

U N I V E R Z I T A K A R L O V A V P R A Z E

E V A N G E L I C K Á T E O L O G I C K Á F A K U L T A

O B J E V I T E L É Z L A T É H O Ř E Z U

B A K A L Á Ŕ S K Á P R Á C E

Autor:	Tereza Pleskotová
Katedra:	Katedra filosofie a teologie
Vedoucí práce:	PhDr. Zuzana Svobodová, Ph.D.
Studijní program:	B 7508 Sociální práce
Studijní obor:	Pastorační a sociální práce
Rok odevzdání:	2012

Prohlášení

1. Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci s názvem Objevitelé zlatého řezu napsala samostatně a výhradně s použitím uvedených pramenů.

2. Souhlasím s tím, aby byla zpřístupněna veřejnosti pro účely výzkumu a soukromého studia.

V Praze dne 13. Dubna 2012

Tereza Pleskotová

Bibliografická citace

Objevitelé zlatého řezu: Bakalářská práce / Pleskotová Tereza; Univerzita Karlova v Praze, Evangelická teologická fakulta, katedra filosofie a teologie, vedoucí práce PhDr. Zuzana Svobodová, Ph.D., Praha, 2012.

Anotace

Tato teoretická bakalářská práce s názvem Objevitelé zlatého řezu v sobě zahrnuje vymezení pojmů, po kterém následuje stručné shrnutí historických informací, které předcházely objevení zlatého řezu. V klíčové části práce je popsáno objevení a první používání zlatého řezu lidmi, převážně ve starověkém Egyptě a antickém Řecku. Dále je zde především popsán přínos Euklida z Megary, Platóna, Aristotela, Pythagora a pythagorejců. Je zde zachycen hlavně jejich přínos v oblasti matematiky obecně a zvláště pak se zaměřením na objevení a první používání zlatého řezu. V další části se v této práci věnuji sestavení zlatého řezu, zlatého obdélníku a rozdělení úsečky ve zlatém poměru. Následující kapitola obsahuje stručný souhrn informací o užívání zlatého poměru v dobách jeho velké slávy – renesance. Závěrečná kapitola je věnována používání zlatého řezu v současném světě.

Annotation

This theoretical thesis entitled The discoverers of the golden section includes definitions of terms, followed by a brief summary of historical information that preceded the discovery of the golden section. The key part is describing the discovery and first use of the Golden ratio by people, mostly in ancient Egypt and ancient Greece. Then there is described contribution Euclid of Megara, Plato, Aristotle, Pythagoras and the Pythagoreans. There are mainly reflected in their contribution to mathematics in general and then focus on the discovery and first use of the golden section. The next part of this work is devoted to construct a golden section, golden rectangle, and distribution lines in the golden ratio. The following chapter provides a brief summary of information on the use of the golden ratio at the time of his great fame - renaissance. The final chapter is devoted to using the golden section in today's world.

Klíčová slova

Zlatý řez, zlatý poměr, ϕ , proporce, filosofie, matematika, Pythagoras, Platón, Aristotelés, Euklides, renesance.

Keywords

Golden section, golden ratio, ϕ , proportion, philosophy, mathematics, Pythagoras, Plato, Aristotle, Euclid, Renaissance.

Poděkování

Děkuji PhDr. Zuzaně Svobodové, Ph.D., za konzultace a odborné vedení této bakalářské práce.

Obsah

Úvod	7
1. Vymezení pojmů	10
2. Dějiny matematiky	12
3. Egypt	14
4. Řecko	16
5. Pythagoras a Pythagorejci	19
6. Platón	25
6.1. Pět Platónských těles	28
7. Přínos Aristotelův	30
8. Euklides	32
8.1. Základy	34
9. Sestrojení zlatého řezu	36
9.1. Zlatý řez v konstrukci logaritmické spirály	38
10. Historie a použití zlatého řezu ve středověku	39
11. Současnost	45
12. Shrnutí	47
Závěr	48
Literatura a prameny	50
Internetové zdroje	53
Seznam obrázků	54

Úvod

Zlatý poměr nebo také zlatý řez je proporční poměr, jehož hodnota je přibližně 1,6180339887 4989484820 4586834365 6381177203 0917980576 ...

Tento poměr má řadu zajímavých vlastností a jeho popularita a přitažlivost je dána hlavně tím, že se objevuje napříč vědami a obory. Nalézt ho můžeme v biologii, výtvarném umění, hudbě, historii, filosofii, matematice, architektuře ale i v psychologii a arteterapii. Na rozdíl od jakéhokoliv jiného poměru se toto číslo stalo centrem intenzivní a bohaté historie bádání a ještě stále nás v současnosti udivuje a překvapuje. Tento poměr se později dočkal názvu Božská proporce od matematika Pacioliho. Možná ho takto pojmenoval právě proto, že ho chápal jako dveře k chápání krásy a spirituality v životě. Jde o neuvěřitelnou roli jednoho čísla v lidských dějinách a ve vesmíru jako celku.

Cílem mé bakalářské práce je stručně a přehledně popsat objevení zlatého řezu, čísla ϕ - Φ . Popsat, co vedlo k objevení zlatého řezu, kdo zlatý poměr objevil, kdo jej nejdříve používal a jakým způsobem, ukázat jeho použití, význam a rozvoj v období starověku až po renesanci.

Hlavní metoda používaná při psaní této bakalářské práce je sběr a třídění informací převážně z psaných dokumentů, studium odborné tištěné literatury, internetových pramenů a tištěných periodik. Jednotlivé kapitoly jsou řazeny především chronologicky. V práci se věnuji i technickým parametrům zlatého poměru a jeho sestavení. Pro doplnění informací o zlatém řezu se zmiňuji o faktech, která předcházela objevení zlatého řezu a v závěru práce se zmiňuji i o jeho použití v současném světě.

V první části práce se zabývám vymezením pojmů, které se v této práci objevují. Následuje stručné nastínění dějin matematiky, aby byla práce ukotvena v kontextu jednoho oboru, ve kterém se zlatý řez objevuje.

V dalších kapitolách se věnuji popsání hlavní myšlenky této práce, objevení a používání zlatého řezu ve Starověkém Egyptě a Řecku. V druhé polovině práce se věnuji sestavení zlatého řezu a používání zlatého řezu v období renesance. V závěru písemné práce zmiňuji, pro doplnění informací, jeho použití v současném světě.

V úvodu si zde dovoluji uvést teze našeho emeritního profesora RNDr. Jiřího Krupičky z knihy *Renesance rozumu*:

- Běh kosmu, včetně života na Zemi, je založen na pravděpodobnosti, nikoli na konečné definitivní Pravdě. Proto není jen stálým opakováním, ale vznikem nového.
- Svět je poznatelný, v míře dostatečné pro zachování života lidské společnosti, i v kritických situacích.
- Poznání nikdy nekončí. Jeho motorem je kolektivní rozum generací. Zastaví je teprve smrt lidstva.
- Rozum dává poznání řád. Bez rozumu je život jen okamžitá přítomnost, která si není vědoma ani minulosti, ani budoucnosti.
- Logika je pouze jednou ze schopností rozumu, i když nesmírně důležitou. Ponechána sama sobě dochází k absurditám.

- Sídlo rozumu je v mozku. Bez tohoto úžasného klubka neuronů, dítěte čtyř miliardy let hry pravděpodobnosti, není myšlení na této Zemi.
- Móda moderní doby utápí rozum ve skepsi a psychologizaci lidského života.
- Jedinec dostal od společnosti, minulé i současné, nesrovnatelně víc, než jí vrací. Každý, i největší génius, je velkým dlužníkem nespočetných generací před ním za otevřenou pokladnici poznání, současné společnosti dluží za polidštění z nahého novorozeněte.
- Zájem společnosti má přednost před zájmem jednotlivce. Rozum je rozhodčím.
- Myšlenka zůstává mrtvá, není-li sdělena druhým. Nesrozumitelné vyjádření myšlenku zabíjí.¹

¹ KRUPÍČKA, Renesance rozumu, 15

1. Vymezení pojmů

V běžném životě používáme slovo proporce čili úměra, buď pro srovnávací vztah mezi částmi věci z hlediska jejich velikosti či množství, anebo tehdy, když chceme popsat harmonický vztah mezi různými částmi celku. V matematice se termín „úměra“ používá k označení rovnosti následujícího typu – devět se má ku třem, jako se má šest ku dvěma. Obě uvedené definice můžeme aplikovat na fenomén zlatého řezu. Staří Řekové nazývali termín poměr slovem logos – které také znamená rozum, zvažování, později slovo, božský rozum.

Úměra (*analogia*) je řada po sobě jdoucích poměrů, která se obvykle sestává ze čtyř členů, například $4 : 8 :: 5 : 10$ („4 ku 8 se má jako 5 ku 10“).

Pythagorejci tento případ označovali jako čtyřčlennou nespojitou úměru. Základním, neměnným poměrem je zde $1 : 2$, který se opakuje. Převrácený poměr vyměňuje členy, takže $8 : 4$ je převráceným poměrem $4 : 8$ a neměnný poměr je nyní $2 : 1$. Platón pokládal spojitou geometrickou úměru za nejhlubší pouto, které drží vesmír pohromadě. V dialogu Timaios popisuje, jak světová duše v sobě váže do jedné harmonické rezonance rozumem poznatelný svět forem (včetně čisté matematiky), umístěný nahoře, a spodní, viditelný svět hmotných předmětů, a to prostřednictvím řad 1, 2, 4, 8, a 1, 3, 9, 27. Výsledkem jsou postupně spojitě geometrické úměry $1:2 :: 2:4 :: 4:8$ a $1:3 :: 3:9 :: 9:27^2$.

Poprvé se setkáváme s definicí zlatého řezu cca 300 let před naším letopočtem v díle slavného alexandrijského matematika Euklida, který ovšem ještě neužívá termín „zlatý řez“, ale používá pojem „krajní a střední poměr“.³

² LIVIO, Zlatý řez, 34

³ LIVIO, Zlatý řez, 35

V Matematické literatuře se jako symbol pro hodnotu zlatého řezu používá řecké písmeno tau - τ . Na počátku 20. Stol. Americký matematik Mark Barr dal poměru jméno ϕ - Φ . Tento poměr lze vyjádřit pomocí kvadratické rovnice:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848 \dots$$

Ve své písemné bakalářské práci pracuji s výrazy zlatý poměr, zlaté číslo, zlatý řez, se symbolem Φ a názvem ϕ jakožto se synonymy, protože v odborné i populární literatuře označují stejný fenomén.

