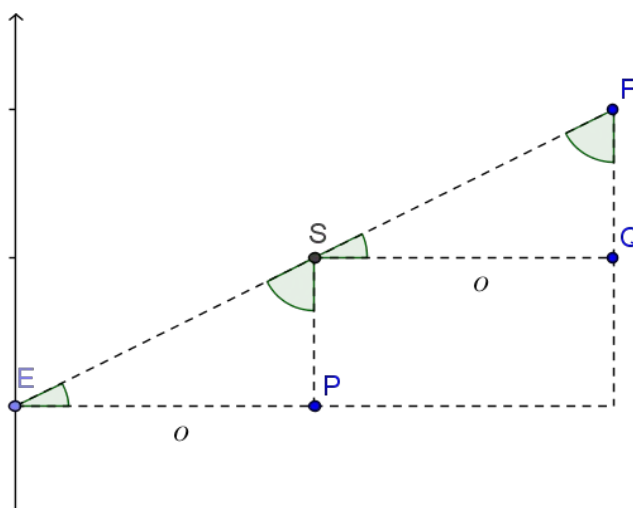
Jakkoli se takto zavedený systém popisu vzájemné polohy dvou bodů může zdát elegantní, má jednu velmi zásadní vadu. V jeho zavedení jsme hovořili o úsečce a jejím středu. Chápeme-li úsečku jako nejkratší spojnici dvou bodů, pak vzhledem k tomu, co jsme ukázali v kapitole 3, takových spojnic v manhattanské metrice existuje, až na speciální případy polohy bodů, více než jedna a chápeme-li střed úsečky jako bod, který leží na dané spojnici a má stejnou vzdálenost od obou krajních bodů, pak je i tento střed určen nejednoznačně. Navíc systém používá pojmu úhlu, který v této práci nebyl nijak definován vzhledem k manhattanské metrice, tím spíše není zaručeno, že jeho velikost se bude shodovat s velikostí úhlu v metrice euklidovské. Ve své podstatě by to znamenalo, že vlastnosti objektů v jedné metrice bychom popisovali na základě vlastností objektů v metrice jiné. Zvláštnost takového popisu by se dala přirovnat k zvláštnosti věty: „Tento text je napsán anglicky,“ při překladu z angličtiny do češtiny.

Pokud tedy budeme chtít systém upravit tak, aby zmíněné problémy byly odstraněny a jeho jednoduchost zůstala zachována, aniž bychom složitě doplňovali definice, je vhodné využít dostupných prostředků. Komplikace s nejednoznačností středu úsečky se dá obejít, zvolíme-li přímočařejší postup. V euklidovském pojetí úsečky má její střed souřadnice:

kde  $e_1, e_2, f_1$  a  $f_2$  jsou souřadnice bodu  $E$ , respektive  $F$ . Upraveno z [13, str. 18].

$$S = \left[ \frac{e_1 + f_1}{2}; \frac{e_2 + f_2}{2} \right],$$

O pravdivosti tohoto tvrzení rychle přesvědčí pohled na obr. 29.



Obr. 29: Poloha bodů  $E$ ,  $S$  a  $F$

Trojúhelníky  $EPS$  a  $SQF$  jsou zjevně shodné podle věty *usu*. Znamená to tedy, že i jednotlivé souřadnice středů se liší o stejně velké číslo od téže souřadnice bodu  $E$  i  $F$ . Pro jednoduchost uvažujme nyní pouze  $x$ -ové souřadnice. Označme velikost této odchylky  $o$ . Vyjádříme-li  $f_1$  v závislosti na  $o$  a  $e_1$ , dostaneme:

$$f_1 = e_1 + 2o$$

Navíc pro  $x$ -ovou souřadnici bodu  $S$  musí platit:

$$s_1 = e_1 + o$$

Nyní upravujme předpokládaný výraz souřadnice bodu  $S$  na tvar uvedený v poslední rovnici, čímž ukážeme, že je s ním ekvivalentní:

$$s_1 = \frac{e_1 + f_1}{2} = \frac{e_1 + e_1 + 2o}{2} = \frac{2e_1 + 2o}{2} = e_1 + o$$

Díky této skutečnosti nyní můžeme pro libovolná dvě ohniska najít pouze za pomoci jejich souřadnic bod  $S$ , který má, jak vyplývá z důkazu, od obou ohnisek stejnou vzdálenost, a dokonce i absolutní hodnota rozdílu  $x$ -ových, respektive  $y$ -ových souřadnic každého ohniska a bodu  $S$  je stejná. (Na obr. 29 je toto reprezentováno stejnou délkou odvěsen trojúhelníků  $EPS$  a  $SQF$ .)

Těmito rozdíly v jednotlivých souřadnicích bychom mohli nahradit velikost úhlu v původním systému. Definujme dva nové výrazy:

$$\Delta_{x_F} = f_1 - s_1$$

$$\Delta_{y_F} = f_2 - s_2$$

Zde  $f_1, f_2, s_1$  a  $s_2$  jsou souřadnice bodu  $F$ , respektive  $S$ . Vzájemnou polohu bodů  $E$  a  $F$ ,  $P(E, F)$ , definujeme pomocí následující uspořádané trojice:

$$P(E, F) = (S, \Delta_{x_F}, \Delta_{y_F})$$

Je dobré povšimnout si, že pokud bychom obdobně definovali i  $\Delta_{x_E}$  a  $\Delta_{y_E}$  s tím rozdílem, že místo souřadnic bodu  $F$  bychom použili souřadnice bodu  $E$ , potom, jak plyne z obr. ???, by muselo platit:

$$|\Delta_{x_F}| = |\Delta_{x_E}|$$

A také:

$$|\Delta_{y_F}| = |\Delta_{y_E}|$$

To proto, že jednotlivé výrazy v rovnostech představují velikosti odvěsen trojúhelníků  $EPS$  a  $SQF$ . Z obr. 29 je dále patrné, že kdykoli má bod  $F$   $x$ -ovou či  $y$ -ovou souřadnici větší, než je příslušná souřadnice bodu  $S$ , má bod  $E$  stejnou souřadnici menší, než je příslušná souřadnice bodu  $S$  a obráceně. V případě, že se jedna ze souřadnic bodu  $F$  rovná téže souřadnici bodu  $S$ , pak i souřadnice bodu  $E$  musí být stejná. Z této úvahy tedy dostáváme:

$$\Delta_{x_F} = -\Delta_{x_E}$$

A analogicky:

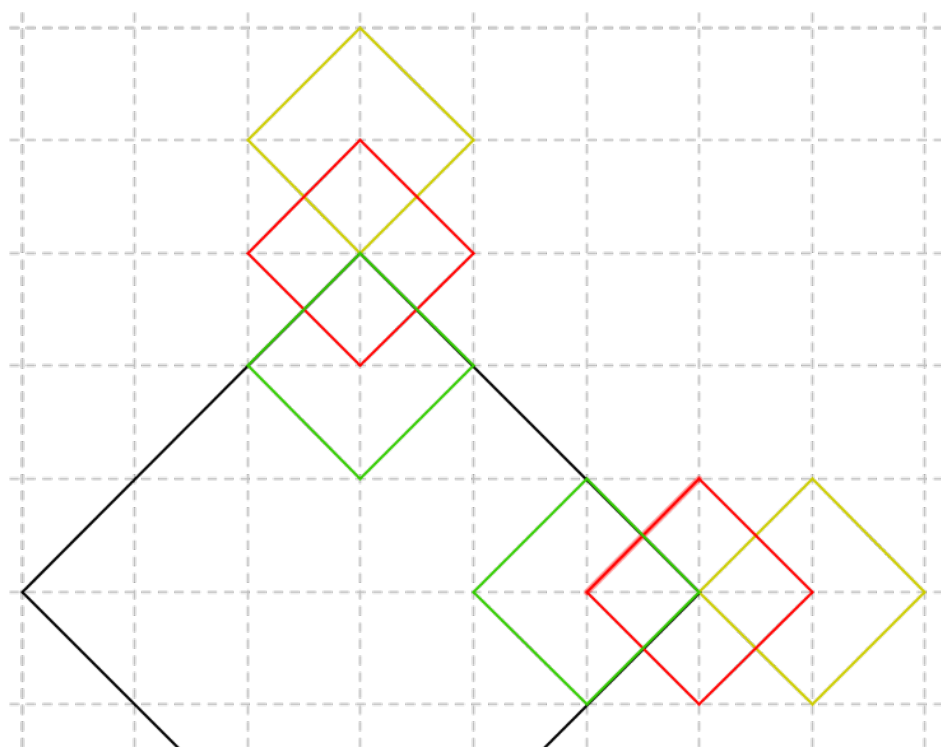
$$\Delta_{y_F} = -\Delta_{y_E}$$

Pro každou dvojici bodů tedy dostáváme jednoznačně určenou uspořádanou trojici, a navíc každá uspořádaná trojice jednoznačně určuje dva body. (Důkaz ponechán jako příklad k procvičení, kapitola Příklady, zadání 6)

Nyní, když umíme efektivně vyjádřit vzájemnou polohu dvou bodů, můžeme se pustit do zkoumání tvaru elipsy pro různé polohy ohnisek. Pro jednoduchost začneme speciálním případem  $(S, 0, \Delta_{y_F})$ , jinak řečeno situací, kdy ohniska leží na přímce rovnoběžné s osou  $y$ .

Nejprve je dobré si připomenout, že každý bod na elipse můžeme interpretovat jako průsečík dvou kružnic se středy v ohniscích elipsy a se součtem poloměrů rovným  $2a$ .

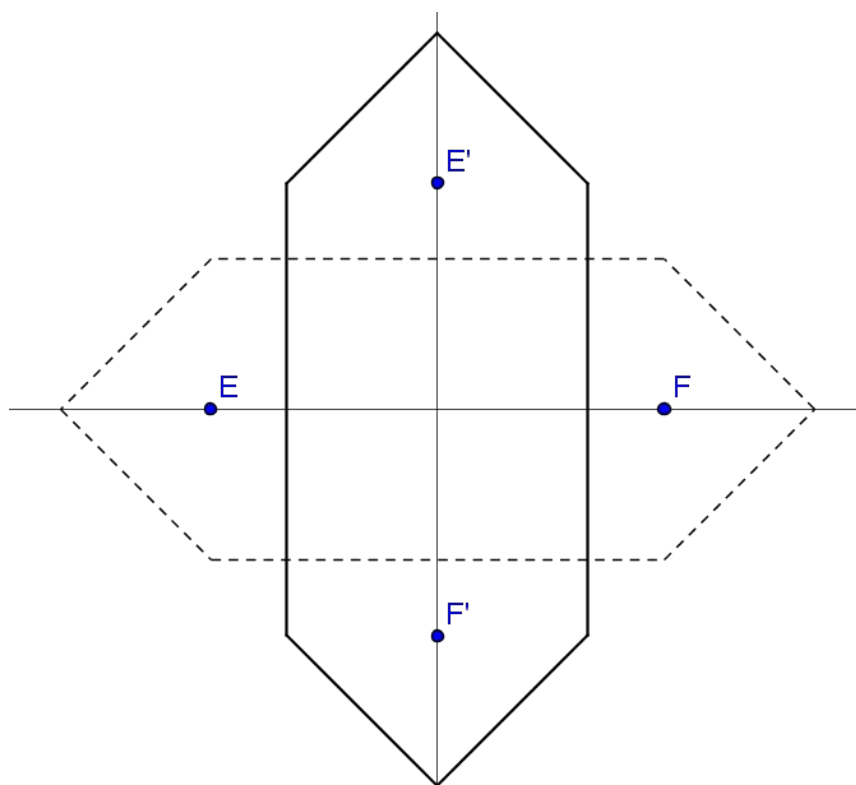
Jak ukazuje obr. 30, změna polohy středů kružnic neovlivňuje počet průsečíků, které kružnice mají. Jediné, co se změnilo, je, že rozdíl souřadnic průsečíků kružnic od středů v  $y$ -ové souřadnici se nyní stal rozdílem souřadnic v  $x$ -ové souřadnici, a naopak.



Obr. 30: Srovnání průsečíků kružnic

Tudíž pro ohniska ležící na přímce rovnoběžné s osou  $y$  dostaneme tvarově shodnou elipsu, pouze jinak orientovanou. Obr. 31 tuto situaci ilustruje, a navíc ji porovnává s elipsou, jak byla odvozena pro ohniska ležící na rovnoběžce s osou  $x$  a stejným bodem  $S$ .





Obr. 31: *Elipsa s ohnisky na přímce rovnoběžné s osou y*

Cílem této kapitoly je odvodit a popsat tvar manhattanské elipsy tak, aby pro každou vzájemnou polohu ohnisek bylo jasné, jak taková elipsa vypadá. Než se ale do tohoto úkolu pustíme, formulujme čtyři věty, které zjednoduší proces odvozování. První formulujme následovně: „Elipsa se vzájemnou polohou ohnisek  $P(E, F) = (S, \Delta_{xF}, \Delta_{yF})$  je tvarově shodná s elipsou se vzájemnou polohou ohnisek  $P(G, H) = (S, -\Delta_{xF}, -\Delta_{yF})$ , která má stejnou velikost parametru  $2a$ .“

Důkaz tohoto tvrzení se stane zřejmým, uvědomíme-li si, že věta se dá parafrázovat jako: „Tvar elipsy se nezmění, pokud zaměníme její ohniska.“ To vyplývá z rovností

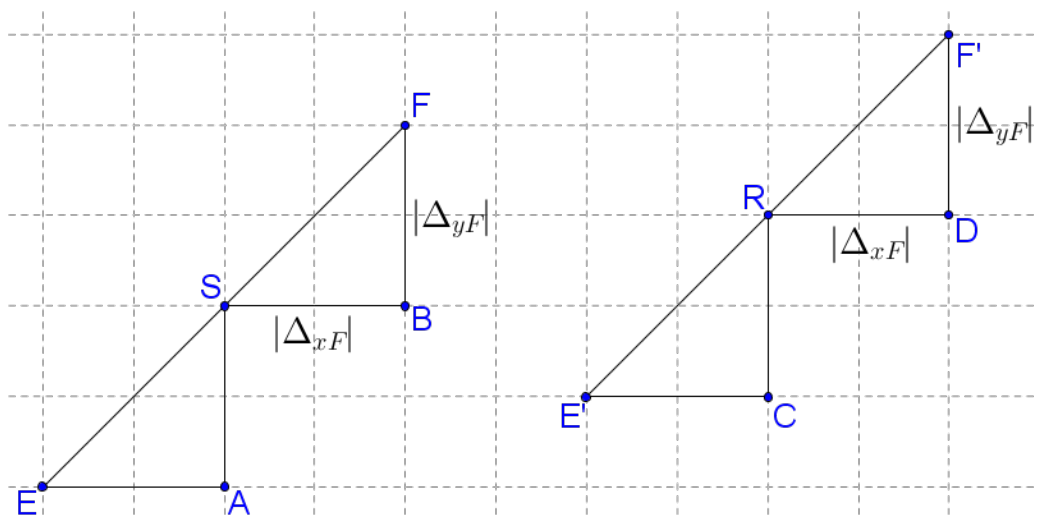
$$\Delta_{xF} = -\Delta_{xE}$$

a

$$\Delta_{yF} = -\Delta_{yE}$$

odvozených v této kapitole. Protože v bodové konstrukci elipsy nastane vždy situace, že pokud má kružnice se středem v jednom ohnisku poloměr  $r_1$  a kružnice se středem v druhém ohnisku  $r_2$ , pak je v bodové konstrukci obsažena i dvojice kružnic se stejnými poloměry a středy vždy v druhém ohnisku.

Druhou z vět formulujme takto: „Nechť má elipsa vzájemnou polohu ohnisek  $P(E, F) = (S, \Delta_{xF}, \Delta_{yF})$ . Potom je tvarově shodná s elipsou, která má stejnou velikost parametru  $2a$  a se vzájemnou polohou ohnisek  $P(G, H) = (R, \Delta_{xG}, \Delta_{yG})$ , kde bod  $R$  je libovolný bod v rovině.“ Jinak řečeno to znamená, že posuneme-li obě ohniska o stejný libovolný vektor, tvar elipsy se nezmění. Tato formulace plyne z obr. 32.



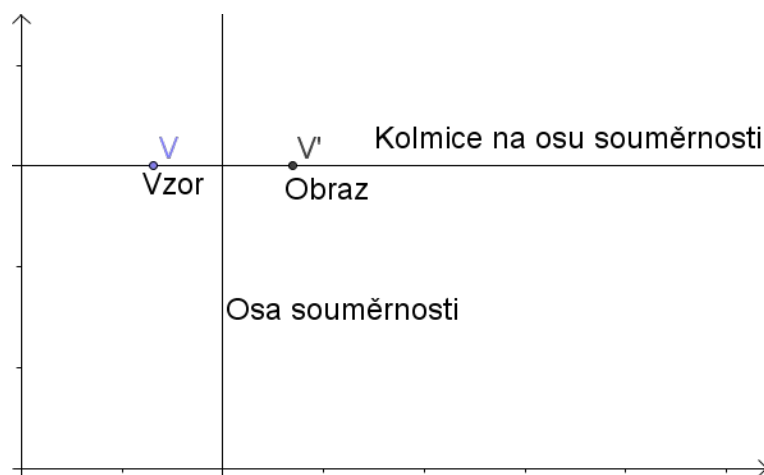
Obr. 32: Ilustrace druhé věty

Na něm je ze shodnosti příslušných trojúhelníků patrné, že posunutím ohnisek se o stejný vektor posune i bod  $S$ . A protože, jak bylo ukázáno v kapitole 4, je tvar manhattanské kružnice nezávislý na souřadnicích jejího středu, pokud posunu příslušné kružnice v bodové konstrukci elipsy, jejich průsečíky se rovněž posunou o stejný vektor, a tím pádem se ve výsledku posune celá elipsa bez toho, aby se změnil její tvar.

Než budeme formulovat zbylé dvě věty, je potřeba připomenout si, co je to osová souměrnost. Osová souměrnost je shodné zobrazení, které každému bodu v rovině (vzor) přiřadí takový bod (obraz), který leží na kolmici k ose souměrnosti procházející vzorovým bodem a který má stejnou vzdálenost od přímky, jako má vzor. V následující větě budeme uvažovat pouze osy rovnoběžné se souřadnicovými osami, tedy kolmice na ně budou rovněž s nimi rovnoběžné, pochopitelně vždy s druhou z dvojice. A protože vzdálenost dvou bodů na těchto přímkách bude vždy určena rozdílem hodnot v příslušné souřadnici, platí podle definic manhattanské a euklidovské metriky následující vztah

$$|CD| = |d_i - c_i| = \sqrt{(d_i - c_i)^2},$$

kde  $C$  a  $D$  jsou body na takové přímce a  $c_i, d_i$  jsou souřadnice těchto bodů. Zda-li jsou to  $x$ -ové, nebo  $y$ -ové souřadnice, určuje rovnoběžnost přímky se souřadnicovou osou. Pokud je rovnoběžná s osou  $x$ , jsou to souřadnice  $x$ -ové, pokud s osou  $y$ , jsou  $y$ -ové. Takto zdefinovaná osová souměrnost je tedy stejná v manhattanské i euklidovské metrice. Pro ilustraci slouží obr. 33.