Euklidova definice poměru:

„Poměr je kvalitativní vztah mezi rozměry dvou stejnorodých (*homogenních*) veličin. Úměra je rovnomocnost (*ekvivalence*) poměrů.“⁴

Euklides definoval proporci, již odvodil z obyčejného rozdělení úsečky způsobem, který označil jako rozdělení v „krajním a středním poměru“.

„Úsečka se rozdělí v krajním a středním poměru tehdy, když se celá má k delšímu dílu jako delší ke kratšímu.“⁵

Z čehož vyplývá, že zlatý řez je poměr, který lze získat, kupříkladu, správným rozdělením úsečky.

⁴ TAVARD, A., DEMAY, F. Věda a technika, 41

⁵ LIVIO, Zlatý řez, 35

2. Dějiny matematiky

Je důležité zmínit, že objevení zlatého řezu předchází velké časové období matematické historie. V této kapitole uvádím archeologické, historické a antropologické souvislosti týkající se prvního používání matematiky člověkem, které později vedlo k objevení zlatého řezu.

Matematika je obor lidského vědění, který se zabývá čísly, velikostmi, tvary a jejich vzájemnými vztahy. Počátky matematiky jsou nejasné. S velkou pravděpodobností jsou spojeny s dobou, kdy vznikaly představy o číslech. Pravěcí lidé nejdříve pochopili rozdíl mezi „jeden“, „dva“ a „více než dva“. Vývoj pak přinesl počítání ve smyslu přiřazení jednoho objektu k druhému, např. k prstům u ruky. Tyto objekty již mohly být zaznamenávány, kupříkladu pomocí hromádky kaménků nebo pomocí zářezů do dřevěné hole nebo kosti, a byly pojmenovávány. Nejdříve se pojmenování vázalo na konkrétní věci: tři muži, čtyři kaménky atd. Teprve později se objevili abstraktní pojmy „tři“, „čtyři“. Všeobecně je přijímán názor, že počítání vzniklo z praktické potřeby, např. při rozdělování zboží. Existuje však i jiný názor, že se čísla vyvinula při náboženských rituálech, kdy docházelo k organizování komunity, a řadové číslovky (první, druhý, třetí,...) vznikly dříve než číslovky základní (jedna, dva, tři,...).⁶ Za zmínku stojí nejstarší archeologické doklady o zaznamenávání počtu věcí formou vroubků či zářezů do zvířecích kostí z období zhruba 35 000 př. n. l. Kořeny matematiky nejsou vázány na místo, nezávisle se utvářely v různých částech světa.⁷

⁶ TAVARD, A., DEMAY, F. Věda a technika, 3

⁷ PARMAN, AS-SAID. Geometrická koncepce v islámském umění, 9-10

Mezi nejstaršími dochovanými matematickými texty jsou egyptské papyry moskevský papyrus (1850 př. n. l.) a Rhindův papyrus (1650 př. n. l.), ze staré Mezopotámie se dochovaly matematické tabulky přibližně z let 1600 př. n. l. a 300 př. n. l. Dalšími významnými přínosy v oblasti matematiky přispěla Indie, arabský svět, ale i mayští matematikové.⁸ Zde je namístě zdůraznit, jak značný byl dluh řecké geometrie vůči Egyptu a Mezopotámii. Řecký génius přetvořil geometrii na přesný, abstraktní, logický nástroj. To dokresluje vývoj obecného lidského dědictví a ukazuje, jak jedna civilizace těžila z druhé a rozvíjela metody sebevyjádření, aby co nejlépe sloužily její vlastní víře a praktikám. Až do 8. Století po Kristu, kdy Arabové zavedli nulu a desítkovou soustavu, jež byly převzaty z Indických pramenů, a bylo zavedeno užívání arabských číslic od jedničky do devítky, neexistovala abstraktní matematická operační hodnota čísel, jak ji chápeme v současnosti. Až do té doby bylo každé číslo symbolizováno znaménkem nebo znakem, který označoval jeho kvalitativní hodnotu. Později byla tato znaménka nahrazena abecedou coby početním systémem.⁹

⁸ TAVARD, A., DEMAY, F. Věda a technika, 5

⁹ PARMAN, AS-SAID. Geometrická koncepce v islámském umění, 9-10

3. Egypt

Nejstarší rozvinuté početní soustavy užívali Egypťané a Sumerové v jižní Babylonii na území nynějšího Iráku asi od roku 3000 před Kristem. Nejranější egyptská hieroglyfická soustava užívá opakování souboru symbolů pro čísla jedna, sto, tisíc, deset tisíc, sto tisíc a milion.¹⁰ Velká dochovaná architektonická díla Mezopotámie a Egypta nás utvrzují v předpokladu, že jejich tvůrci dokonale ovládali měření. Egypťští napínači provazů a chrámoví geometři museli vytvořit přesnou metodu, jak pomocí kolíku a provazu zakreslit do písku kruhy a přímky. To jim umožnilo stanovit geometrický postup pro vytváření precizních a přesných staveb ve zvláštním slohu, jako je například Velká pyramida v Gíze, postavená asi 2600 před Kristem. Matematika byla ve starém Egyptě a v Mezopotámii ve své podstatě praktickou disciplínou. I když číslům často přisuzovali mystický význam. Protože čísla a geometrické objekty jsou nadčasové a jsou nehmotné stejně jako duchovní bytosti. Egypťané užívali čísel v náboženských a magických souvislostech, z čehož vyplývá, že si povšimli možného propojení čísel a bohů. Egypťané si mysleli, že zlatý poměr byl posvátný. Proto byl velmi důležitý v jejich náboženství. Používali zlatý poměr při stavbě chrámů a míst pro mrtvé. Pokud rozměry na jejich budovách nebyly podle zlatého poměru, zůstavitel nemusel dojít k posmrtnému životu, či chrám by se nemusel líbit jejich bohům. Egypťané shledali zlatý poměr velice příjemným na pohled. Též egyptské hieroglyfy obsahovaly mnoho částí vytvořených na základě zlatého poměru. Písmeno h , je například zlatá spirála. Kromě toho jsou p a sh vytvořeny pomocí zlatých obdélníků.¹¹

¹⁰ BARROW, Teorie ničeho, 24

¹¹ TAVARD, A., DEMAY, F. Věda a technika, 5

Tehdejší počtáři měli snahu užívat spolehlivá pravidla (algoritmy), která mohli kdykoliv podle potřeby s jistotou použít. Staří Egypťané uznávali kánon proporcí lidského těla. Důkazem toho jsou geometricky přesně znázorněné postavy na nástěnných malbách v chrámech, které se do dnešní doby zachovaly.¹²

¹² OLSEN, Záhadný zlatý řez, 38
PARMAN, AS-SAID. Geometrická koncepce v islámském umění, 10

4. Řecko

V antice láska k moudrosti, filosofie, a láska k vědění byly totéž. Vědění bylo moudrost a moudrost byla vědění – a obojí bylo dítětem zkušenosti a rozumu. Vývoj antické filosofie nabízí pluralitu vysvětlení podobně jako u novodobých vědeckých hypotéz. Jednotlivá filosofická „vysvětlení“ se od sebe navzájem liší, ale přesto vykazují společné úsilí dobrat se skutečné povahy všech věcí racionální úvahou, přesněji myšlenkovou spekulací. Vedle filosofické reflexe světa směřující k odhalení skutečné povahy světa a vytvoření nejobecnějšího vysvětlení „všeho“ na základě věčně platné neměnné ontologie, setkáváme se u některých filosofů i s řešením některých otázek, které mají spíš charakter empirický a které se bezprostředně nemusí vztahovat k základní filosofické ontologii. Jsou to například otázky vysvětlující příčiny či původ geologických, biologických, meteorologických, matematických a kosmologických jevů včetně jejich popisu, případně i klasifikace. Jedná se o ty zlomky filosofických úvah, k nimž se současná věda hlásí jako ke svým počátkům a jež historie příslušné vědní disciplíny zahrnuje do svých úvodních kapitol. To také odpovídá obecně sdílenému názoru, že filosofie je matkou věd, i když sama vědou není, a že jednotlivé vědy se postupně vydělily ze svého filosofického rámce nebo základu a osamostatnily se. Na vztah filosofie k přírodním a jiným vědám, vznikl postupně názor, že zatímco jednotlivé vědy zkoumají konkrétní dílčí oblasti světa a jejich zákonitosti nebo jejich konkrétní aspekty (geometrie), filosofie se zabývá světem vcelku, nejobecnějšími

strukturami a zákony všeho existujícího (nauka o nejobecnějších zákonech přírody, společnosti, myšlení).¹³

Thalés z Milétu (asi 624-548 př. n. l.) je tradičně pokládán za nejstaršího řeckého přírodovědce či badatele o přirozenosti věcí jakožto celku, předpověděl zatmění Slunce, k němuž došlo v r. 585 př. Kr. Řečtí matematikové rozvinuli myšlenku přesného (rigorózního) matematického důkazu. Zdá se, že se tato idea neobjevila v žádné jiné části světa. Řecká představa o matematickém důkazu byla plně rozvinuta kolem roku 300 př. n. l., kdy Euklides dokončil své dílo *Základy*. Největšího významu mezi mnoha řeckými matematiky dosáhli spolu s Euklidem další tři myslitelé. Pokračovatel Euklida, Apollonios z Pergé (asi 262 – 190) je autorem díla *Kónika*, ve kterém podává ucelený výklad kuželoseček – křivek, které vzniknou pomocí řezů kužele. Apolloniův starší současník Archimedes (287 – 212) je všeobecně považován za největšího matematika antiky. Jeho dochované práce obsahují studium pák, metody hledání gravitačního středu těles různých tvarů a texty zabývající se studiem obsahu kruhů a dalších plošných útvarů. Poslední význačný řecký matematik Diofantos z Alexandrie (působil kolem roku 250 n. l.) je autorem raného díla nazvaného *Arithmética*. Dochované části obsahují přibližně 130 úloh. Z celé plejády antických myslitelů, jejichž myšlenky dodnes inspirují vědecké poznání, musíme zmínit dva velmi významné představitele a to Platóna (asi 428 – 347 př. n. l.), a Aristotela (348 – 322 př. n. l.), a to z hlediska jejich řešení vztahu běžné empirické zkušenosti a jejího zásadního filosofického vysvětlení na základě předpokládaného učení o bytí a jeho nejobecnějších určeních a pojmech. Platónův žák – a později – kritik Aristoteles nepovažuje empirické poznání za pouhou chiméru.

¹³ FAJKUS, B. *Filosofie a metodologie vědy*, 20-21, 43

Podle něho veškeré poznání začíná empirií, ale u této empirie nekončí, nýbrž postupuje cestou abstrakce (myšlení) hlouběji do povahy věcí a jevů.¹⁴

Jestliže poznání dospěje k obecným principům, které představují nutné, rozumem zaručené pravdy, postupuje zpět k jevům tak, že poskytuje „důvody“ pro existenci jednotlivých jevů pomocí obecných principů. Teprve tehdy je podle Aristotela dosaženo poznání. Jde nejen o popis jevů, ale také o jejich zdůvodnění obecnými principy. Aristotelova metoda představuje příklad induktivně-deduktivního pojetí procesu poznání.¹⁵

¹⁴ KIRK, RAVEN, SCHOFIELD. Předsókratovští filosofové, 103-104

¹⁵ FAJKUS, B. Filosofie a metodologie vědy. 19

5. Pythagoras a Pythagorejci

Pythagoras, žák Thalety z Milétu žil zhruba v letech 572 – 497 př. n. l. Narodil se na ostrově Samos v Egejském moři (poblíž malé Asie). V období mezi lety 530 a 510 odešel do Krotónu v jihoitalské dórské kolonii (tehdy do oblasti známé jako Velké Řecko). Samos opustil proto, aby unikl tyranii Polykrata. Někdy čas pobýval v Egyptě, kde se učil matematice, filosofii a náboženským naukám. Po obsazení Egypta perskými vojsky byl Pythagoras spolu s egyptskými kněžími podle některých pramenů unesen do Babylonu, kde se setkal s matematickou tradicí Mezopotámie. V Itálii začal Pythagoras přednášet filosofii a matematiku a rychle shromáždil nadšenou skupinu stoupenců, mezi kterými byly i ženy. Byl jedním z prvních myslitelů, kteří chápali čísla jako abstraktní entity, které existují samy o sobě. Jako první začal používat slovo filosofie, tak jak ho používáme v dnešním slova smyslu a také byl první, kdo nazval svět kosmem. Nedochoval se žádný z jeho životopisů sepsaných v řeckém období antiky a pozdější životopisy, například Životy, názory a výroky proslulých filozofů od Diogena Laertia z 3. stol. n. l., nejsou plně věrohodné a i názory na jeho smrt se různí.¹⁶ Pythagoras a Pythagorejci jsou nejvíce známi díky své předpokládané roli ve vývoji matematiky a díky aplikaci matematiky na pojetí řádu, ať již hudebního, kosmického nebo dokonce morálního. Pythagorejci spatřovali krásu v přiměřenosti. Člověk s velkou hlavou není krásný, a s malou také ne. Přitom však nejde o to, že ji má velkou nebo malou, ale že její velikost není v přiměřeném poměru k velikosti těla.¹⁷

¹⁶ LIVIO, Zlatý řez, 30

¹⁷ VOPĚNKA, P. Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci, 52-55

Velikost hlavy od brady až k temeni je k velikosti člověka v poměru jedna ku osmi. Jedná se o Polykleitův „*Kánon*“, v němž byl podán pythagorejský výklad poměrů lidského těla.¹⁸

S krásou vstoupili do geometrického světa i číselné poměry a s nimi pochopitelně čísla. Pevné a neměnné poměry jsou ty, které lze zachytit jako poměry čísel. Reálný svět nám nenabízí žádný vhodnější prostředek, jímž by mohly být poměry určovány a trvale přechovávány.¹⁹

Žádné Pythagorovo dílo se nezachovalo v psané formě a jeho nauka je známa hlavně z později sepsaných spisů Filoláových. Pythagoras vytvořil kult založený na číslech, který se později stal zvláštní kombinací dokonalosti a absurdity, on a jeho stoupenci viděli v číslech opravdovou podstatu věcí. Pythagorejci zaměnili matematiku za mystické náboženství, ve kterém čísla sama představovala znaky a symboly skrytých poznatků, jež se daly odhalit jen pronikavým pohledem a správnou interpretací.²⁰ Nebyli tak matematiky ani vědci v pravém slova smyslu. V centru jejich nauky spíše spočívala metafyzická filosofie významu čísel. Pythagorejský světový názor byl založen na krajním obdivu k *arithmos*, vnitřním vlastnostem celých čísel nebo poměrům těchto čísel a jejich předpokládané roli v kosmu. Považovali čísla a vztahy mezi nimi za něco, co odhaluje samy hlubinné základy světa. Zdálo se jim, že matematika lépe vystihuje podstatu věcí než názory jejich filosofických předchůdců. Zjištění, že existují čísla jako zlatý řez, jejichž desetinný rozvoj trvá do nekonečna, aniž vykazuje nějaké opakování nebo systém, způsobilo skutečnou filosofickou krizi.

¹⁸ STÖRING, H. J. Malé dějiny filozofie, 98

¹⁹ VOPĚNKA, P. Úhelny kámen evropské vzdělanosti a moci, 52-55

²⁰ BARROW, Pín na nebesích, 18

Řecká filosofie a mentalita nedokázala ve svém nedělitelném vesmíru a neměnném bytí najít žádné místo pro mezeru tohoto typu. Podle legendy dokonce pythagorejci v posvátné hrůze obětovali bohům sto volů. Ve skutečnosti to ovšem není příliš pravděpodobné, protože pythagorejci byli přísnými vegetariány a Pythagoras zabíjení zvířat zakazoval. Řada podobných pověstí se zakládá na pramenech s malou historickou věrohodností. „Pythagoras se věnoval i existujícím protikladům ve struktuře světa i lidských vztahů, které mají – vedle čísel – rozhodující význam.

Jde o tyto protiklady:

omezené – neomezené

liché – sudé

jedno – množství

pravé – levé

mužské – ženské

nehybné - pohyblivé

přímé – křivé

světlo – tma

dobré – zlé

čtverec – obdélník.“²¹

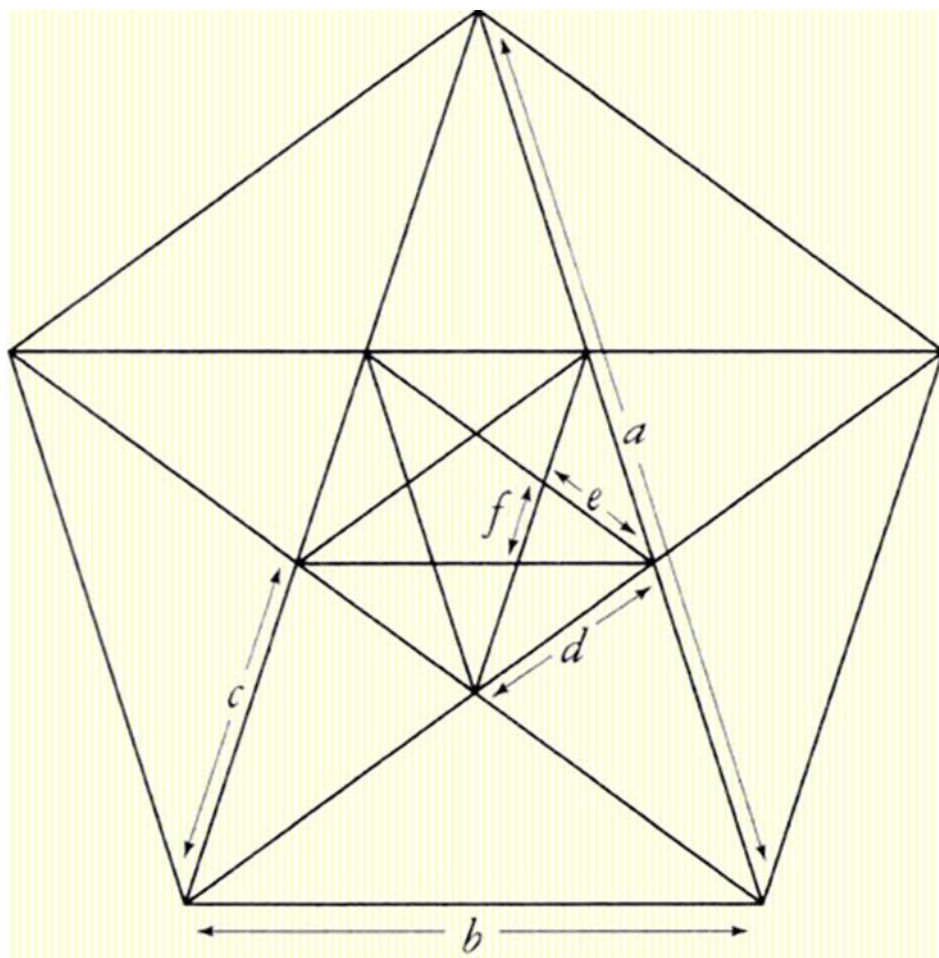
²¹ BARROW, Pí na nebesích. 16-17

Pythagoras a jeho žáci připisovali číslům kromě filosofických a geometrických významů i hodnoty mravní, a tak pomocí čísel rovněž vyjadřovali vztahy mezi lidmi.²² Vedle rolí, které pythagorejci přisuzovali lichým a sudým číslům obecně, přidělovali některým jednotlivým číslům i zcela konkrétní vlastnosti. Například číslo 1 považovali za tvůrce všech ostatních čísel a předpokládali o něm rovněž, že je znakem pro rozum. Geometricky jim číslo 1 reprezentovalo bod, který byl původcem všech rozměrů apod. Číslo 5 nás v pythagorejském vztahu dovádí ke zdrojům zlatého řezu. Pětka představovala svazek prvního ženského čísla 2 s prvním mužským číslem 3, a jako taková byla číslem lásky a manželství. Pythagorejci používali pentagram čili pěticípou hvězdu jako symbol svého bratrstva a nazývali ji „zdraví“ a právě na něm se poprvé objevil zlatý řez.²³ Pentagram úzce souvisí s pravidelným pětiúhelníkem, s pěti totožnými úhly a stranami. Spojením všech vrcholů pětiúhelníku dostaneme pentagram. (Obr. A) Tyto spojnice vytvoří menší pětiúhelník uprostřed a úhlopříčky tohoto menšího opět dají pentagram. Tento postup lze opakovat donekonečna. Vlastností všech těchto obrazců je, že pomocí základní geometrie lze snadno dokázat, že další úsečka je menší než předešlá v poměru, který se přesně rovná zlatému řezu²⁴.