Obr. 33: *Osová souměrnost*

Třetí z vět říká toto: „Nechť bod  $S$  má souřadnice

$$S = \left[ \frac{e_1 + f_1}{2}; \frac{e_2 + f_2}{2} \right],$$

a necht' bod  $G$  je obrazem ohniska  $E$  v osově souměrnosti s osou, která je rovnoběžná s osou  $x$ , respektive  $y$ , a která prochází bodem  $S$ , a také necht' bod  $H$  je obrazem ohniska  $F$  v téže souměrnosti. Potom platí:

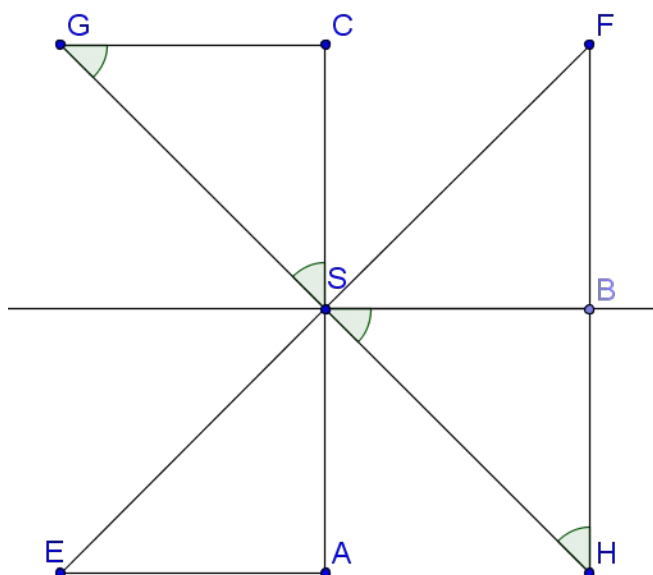
$$S = \left[ \frac{g_1 + h_1}{2}; \frac{g_2 + h_2}{2} \right],$$

kde  $g_1, g_2, h_1$  a  $h_2$  jsou souřadnice bodů  $G$  a  $H$ .“

Toto tvrzení můžeme dokázat například následovně. Zvolme nějakou vzájemnou polohu bodů  $E$  a  $F$ . I když tento případ je konkrétní, pro jakoukoli jinou polohu by důkaz probíhal stejně. Na obr. 34 je dobře vidět, že trojúhelníky  $GCS$  a  $SBH$  jsou shodné podle věty *usu*. Tedy pokud zopakujeme postup, který jsme využili pro dokázání pravdivosti tvrzení, že bod  $S$  má souřadnice

$$S = \left[ \frac{e_1 + f_1}{2}; \frac{e_2 + f_2}{2} \right],$$

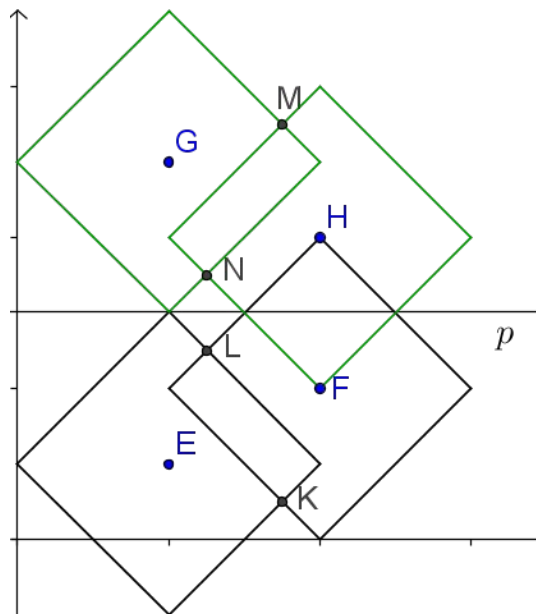
dostaneme vztah pro souřadnice bodu  $S$  v závislosti na souřadnicích bodů  $G$  a  $H$ , který jsme měli ověřit.



Obr. 34: *Ilustrace třetí věty*

Čtvrtou větu formulujme následovně: „Nechť bod  $G$  je obrazem bodu  $E$  v osové souměrnosti s osou rovnoběžnou s jednou ze souřadnicových os a bod  $H$  je obrazem bodu  $F$  v téže souměrnosti. Pak elipsa, která má velikost parametru  $2a$  a ohniska v bodech  $G$  a  $H$ , je osově souměrná podle výše uvedené osy s elipsou s ohnisky  $E$  a  $F$  a stejnou velikostí parametru  $2a$ .“

Důkaz tohoto tvrzení rovněž ilustrujme graficky na obr. 35. Protože každý bod na elipse lze interpretovat jako průsečík dvou kružnic se středy v ohniscích, vyberme takovou dvojici kružnic. Jak je patrné, zobrazením těchto kružnic v osové souměrnosti dostaneme kružnice se stejnými poloměry a středy v obrazech původních ohnisek a to tak, že každý bod je obrazem vzoru ve stejné souměrnosti. A jelikož i průsečík dvou kružnic je bodem na kružnici, znamená to, že průsečíky vzorových kružnic se zobrazí na průsečíky kružnic, které jsou jejich obrazy. Tedy je-li elipsa množinou všech průsečíků výše zmíněných dvojic kružnic, musí být elipsa s ohnisky, které vznikly zobrazením původních ohnisek v osové souměrnosti s osou souměrnosti rovnoběžnou s jednou ze souřadnicových os, rovněž osově souměrná s původní elipsou.



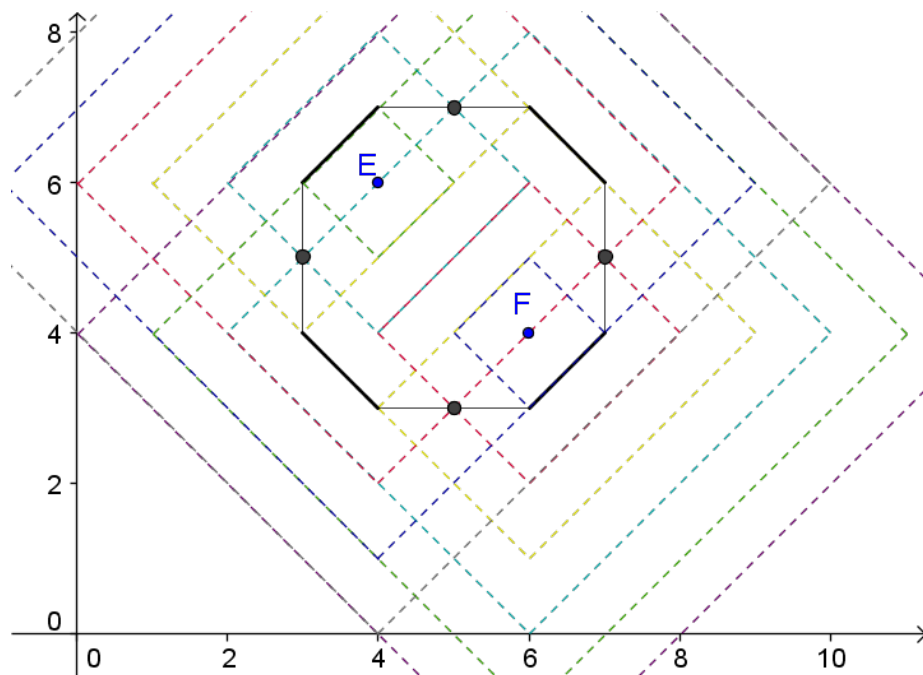
Obr. 35: Kružnice v osové souměrnosti

Za povšimnutí jistě stojí, že poslední věta se dá snadno upravit tak, aby se nevztahovala pouze na elipsu, ale víceméně na jakýkoli útvar, který vzniká bodovou konstrukcí.

Tyto věty slouží jako užitečné nástroje, protože pomocí nich můžeme k jednomu speciálnímu případu polohy ohnisek a parametru  $2a$  najít tvary libovolně mnoha dalších případů v závislosti na zvoleném posunutí a souměrnosti.

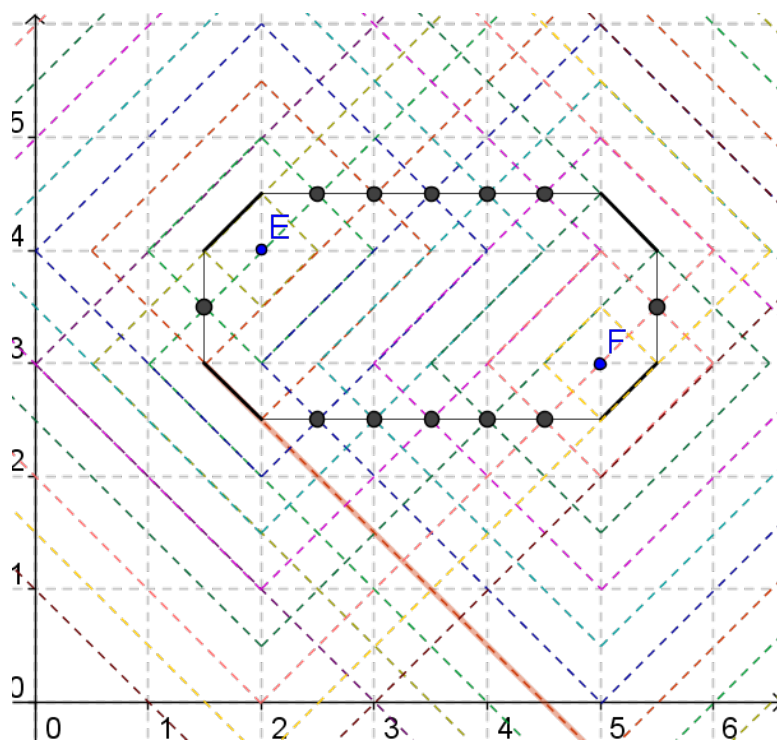
Stejně tak jako v předešlých případech, začneme při odvozování tvaru elipsy pro obecné případy konkrétními. Pomocí bodové konstrukce odhadněme očekávaný tvar elipsy pro několik vzájemných poloh ohnisek a hodnot parametru  $2a$ , zanalyzujeme a zobecníme ho a dokažme, že je platný. Vzhledem k tomu, že tento proces byl popsán už dříve, slovní komentář nebude příliš rozsáhlý.

Obr. 36 znázorňuje bodovou konstrukci elipsy se vzájemnou polohou ohnisek  $P(E,F) = ([5;5], 1, -1)$  a parametrem  $2a = 6$ . Sytě černě jsou vyznačeny objekty, které vznikly jako průsečíky příslušných dvojic vyobrazených kružnic, slabě černě je pak naznačen předpokládaný tvar celé elipsy.



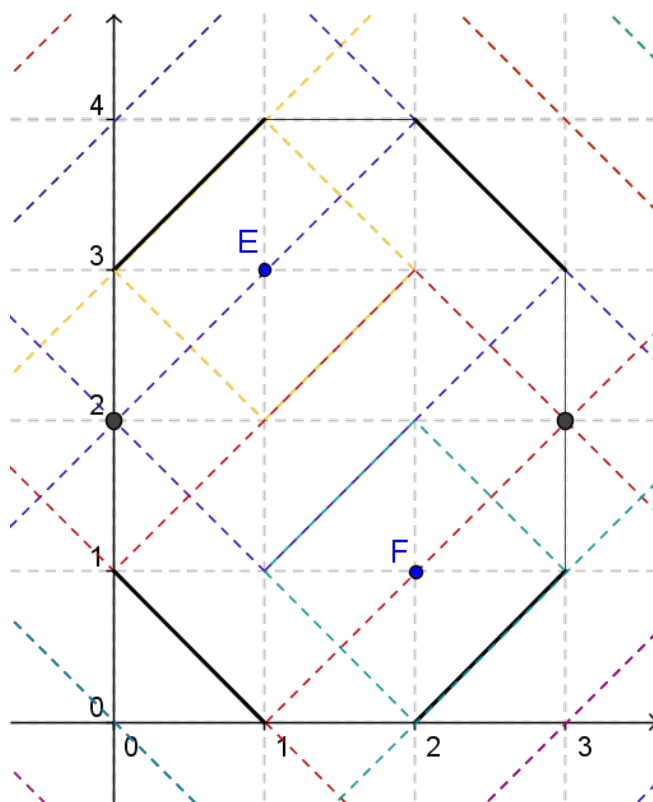
Obr. 36: Bodová konstrukce

Obr. 37 ukazuje tvar předpokládané elipsy pro  $P(E,F) = ([3,5;3,5], 1,5, -0,5)$  a hodnotu parametru  $2a = 5$ .



Obr. 37: Bodová konstrukce

Na obr. 38 je naznačen předpokládaný tvar elipsy pro  $P(E,F) = ([1,5;2], 0,5, -1)$  a hodnotu  $2a = 5$ .



Obr. 38: Bodová konstrukce

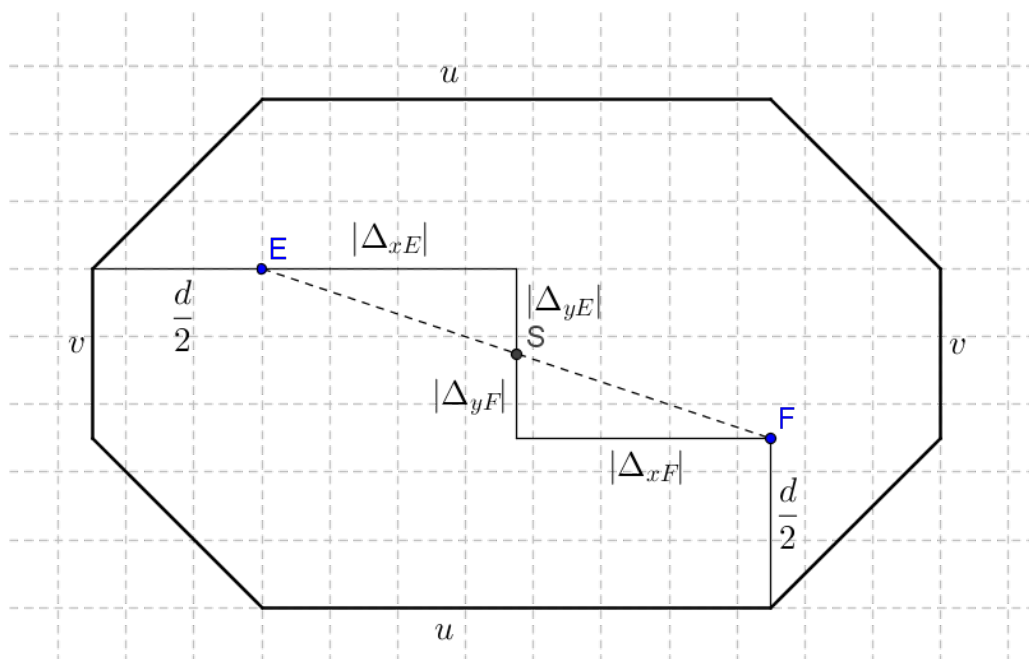
Jak se zdá, tak oproti speciálním případům, kdy obě ohniska ležela na přímce rovnoběžné se souřadnicovou osou, má elipsa pro ostatní případy osmiúhelníkový tvar. Navíc předcházející ilustrace naznačují, že délka částí elipsy, které jsou rovnoběžné se souřadnicovou osou, mají délku odpovídající absolutní hodnotě rozdílu souřadnic ohnisek, a to těch, které se vyznačují na ose, se kterou je daná část rovnoběžná. Ze vztahů, které platí pro  $\Delta_{xF}$ ,  $\Delta_{xE}$ ,  $\Delta_{yF}$  a  $\Delta_{yE}$ , by pro délku těchto částí vyplývalo:

$$u = |\Delta_{xF}| + |\Delta_{xE}| = 2|\Delta_{xF}|,$$

Respektive:

$$v = |\Delta_{yF}| + |\Delta_{yE}| = 2|\Delta_{yF}|$$

Zde  $u$  je délka libovolné části rovnoběžné s osou  $x$  a  $v$  délka libovolné části rovnoběžné s osou  $y$ . Navíc, pokud  $2a$  přesahuje  $|EF|$  o  $d$ , pak se zdá, že dvě části, které nejsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a jsou blíže k jednotlivým ohniskům než zbylé dvě nerovnoběžné části, jsou stranou kružnice se středem v bližším ohnisku a poloměrem rovným polovině  $d$ . Obr. 39 ukazuje elipsu s doplňujícím popisem.



Obr. 39: Popis elipsy pro obecnou polohu ohnisek

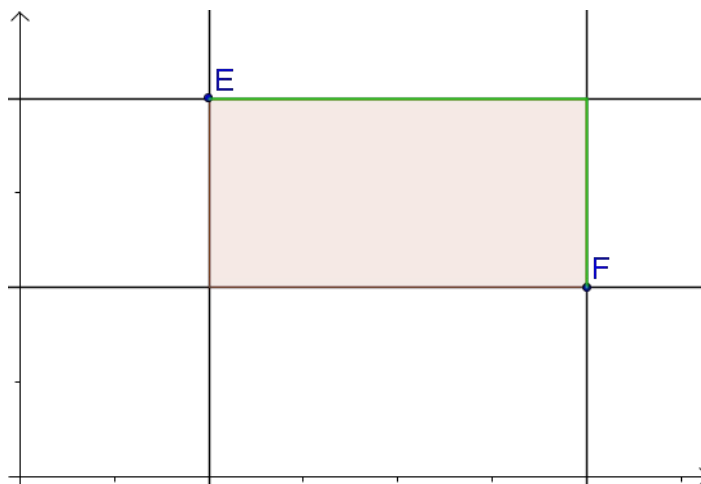
Důkaz toho, že manhattanská elipsa má skutečně tento tvar, je obdobný tomu, který jsme prováděli pro speciální případ, kdy ohniska byla rovnoběžná s osou  $x$ , a opět se skládá ze dvou částí, kdy v jedné ukážeme, že všechny body předpokládané elipsy splňují vlastnosti na ně kladené, a v části druhé to, že žádný další bod tyto vlastnosti nesplňuje.

První část provedme zvlášť pro dvě skupiny částí elipsy. Pro části nerovnoběžné se souřadnicovými osami, které jsou blíže k jednotlivým ohniskům než zbylé dvě nerovnoběžné části, je důkaz totožný s pasáží důkazu pro speciální případ, kde se řešily části elipsy, které náležely kružnicím se středem v ohniscích a poloměr rovným polovině  $d$ . Jen pro připomenutí šlo o to, že vzdálenost mezi ohnisky je  $|EF|$  a ke každému bodu v příslušné části je vzdálenost od každého ohniska ještě polovina  $d$ . Tedy celkem  $|EF| + d = 2a$ .

K důkazu pro ostatní části využijeme syntézu poznatků z kapitoly 3. Jednak toho, že mezi dvěma body ( $E$  a  $F$ ) existuje více než jedna spojnice, která má délku rovnou  $|EF|$ , a že rovnost v trojúhelníkové nerovnosti nastává pro spojnice, které se v žádném svém úseku nevracejí, a tím pádem se žádnou svou částí nenachází mimo plochu ohraničenou rovnoběžkami se souřadnicovými osami procházejícími body  $E$  a  $F$ . Tím pádem i spojnice vedoucí po dvou sousedních stranách, které tuto plochu ohraničují,

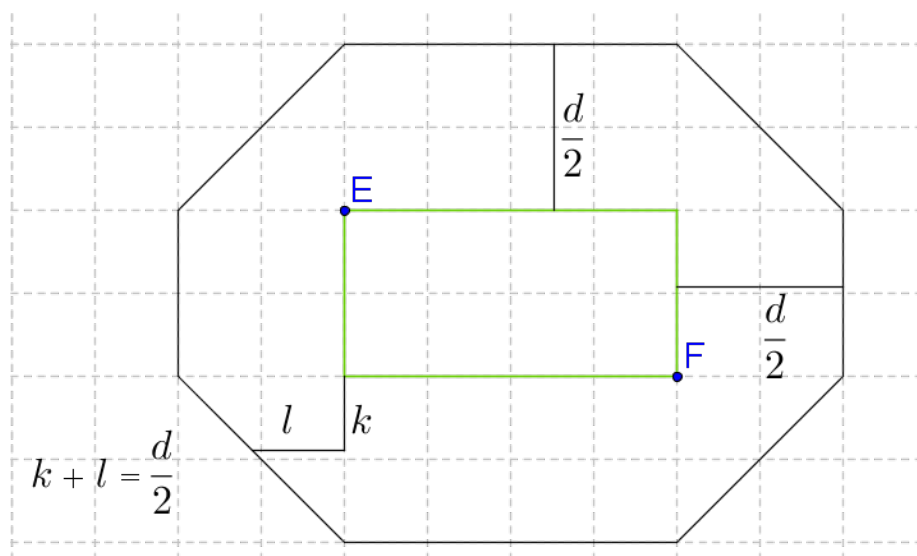


má délku  $|EF|$ . Situace je znázorněna na obr. 40, kde zeleně je vyznačena spojnice po obvodu.



Obr. 40: Plocha obsahující nejkratší spojnice

Pro libovolný bod ( $Z$ ) na zelené spojnici (a analogicky i na druhé spojnici, která jde po protějších stranách obvodu) platí, že  $|EZ| + |FZ| = |EF|$ . Pokud tyto spojnice najdeme pro ohniska elipsy a zakreslíme je, bude patrné, že body elipsy je obalují a to tak, že nejbližší bod k nim na spojnici je vzdálen právě polovinu  $d$  (obr. 41).