²² HALADA, Průvodce evropským myšlením, 19

²³ LIVIO, Je Bůh matematik?, 204

²⁴ LIVIO, Zlatý řez, 37



Obr. A: Pětúhelník s pentagramem

Úhlopříčka a strana pětúhelníku jsou nesouměřitelné, což znamená, že poměr jejich délek, rovný ϕ , se nedá vyjádřit poměrem žádných dvou celých čísel. Tento důkaz tak potvrzuje, že ϕ je iracionálním číslem. Přesná doba objevu iracionálních čísel – čísel, která nejsou celými čísly, ani zlomky, není známa. Nejčastěji se uvádí doba kolem 5. století př. n. l. Pythagorejci věřili, že existence iracionálních čísel je natolik děsivá, že musí být projevem nějaké chyby v kosmu, a že tato chyba musí být zamlčena a uchována v tajnosti.

Objev zlatého řezu jako iracionálního čísla tak byl zároveň i objevem nesouměřitelnosti.²⁵ Z toho plyne, že je pravděpodobné, že nesouměřitelnost a iracionální čísla byla jako první objevena prostřednictvím zlatého řezu nebo byly tyto fenomény odhaleny zkoumáním poměru úhlopříčky a strany čtverce. Pythagorejská škola zanikla někdy ve 4. stol. př. n. l. a v prvním století našeho letopočtu došlo k obnově jejich učení v tzv. novopythagoreismu.²⁶

Je otázka, nakolik bylo vše z jejich tvrzení doloženo důkazy, výpočty a pozorováním a nakolik se nechali ovlivnit touhou po dokonalosti světa, který lze vyjádřit v číslech.

²⁵ LIVIO, Zlatý řez, 19

²⁶ HALADA, Průvodce evropským myšlením, 21

6. Platón

Platón (asi 428 – 347 př. n. l.), filosof a básník, podal obraz ideální společnosti, založené na vládě čistého rozumu. Byl prvním, kdo vzal témata z různých oborů matematiky, přírodních věd a jazyků po náboženství, etiku a umění, a pojednal je jednotným způsobem, jímž v podstatě definoval filosofii jako zvláštní disciplínu. Pro Platóna nebyla filosofie nějakým abstraktním předmětem odděleným od každodenních aktivit, ale naopak nejdůležitějším vodítkem k tomu, jak by měli lidé žít, poznávat pravdu a vést politickou činnost. Je obecně známo, že Platónova vlastní metafyzika je hluboce poznamenána myšlenkami, které pokládáme za pythagorejské, ačkoli on sám to nepřiznává.²⁷

Narodil se v Aténách nebo na blízkém ostrově Aigina jako syn Aristona a Periktione. Platónova rodina se pyšnila dlouhou řadou význačných předků z obou stran. Původně chtěl vstoupit do politiky, avšak po sérii násilných akcí ze strany politické frakce, která se ho snažila získat, svůj záměr přehodnotil. Později se věnoval tomu, co by mělo obsahovat vzdělání budoucích strážců státu. Po Sokratově smrti v roce 399 př. n. l. se Platón vydal na dlouhé putování po světě, které ukončil roku 387 př. n. l., kdy založil Akademii, školu pro filosofii a vědu, byl jejím ředitelem až do své smrti a poté jej vystřídal jeho synovec Speusippos. Nad vchodem údajně visel nápis „Nechť nevstupuje nikdo, kdo nezná geometrii.“ V jednom svém slavném dialogu *Giorgias* napsal: „Geometrická rovnost má velký význam mezi bohy i mezi lidmi.“ Sám Platón se ovšem jako matematik nevyznačoval žádným hlubším nadáním k odborným výzkumům a jeho přímý přínos k matematickému poznání byl pravděpodobně jen minimální.

²⁷ KIRK, RAVEN, SCHOFIELD. *Předsókratovští filosofové*, 280

Nicméně velice matematiku oceňoval a jeho spisy jsou jí hustě protkány. Platónova vize skutečné podstaty matematiky těsně souvisí s jeho slavným mýtem o jeskyni. Platón v něm zdůrazňuje pochybnou platnost informací přijímaných lidskými smysly. To, co vnímáme jako reálný svět, říká Platón, není o nic reálnější než stíny, které se promítají na stěnu jeskyně.

Jde o pasáž z Ústavy:

„Představ si lidi v podzemním jeskyňovitém obydlí, které má celou šíř jeskyně směrem ke světlu rozevřený vstup. Zde jsou tyto lidé od svého dětství připoutáni za stehna a za šíje tak, že zůstávají na stejném místě a hledí pouze dopředu a že pro svá pouta nemají možnost otáčet hlavou. Světlo mají z ohně, který plane za jejich zády seshora a z dále, mezi ohněm a připoutanými lidmi si představ cestu, kolem níž vede hrazení vybudované tak, jak mají před diváky své zábradlí kejkličí a provádějí za ním své kousky ... Teď si představuj, že podél tohoto hrazení nosí postavy rozličné nářadí, které přesahuje přes tu přepážku, potom sochy v podobě lidí, různá kamenná a dřevěná zvířata i rozmanité výrobky ... Pomysli si snad, že takovýto lidé by mohli vidět, ať ze sebe samých či ze svých druhů, něco jiného než stíny, které vrhá oheň na protilehlou stranu jeskyně?“²⁸

Podle Platóna se my lidé od oněch vězňů v jeskyni, kteří pokládají stín za skutečnost, v podstatě nijak nelišíme. I v geometrickém světě vidíme něco teprve tehdy, když se podíváme vhodným způsobem. Při tomto pohledu, zjednaném antickým výkladem světa, se pochopitelně ani geometrickým světem nezabýváme proto, aby nám sloužil, ale proto, abychom ho poznali. Geometrický svět neslouží nám, ale pravdě.

²⁸ PLATÓN, Dialogy.

Při platónském pojetí geometrie je veškeré naše úsilí zaměřeno k jedinému cíli, jímž je proniknutí do světa idejí a zaměření se na pravdu. Platónova díla mají většinou formu dialogu. V prvních dialozích vystupuje Sókratés jako hlavní postava.

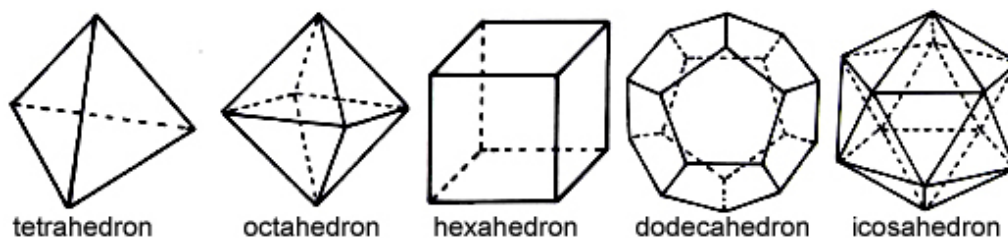
Je obtížné určit, kolik z toho, co Sókratés říká, pochází z jeho vlastních výroků, a nakolik jej Platón používá k vyslovení svých vlastních myšlenek. „Platón je nejstarším komentátorem předsókratiků. Jeho komentáře jsou však ve většině případů jen přibližné, neboť jsou jako mnohé jeho citace inspirovány ironií či humorem. Např. jeho poznámky o Hérakleitovi, Parmenidovi, a Empedoklovi jsou často spíše vtipně formulovaná *obiter dicta*, navíc jednostranná nebo přehnaná, než střízlivé a objektivní historické soudy. Ale za předpokladu, že si to uvědomujeme, má pro nás to, co Platón říká, velkou hodnotu.“²⁹

²⁹ KIRK, RAVEN, SCHOFIELD. Předsókratovští filosofové, 13

6.1. Pět Platónských těles

Staří Řekové věřili, že všechno ve vesmíru je složeno ze čtyř prvků: země, ohně, vzduchu a vody. V dialogu Timaios se Platón pokusil objasnit strukturu hmoty pomocí pěti pravidelných těles, která nyní nesou jeho jméno – Platónská tělesa.

Platónské těleso je takový pravidelný konvexní mnohostěn, jehož stěny tvoří identické pravidelné mnohoúhelníky a v jehož daných vrcholech se vždy sbíhá stejný počet hran.³⁰ (Obr. B)



Obr. B: Pět Platónových těles

Tato vypouklá tělesa, mezi něž patří čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn, jsou jediná, v nichž všechny strany jsou stejné a kde všechny vrcholy každého tělesa leží na povrchu koule. Platón spojoval čtyři svá tělesa vždy s jedním ze čtyř základních prvků kosmu. Zemi zastupovala stabilní krychle, pronikavý oheň se spojoval se špičatým čtyřstěnem, vzduch s osmistěnem a voda s dvacetistěnem. Co se týče dvanáctistěnu (dodecahedron) Platón v Timaiovi napsal: „Poněvadž byl ještě jeden, pátý pravidelný mnohostěn, užil ho bůh, propracovávaje nákras všehomíry.“

³⁰ TAVARD, A., DEMAY, F. Věda a technika, 43

Dvanáctistěn představoval vesmír jako celek a má všude vepsán zlatý řez. Jeho objem i obsah lze vyjádřit jednoduchými funkcemi zlatého řezu. Později pythagorejci společně s Euklidem, který jejich tradici zdokumentoval, vytvořili koncept zlatého řezu, který je v těchto konstrukcích obsažen, a dali mu jméno. Na počátku 17. století n. l. se Johannes Kepler pokusil mezi šest tehdy známých planet vložit těchto pět platónských těles. Mezi Merkur a Venuši dal osmistěn, mezi Venuši a Zemí dvacetistěn, mezi Zemí a Mars dvanáctistěn, mezi Mars a Jupiter čtyřstěn a mezi Jupiter a Saturn krychli.³¹

³¹ LIVIO, Zlatý řez, 65, 67

7. Přínos Aristotelův

Všichni Platónovi následníci se však nespokojili s tím, že s dvanáctistěnem se nepojí žádný základní prvek, a někteří z nich proto přišli s postulátem pátého elementu. Například Aristotelés ze Stageiry (384-322 př. n. l.) vyzdvihl na místo kosmické páté esence éter, látku, z níž jsou podle něho stvořena nebeská tělesa a která prostupuje celým vesmírem. Předpokládal, že tato pátá esence proniká veškerou hmotou, a tím umožňuje pohyb a změnu v souladu se zákony přírody.³² Jeho výklad geometrického světa spočíval v následujících dvou zásadách. Především za objekty považujeme pouze geometrické objekty v obvyklém smyslu, kdežto ostatní jevy geometrického světa vykládáme jen jako průvodní jevy. Kromě toho nepovažuje jejich bytí za trvalé, jinými slovy tvrdí, že mohou vznikat a zanikat.³³ Aristotelovy spisy obsahují přesnou a závaznou argumentaci, jak ji má učitel přednášet svým žákům. Platón ve svém díle výslovně říká, že žádnou svoji nauku nikdy nenapsal a nenapíše, protože vychází z vlastního přemýšlení a vyžaduje vnitřní úsilí a konfrontaci různých názorů, z níž teprve jako třením dřev o sebe „vyšlehne oheň poznání a rozumu“.³⁴ V Aristotelově myšlení hraje naproti tomu mnohem větší roli věcná zkušenost, která je všem společná a o níž se tedy lze přesvědčit. Úkolem filosofa je spíš myšlenky a zkušenosti přesně zachytit, dobře uspořádat a o všem správně myslet i argumentovat. Jeho dílo je nesmírně rozsáhlé. Aristoteles položil základy soustavné filosofie jako snahy „porozumět tomu, co jest“, ale také různých věd, například anatomie, astronomie, biologie, ekonomie, embryologie, etnografie, geografie, geologie, lingvistiky, logiky, meteorologie nebo politologie. Ve vlastní filosofické oblasti psal o estetice, etice, metafyzice, rétorice a teologii, zabýval se výchovou a vzděláváním, i literaturou a poezií.

³² LIVIO, Zlatý řez, 65

³³ VOPĚNKA, P. Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci, 123

³⁴ KIRK, RAVEN, SCHOFIELD. Předsókratovští filosofové, 418

Soubor aristotelských spisů je tradičně uspořádán, patrně už od antiky, do několika tematických oddílů. Tradiční uspořádání, které pochází od Andronika Rhodského z 1. stol. př. n. l., člení Aristotelovy spisy na: logické (Organon), tj. Kategorie, O vyjadřování (nebo O interpretaci), První a Druhé analytiky, Topiky a O sofistických důkazech; přírodovědecké: Fysika, O nebi, O vzniku a zániku, Meteorologie, O duši a 17 menších spisů, přičemž u poloviny z nich se o jeho autorství pochybuje, Metafysiku, etické a politické: Etika Nikomachova a Eudemova, Politika a další 3 spisy, rétoriku a poetiku. Mimo tradiční soubor děl leží Athénská ústava, nalezená až v 19. století.³⁵ Aristoteles ve spisu První analytiky píše: „Úhlopříčka čtverce je nesouměřitelná se stranou, protože kdyby se předpokládalo, že je souměřitelná, pak by lichá čísla byla zároveň sudá.“³⁶ Aristoteles zde naráží na důkaz nesouměřitelnosti.

³⁵ AUBENQUE, PATOČKA, BERKA. Aristoteles.

³⁶ VOPĚNKA, P. Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci, 123

8. Euklides

Alexandrie byla postavena na křižovatce tří velkých civilizací - egyptské, řecké a židovské. Postupem času se stala mimořádným duchovním centrem. Ptolemaios I. založil v Alexandrii Museion – obdobu dnešní univerzity. Kolem roku 300 př. n. l. v prvním učitelském sboru alexandrijské školy působil Euklides, autor Základů (*Stoicheia*), nejnámější knihy v dějinách matematiky vůbec. Euklidův výklad geometrie byl přesný a jednoznačný. Obsahoval zaručené pravdivé věty o přímkách, trojúhelnících, kružnicích a čtvercích, které podle nenapadnutelné logiky vyplývaly z jasně formulovaných předpokladů nazývaných axiomy. Euklides založil své intuitivní vnímání geometrické pravdy na kreslení obrazců do písku a zkoumání vztahů mezi délkami, úhly a tvary. Samozřejmou pravdivost toho, co viděl před sebou na ploché zemi, zobecnil v postuláty.³⁷ „Postulát označuje výchozí předpoklad. Postuláty se snažíme vybírat tak, aby se ukázaly jako pravdivé v co nejvíce případech, nicméně se od nich na rozdíl od axiomů nepředpokládá, že by byly pravdivé vždy. Postuláty primárně neslouží k budování teorie, nýbrž k explanaci (tj. vědeckému vysvětlení zkoumaného problému). Výroky dedukované z postulátů jsou pravdivé pouze s určitou pravděpodobností, jsou to hypotézy, které je třeba empiricky ověřit. Věty dedukované z axiomů ověřovat není třeba.“³⁸

³⁷ BARROW, Pí na nebesích, 20

³⁸ OCHRANA, F. Metodologie vědy: Úvod do problému

Život Euklida je zahalen temnotou a není známo ani místo narození. S ohledem na obsah Základů je velmi pravděpodobné, že studoval matematiku v Aténách spolu s některými Platónovými studenty. Proklos o Euklidovi napsal: „ Tento muž žil v době prvního Ptolemaia, ... je tedy mladší než Platónovi žáci, ale starší než Eratosthenes a Archimedes.³⁹

³⁹ LIVIO, Zlatý řez, 71

8.1. Základy

Základy jsou kolosální třináctisvazkové dílo o geometrii a teorii čísel, krom něj napsal Euklides také pojednání o hudbě, mechanice a optice. Bohužel se do dnešní doby dochovaly pouze tyto práce: Dělení čísel, Optika, Fenomény, Data. Dle stylu psaní a způsobu práce, se lze domnívat, že šlo o velmi svědomitého a skromného muže, který ctil tradice, a nepokoušel se přisvojovat si cizí objevy v matematice a geometrii, i přesto přispěl řadou nových důkazů a příspěvky jiných přeskupil do jiných svazků. Ve svém díle se pokusil obsáhnout většinu matematických poznatků své doby. Knihy 1., 2., 4., a 6. pojednávají o přímkách a rovinných útvarech, kniha 3. předkládá poznatky o kružnicích a 5. díl je výsledkem práce o úměrách započaté Eudoxem z Knidu (asi 408-355 př. n. l.). Knihy 7. až 10. Jsou věnovány teorii čísel a základům aritmetiky. Kniha 10. rozvíjí zejména teorii iracionálních čísel a sestává především z toho, co vypracoval Thaitetos. Díl 11. Je základem prostorové geometrie, kniha 12. (z většiny popisující Eudoxovu práci) se zabývá geometrií těles a poslední 13. Kniha (založena opět hlavně na Thaitetovi) předvádí sestavení pěti platónských těles. Komentáře k Základům napsali ještě ve starověku Heron (v 1. stol. n. l.), Pappos (ve 4. Stol.) a Proklos (v 5. Stol). Euklid sepsal kompletní matematický popis Platónských těles v prvcích, poslední kniha (kniha XIII) je věnována jejich vlastnostem. Propozice 13-17 v knize XIII popisují stavbu čtyřstěnu, krychle, osmistěnu a dvanáctistěnu a dvacetistěnu v uvedeném pořadí. Pro každé Platónské těleso Euklid našel poměr průměru opsané kružnice s délkou hrany. Tvrdil, že žádné další pravidelné konvexní mnohoúhelníky neexistují.⁴⁰

⁴⁰ VOPĚNKA, Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci, 169

Euklidovská geometrie zůstává dnes stejně správná (tam, kde je možné ji použít) jako kolem roku 300 př. n. l. Představuje „pravdy“, které nám jsou v podstatě vnuceny, ať se nám to líbí nebo ne.

„Celá Euklidovská geometrie je založena na pěti axiomech a pěti postulátech.

Znění axiomů:

- Objekty, které jsou rovny stejnému objektu, jsou si rovny navzájem.
- Jsou-li k objektům, které jsou si rovny, přidány jiné objekty navzájem si rovné, jsou si výsledné objekty opět vzájemně rovny.
- Jsou-li od navzájem si rovných objektů odečteny jiné objekty, které jsou si rovny navzájem, jsou si výsledné objekty opět vzájemně rovny.
- Objekty, které se shodují s jinými, jsou si rovny navzájem.
- Celek je větší než jeho část.

Znění postulátů:

- Dvěma libovolnými navzájem různými body prochází pouze jedna přímka.
- Úsečku lze prodloužit do nekonečna.
- Kružnice je zcela určena středem a poloměrem.
- Všechny pravé úhly jsou si rovny navzájem.
- Daným bodem ležícím mimo danou přímku lze vést pouze jednu přímku rovnoběžnou s danou přímkou.