Obr. 41: Elipsa jako obal plochy nejkratších spojníc

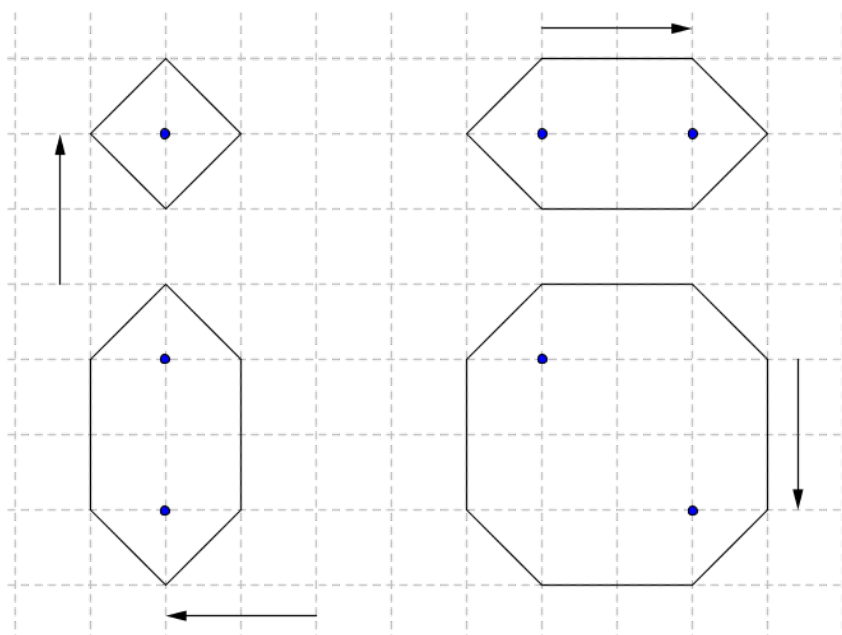
Tedy pro každý bod  $X$  na elipse a bod  $Z$ , který je nejbližším bodem na zelené spojnici k bodu  $X$ , dostáváme

$$|EX| + |FX| = (|EZ| + \frac{d}{2}) + (|FZ| + \frac{d}{2}) = |EF| + d = 2a,$$

což bylo dokázati.

Druhou část důkazu zde detailně rozebírat nebudeme, protože více či méně kopíruje postup při důkazu téhož u speciální polohy ohnisek. Jen naznačme, že i tuto část je možnou rozdělit na dvě části, kde v první ukážeme, že body ležící vně pásu ohraničeného částmi elipsy rovnoběžnými s jednou, respektive druhou souřadnicovou osou požadovanou vlastnost nespĺňují, protože jsou jednoduše řečeno od obou ohnisek dále než body náležící elipse a hranici pásu. Se zbylými body se ve druhé části vypořádáme opět pomocí rovnoběžek se souřadnicovými osami a porovnáním s bodem na elipse, kterým tato rovnoběžka prochází, případně pro body ležící uvnitř plochy ohraničené zelenými spojnicemi, můžeme konstatovat, že součet vzdáleností libovolného takového bodu od jednoho a druhého ohniska je roven  $|EF|$ . Tím je důkaz dokončen.

Na závěr kapitoly zkoumající elipsu v manhattanské metrice uveďme ještě jednu ilustraci, která ukazuje postupný vývoj útvarů v závislosti na vzájemné poloze ohnisek, pakliže kružnici můžeme považovat za velmi speciální případ elipsy, kdy ohniska splývají (obr. 42).



Obr. 42: Genealogie

## 6 Hyperbola v manhattanské metrice

Dalším útvarem, kterým se budeme v této práci zabývat, je hyperbola. Středoškolská definice hyperboly zní následovně: Necht' jsou dány dva různé body ( $E$  a  $F$ ) a vzdálenost  $2a$ ,  $0 < 2a < |EF|$ . Hyperbola je množina všech bodů v rovině, které splňují následující rovnost:

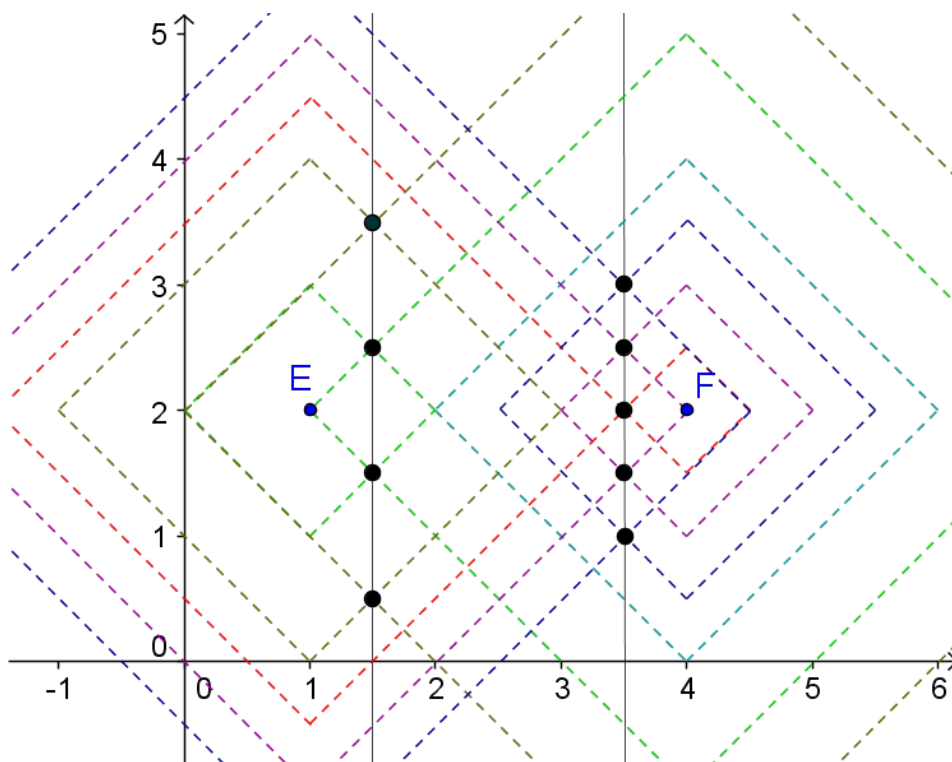
$$\| |EX| - |FX| \| = 2a$$

Jak je vidět, elipsa a hyperbola mají několik věcí společných – obě mají dvě ohniska, v jejich definicích vystupují vzdálenosti bodu od jednotlivých ohnisek, tedy ke konstrukci hyperboly bude také možno využít bodové konstrukce a také parametr  $2a$ , který je konstantou. Podstatný rozdíl spočívá ale v tom, že zatímco u elipsy šlo o součet vzdáleností bodu od jednotlivých ohnisek, u hyperboly jde o rozdíl. Jinými slovy bod  $X$  je vždy od jednoho ohniska o konstantní vzdálenost dále než od druhého. Rozdíl vzdáleností je navíc v absolutní hodnotě. To v podstatě znamená, že nezáleží na tom, od kterého ohniska má být daný bod dál, protože platí:

$$\| |EX| - |FX| \| = |-(|FX| - |EX|)| = \| |FX| - |EX| \|$$

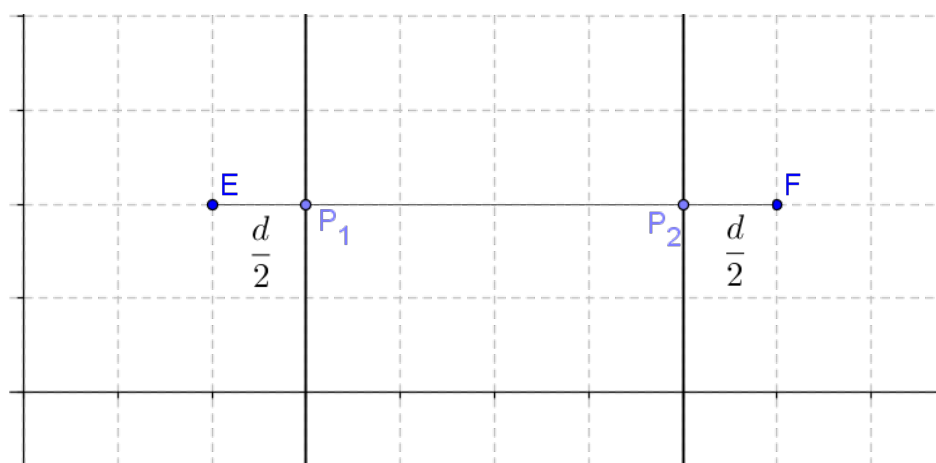
Jak bylo uvedeno výše, ke konstrukci hyperboly je možné využít bodové konstrukce. Zatímco u elipsy měly kružnice z ohnisek konstantní součet poloměrů, při bodové konstrukci hyperboly budeme požadovat, aby kružnice se středy v ohniscích měly konstantní rozdíl poloměrů, tedy vždy bude mít jedna o  $2a$  větší poloměr než druhá. Zatímco u elipsy existoval maximální poloměr, který může jedna kružnice pro konstrukci dané elipsy mít ( $2a$ ), u hyperboly žádný takový horní limit neexistuje, protože pokud menší poloměr stále zvětšujeme, tak pokud o stejné díly zvětšujeme i poloměr druhé kružnice, rozdíl zůstává stejný. Naproti tomu zde existuje spodní limit pro větší z poloměrů ( $2a$ ), to pro případ, kdy je velikost druhého poloměru rovna nule. I zde vytváří bodová konstrukce celý útvar, protože pro libovolný bod hyperboly určitě můžeme najít dvě takové kružnice se středy v ohniscích, které mají požadovaný rozdíl velikostí poloměrů.

Ukažme nyní bodovou konstrukci názorně při odvozování tvaru hyperboly pro případ, kdy ohniska leží na přímce rovnoběžné s osou  $x$ . Položme  $|EF| = 3$  a  $2a = 2$ . Situaci zachycuje obr. 43.



Obr. 43: Bodová konstrukce hyperboly

Bodová konstrukce naznačuje, že v případě, kdy ohniska leží na přímce rovnoběžné s osou  $x$ , by hyperbolou mohly být dvě přímky rovnoběžné s osou  $y$ . Navíc pokud, podobně jako jsme tak učinili v případě elipsy, popíšeme vztah mezi vzdáleností ohnisek a parametrem  $2a$  jako  $|EF| - d = 2a$ , pak se zdá, že hyperbola protíná přímku rovnoběžnou s osou  $x$ , na které leží ohniska, ve dvou bodech, přičemž každý z nich je od nejbližšího ohniska vzdálen polovinu  $d$ , jak je ukázáno na obr. 44.



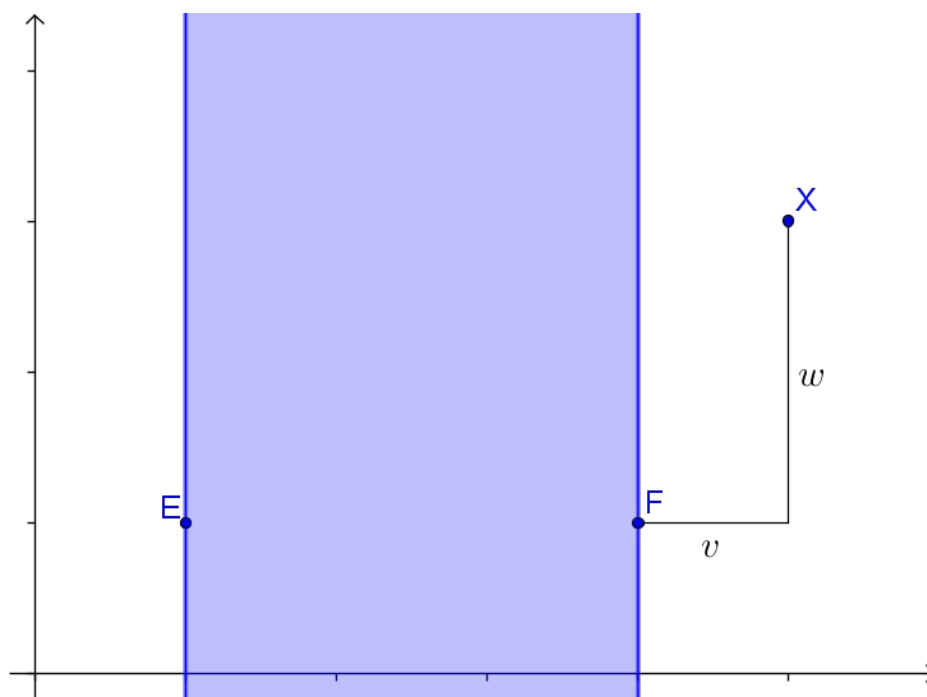
Obr. 44: Popis hyperboly

Důkaz toho, že tomu tak opravdu je, provedeme opět ve dvou krocích. Nejdříve ukažme, že všechny body hyperboly splňují podmínku na ně kladenou. Začneme s body  $P_1$  a  $P_2$ . Bez újmy na obecnosti zvolme  $P_2$ . Pro něj platí:

$$\left| |EP_2| - |FP_2| \right| = \left| \left( |EF| - \frac{d}{2} \right) - \left( \frac{d}{2} \right) \right| = \left| |EF| - d \right| = |2a| = 2a$$

U těchto dvou bodů je vzdálenost od jednotlivých ohnisek vyjádřena pouze absolutní hodnotou rozdílu v  $x$ -ových souřadnicích. Jediné, co se mění pro ostatní body předpokládané hyperboly, je to, že se jejich souřadnice liší od souřadnic ohnisek i v  $y$ -ových souřadnicích, ovšem každý určitý bod vždy od každého ohniska stejně. Tedy po odečtení se tyto rozdíly  $y$ -ových souřadnic odečtou a rozhodující je pouze rozdíl v  $x$ -ových souřadnicích oproti ohniskům, který je stejný jako v případě bodů  $P_1$ , respektive  $P_2$ . A proto každý bod předpokládané hyperboly splňuje podmínku v definici.

V druhém kroku důkazu ukažme, že žádný jiný bod podmínku v definici nespĺňuje. Začneme body, které leží mimo pás, nebo na hranici pásu, který je ohraničený rovnoběžkami s osou  $y$ , které prochází ohnisky. Na obr. 45 je vzdálenost v  $x$ -ové souřadnici, o kterou bod  $X$  ležící mimo pás přesahuje vně, označena jako  $v$ . Rozdíl v  $y$ -ové souřadnici oproti ohniskům je označen jako  $w$ .



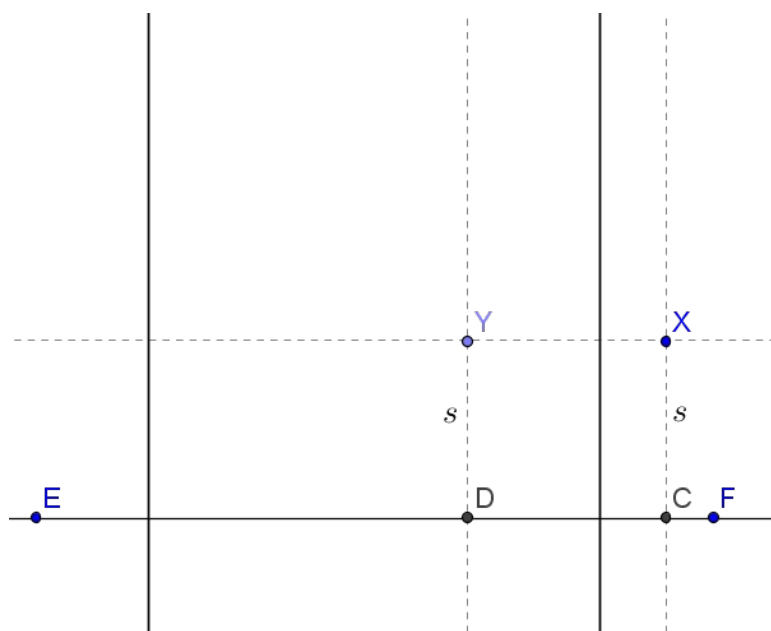
Obr. 45: Důkaz pro body mimo pás

Podle definice manhattanské metriky dostáváme:

$$\|EX\| - \|FX\| = \left| (|EF| + v + w) - (v + w) \right| = \|EF\| = |EF| \neq 2a$$

Tím je ukázáno, že takové body rovnost nespĺňují.

Pro zbylé body rozlišujeme dva případy podle toho, zdali bod leží uvnitř nebo vně pásu ohraničeného přímkami předpokládané hyperboly. Na obr. 46 jsou to body  $X$  a  $Y$ . Vedme těmito body rovnoběžky s osou  $y$ . Ty protnou přímku  $EF$  ve dvou bodech. Na obr. 46 jsou označeny jako  $C$  a  $D$ . I když je důkaz prováděn pouze pro body blíže ohnisku  $F$ , pro body blíže ohnisku  $E$  by byla situace stejná, až na to, že by příslušné velikosti uvnitř vnější absolutní hodnoty vyšly s opačným znaménkem, které by absolutní hodnota vyrušila.



Obr. 46: Důkaz pro zbylé body

Označme velikosti  $|FC|$  a  $|FD|$  jako

$$|FC| = k$$

a

$$|FD| = l.$$

Pro jednoduchost uvažujme, že  $y$ -ové souřadnice bodů  $X$  a  $Y$  jsou stejné a absolutní hodnotu jejich rozdílu oproti  $y$ -ovým souřadnicím ohnisek označme  $s$ . A protože  $k$  i  $l$  jsou menší než polovina  $|EF|$ , platí:

$$\|EX| - |FX|\| = \left| (|EF| - k + s) - (k + s) \right| = \left| |EF| - 2k \right| = |EF| - 2k$$

A také:

$$\|EY| - |FY|\| = \left| (|EF| - l + s) - (l + s) \right| = \left| |EF| - 2l \right| = |EF| - 2l$$

Jelikož navíc platí

$$k \neq \frac{d}{2},$$

stejně tak jako

$$l \neq \frac{d}{2},$$

pak musí platit, že

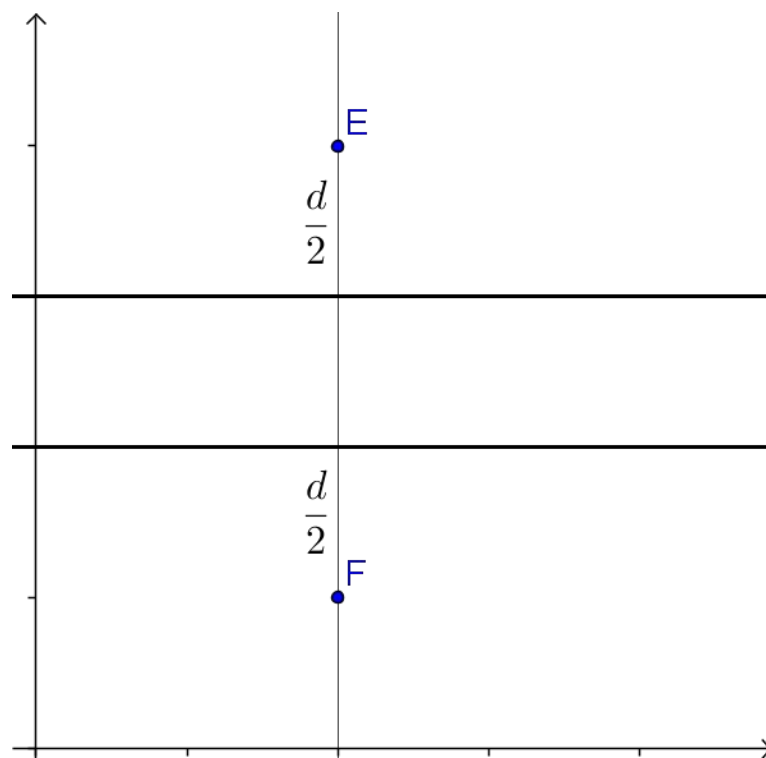
$$2a = |EF| - d \neq |EF| - 2k,$$

a dále:

$$2a = |EF| - d \neq |EF| - 2l.$$

Žádný takový bod tedy rovnost v definici hyperboly nespĺňuje, čímž je důkaz dokončen.