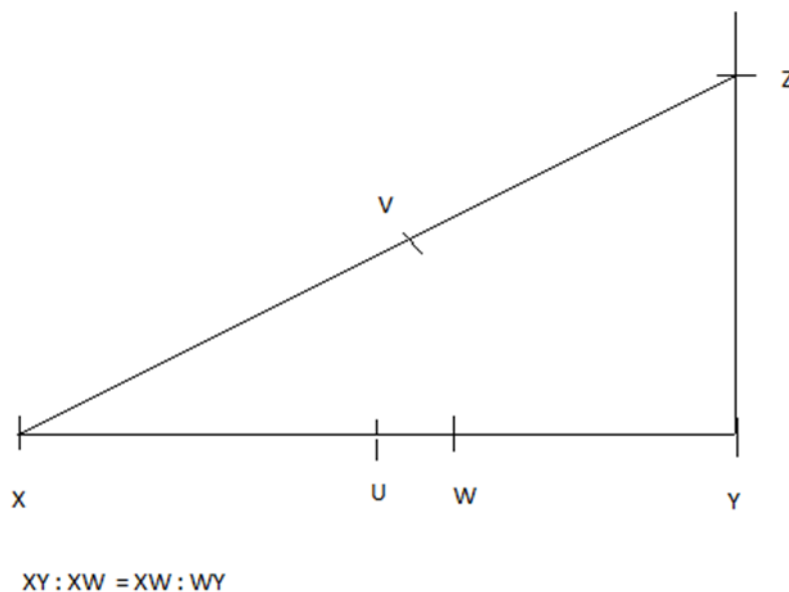
Znění pátého postulátu se poněkud odlišuje od znění původního. Je však zachován jeho obsah. Geometrie, které neuznávají platnost citovaných postulátů, nazýváme neeuklidovské geometrie.“⁴¹

⁴¹ TAVARD, A., DEMAY, F. Věda a technika, 35

9. Sestrojení zlatého řezu

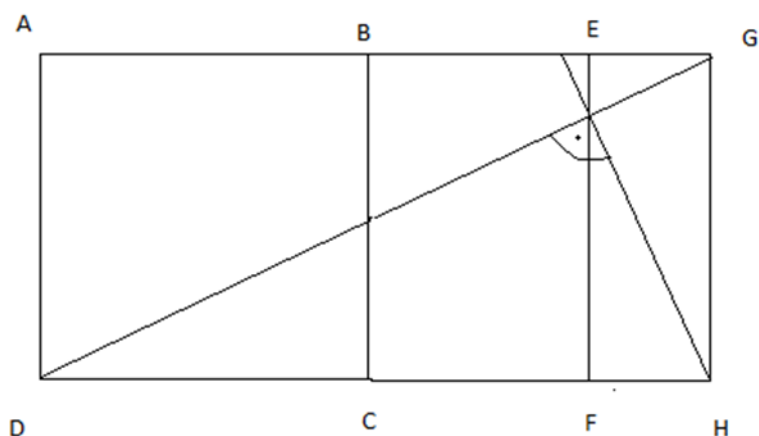
V této kapitole se budeme zabývat sestavením zlatého řezu. Při sestavení zlatého řezu si vystačíme se základními geometrickými pomůckami, stačí nám k tomu kružítka, trojúhelník s ryskou a pravítko.

Je-li úsečka rozdělena ve zlatém poměru na dva díly zhruba v poměru 8:13 nebo o něco méně než dvě třetiny k jedné, je její kratší část ve stejném poměru jako delší část k celé úsečce. Chcete-li rozdělit úsečku XY v bodě zlatého poměru, rozdělte XY na polovinu (U). Přeneste pomocí kružnice bod U na kolmici z bodu Y, abyste získali bod Z. Spojte YZ a XZ. Z bodu Z přeneste kružnicí vzdálenost YZ a získáte bod V na úsečce XZ. Z bodu X přeneste vzdálenost XV a získáte bod W na úsečce XY. (Obr. C)



Obr. C: Rozdělení úsečky ve zlatém poměru

Obdélník, jehož strany jsou ve zlatém poměru, lze celkem snadno sestrojít. Narýsujte dva sousedící čtverce ABCD a BGHC. Narýsujte diagonálu DG a z bodu H táhněte čáru přetínající DG v pravém úhlu. Pak narýsujte vertikální čáru EF. Tak získáte zlatý obdélník AEFD. Tento obdélník může být rozdělen na čtverec ABCD plus zlatý obdélník BCFE. I tento obdélník lze rozdělit na čtverec a zlatý obdélník atd. až do nekonečna.⁴² (Obr. D) Spojíme-li rozdělené obrazce křivkou, vznikne tvar, který imituje přírodní spirálu. (Obr. E)

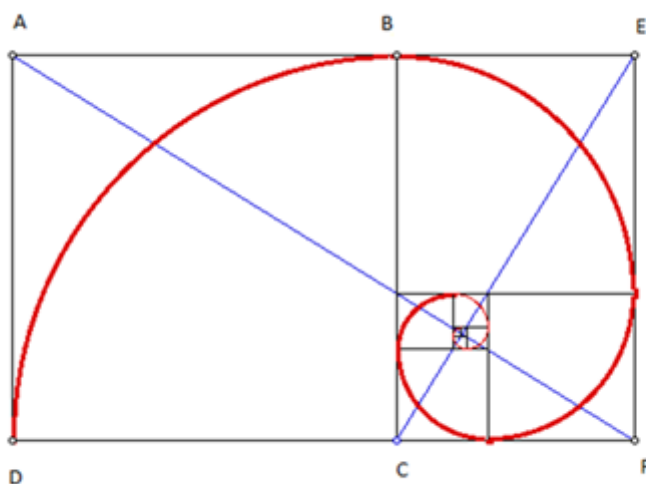


Obr. D: Zlatý obdélník

⁴² KENTOVÁ, Kompozice, 43

9.1. Zlatý řez v konstrukci logaritmické spirály

V přírodě vede prosté přirůstání k takzvanému gnómickému růstu. Vzniká tak logaritmická spirála, jakou můžeme zpozorovat například u schránek měkkýšů. Mušle Nautilus (loděnka) narůstá v proporcích zlatého poměru stejně jako slunečnicová semínka, pampelišky, jiřiny a borové šišky. Křivka logaritmické spirály vypadá stejně v každém svém měřítku a kterákoliv spojnice vedená z jejího středu prolíná každou část spirály v přesně totéž úhlu. Z tohoto důvodu ji také René Descartes, matematik a filosof, nazval *ekviangulární* čili rovnoúhlou spirálou. V přírodě se vyskytují různé logaritmické spirály u listů a tvarů ulit, u kaktusů, květových úborů, vírů i galaxií. Mnohé lze přibližně vymežit pomocí rodiny zlatých spirál odvozených z rozdělení kružnice.⁴³



Obr. E: Logaritmická spirála

⁴³ OLSEN, Záhadný zlatý řez, 32

10. Historie a použití zlatého řezu ve středověku

Ve středověku byl zlatý řez považován za dílo Boha: ztělesňoval údajně dokonalost božího stvoření. Renesanční umělci se jím často zabývali jako ztělesněním božské logiky. Jen málo malířů v dějinách bylo i nadanými matematiky. Řekneme-li však „renesanční člověk“, vyvstane nám na mysli osoba, ztělesňující renesanční ideál ovládnutí širokých oblastí kultury a vědomostí. Proto také tři nejznámější renesanční malíři, Italové Piero della Francesca (asi 1412–1492) a Leonardo da Vinci spolu s Němcem Albrechtem Dürerem, zajímavě přispěli i k matematickým poznatkům. Jejich matematická zkoumání souvisela se zlatým řezem. Nejaktivnější matematik Piero della Francesca ve Florencii začal spolupracovat s výtvarníkem Domenicem Venezianem a inspiroval se pracemi raných renesančních mistrů, jako byli Fra Angelico, Massaccio a Donatello. Zvláště na něj pak zapůsobila vyrovnanost děl Fra Angelika s náboženskou tematikou. Obrazy, které Piero maloval, se vyznačovaly důkladným zobrazením architektury, jak to prokazuje Bičování Krista (dnes v Galleria Nazionale delle Marche v Urbinu).⁴⁴ První umělecký historik Giorgi Vasari (1517–1574) připisoval Pierovi della Francescovi autorství mnoha matematických pojednání. Zachovaly se tři z Pierových matematických prací: *De prospectiva pingendi* (O perspektivě v malbě), *Libellus de Quinq;ue corporibus regula ribus* (Knížka o pěti pravidelných mnohostěnech), *Trattato d'abaco* (Pojednání o abaku). První kniha O perspektivě v malbě (napsaná v 70. a 80. letech 15. století) obsahuje početné odkazy na Eukleidovy Základy a Optiku.

⁴⁴ KENTOVÁ, S. Kompozice. 47

Velkou část Pierovy práce o algebře převzala kniha *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Souhrn poznatků o aritmetice, geometrii, poměrech a úměrnosti), kterou vydal Luca Pacioli (1445-1517). Většina Pierova díla o tělesech byla z latiny přeložena do italštiny tímtež Lukou Paciolim a opět začleněna (opsána) do jeho slavné knihy o zlatém řezu *Divina Proportione* (Božská proporce).

Luca Pacioli se narodil v Borgu San Sepolcoru roku 1445. Své počáteční vzdělání dokonce Pacioli získal v Pierově malířské dílně. Avšak na rozdíl od jiných studentů, vykazoval Pacioli větší nadání pro matematiku. Pacioli se brzy přestěhoval do Benátek, kde učil syny bohatého kupce a dále se učil matematice u Domenica Bragandina. Krátce na to napsal svou první učebnici aritmetiky. V 70. letech 15. století Pacioli studoval teologii a stal se františkánským mnichem. Proto je také často uváděn jako Fra Luca Pacioli. Vyučoval matematiku na univerzitách v Perugii, Zaře, Neapoli, Římě. V roce 1494 se přesunul do Benátek, aby zde vydal svou knihu encyklopedického charakteru o rozsahu zhruba 600 stran - *Summa*. *Summa* shrnovala matematické znalosti své doby v aritmetice, algebře, geometrii a trigonometrii. Pacioli jako hlavní zdroj při psaní knihy označil Fibonacciho (vlastním jménem Leonardo Pisano asi 1170-1250). Roku 1496 byl Pacioli pozván na dvůr vévody milánského jako dvorní matematik. Setkal se zde s Leonardem da Vincim dvorním malířem a „inženýrem“. Leonardo se intenzivně zajímal o geometrii, zejména o její praktické využití v mechanice. Není pochyb, že něco ze svých znalostí geometrie pochytil právě od Pacioliho, jehož na oplátku naučil lépe porozumět umění. Za svého milánského pobytu Pacioli dokončil práci na třísvazkovém traktátu *Divina Proportione* (Božská proporce), který nakonec vyšel v roce 1509 v Benátkách.⁴⁵

⁴⁵ LIVIO, M. Zlatý řez, 120,
COLEOVÁ, A. Renaissance, 50

První svazek *Compendio de Divina Proportione* (Kompendium božské proporce) obsahuje podrobně shrnuté vlastnosti zlatého řezu a analýzu platónských těles i dalších mnohostěnů. Na první straně Pacioli charakterizuje svou knihu takto: „Dílo nepostradatelné pro všechny prozíravé a zvědavé lidské mozky, v němž každý, kdo miluje studium filosofie, perspektivy, malby, sochařství, architektury, hudby a dalších matematických disciplín, nalezne velmi jemné, subtilní a znamenité poučení a také se potěší různorodými otázkami, jež se dotýkají velmi tajných vědomostí.“⁴⁶

„V páté kapitole uvádí pět důvodů, proč by se podle jeho názoru měl zlatý řez označovat jako božská proporce.