Na tomto místě je vhodné poznamenat, že obdobně jako v případě elipsy, pokud se ohniska nacházejí na rovnoběžce s osou  $y$ , dostáváme hyperbolu, kterou tvoří rovněž dvě přímky, tentokrát ale rovnoběžné s osou  $x$ . To vyplývá z možnosti hyperbolu konstruovat pomocí bodové konstrukce. Situaci ukazuje obr. 47, kde je hyperbola znázorněna dvěma černými tlustými čarami.

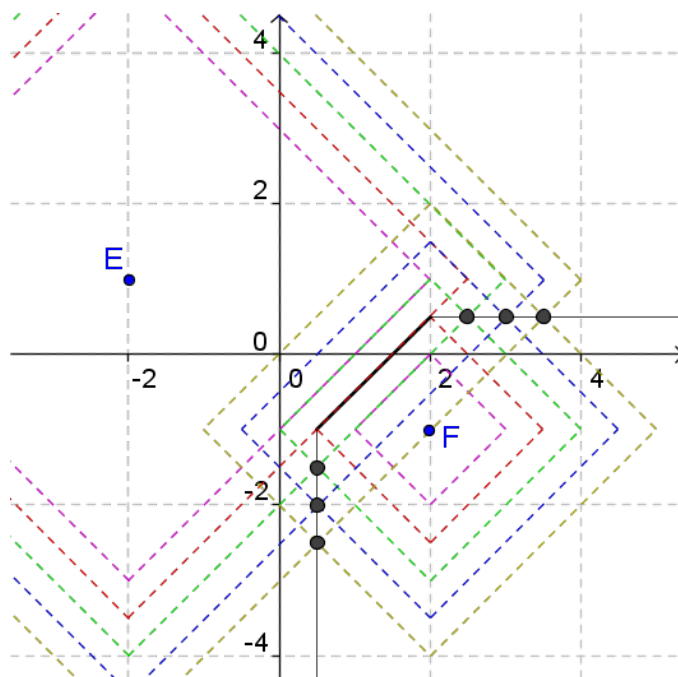


Obr. 47: *Hyperbola pro ohniska na přímce rovnoběžné s osou y*

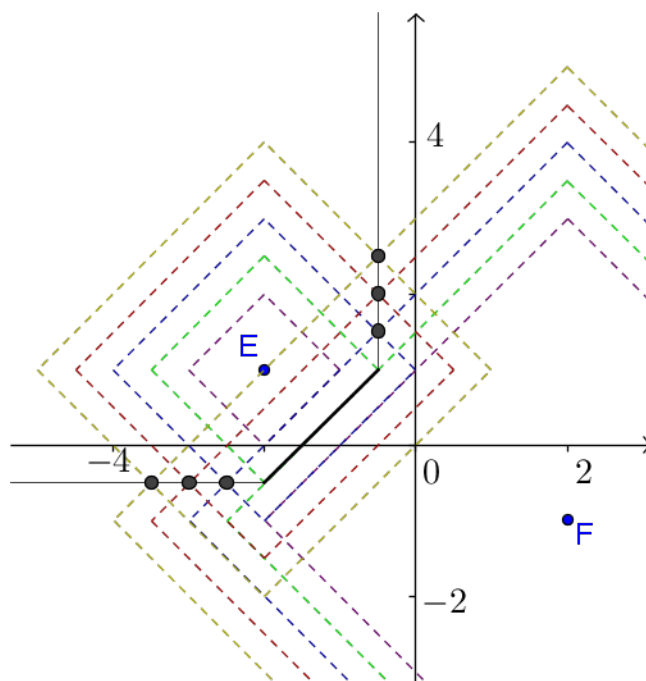
Stejně tak jako u elipsy by se dala i zde ukázat platnost čtyř vět, samozřejmě upravených pro hyperbolu. Protože by to ale bylo téměř opakování toho, co již bylo napsáno dříve, důkazy neprovádějme.

Nyní zbývá už jen zjistit, jaký tvar má hyperbola pro ostatní případy vzájemné polohy ohnisek. Stejně jako v případě elipsy zkusme nejprve pomocí bodové konstrukce odvodit předpokládaný tvar hyperboly, o kterém pak dokážeme, že je platný. Zvolme vzájemnou polohu, například  $P(E, F) = ([0; 0], 2, -1)$ , a hodnotu parametru  $2a = 3$ . Pro přehlednost sestrojme přibližný tvar hyperboly zvlášť pro případ, kdy mají body větší vzdálenost od ohniska  $E$  (obr. 48), a zvlášť pro případ, kdy leží dále od ohniska  $F$  (obr. 49). Pak jednotlivé části dejme dohromady (obr. 50). Body, které vznikly při bodové konstrukci, jsou vyznačeny silně a černě, zatímco předpokládaný tvar je vyznačen slabě a černě.

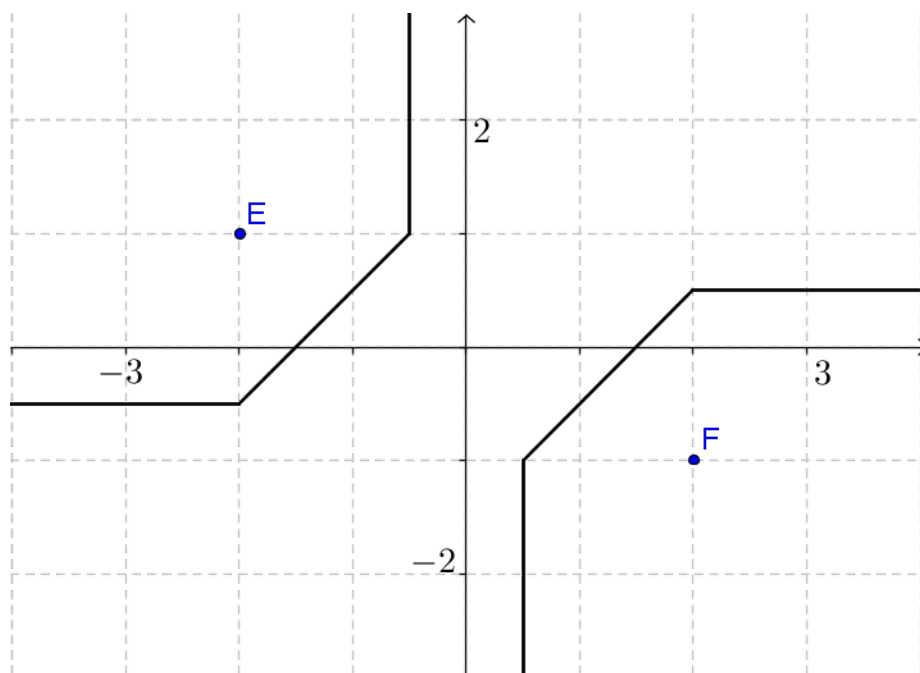




Obr. 48: *Jedna větev hyperboly*

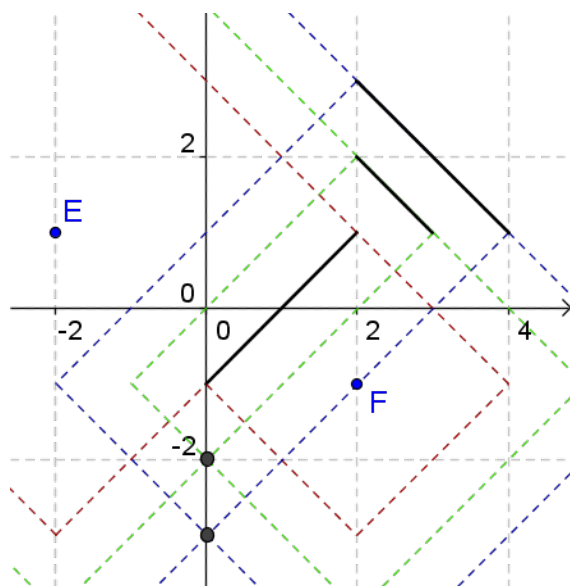


Obr. 49: *Druhá větev hyperboly*

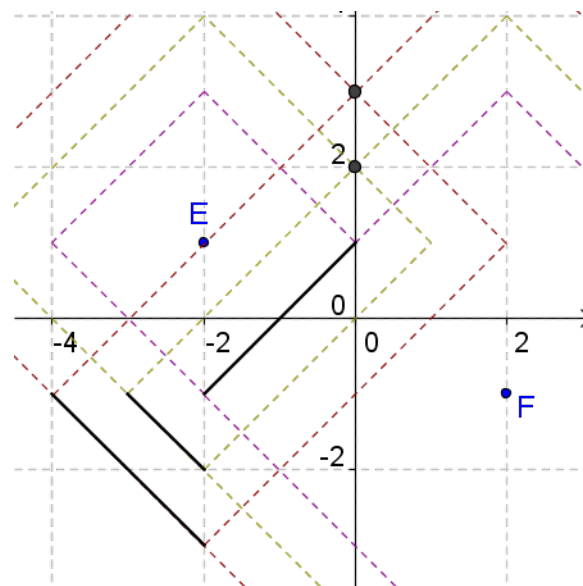


Obr. 50: *Obě větve hyperboly*

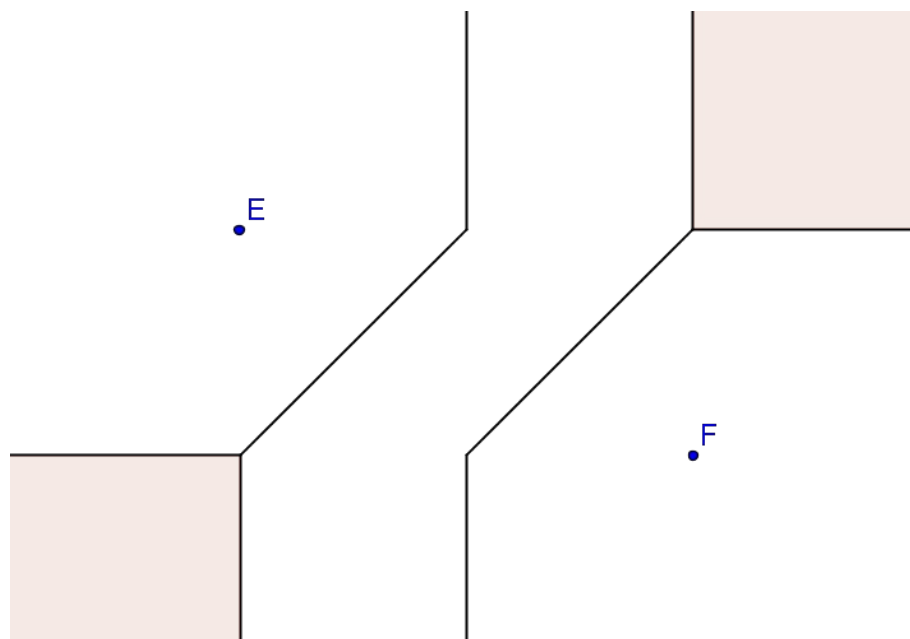
Jak ale naznačuje obrazová příloha v [8, str. 146], situace s hyperbolou není tak jednoduchá. Proč tomu tak je, bude rozvedeno v důkazu tvaru hyperboly. Nyní ještě vytvořme ilustrace pro stejnou vzájemnou polohu ohnisek jako v předchozí situaci, ale změňme hodnotu parametru na  $2a = 2$  (obr. 51, obr. 52 a obr. 53).



Obr. 51: *První větev speciálního případu*



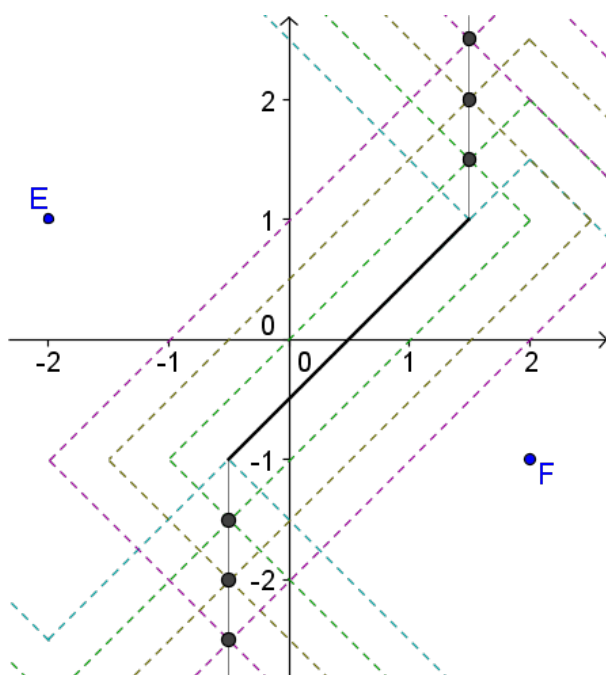
Obr. 52: *Druhá větev speciálního případu*



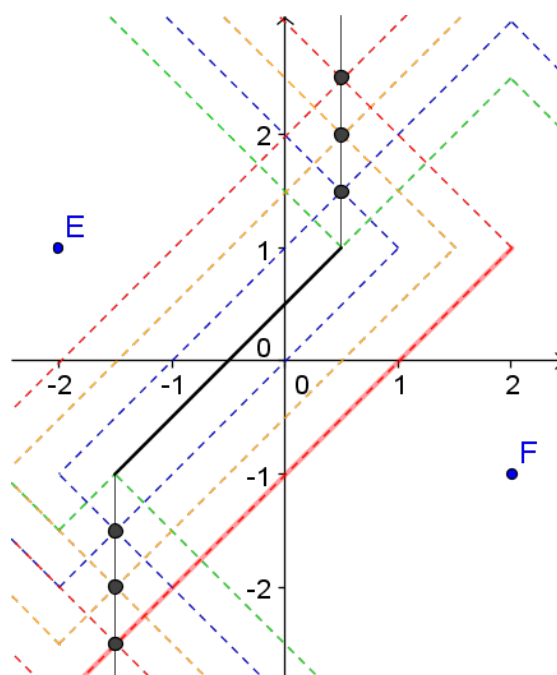
Obr. 53: Speciální případ s plošnými částmi

Jak se zdá, pro tento případ se hyperbola skládá i z částí, které mají nenulovou plochu, přesněji řečeno hyperbole náleží také všechny body sevřené mezi dvě polopřímky. Na obr. 53 jsou tyto části vyznačeny barevně.

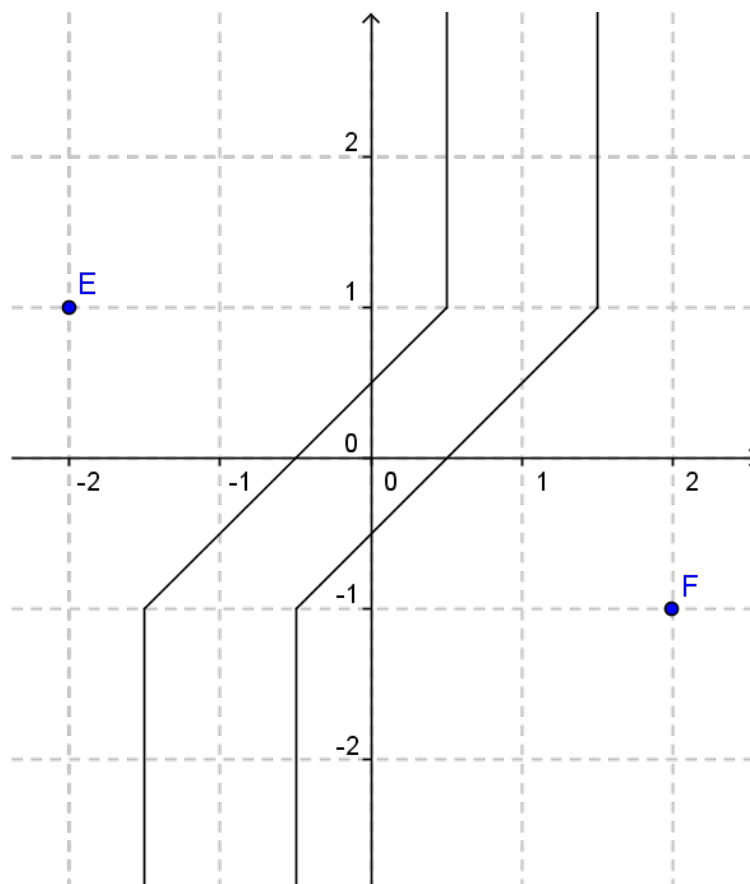
Jak je patrné z obr. 54, obr. 55 a obr. 56, pro stejnou vzájemnou polohu ohnisek jako v předcházejících dvou případech, ale hodnotu parametru  $2a = 1$ , má hyperbola ještě jiný tvar.



Obr. 54: Bodová konstrukce jedné větve

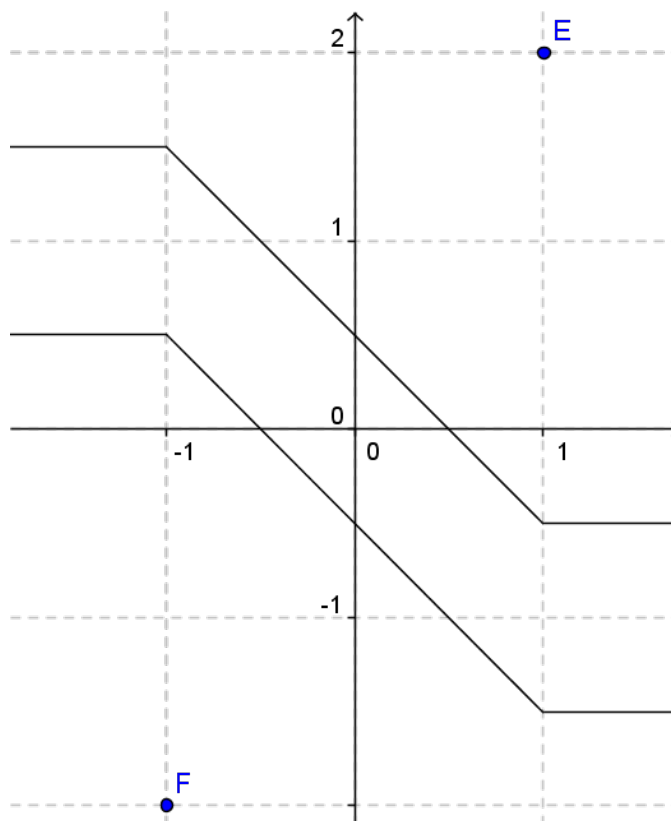


Obr. 55: Bodová konstrukce druhé větve



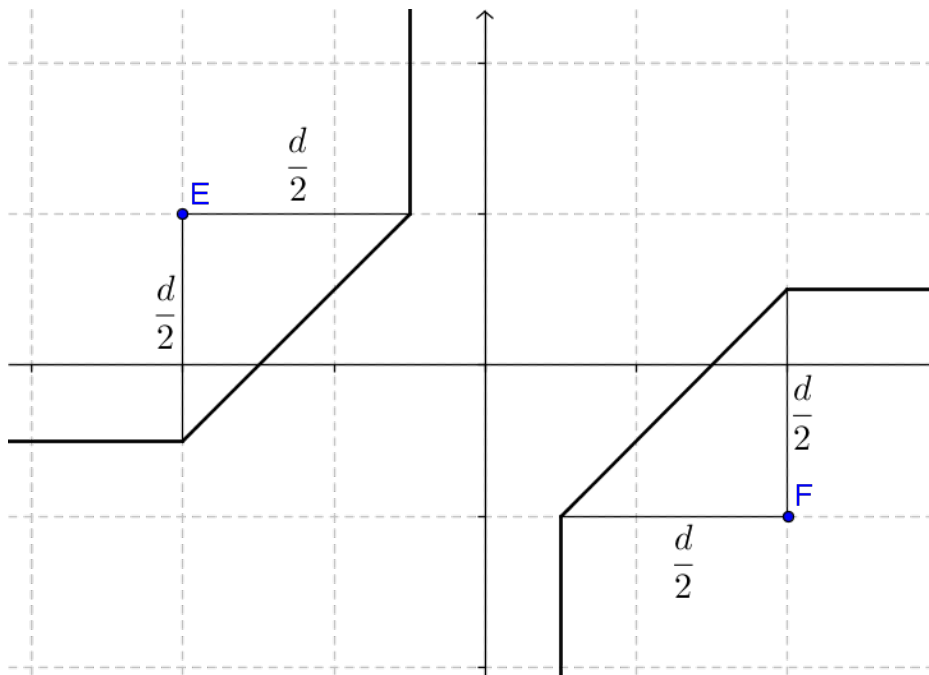
Obr.56: *Hyperbola s částmi rovnoběžnými s osou y*

Podle obrazové přílohy [8, str. 146], existuje i typ hyperboly podobné té na obr. 56, s tím rozdílem, že polopřímkové části jsou rovnoběžné s osou  $x$  místo osy  $y$ . Takovou hyperbolu získáme například pro  $P(E,F) = ([0;0], -1, -2)$  a hodnotu parametru  $2a = 1$ . Tato hyperbola je zobrazena na obr. 57.