1. Protože je jen jeden a více jich není. Pacioli přirovnává jedinečnost zlatého řezu k tomu, že jednota je nejvyšším přídomek samého Boha.
2. Pacioli shledává podobnost mezi definicí zlatého řezu z přesně tří délek a existence svaté Trojice – Otce, Syna a Ducha svatého.
3. Vidí obdobu v rozumové neuchopitelnosti Boha a ve skutečnosti, že zlatý řez je iracionální číslo. Přímo napsal: „Jako není možné patřičně definovat Boha a nelze jej pochopit pomocí slov, tak ani naše proporce nemůže být vymezena pochopitelnými čísly, ani vyjádřena nějakou racionální veličinou; vždy zůstane skrytá, utajená a, jak ji nazývají matematici iracionální.“

⁴⁶ LIVIO, M. Zlatý řez, 122,
COLEOVÁ, A. Renaissance, 54

4. Pacioli přirovnává všudypřítomnost a neměnnost Boha k soběpodobnosti spojené se zlatým řezem – k tomu, že hodnota tohoto poměru je vždy stejná a nezávisí na délce rozdělené úsečky ani na velikosti pětiúhelníku, tedy útvarů, z nichž se poměry délek vypočítávají.
5. Pátý důvod prozrazuje ještě platónštější názor na existenci, než zastával sám Platón. Pacioli uvádí, že stejně jako Bůh pomocí páté esence, ztělesněné dvanáctistěnem, uvedl v bytí celý vesmír, tak zase zlatý řez dává existenci dvanáctistěnu, jelikož toto těleso bez něj sestrojít nelze. Dodává, že ani další platónská tělesa (představují zemi, vzduch, vodu, a oheň) není možné srovnávat mezi sebou bez zlatého řezu.⁴⁷

Sám Leonardo da Vinci, dodal pro Pacioliho knihu, šedesát ilustrací těles, zobrazených buď jen s hranami, nebo v klasické podobě. Druhý svazek *Divina Proportione* je pojednáním o proporcích a jejich využití v architektuře a struktuře lidského těla. Pacioliho zpracování zde bylo založeno na práci eklektického římského architekta Marka Vitruvia Pollia (asi 70-25 př. n. l.). Třetí svazek *Divina proportione* (krátký spisek sestávající ze tří dílčích pojednání o pěti pravidelných mnohostěnech) je v podstatě doslovným italským překladem Pierovi latinsky sepsané knihy *Pět pravidelných mnohostěnů*. Vydáním *Divina proportione* v roce 1509 se stal zlatý řez předmětem nového zájmu, problematika zlatého řezu začala být dostupná umělcům i v teoretických pojednáních, která nebyla zaměřena až tak matematicky, a která proto mohli využít také v praxi.

⁴⁷ LIVIO, M. Zlatý řez, 122

Životy Leonarda a Pacioliho se proplétaly i po dokončení Božské proporce. V říjnu 1499 oba muži opustili Milán, když město dobyla francouzská armáda vedená Ludvíkem XII. Po krátkých pobytech v Mantově a Benátkách se oba na nějaký čas usadili ve Florencii. Paciolimu se před smrtí v roce 1517 nepodařilo vydat svou sbírku příkladů matematických hříček a sbírku přísloví *De Viribus Quantitatis* (O schopnostech čísel). Toto dílo bylo plodem Pacioliho a Leonardovy spolupráce, a další Leonardovy vlastní poznámky se také týkají řady příkladů této knihy.⁴⁸

Albrecht Dürer je další velkou renesanční postavou, která se zabývala překvapující kombinací uměleckých a matematických zájmů. Mnozí ho považují za největšího německého umělce renesanční epochy. Narodil se 21. května 1471 ve svobodném říšském městě Norimberku v rodině zlatníka. V 19 ti letech již prokazoval talent a schopnosti jako malíř a dřevorytec a již v té době předčil svého učitele, předního norimberského malíře a knižního ilustrátora Michaela Wolgemuta. Poté se Dürer vypravil na čtyřleté putování, během něhož nabyt dojmu, že významnou složkou umění musí být matematika, „nejpřesnější, nejlogičtější a graficky nejplodnější věda“. Na mladého umělce hluboce zapůsobil zakladatel benátské malířské školy Giovanni Bellini (asi 1426-1516). S Paciolim se Dürer setkal v Boloni za své druhé návštěvy Itálie. Vážný zájem o matematiku projevoval Dürer od roku 1495. Hodně času trávil studiem *Základů*, Pacioliho děl o matematice a umění i významných prací o architektuře, proporcích a perspektivě římského architekta Vitruvia a italského architekta a teoretika Leona Babbisty Albertiho (1404- 1472). Dürerův přínos k dějinám zlatého řezu měl formu psaných prací i uměleckých děl. Jeho nejvýznamnější spis *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel* (Pojednání o měření s pravítkem a kružítkem) vyšel v roce 1525 a byl jednou z prvních německy psaných knih o matematice vůbec.

⁴⁸ COLEOVÁ, A. *Renesance*, 59

Dürer si v ní stěžuje na to, že až příliš mnoho výtvarníků nemá ponětí o geometrii, bez níž nikdo nemůže být dokonalým umělcem, ani se jím stát. Dürer vždy vychází od praktické aplikace a pokračuje výkladem nejzákladnějších teoretických aspektů. Dürer spojil svou virtuozitu v dřevořezbě a rytinách se zájmem o matematiku v enigmatické alegorii Melancholii. Je to jedna z trojice mistrovských rytin (dalšími jsou Rytíř, Smrt a Ďábel a Svatý Jeroným v krajině).

Většina objektů na rytině má četné symbolické významy a jejich interpretaci byly věnovány celé studie. S výjimkou vlivného Pacioliho díla a matematicko-uměleckých interpretací malířů Leonarda a Dürera nevznelo 16. století do příběhu zlatého řezu již žádné překvapení. Několik matematiků, například Ital Rafael Bombelli (1526-1572) a Španěl Franciscus Flussates Candalla (1502-1594), sice používalo zlatý řez u řady úloh týkajících se pětiúhelníku a platónských těles, odvážnější aplikace však přinesl až úplný konec století. Práce Pacioliho, Dürera a dalších nicméně však oživily zájem o platonismus a pythagorejství. Renesanční intelektuálové zde viděli reálnou příležitost, jak v duchu platónského světového názoru propojit matematiku a racionální logiku s teorií vesmíru. Koncepty jako božská proporce budovaly na jedné straně most mezi matematikou a fungováním kosmu, a na druhé straně zdůrazňovaly lidskou souvislost mezi fyzikou, teologií a metafyzikou.⁴⁹

⁴⁹ LIVIO, M. Zlatý řez, 111-128.
COLEOVÁ, A. Renesance, 45-51

11. Současnost

V současném světě narážíme téměř stále na zlatý řez a ani o tom většinou nevíme. Většina platebních a kreditních karet měří 86 x 54 mm, což je téměř přesně obdélník s poměrem 8 : 5, jedna z nejobvyklejších forem zlatého obdélníku. Díky své estetické kvalitě, vtělené do jedinečné schopnosti propojovat části s celkem, se zlaté poměry využívají v designu celé řady moderních produktů denní potřeby počínaje kávovými konvicemi, magnetofonovými kazetami, hracími kartami, pery, rozhlasovými přijímači, knihami, bicykly, počítačovými monitory a konče stoly a židlemi, okny a dveřmi. Švýcarský architekt Le Corbusier, pracoval na systémech harmonie a proporcí. Věřil v matematické uspořádání vesmíru, kde úzce navazoval na zlatý poměr a Fibonacciho posloupnosti. Výslovně použil zlatý poměr ve svém Moduloru, což je systém rozsahu architektonické proporce. Viděl tento systém jako pokračování dlouhé tradice Vitruvia a Leonarda da Vinciho, založené na používání lidských proporcí těla, ke zlepšení vzhledu a funkcí architektury. Zlatý řez se používal a stále používá i v literatuře, například v podobě rozvržení stránek. Mnoho knih vyrobených v době 1550 a 1770 n. l., ukazují tyto proporce přesně, s přesností na půl milimetru.⁵⁰ Lze říci, že zlatý řez se velmi často objevuje v zobrazení a to nejen se pouze o zobrazení v umění, jako je například fotografie, film, malba, socha, apod., ale i o zobrazení v praktickém užívání. Například v počítačových programech nebo při tvorbě webových stránek a na mnoho dalších místech, kde svoji roli hraje estetika a praktičnost.

⁵⁰ OLSEN, Záhadný zlatý řez, 48

Zlatý řez byl objeven i v novém druhu krystalů, jsou nyní známy pod termínem kvazikrystaly – nejsou ani amorfni jako sklo, ani přesně periodické jako sůl. Adolf Zeising, jehož hlavní zájmy byly matematika a filosofie, našel zlatý poměr vyjádřený v uspořádání větví podél stonků rostlin a žil v listech. V těchto jevech viděl zlatý poměr fungující jako univerzální pravidlo. V roce 2003, Volkmar Weiss a Harald Weiss analyzovali psychometrické údaje a teoretické znalosti, a dospěli k závěru, že zlatý poměr je základem hodinového cyklu mozkových vln. V roce 2008 bylo toto empiricky potvrzeno skupinou neurobiologů. Několik výzkumníků navrhlo spojení zlatého poměru a lidského genomu DNA. Zlatý řez a související čísla jsou používána na finančních trzích, kde jsou využívána v obchodních algoritmech, aplikacích a strategiích.⁵¹

⁵¹ LIVIO, M. Zlatý řez, 180, 206

12. Shrnutí

Cílem této bakalářské práce bylo stručně a přehledně popsat objevení zlatého řezu, čísla φ - Φ . Popsat, co vedlo k objevení zlatého řezu, kdo zlatý poměr objevil, kdo jej nejdříve používal a jakým způsobem, ukázat jeho použití, význam a rozvoj v období starověku až po renesanci.