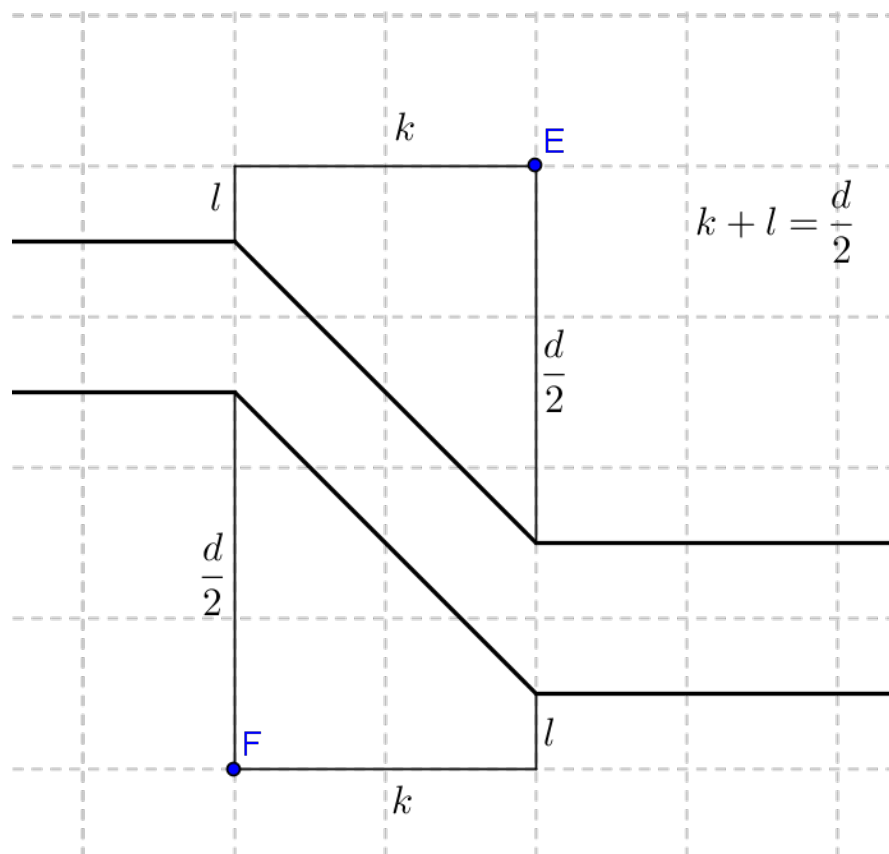


Obr. 57: *Hyperbola s částmi rovnoběžnými s osou  $x$*

Nyní popíšme dvě z těchto hyperbol, například první (obr. 50) a poslední (obr. 57), přičemž budeme mít na paměti, že tento popis se dá aplikovat i na ostatní typy. Tento popis je k vidění na obr. 58 a obr. 59. Vzdálenost části, která není rovnoběžná ani s jednou ze souřadnicových os, je vždy rovna polovině  $d$ .



Obr. 58: *Popis prvního typu hyperboly*



Obr. 59: *Popis posledního typu hyperboly*

Důkaz platnosti tvaru hyperboly provedme pro změnu jinak než důkazy předešlé, méně technicky a formálně, i přesto, že důkaz obdobný předešlým by pravděpodobně možný byl. Výhodou by měl být lepší vhléd do tvaru hyperboly pro obecné zadání vzájemné polohy ohnisek a parametru  $2a$ .

Nedělme důkaz na dvě části jako dříve, místo toho začněme diskuzí ohledně částí, které nejsou rovnoběžné s ani jednou souřadnicovou osou. Jak je vidět z obrázků, tyto části mají své krajní body na hranicích plochy ohraničené rovnoběžkami se souřadnicovými osami procházejícími ohnisky. Každý bod jednotlivé části má od libovolného ohniska stejnou vzdálenost jako každý jiný bod na této části, protože leží na stejných kružnicích se středy v ohniscích. A protože leží uvnitř výše zmíněné plochy, pak pro libovolný bod  $X$  na této části platí:

$$|EX| + |FX| = |EF|$$

Je-li tedy například

$$|FX| = \frac{d}{2},$$

potom

$$|EX| = |EF| - \frac{d}{2}$$

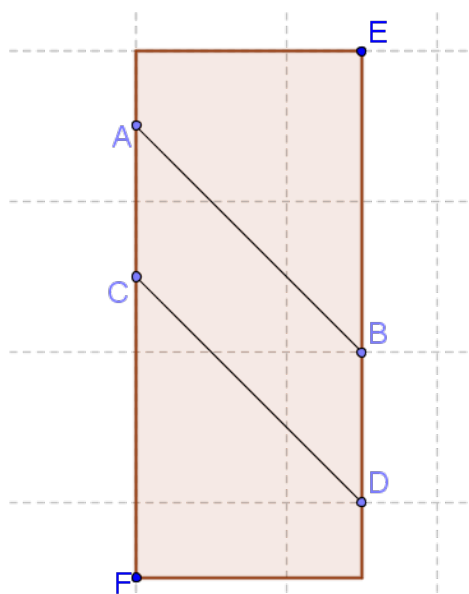
Proto pro každý takový bod platí:

$$\left| |EX| - |FX| \right| = \left| \left( |EF| - \frac{d}{2} \right) - \left( \frac{d}{2} \right) \right| = \left| |EF| - d \right| = |2a| = 2a$$

Každý takový bod tedy určitě součástí hyperboly je, protože splňuje podmínku v definici. Navíc žádný jiný bod uvnitř výše zmíněné plochy tuto podmínku nesplňuje, protože leží k jednomu ohnisku blíže a od druhého dále, takže rozdíl vzdáleností tohoto bodu od jednotlivých ohnisek není stejný jako u bodů na diskutovaných částech.

Obr. 60 ukazuje výše zmiňovanou ohraničenou plochu a v ní diskutované části hyperboly. Označme body, kde se části hyperboly dotýkají hranic plochy,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$ . Je dobré si uvědomit, že tyto body budou vždy čtyři, protože v okamžiku, kdy by dvě části splývaly, byl by rozdíl vzdálenosti libovolného bodu na nich od jednotlivých

ohnisek roven 0, tedy  $2a = 0$ , což není podle definice hyperboly přípustné. Na druhou stranu, pokud by tyto části byly každá pouze jedním bodem, tedy ohniskem, parametr  $2a$  by se rovnal  $|EF|$ , což také není přípustné.

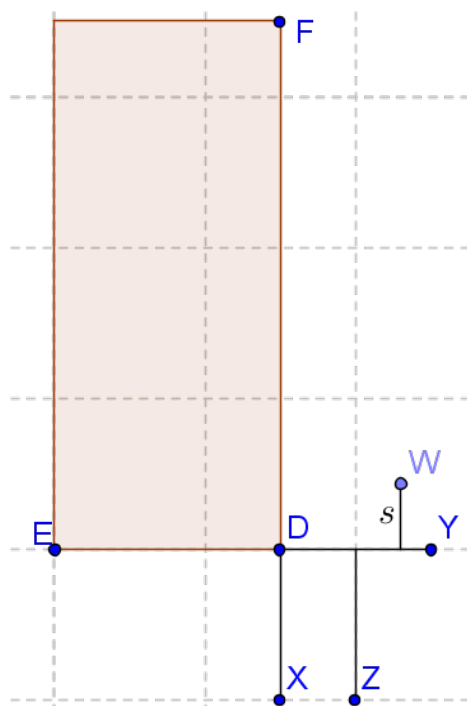


Obr. 60: Části hyperboly v ploše nejkartšších spojnic ohnisek

Vezměme libovolný takový bod, například  $A$ , a řekněme, že budeme od něj chtít najít takový směr, ve kterém leží další body hyperboly. Ty musejí mít konstantní rozdíl vzdáleností od jednotlivých ohnisek, tudíž protože bod  $A$  náleží hyperbole, musejí být od obou ohnisek o stejnou délku dále než bod  $A$ . V případě znázorněném na obr. 60 to mohou být jedině body, které mají stejnou  $y$ -ovou souřadnici jako bod  $A$  a  $x$ -ovou menší, než je  $x$ -ová souřadnice bodu  $A$ . To samé platí i pro bod  $C$ , pro body  $B$  a  $D$  je situace obdobná, tentokrát ale hledané body mají  $x$ -ovou souřadnici větší.

To, kam polopřímkové prvky hyperboly směřují, záleží na umístění bodů  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$ . Pokud bychom parametr  $2a$  vhodně zvětšili, situace na obr. 60 by se změnila a body  $A$  a  $D$  by se nacházely na horní, respektive spodní přímce ohraničující plochu. V tom případě by polopřímkové prvky od nich pokračovaly nahoru (stejná  $x$ -ovou souřadnice jako u bodu  $A$ ,  $y$ -ová větší), respektive dolů (stejná  $x$ -ovou souřadnice jako u bodu  $D$ ,  $y$ -ová menší). Speciálním případem je, když se tyto body nacházejí v průsečíku přímek ohraničujících výše zmíněnou plochu. Uvažujme nyní, že bod  $D$  náležící hyperbole se v tomto průsečíku nachází, podle obr. 61.





Obr. 61: Speciální případ polohy bodu  $D$

Pak je patrné, že kterýkoli z bodů  $X$ ,  $Y$  a  $Z$  má od obou ohnisek o určitou hodnotu větší vzdálenost než bod  $D$ . Ale proto, že od obou ohnisek o hodnotu stejnou, v rozdílu definici se tato hodnota odečte, takže absolutní hodnota rozdílu vzdáleností tohoto bodu od jednotlivých ohnisek zůstane stejná jako u bodu  $D$ . Tedy tyto body jsou součástí hyperboly. Jak obrázek napovídá, toto zachování absolutní hodnoty nastává i pro všechny ostatní body na polopřímkách  $DX$  a  $DY$  a také pro libovolný bod mezi nimi sevřený. Naproti tomu pro jakýkoli jiný bod, s výjimkou těch, které na hyperbole leží podle argumentace, kterou jsme výše uvedli pro jiné polohy bodů  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$ , nenastává zachování absolutní hodnoty, jak v obr. 61 naznačuje bod  $W$ . I když je tento bod od jednotlivých ohnisek dále než bod  $D$ , je o  $2s$  blíže k ohnisku  $F$  než k  $E$ .

Tím je ukázáno, které body na elipse leží a které na ni naopak ležet nemohou, přičemž všechny body roviny byly vzaty v potaz. Pro shrnutí, hyperbola se skládá ze dvou částí, které nejsou rovnoběžné ani s jednou ze souřadnicových os a náleží ploše ohraničené rovnoběžkami se souřadnicovými osami, které procházejí ohnisky, a navíc z polopřímkových nebo plošných částí, na kterých leží body, které jsou o stejnou hodnotu dále od každého ohniska, než je krajní bod části hyperboly náležící výše zmíněné ploše, který této polopřímkové, či plošné části také náleží. Jinými slovy tvar

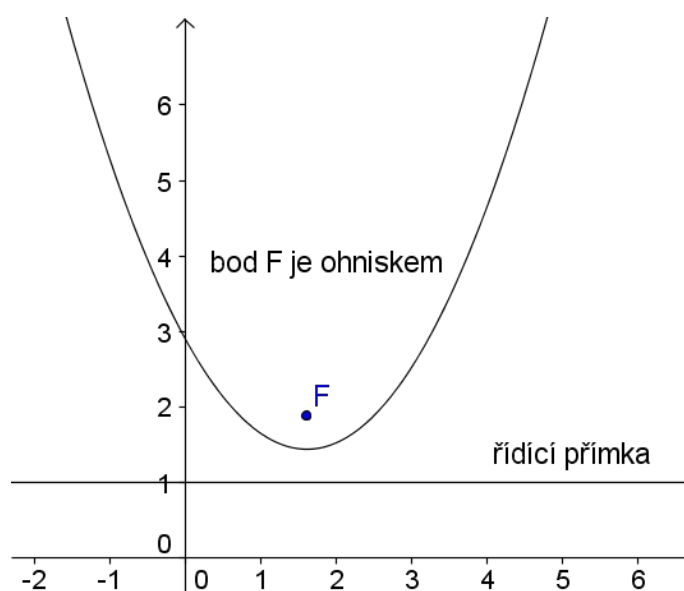
hyperboly je v souladu s tvarem, který předpovídaly bodové konstrukce dříve v této kapitole.

## 7 Parabola v manhattanské metrice

Posledním útvarem, kterým se budeme zabývat, je parabola. Jak ukáže definice, od předcházejících objektů se poněkud liší. Středoškolská definice zní následovně:

Nechť je v rovině dána přímka a bod, který na zmíněné přímce neleží. Parabola je množina všech bodů v rovině, které mají od tohoto bodu a této přímky stejnou vzdálenost. Zmíněný bod nazvěme ohniskem paraboly a zmíněnou přímku řídicí přímkou paraboly.

Na rozdíl od elipsy a hyperboly má parabola pouze jedno ohnisko. Navíc vzdálenost uvedená v definici není konstantní, pouze je vyžadováno, aby poměr vzdáleností bodu na parabole a ohniska a bodu na parabole a řídicí přímky byl 1:1. Obr. 62 ukazuje jednu z parabol v euklidovské metrice.



Obr. 62: Parabola v euklidovské metrice

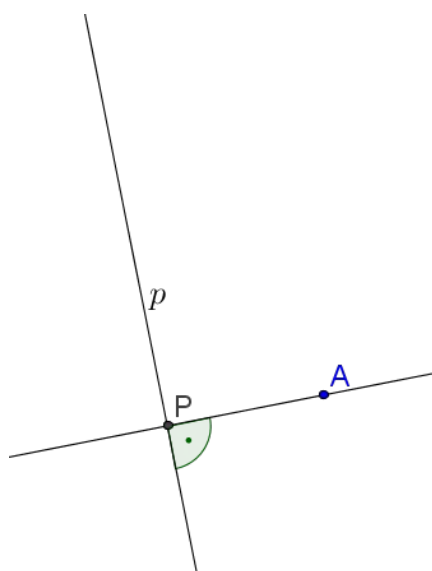
Také zde vyvstává otázka, jak vlastně přímku v manhattanské metrice chápat. Manhattanská parabola je možná právě díky tomu poměrně diskutovaným objektem. Mnoho zdrojů, například [16], uvádí, že: „Přímka je geometrický objekt, který je rovný, nekonečně dlouhý a nekonečně tenký.“ (Překlad z anglického jazyka.) Toto pojetí odpovídá tradiční představě o přímce, nicméně je s manhattanskou metrikou v jistém smyslu nekonzistentní. Je to stejné, jako kdyby dopravní prostředky na Manhattanu musely jezdit systémem ulic, které jsou jedna s druhou buďto rovnoběžné,

nebo navzájem kolmé, zatímco pod ním by vedlo potrubí, které by žádné takové omezení nemělo a mohlo by dva libovolné body spojovat přímo. Z této definice vycházejí Moser a Kramer v [4] při odvozování tvaru paraboly.

Naproti tomu David Iny v [5] vychází z definice přímky jako množiny všech bodů, které mají od dvou pevně stanovených bodů stejnou vzdálenost, tedy v podstatě obdoby osy úsečky.

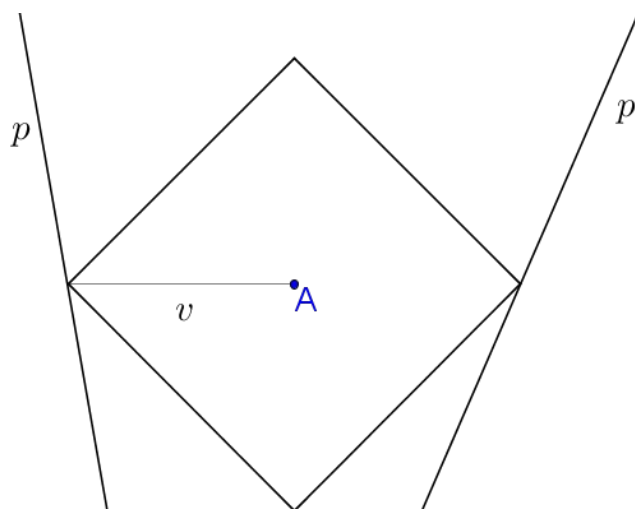
V této práci vycházejme z prvního pojetí, stejně jako Moser a Kramer. Co se týče vzdálenosti bodu od ohniska, zde není potřeba dodávat nic nového, co ještě nebylo řečeno, protože budeme-li chtít najít všechny body, které mají od ohniska určitou vzdálenost, jednoduše vytvoříme manhattanskou kružnici s poloměrem příslušné velikosti. Nicméně budeme muset zkoumat, jak se zjistí vzdálenost bodu a přímky. Tu definujme následovně: Vzdáleností bodu  $A$  od přímky  $p$  rozumějme vzdálenost bodu  $A$  a takového bodu na přímce, že žádný jiný bod na přímce neleží k  $A$  blíže.

V euklidovské metrice se tato vzdálenost zjistí tak, že se bodem  $A$  vede kolmice na přímku. Ta ji protne právě v jednom bodě, například  $P$ . Potom je vzdáleností bodu  $A$  od přímky  $p$  délka úsečky  $AP$ . Situaci ukazuje obr. 63.



Obr. 63: *Vzdálenost bodu a přímky v euklidovské metrice*

Jak uvádí [17], v manhattanské metrice je situace poněkud složitější a musíme rozlišovat tři případy<sup>2</sup>. Prvním z nich je, pokud přímka roste, nebo klesá prudčeji než strana manhattanské kružnice. Tuto situaci ilustruje obr. 64.



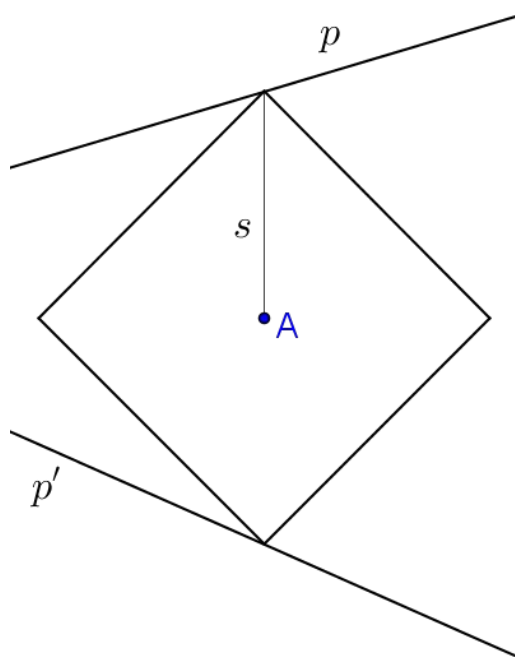
Obr. 64: *Vzdálenost bodu a přímky – případ první*

Jak je z obrázku patrné, nejbližší bod k bodu  $A$ , který leží na přímce  $p$ , respektive  $p'$ , je v takovém případě bod, který má stejnou  $y$ -ovou souřadnici jako bod  $A$ . Jejich vzdálenost je tedy rovna absolutní hodnotě rozdílu jejich  $y$ -ových souřadnic

<sup>2</sup> Při popisu a tvorbě ilustrací pro tři případy určení vzdálenosti mezi bodem a přímkou jsem se inspiroval z velké části z [17.]

(na obrázku označen  $v$ ). Žádný jiný bod přímky bodu  $A$  blíže být nemůže, protože bude-li poloměr kružnice menší, neprotne přímku v žádném bodě.

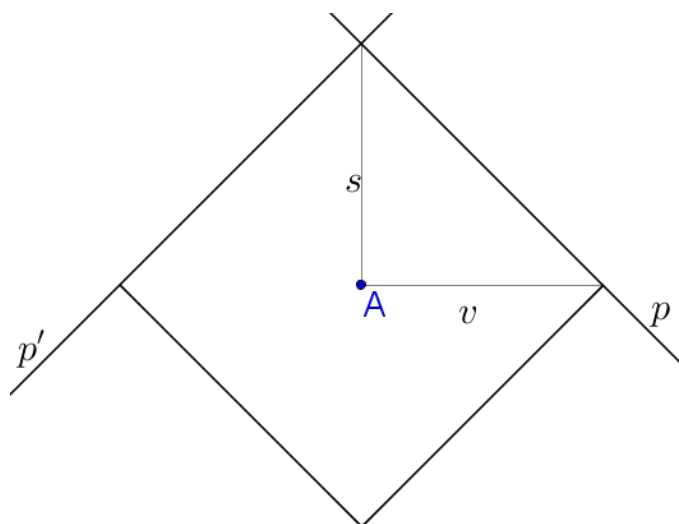
Naproti tomu, pokud bude přímka růst, či klesat mírněji než strana manhattanské kružnice, nejbližší bod bude mít stejnou  $x$ -ovou souřadnici jako bod  $A$  a vzdálenost bodu a přímky tedy bude rovna absolutní hodnotě rozdílu  $x$ -ových souřadnic bodu  $A$



Obr. 65: Vzdálenost bodu a přímky – případ druhý

a nejbližšího bodu na přímce (na obrázku označena  $s$ ). Obr. 65 ukazuje tuto variantu.

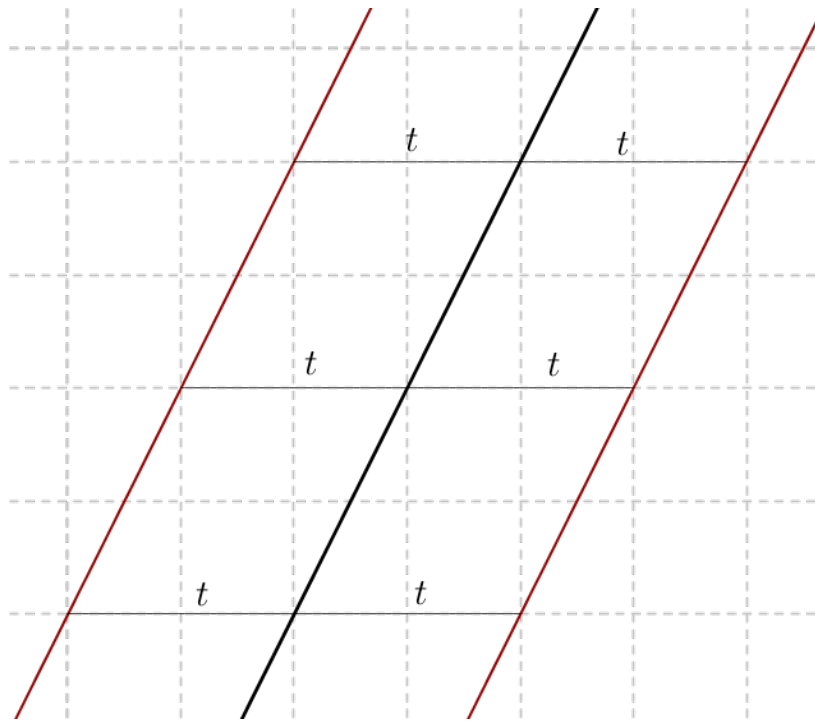
Zbývá ještě prodiskutovat situaci, kdy přímka roste, nebo klesá stejně jako strana manhattanské kružnice. V tom případě celá strana nejmenší kružnice, která má s přímkou alespoň jeden průsečík, leží na přímce. Je tedy jedno, jaký bod z této strany vybereme, jeho vzdálenost od  $A$  bude vždy stejná. Pro jednoduchost se zdá být vhodné vybrat buďto bod se stejnou  $x$ -ovou souřadnicí jako má bod  $A$ , pak bude vzdáleností absolutní hodnota rozdílu  $y$ -ových souřadnic těchto dvou bodů ( $s$ ), nebo vybrat bod se stejnou  $y$ -ovou souřadnicí, pak bude vzdálenost rovna absolutní hodnotě rozdílu  $x$ -ových souřadnic ( $v$ ). Celou situaci ilustruje obr. 66.



Obr. 66: *Vzdálenost přímky a bodu – případ třetí*

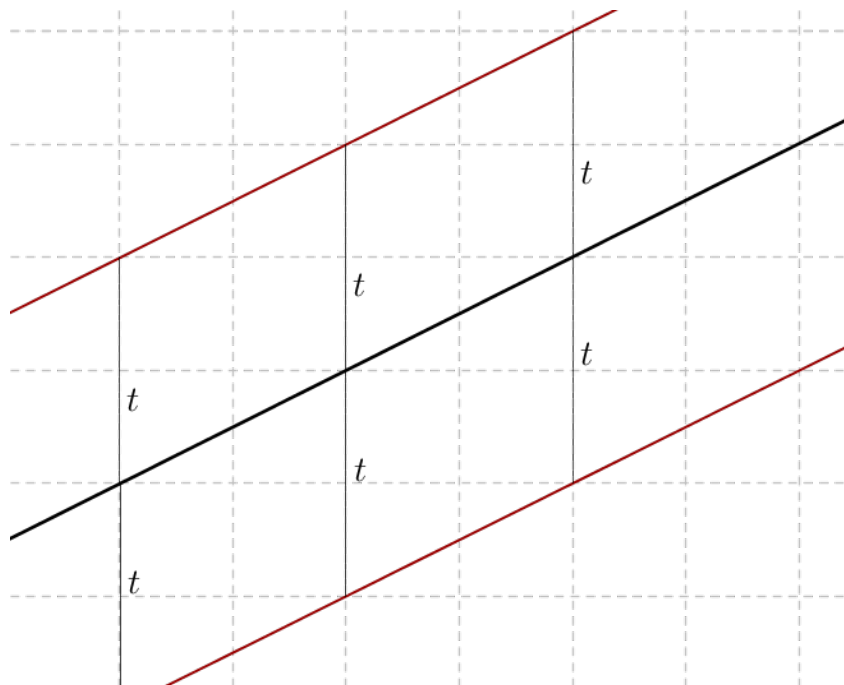
I v případě paraboly lze k její konstrukci využít bodové konstrukce, ovšem zde se poněkud liší od bodové konstrukce elipsy a hyperboly. Protože má hledaný bod mít stejnou vzdálenost od bodu a přímky, budeme místo dvou kružnic při konstrukci využívat kružnici a ekvidistantu přímky, jinak řečeno množinu bodů, které mají od přímky stejnou vzdálenost. Vzhledem k tomu, co víme o vzdálenosti bodu a přímky, nebude těžké tvar ekvidistanty odvodit, budeme muset ale opět rozlišit stejné tři případy. Jak je patrné z obr. 67, obr. 68 a obr. 69, ekvidistantu tvoří přímky rovnoběžné s původní přímkou.

Obr. 67 ukazuje ekvidistantu přímky, která roste prudčeji než strana manhattanské kružnice.



Obr. 67: *Ekvidistanta pro první případ*

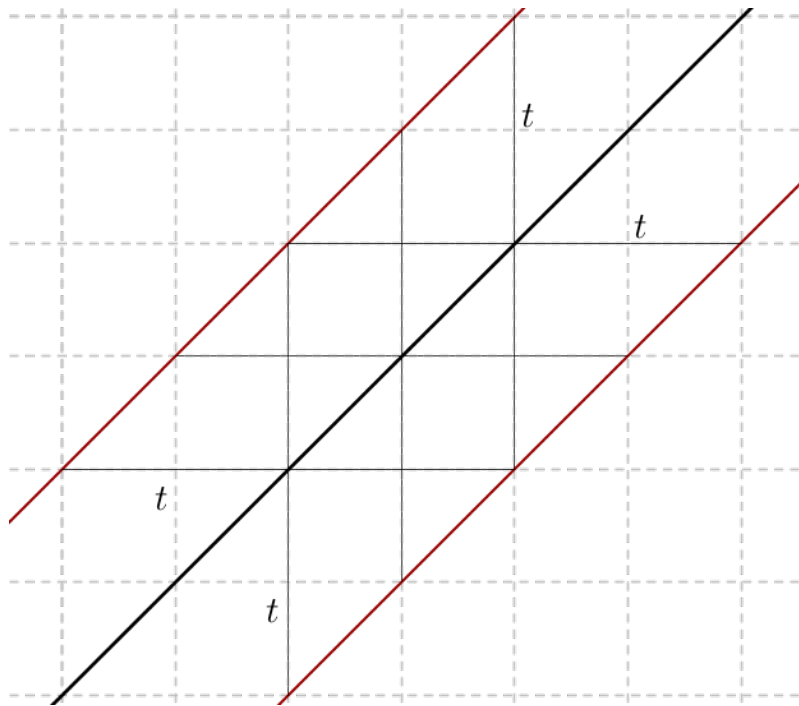
Obr. 68 ukazuje ekvidistantu přímky, která roste mírněji než strana manhattanské kružnice.



Obr. 68: *Ekvidistanta pro druhý případ*

Poslední z obrázků ukazuje ekvidistantu přímky, která roste stejně jako strana manhattanské kružnice.

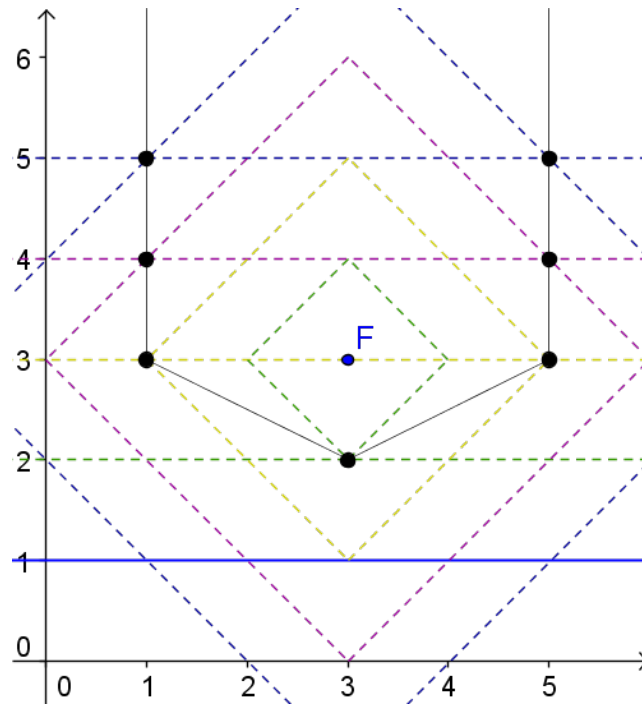




Obr. 69: *Ekvidistanta pro třetí případ*

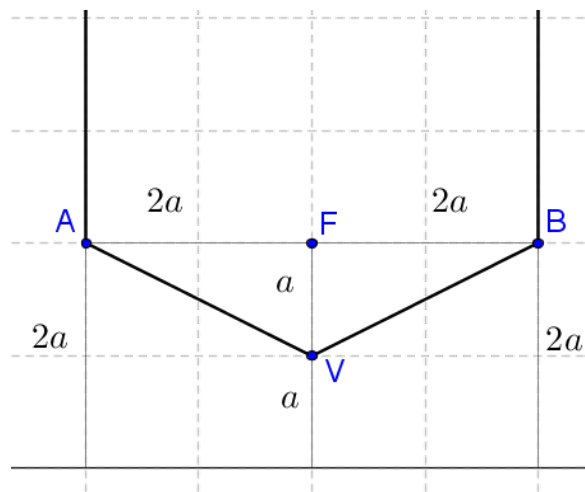
Z definice paraboly plyne, že každý její bod leží na kružnici o jistém poloměru se středem v ohnisku a současně na ekvidistantě řídicí přímky, která je od ní ve vzdálenosti poloměru kružnice. Toto je princip bodové konstrukce paraboly. Parabola je množina všech průsečíků všech dvojic kružnice – ekvidistanta pro všechny velikosti poloměrů. Konstrukci můžeme ještě zjednodušit tím, že budeme uvažovat pouze tu část ekvidistanty, která je blíže ohnisku, protože, jak si lze rozmyslet, při libovolném poloměru kružnice nikdy neprotne druhou část ekvidistanty, nýbrž je od ní vždy stejně vzdálena.

Nyní tedy zkusme pomocí bodové konstrukce odvodit předpokládaný tvar paraboly pro speciální případ, kdy je řídicí přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou  $x$ , a tím pádem je s ní rovnoběžná i příslušná část její ekvidistanty. Položme vzdálenost řídicí přímky a ohniska  $F$  rovnu dvěma. Konstrukci ukazuje obr. 70. Slabou, černou čarou je naznačen předpokládaný tvar manhattanské paraboly.



Obr. 70: Bodová konstrukce paraboly

Ještě než se pustíme do důkazu platnosti tvaru paraboly, popíšeme ji obecněji. Nazvěme vzdálenost mezi ohniskem a řídicí přímkou parametrem  $2a$ . Bod se stejnou  $x$ -ovou souřadnicí jako má ohnisko nazvěme  $V$ , body se stejnou  $y$ -ovou souřadnicí jako ohnisko nazvěme  $A$  a  $B$ . Obr. 71 ukazuje, jak jsou tyto body vzdáleny od ohniska a řídicí přímky.



Obr. 71: Popis paraboly

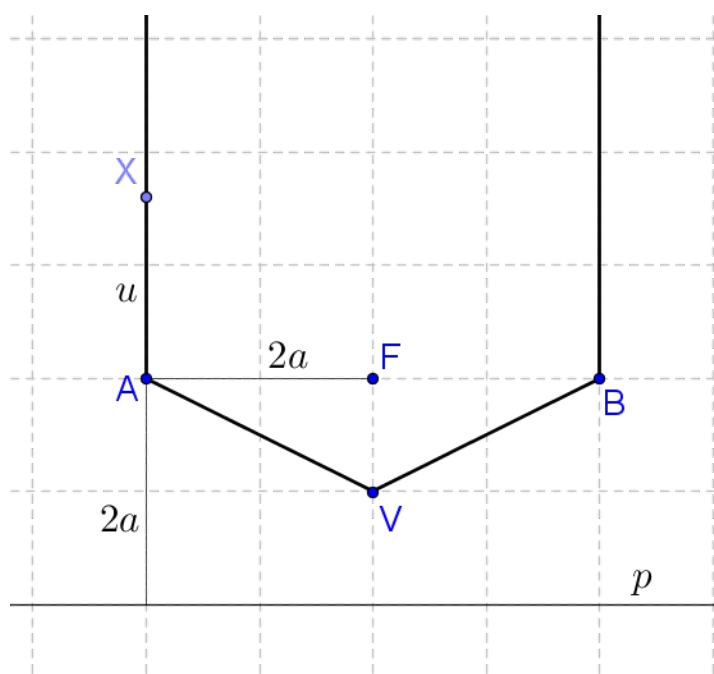
Nyní opět dokažme, že tento tvar odpovídá manhattanské parabole. Stejně jako dříve, postupujme ve dvou krocích. V prvním ukažme, že všechny body předpokládané

paraboly mají vlastnosti na ně kladené definicí, a v druhém, že žádné jiné body tyto vlastnosti nemají.

První část začněme polopřímkovými částmi, jejichž body mají stejné  $x$ -ové souřadnice jako body  $A$ , respektive  $B$ . Jelikož body  $A$  a  $B$  vzešly z bodové konstrukce, tak parabole určitě náleží. Každý jiný bod, který náleží polopřímkovým částem, je od ohniska navíc vzdálen o nějakou vzdálenost v  $y$ -ové souřadnici (například  $u$ ). Od řídicí přímky jsou uvažované body také o  $u$  dále než bod  $A$ , respektive  $B$ . Vyberme jeden takový bod a nazvěme ho  $X$ . Řídicí přímku pojmenujme  $p$ . Potom dostáváme

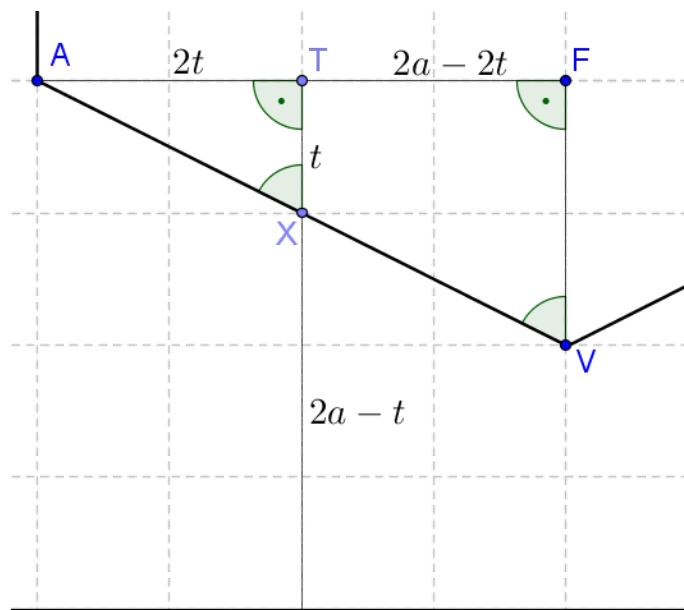
$$|FX| = 2a + u = |Xp|,$$

což bylo dokázat. Pro lepší představu slouží obr. 72.



Obr. 72: Důkaz pro polopřímkové části

Pro důkaz toho, že části spojující body  $A$  a  $V$  a  $B$  a  $V$  náleží parabole, je dobré provést následující pozorování. Zaměříme se, bez újmy na obecnosti, na body, které mají menší  $x$ -ovou souřadnici než ohnisko, jinými slovy leží na části, která spojuje body  $A$  a  $V$ . Označme libovolně zvolený takový bod  $X$ . Bod, který má stejnou  $x$ -ovou souřadnici jako bod  $X$  a  $y$ -ovou stejnou jako ohnisko, označme  $T$  (obr. 73).



Obr. 73: Důkaz pro zbylé části

Dále označme vzdálenost bodů  $A$  a  $T$  jako  $2t$ . Protože trojúhelníky  $AFV$  a  $ATX$  jsou podobné podle věty  $uu$ , musí platit:

$$|TX| = t$$

A také:

$$|Xp| = 2a - t$$

Tedy dostáváme

$$|FX| = (2a - 2t) + t = 2a - t = |Xp|,$$

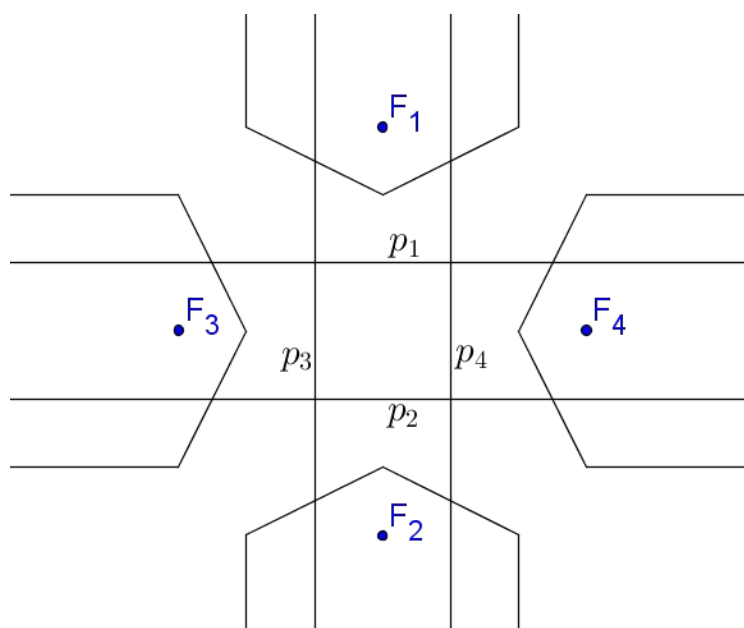
což bylo dokázat.

Druhá část důkazu by šla, pro body s větší  $y$ -ovou souřadnicí, než má bod  $V$ , provést pomocí rovnoběžek s osou  $x$ , kde by se ukázalo, že bod, který neleží na předpokládané parabole, je buďto blíže, nebo dále od ohniska než od řídicí přímky. Protože je to v podstatě obdoba předchozích důkazů, nebudeme tento postup podrobněji rozebírat. Pro ostatní body je poměrně dobře patrné, že jejich vzdálenost od ohniska je větší než od řídicí přímky, protože mají menší  $y$ -ovou souřadnici než bod  $V$ . V polorovině ohraničené řídicí přímkou, ve které neleží ohnisko, je bod vždy minimálně o  $2a$  dále od ohniska než od řídicí přímky. Tímto byl ověřen tvar manhattanské paraboly pro daný případ.