V současné době se podle dostupné literatury má za to, že zlatý řez jako první začali používat ve starověku Egypťané. Používali tento poměr při stavění pyramid a jiných budov. Jejich hieroglyfické písmo obsahovalo zlatý poměr, který považovali za posvátný. Ve své posedlosti čísla ho začali používat Pythagorejci ukrytý v jejich poznávacím symbolu – pentagramu. Euklides byl tím, kdo shrnul veškeré matematická a geometrická vědění své doby – včetně rozdělení úsečky ve zlatém poměru do svojí obsáhlé práce nazvané Základy. Platón přidal k mystickému významu zlatého řezu další rozměr pomocí svých pěti platónských těles, kde dvanáctistěn představuje celý vesmír a v jeho proporcích je také aplikovaný zlatý řez. Jeho žák Aristotelés přispěl svým přehledným uspořádáním faktů. Obrovského významu se také dostalo zlatému řezu v období Renaissance, převážně v uměleckých dílech známých mistrů jako byli Piero della Francesca, Leonardo da Vinci a Albrecht Dürer. Tím však cesta a využití zlatého řezu zdaleka nekončí. Další významné osobnosti přejímaly vědění o zlatém řezu do svých myšlenek, pojednání, výzkumů a prací a děje se tomu tak dodnes.

Závěr

Domnívám se, že čísla vyzařují bezpečí. Početním vyjádřením reálných skutečností lze popsat tajemství struktury vesmíru a dějů, které v něm probíhají. Ze záhadného důvodu se matematika osvědčila jako spolehlivý průvodce světem, v němž žijeme a jehož jsme součástí. Z přesvědčení, že matematika nikdy neselhává, jsme v pokušení položit rovnítko mezi porozumění světu a jeho matematické vyjádření. Vede nás k hlubšímu pochopení toho, jak je spojen proces počítání a aplikovatelnosti matematiky na dění v přírodě. V dnešní době se zlatým řezem setkáváme nejčastěji ve formě užitého designu a v přírodě kolem nás, ale většinou o tom nemáme ani tušení. O zlatém řezu již bylo napsáno poměrně hodně pojednání a publikací. V této práci jsem se primárně zaměřila na počátky zlatého řezu ve starověku, sekundárně na první používání zlatého řezu v období renesance, protože umělci z této doby vycházeli z matematických poznatků řeckých filosofů. A to zejména proto, že tato období jsou zcela zásadní nejen z hlediska objevení a použití zlatého řezu, ale i pro matematické myšlení, geometrii a umění používané dodnes. Za hlavní přínos této práce považuji souborné uvedení základních informací o období, kdy se poprvé zlatý řez objevil a začal používat. Moje písemná práce je tedy především určena laikům, ale i odborníkům, kteří se zabývají zlatým řezem a chtějí se dozvědět podrobnější informace o počátcích a prvním uplatnění tohoto fenoménu nejen ve výtvarném umění.

Při práci s literaturou jsem nejvíce ocenila tituly od Maria Livia a Petra Vopěnky, které se vyhýbají mysticizování, velice běžného u tohoto fenoménu. Právě při hledání vhodných pramenů jsem narazila i na tituly, kde, dle mého soudu, někteří autoři připisovali zlatému řezu příliš mnoho zásluh a byli schopni ho nalézt téměř všude. Snažila jsem se takovým autorům vyhýbat a přistupovat k některým faktům kriticky. Z těchto důvodů například nezmiňuji sochaře Phidia (490-430 př.nl), který údajně používal zlatý řez při stavbě Pantheonu v Řecku, nenašla jsem dost věrohodných pramenů, které by toto potvrdily, spíše se kloním k názoru, že ho tam lze najít, ale záleží, kde a jakým způsobem se bude Pantheon kalibrovat. Nejvíce mne při psaní této práce zaujalo, jak je matematické myšlení spjata s filosofií. Myslím, že matematika pomáhá utvářet lidské logické myšlení a má v našem vzdělávacím systému své důležité místo. Na moji práci lze plynule navázat dalšími dějinnými fakty, která popisují postupné objevování a aplikace zlatého řezu až do současnosti. O tomto symbolu je vhodné vědět, protože prostupuje náš svět jako takový, vyskytuje se i v oblastech našeho života, kde bychom jej nečekali. Zvláště příroda a člověk jsou sami o sobě důkazem toho, že tento fenomén je něčím více než jen abstraktním pojmem metafyzického myšlení, je jakýmsi zvláštním propojujícím symbolem, člověka jako součásti přírody a zároveň člověka majícího právě tu abstrakci, která dokázala tento fenomén odhalit.

Literatura a prameny

BARROW, J. D. *Pí na nebesích. O počítání, myšlení a bytí*. Edice Kolumbus, svazek 154. Praha: Mladá Fronta, 2000. ISBN 80-204-0855-X

BARROW, J. D. *Teorie ničeho*. Edice Kolumbus, svazek 174. Praha: Mladá fronta, 2004. ISBN 80-204-1156-9

BENDLOVÁ, P. a kol. *Stručný filosofický slovník*. Praha: Svoboda, 1966. ISBN 25-086-66

COLEOVÁ, A. *Renesance*. Edice umění zblízka, svazek 3, Bratislava: Perfekt, 1995. ISBN 80-8046-009-4

EUKLEIDES. *Základy. Knihy VII-IX*. Edice prameny evropské vzdělanosti, svazek 4. Plzeň: Kanina, 2010. ISBN 978-80-7043-963-0

FAJKUS, B. *Filosofie a metodologie vědy. Vývoj, současnost a perspektivy*. Praha: Academia, 2005. ISBN 80-200-1304-0

GHYKA, M. C. *Zlaté číslo*. Praha: Dokořán/Argo, 2008. ISBN 978-80-7203-926-5

HALADA, J. *Průvodce evropským myšlením*. Praha: Brána, 1996. ISBN 80-85946-23-8

HEATH, R. *Posvátné číslo a původ civilizace. Tajemství čísel v historii*. Praha: KMa s.r.o., 2008. ISBN 978-80-7309-567-3

HRUBANOVÁ, V. a kol. *Slovník řecko-římské mytologie a kultury*. Praha: EWA, 1993. ISBN 80-85764-02-4

KENTOVÁ, S. *Kompozice*. Edice umění zblízka, svazek 5, Bratislava: Perfekt, 1996. ISBN 80-8046-054-0

KIRK, RAVEN, SCHOFIELD. *Předsókratovští filosofové*. Dějiny filosofie, svazek 1. Praha: Oikoymenh, 2004. ISBN 80-7298-110-2

KRAUTSTENGL, A. *Zlatý řez lidského poznání*. In. LIDOVÉ NOVINY, Příloha ORIENTACE. Praha: Lidové noviny, 20. 1. 2007.

KRUPIČKA, J. *Renesance rozumu*. Praha: Český spisovatel, a.s., 1996. ISBN 22-018-96

LIVIO, M. *Zlatý Řez*. Praha: Dokořán/Argo, 2006. ISBN 80-7363-064-8

LIVIO, M. *Je Bůh matematik?* Praha: Dokořán/Argo, 2010. ISBN 978-80-7363-282-3

LOMTATIDZE, L. *Historický vývoj pojmu křivka*. Dějiny matematiky, svazek 30. Brno: CERM, 2007. ISBN 987-80-7204-492-4

OLSEN, S. *Záhadný zlatý řez*. Edice Pergamen, svazek 3. Praha: Dokořán, 2009. ISBN 978-80-7363-195-6

PARMAN, AS-SAID. *Geometrická koncepce v islámském umění*. Praha: Argo, 2008. ISBN 978-80-7203-911-1

PATOČKA, J. *Platón*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. ISBN 80-04-25609-0

RÁDL, E. *Dějiny filosofie I*. Praha: Votobia, 1998. ISBN 80-7220-063-1

SCRUTON, R. *Estetické porozumění. Eseje o filozofii, umění a kultuře*. Brno: Barrister & Principal, 2005. ISBN 80-85947-92-7

SKORUPSKI, J. *Symbol and Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1976. ISBN 0-521-21200-6

STÖRING, H. J. *Malé dějiny filozofie*. Praha: Zvon, 1993. ISBN 80-7113-058

TAVARD, A., DEMAY, F. *Věda a technika*, edice Larousse, svazek 2. Praha: Albatros, 1998. ISBN 80-00-00679-0

VOPĚNKA, P. *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání Rozprav s geometrií*. Praha: Práh, 2000. ISBN 80-7252-022-9

Internetové zdroje

A. F. & A. M., Re: *The golden section*, in: Grand Lodge of British Columbia and Yukon. [online]. 1871-2012 (cit. 10. 3. 2012)

Dostupné z: http://freemasonry.bcy.ca/symbolism/golden_ratio/index.html

AUBENQUE, PATOČKA, BERKA. Re: *Aristoteles*, [online]. 10. 4. 2012 (cit. 15. 4. 2012)

Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Aristotel%C3%A9s>

HUNTLEY, H. E., Re: *The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty* [online]. 1997-2011 (cit. 10. 3. 2012)

Dostupné z: <http://www.goldennumber.net/history.htm>

OCHRANA, F., Re: *Metodologie vědy: Úvod do problému*. Praha: Karolinum. 2009. [online]. 18. 4. 2012 (cit. 18. 4. 2012)

Dostupné z:

http://cs.wikipedia.org/wiki/Postul%C3%A1t#Rozd.C3.ADly_mezi_axiomy_a_postul.C3.A1ty

PLATÓN, Re: *Dialogy*, [online]. (cit. 1. 4. 2012)

Dostupné z: <http://www.uloz.to/xtAnn6z/platon-dialogy-rar>

WEISSTEIN, E. W., Re: *Golden Ratio*, in: Math Wolrd. [online]. 1999-2012 (cit. 10. 3. 2012)

Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html>

Seznam obrázků

Obr. A: Pětiúhelník s pentagramem; strana 23.

Obr. B: Pět Platónových těles; strana 28.

Obr. C: Rozdělení úsečky ve zlatém poměru; strana 36.

Obr. D: Zlatý obdélník; strana 37.

Obr. E: Logaritmická spirála; strana 38.