Z tvaru paraboly pro tento případ lze usuzovat i na tvary parabol pro případy další. Pokud by řídicí přímka byla opět rovnoběžná se souřadnicovou osou  $x$ , velikost

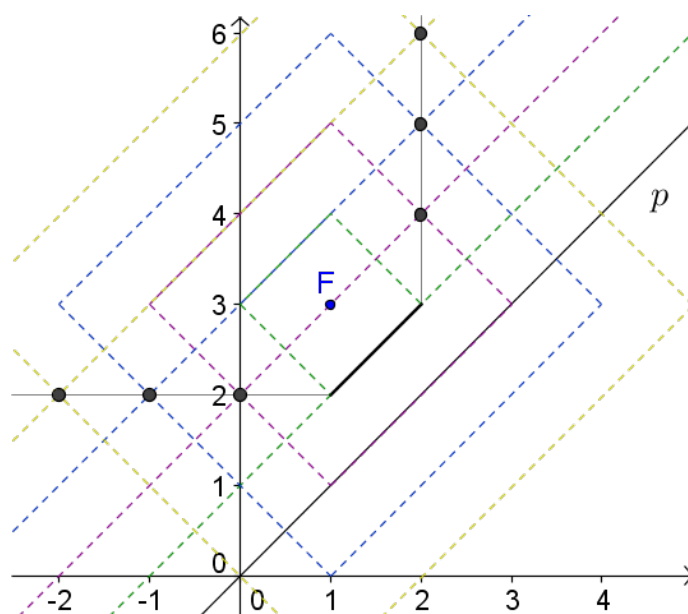
parametru  $2a$  by zůstala stejná, avšak ohnisko by mělo menší  $y$ -ovou souřadnici než body na řídicí přímce, pak by byla výsledná parabola osově souměrná podle řídicí přímky, protože jednak kružnice v bodové konstrukci by byly osově souměrné s kružnicemi v bodové konstrukci pro předchozí případ, a navíc by se protínaly s druhou částí ekvidistanty, která je ovšem také osově souměrná s částí v druhé polorovině.

Pokud by byla řídicí přímka rovnoběžná s osou  $y$ , pak i přímky, které tvoří její ekvidistantu, by byly rovnoběžné s osou  $y$ . Stejně jak bylo argumentováno v kapitole zabývající se elipsou, jediné, co by se v bodové konstrukci změnilo, by bylo to, že co byl pro předchozí případy rozdíl  $x$ -ových souřadnic bodu na parabole a ohniska, respektive nejbližšího bodu na řídicí přímce, by nyní byl tím samým rozdílem, akorát v  $y$ -ové souřadnici, a naopak. Obr. 74 ukazuje všechny čtyři druhy situací.



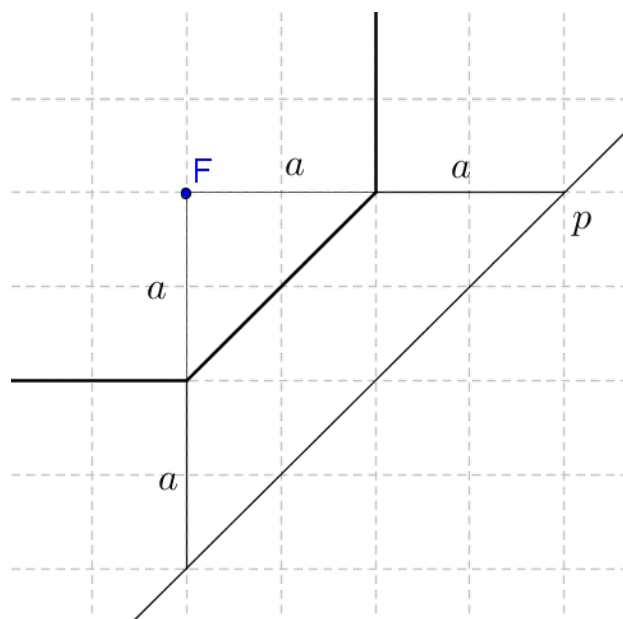
Obr. 74: Paraboly s řídicí přímkou rovnoběžnou se souřadnicovou osou

Nyní se podívejme i na situace, kdy řídicí přímka není rovnoběžná se souřadnicovou osou. Zdá se být výhodné rozlišit tři případy podle toho, jak řídicí přímka roste či klesá. Nejdříve uvažujme, že řídicí přímka roste stejně jako strana manhattanské kružnice. Provedme bodovou konstrukci. Parametr  $2a$  položme roven dvěma (obr. 75). Předpokládaný tvar paraboly je vyznačen slabou černou čarou.



Obr. 75: Bodová konstrukce

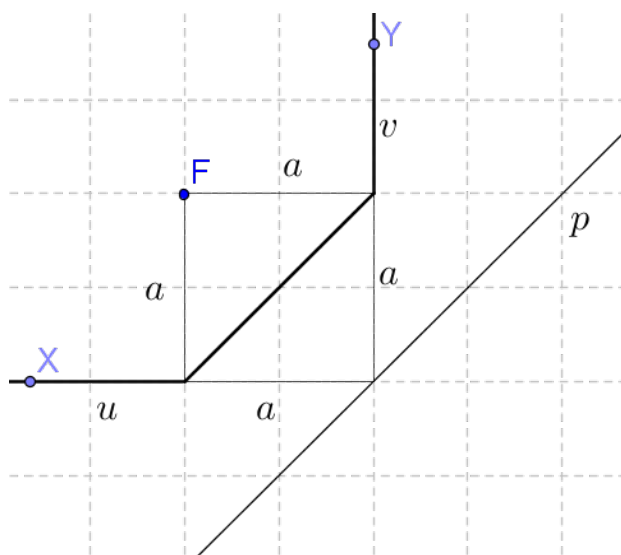
Popišme parabolu obecněji (obr. 76).



Obr. 76: Popis paraboly

První část důkazu provedme zvlášť pro různé části paraboly. Ta, která není rovnoběžná se souřadnicovými osami, je stranou kružnice se středem v ohnisku a poloměrem  $a$  a zároveň náleží části ekvidistanty, jejíž body jsou vzdáleny od řídicí přímky  $a$ . Tato část tedy parabole náleží. Co se dvou polopřímkových částí týče, pak zvolme na každé jeden libovolný bod ( $X$  a  $Y$ ), jak ukazuje obr. 77. Připomeňme si, že pokud v tomto případě chceme určit vzdálenost řídicí přímky a nějakého bodu, je

početně výhodné ji převést na vzdálenost bodu a bodu na přímce se stejnou  $x$ -ovou, nebo  $y$ -ovou souřadnicí.



Obr. 77: První část důkazu

Pro body  $X$  a  $Y$  tedy dostáváme

$$|FX| = a + u = |Xp|,$$

respektive

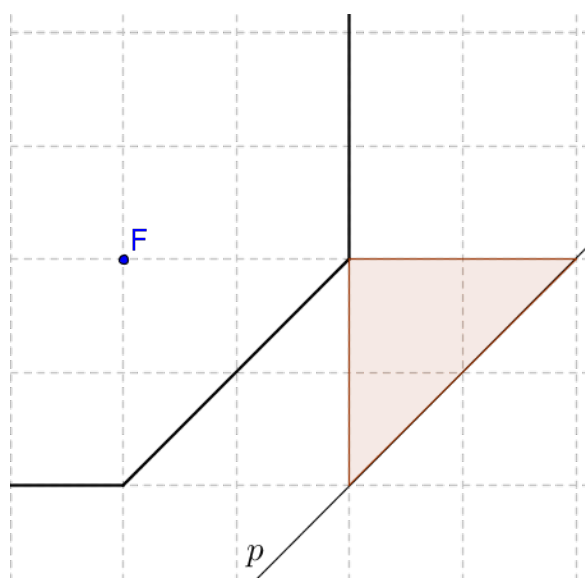
$$|FY| = a + v = |Yp|.$$

A protože body  $X$  a  $Y$  byly zvoleny obecně, platí právě jeden z těchto vztahů pro každý bod polopřímkových částí, čímž je první část důkazu dokončena.

V druhé části důkazu ihned vylučme body, které neleží v polorovině ohraničené řídicí přímkou, a v níž leží ohnisko, ze stejného důvodu, proč jsme neuvažovali, že by druhá část ekvidistanty mohla vytvořit body paraboly v bodové konstrukci. Nyní vezměme v potaz body na polopřímkové části rovnoběžné s osou  $x$ . Vyberme jeden takový ( $Z$ ) a vedme jím rovnoběžku s osou  $y$ . Na ní vyznačme body  $K$ ,  $L$ ,  $M$  a  $N$  podle obr. 78.





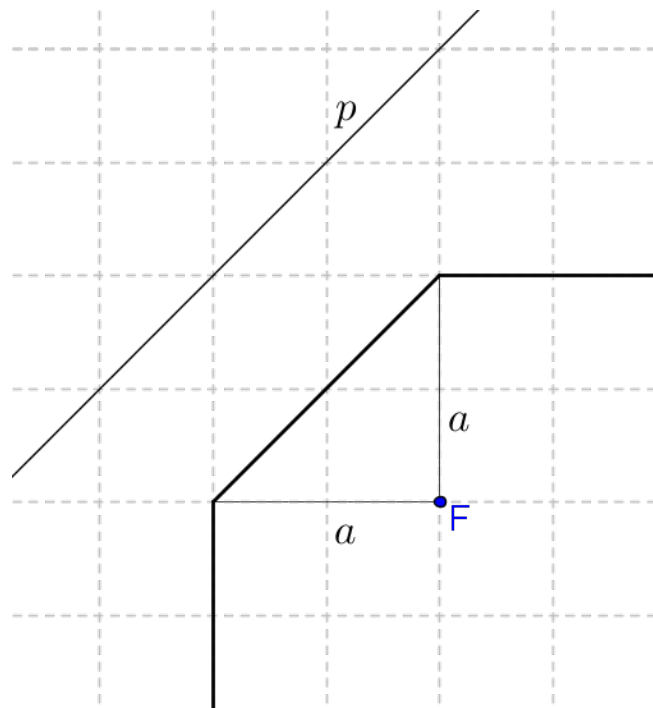


Obr. 79: Zbývající plocha

Pokud použijeme upravený postup, který byl aplikován na polopřímkovou část paraboly rovnoběžnou s osou  $y$ , na část, která není rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou, podaří se nám vyloučit i tyto body. Tím je důkaz dokončen.

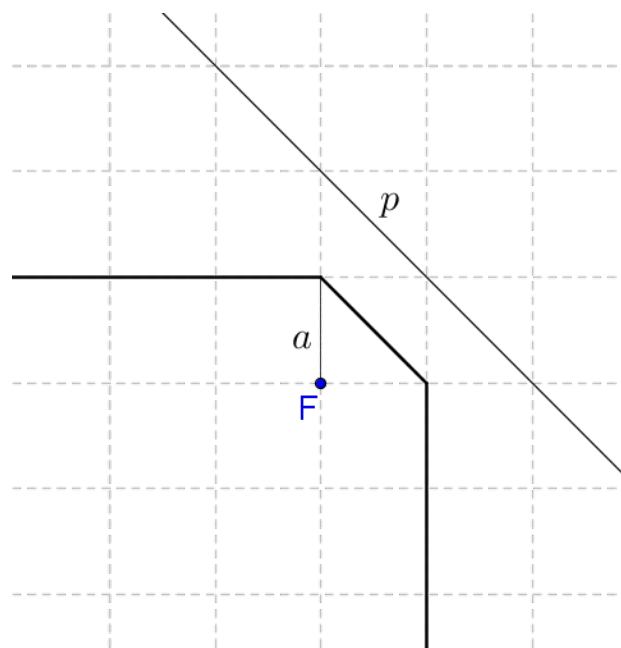
Někdo může namítnout, že tím jsme pouze dokázali platnost tvaru paraboly pro případ, kdy řídicí přímka roste, a k tomu ještě pouze pro situaci, kdy bod na řídicí přímce se stejnou  $y$ -ovou souřadnicí jako ohnisko má  $x$ -ovou souřadnici větší než ohnisko. (Je napravo od ohniska.) To je zajisté pravda, ovšem po provedení bodové konstrukce a úvah analogických k těm, které byly předvedeny v důkazu, dojdeme k následujícím tvarům i pro ostatní situace.

Řídicí přímka roste, ohnisko má větší  $x$ -ovou souřadnici než bod na přímce se stejnou  $y$ -ovou souřadnicí (obr. 80).



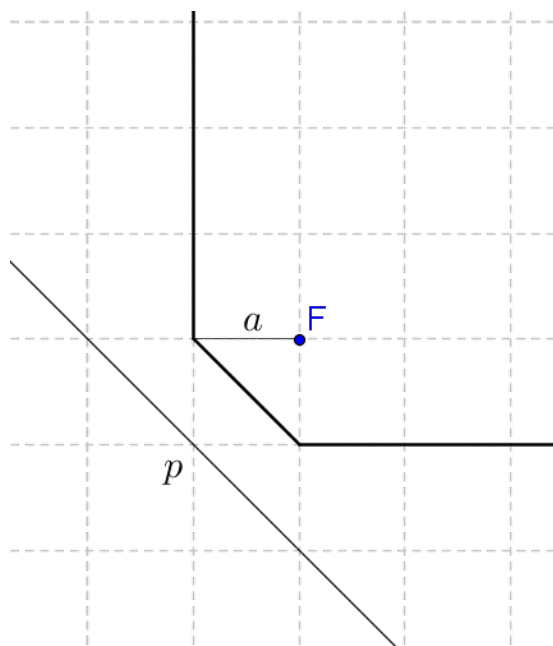
Obr. 80: *Situace druhá*

Řídící přímka klesá, ohnisko má menší  $x$ -ovou souřadnici než bod na přímce se stejnou  $y$ -ovou souřadnicí (obr. 81).



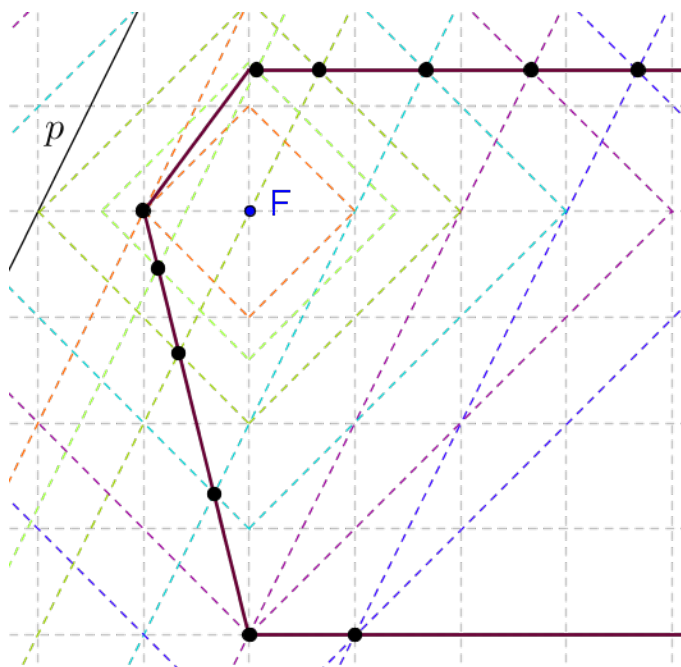
Obr. 81: *Situace třetí*

Řídící přímka klesá, ohnisko má větší  $x$ -ovou souřadnici než bod na přímce se stejnou  $y$ -ovou souřadnicí (obr. 82).



Obr. 82: *Situace čtvrtá*

Nyní se podívejme na tvar paraboly pro řídicí přímku rostoucí, či klesající prudčeji než strana manhattanské kružnice. Provedme bodovou konstrukci. Parametr  $2a$  položme roven dvěma (obr. 83). Body, které vzešly z bodové konstrukce jsou sytě černé, předpokládaný tvar paraboly je pro přehlednost značen tlustou hnědou čarou.

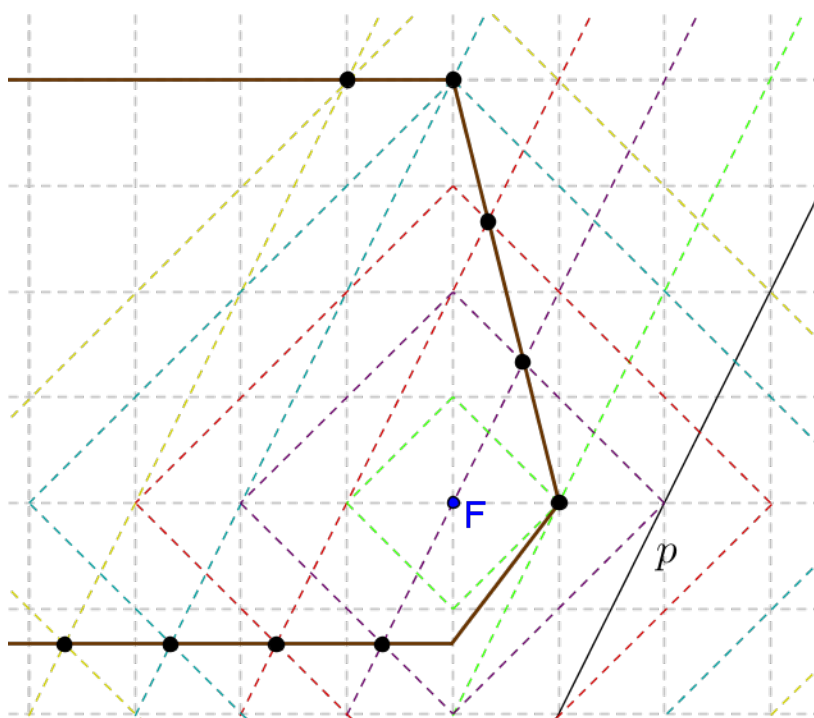


Obr. 83: *Předpokládaný tvar paraboly*

Jak je z obrázku vidět, tvar paraboly se změnil tak, že dvě části, které nejsou rovnoběžné ani s jednou souřadnicovou osou, nejsou stejně dlouhé. Ještě zvláštnější je

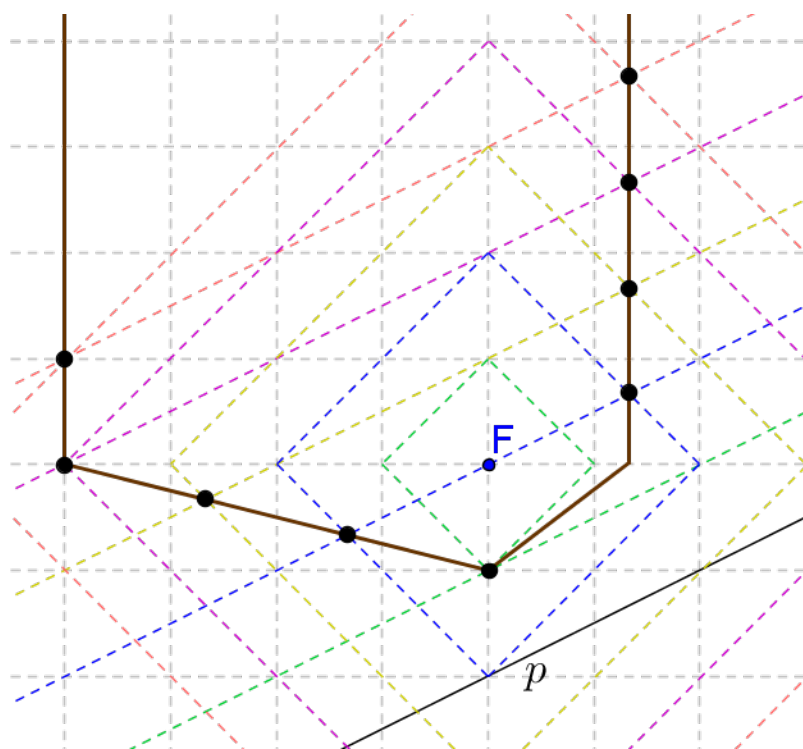
fakt, že žádná z těchto částí neroste, nebo neklesá ani stejně jako řídicí přímka ani jako strana manhattanské kružnice. Skutečně, jak dokládá [4, str. 442-448], stejně tak jako Christiny Janssen [7, str.46-53], ukázat tvar manhattanské elipsy pro obecné případy růstu řídicí přímky je poměrně zdlouhavé a náročné. Zatímco [4] předkládá důkaz pro jeden zvolený druh případů a poté ho pomocí transformací převádí na zbylé, [7] tyto další případy zmiňuje, avšak hlouběji nerozebírá. A jelikož cíl této práce rozhodně není říci vše, co se o manhattanských kuželosečkách říci dá, odkažme případné zájemce o zjištění tvaru paraboly pro všechny možné případy na zdroje uvedené výše a pro toho, kdo by si chtěl lámat hlavu nad tvarem paraboly sám, přidejme na závěr této kapitoly několik obrázků bodových konstrukcí a předpokládaných tvarů parabol pro vybrané situace.

Řídicí přímka roste prudčeji než strana manhattanské kružnice, ohnisko má menší  $x$ -ovou souřadnici než bod na přímce se stejnou  $y$ -ovou souřadnicí (obr. 84).



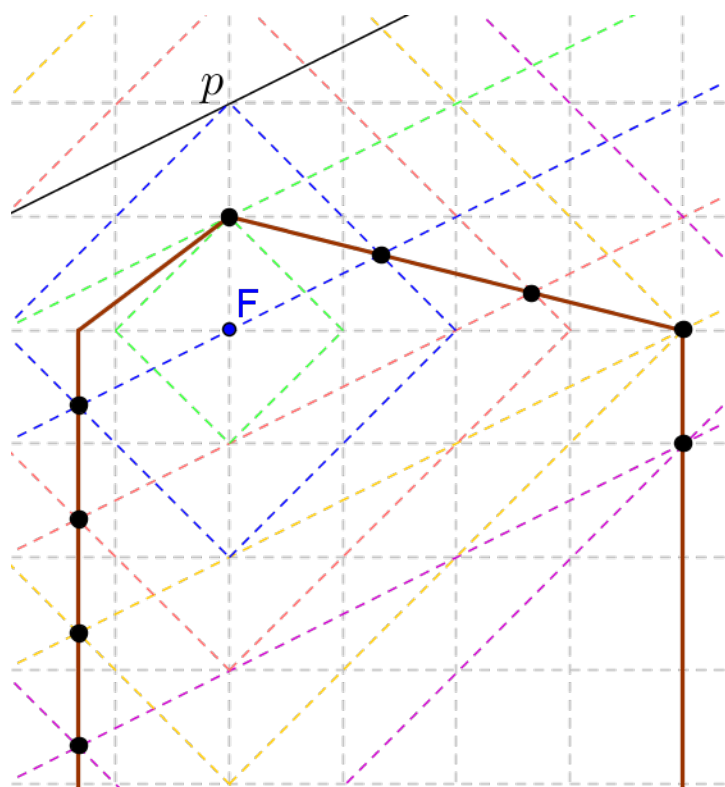
Obr. 84: Řídicí přímka prudče roste, ohnisko nalevo od ní

Řídicí přímka roste mírněji než strana manhattanské kružnice, ohnisko má větší  $y$ -ovou souřadnici než bod na přímce se stejnou  $x$ -ovou souřadnicí (obr. 85).



Obr. 85: Řídící přímka mírně roste, ohnisko nad ní

Řídící přímka roste mírněji než strana manhattanské kružnice, ohnisko má menší  $y$ -ovou souřadnici než bod na přímce se stejnou  $x$ -ovou souřadnicí (obr. 86).



Obr. 86: Řídící přímka mírně roste, ohnisko pod ní

## 8 Příklady

### 8.1 Zadání příkladů

1 V metrice zavedené v podkapitole 2.1 určete vzdálenost následujících dvojic stanic metra:

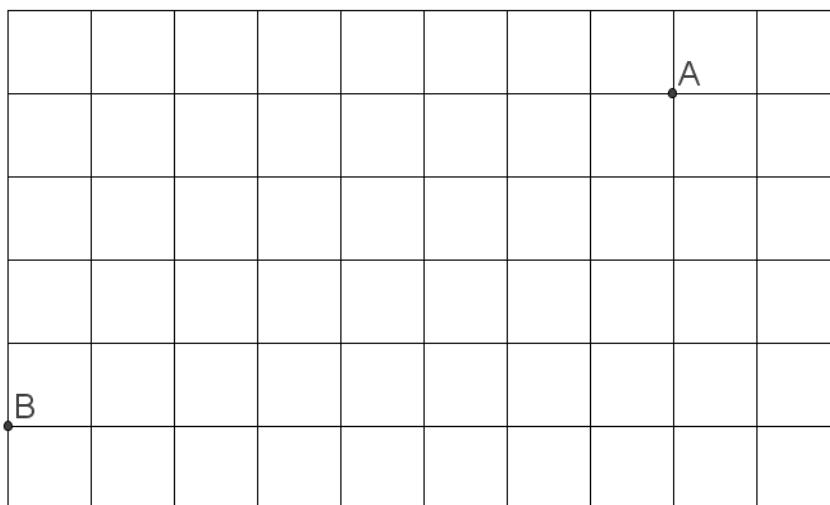
a) Zličín – Černý most,

b) Hlavní nádraží – Můstek,

c) Skalka – Vysočanská.

2 Dokažte, že Hammingova vzdálenost je metrikou na množině textových řetězců.

3 Na následujícím plánu města (obr. 87), kde úsečky představují ulice, jejich průsečíky křižovatky a plochy mezi úsečkami zastavěnou plochu, najděte alespoň 10 nejkratších cest mezi body  $A$  a  $B$  a určete délku těchto cest. Kolik takových cest existuje?



Obr. 87: Plánek města

4 Najděte všechny průsečíky následujících kružnic daných středy  $S_1$  a  $S_2$  a poloměry  $r_1$  a  $r_2$  v manhattanské metrice:

a)  $S_1 = [1; 2]$ ,  $r_1 = 2$ ,  $S_2 = [-2; 0]$ ,  $r_2 = 2,5$

b)  $S_1 = [-1; 3]$ ,  $r_1 = 4$ ,  $S_2 = [5; 3]$ ,  $r_2 = 2$

c)  $S_1 = [-1; 1]$ ,  $r_1 = 3$ ,  $S_2 = [0, 5; 2, 5]$ ,  $r_2 = 1$

d)  $S_1 = [3; 2]$ ,  $r_1 = 1$ ,  $S_2 = [3; -1]$ ,  $r_2 = 4$

5 Jak by bylo potřeba upravit příklad s robotem v kapitole 4, aby hledanou množinou nebyla manhattenská kružnice, ale elipsa?

6 Dokažte, že ke každým dvěma bodů v rovině existuje právě jedna uspořádaná trojice  $(S, \Delta_{xF}, \Delta_{yF})$ , a navíc že každá tato trojice generuje právě jednu dvojici bodů.

7 Do roviny zakreslete tvar elipsy, jež je dána ohnisky  $E$  a  $F$  a parametrem  $2a$  pro následující případy:

a)  $E = [-1; -1]$ ,  $F = [2; -1]$ ,  $2a = 7$

b)  $P(E, F) = ([1; 0], 0, 3)$ ,  $2a = 8$

c)  $P(E, F) = ([0; 0], 1, -2)$ ,  $2a = 9$

d)  $P(E, F) = ([2; 1], 2, -2)$ ,  $2a = 10$

8 Do roviny zakreslete hyperbolu pro následující vzájemné polohy ohnisek  $E$ ,  $F$  a hodnoty parametru  $2a$ :

a)  $P(E, F) = ([1; 5], 2, 0)$ ,  $2a = 3$

b)  $P(E, F) = ([2; -3], 0, -4)$ ,  $2a = 5$

c)  $P(E, F) = ([2; 1], -2, 2)$ ,  $2a = 6$

d)  $P(E, F) = ([1; 2], -5, 1)$ ,  $2a = 4$

e)  $P(E, F) = ([1; 2], 2, 6)$ ,  $2a = 6$

f)  $P(E, F) = ([-4; 3], 4, -3)$ ,  $2a = 2$

9 Hyperbola má ohniska  $E = [-2; 1]$  a  $F = [4; 3]$ . Navrhněte hodnotu parametru  $2a$  (pokud taková existuje) tak, aby:

a) dvě polopřímkové části byly rovnoběžné s osou  $x$  a dvě s osou  $y$

b) se hyperbola skládala také z částí s nenulovou plochou

c) všechny polopřímkové části byly rovnoběžné s osou  $y$

d) všechny polopřímkové části byly rovnoběžné s osou  $x$

10 První parabola má ohnisko  $E$  a její řídicí přímka prochází body  $A$  a  $B$ , druhá parabola má za ohnisko bod  $F$  a její řídicí přímka prochází body  $C$  a  $D$ . V rovině zakreslete obě paraboly a najděte jejich průsečíky pro následující situace:

a)  $E = [-1; 1]$ ,  $A = [0; -1]$ ,  $B = [2; -1]$ ,  $F = [3; 3]$ ,  $C = [4; 1]$ ,  $D = [4; 3]$

b)  $E = [3; -1]$ ,  $A = [0; -5]$ ,  $B = [2; -5]$ ,  $F = [3; 4]$ ,  $C = [4; 6]$ ,  $D = [2; 6]$

c)  $E = [2; 0]$ ,  $A = [0; 0]$ ,  $B = [2; 2]$ ,  $F = [5; 3]$ ,  $C = [5; -1]$ ,  $D = [9; 3]$

## 8.2 Návod k řešení vybraných úloh

Úlohy prezentované v předchozí podkapitole jsou různých druhů. Ty s čísly 4, 7, 8 a 10 obsahují konstrukční část, která by při aplikaci poznatků z relevantních kapitol neměla činit větší problémy. Pokud je požadováno nalezení průsečíků, jsou útvary voleny tak, že pokud existují jejich společné body, jejich odhalení by nemělo být komplikované. Úloha 1 by také neměla být složitá, jen je dobré si dát pozor na to, jestli u zadání b) a c) je správně zvolena přestupní stanice.

Naproti tomu zbylé příklady místy vyžadují hlubší zamyšlení, proto následuje tu kompletní, tu hrubý návod k řešení těchto úloh.

2 Dokázat, že je Hammingova vzdálenost metrikou, znamená prokázat platnost axiomů metriky (podkapitola 2.1). Axiom nezápornosti je jistě splněn, protože se buď řetězce neliší, potom je Hammingova vzdálenost rovna 0, nebo se liší na kladném počtu míst. Není jistě možné, aby pokud se první řetězec liší od druhého na daném počtu míst, aby se druhý od něj lišil na jiném počtu, protože jinak by v každém případě muselo jít o jiné řetězce. Axiom symetrie je tedy rovněž splněn. Co se axiomu symetrie týče, převede se na složený výrok: Pokud je Hammingova vzdálenost dvou řetězců rovna nule, pak jde o totožné řetězce a současně, pokud jsou řetězce totožné je jejich Hammingova vzdálenost roven nule. Ukázat platnost jednotlivých implikací už není těžké. Nejnáročnější na rozmyšlení se jeví být prokázání platnosti axiomu trojúhelníkové nerovnosti. Zde je možné provést důkaz sporem. Budeme předpokládat, že Hammingova vzdálenost řetězců  $x$  a  $z$  je rovna  $p$ , Hammingova vzdálenost řetězců



$x$  a  $y$  je rovna  $q$  a Hammingova vzdálenost řetězců  $y$  a  $z$  je rovna  $r$ . Protože sporujeme, musí současně platit:

$$p > q + r$$

Ale i kdybychom vzali řetězec  $x$ , změnili ho na  $q$  místech, poté vzali výsledný řetězec a změnili ho na  $r$  místech (jiných, či alespoň z části stejných) bude se výsledný řetězec  $z$  lišit od původního řetězce  $x$  nejvýše na  $q + r$  místech. Současně ale víme, že  $x$  a  $z$  se liší na  $p$  místech. Z výše uvedené nerovnosti dostáváme, že  $z$  a  $z$  se od sebe liší alespoň na jednom místě. Podle axiomu totožnosti tedy  $z$  a  $z$  nemůžou být stejné řetězce, což ústí do sporu s předpoklady. Musí proto platit původní tvrzení, axiom trojúhelníkové nerovnosti.

3 Zde hlouběji rozeberme pouze otázku, kolik nejkratších cest existuje<sup>3</sup>. Víme, že nejkratší cesta od  $A$  do  $B$  se musí skládat z osmi úseků vodorovných a čtyř úseků svislých. V nejkratší cestě mají tyto úseky libovolné pořadí. Označme pořadí jednotlivého úseku v sekvenci nejkratší cesty číslem v rozsahu 1 až 12. Nyní vybíráme čtyři z dvanácti čísel, které budou představovat svislé úseky. Zbytek jsou automaticky úseky vodorovné. Počet způsobů, jak vybrat čtyři čísla z dvanácti, kde nezáleží na pořadí je roven kombinačnímu číslu dvanáct nad čtyřmi, což je 495.

5 Například tak, že by nyní byli roboti dva, kteří by sdíleli určité množství energie. Při ponechání ostatních předpokladů by elipsou byla množina všech koncových bodů drah robotů takových, že obě končí ve stejném bodě.

6 všechny složky uspořádané trojice  $(S, \Delta_{xF}, \Delta_{yF})$  jsou ze své definice zavedeny jednoznačně, protože souřadnice bodů  $E$  a  $F$  jsou jednoznačně určeny, a výsledky jejich sčítání a odčítání jsou také jednoznačné. Ze strany druhé je ze zadané uspořádané trojice  $(S, \Delta_{xF}, \Delta_{yF})$  možné získat souřadnice bodů  $E$  a  $F$  tím, že se k jednotlivým souřadnicím bodu  $S$  přičte  $\Delta_{xF}, \Delta_{yF}$  (pro  $F$ ) respektive odečte (pro  $E$ ), což opět ústí pouze v jednu možnost.

9 To, jaký bude mít hyperbola tvar, se odvíjí od polohy krajních bodů částí nerovnoběžných se souřadnicovými osami. Ty jsou vzdáleny polovinu  $d$  od příslušného ohniska. Pokud bude mít dva z těchto bodů souřadnice  $[-2; 3]$  a  $[4; 1]$

---

3 Argumentace byla inspirován výkladem Mgr. Dereka Pilouse.

nastává situace b). Hodnota  $d$  je závislá na parametru  $2a$ . Pro b) je  $2a = 4$ , pro menší kladnou hodnotu  $2a$  nastává situace c), pro větší situace a); d) nenastává pro žádnou přípustnou hodnotu.

## Závěr

Závěrem shrňme, jaké výsledky práce přinesla. Velkým přínosem bylo určitě vytvoření česky psaného materiálu zabývajícího se kuželosečkami v manhattanské metrice, což umožňuje lidem, kteří mají o problematiku zájem, nicméně mají problém s cizojazyčnými texty, najít informace, které by je mohly zajímat. Navíc je text oproštěn od využití hlubších matematických poznatků, což na jednu stranu způsobuje, že některé pasáže jsou delší a některé formulace krkolomnější, než kdyby se použil náročnější matematický aparát, na stranu druhou ovšem činí text přístupnějším většímu počtu případných zájemců.

Co se samotných poznatků týče, byla prezentována definice pojmu metrika, která byla osvětlena na názorném příkladu. Problematika manhattanské metriky byla diskutována v souvislosti s reálným světem a byl podán důkaz toho, že metrikou skutečně je. Dále byl prozkoumán tvar kružnice, u elipsy a hyperboly byl odvozen tvar pro libovolnou polohu ohnisek, u paraboly se při zvolené definici přímky podařilo dosáhnout odvození pouze u speciálních případů, čímž se ale otevírá prostor pro případné práce, které se tvarem pro obecné zadání budou zabývat. Další možností je pak zkoumat parabolu při jiné definici přímky. Nesmíme zapomínat ani na použitou metodu. Převedením bodové konstrukce do manhattanské metriky jsme získali nástroj k určování přibližného tvaru kuželoseček. Samozřejmě i postupy použité v důkazech by mohly najít uplatnění při řešení jiných problémů v manhattanské metrice.

V neposlední řadě stojí za to podotknout, že už sama myšlenka, že základní geometrické útvary mohou mít, a dokonce mají tvary, na které člověk není zvyklý, může vzbuzovat úžas a zvědavost, čehož by se mohlo využít při výuce matematiky na školách.

Téma kuželoseček v manhattanské metrice tímto materiálem ale zdaleka není vyčerpáno. Stačí nahlédnout do [9] od Richarda Laatsche pro ilustraci toho, že na kuželosečky je možno se dívat i z jiného úhlu pohledu, než který je prezentován zde. A vůbec, jak ukazuje například server *taxicabgeometry.net*, na manhattanské metrice lze postavit celou geometrii, s trojúhelníky se třemi stejnými úhly a dvěma stejně dlouhými stranami, které přesto nejsou shodné, a dalšími zajímavostmi [18]. Dalo by

se říci, že manhattanská metrika představuje svět stejného, které je tak jiné. A pohled do něj má hodně co nabídnout.

## Literatura

- [1] Váza a dvě tváře. AfroDita: hry online [online]. 1998 [cit. 2012-06-22]. Dostupné z: <http://www.afrodita.name/klamy/opticky-klam-91-v%E1za-a-dv%EC-tv%E1%F8e.html>
- [2] Encyclopedia of Distances [online]. 2009 [cit. 2012-06-22]. ISBN 978-3-642-00233-5. Dostupné z: <http://www.springer.com/978-3-642-00233-5>
- [3] THOMPSON, Kevin. Taxicab Geometry [online]. 2010 [cit. 2012-06-22]. Dostupné z: <http://www.taxicabgeometry.net/>
- [4] MOSER, Joseph M. a Fred KRAMER. LINES AND PARABOLAS IN TAXICAB GEOMETRY. In: The Pi Mu Epsilon Journal. Worcester, 1982, s. 441-448. Dostupné z: <http://www.taxicabgeometry.net/research.htm>
- [5] INY, David. Taxicab Geometry: Another Look at Conic Sections. In: The Pi Mu Epsilon Journal. Worcester, 1984, s. 645-647. Dostupné z: <http://www.taxicabgeometry.net/research.html>
- [6] WILSON, Jim. Taxi Cab Geometry with Technology: Some Exploration Materials. The University of Georgia: Mathematics education [online]. 2001 [cit. 2012-06-22]. Dostupné z: <http://jwilson.coe.uga.edu/MATH7200/TaxiCab/TaxiCab.html>
- [7] JANSSEN, Christina. Taxicab Geometry: Not the Shortest Ride Across Town. Ames, 2007. Diplomová práce. Iowa State University
- [8] General Equation for Taxicab Conics and Their Classification. In: Mitt. Math. Ges. Hamburg. Hamburg, 2000, s. 135-148.
- [9] LAATSCH, Richard. Pyramidal Sections in Taxicab geometry. Mathematics Magazine. 1982, roč. 55, č. 4, s. 205-212.
- [10] Matematika. Spring conference on computer graphics [online]. 2012 [cit. 2012-06-22]. Dostupné z: <http://www.sccg.sk/~matus/part2.htm>
- [11] Mapa metra Praha. Mapa metra Praha: Trasy a stanice metra v Praze [online]. 2008 [cit. 2012-06-22]. Dostupné z: <http://www.mapametra.cz/>
- [12] Hammingova vzdálenost. Algoritmy.net [online]. 2008 [cit. 2012-06-22]. Dostupné z: <http://generator.citace.com/dok/e18zBnkyeVELya8X>
- [13] Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-120-5

- [14] Diferenciální počet funkce dvou proměnných. České Budějovice, 2011. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- [15] Seriál – Metrické prostory I. In: Matematický korespondenční seminář MFF UK [online]. 2005 [cit. 2012-06-22]. Dostupné z: <http://mks.mff.cuni.cz/archive/>
- [16] Line: math word definition. In: Math open reference [online]. 2009 [cit. 2012-06-22]. Dostupné z: <http://www.mathopenref.com/line.html>
- [17] Taxicab Geometry - Point to Line Distance. Taxicab Geometry [online]. 2010 [cit. 2012-06-22]. Dostupné z: <http://www.taxicabgeometry.net/general/point-line.html>
- [18] Taxicab Geometry - Congruent Triangles. [Http://www.taxicabgeometry.net/](http://www.taxicabgeometry.net/) [online]. 2010 [cit. 2012-06-22]. Dostupné z: <http://www.taxicabgeometry.net/triangles/congruent.html>