Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Hana Bendová

Nové míry slabé nekompaktnosti

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematická analýza

Praha 2012

Děkuji svému vedoucímu doc. Ondřeji Kalendovi za mnoho podnětů a cenných připomínek k práci, za jeho neobyčejnou vstřícnost a trpělivost a za obrovské množství času, který mi věnoval. Dále děkuji své rodině za materiální i psychickou podporu během studia, jakož i všem, kteří mě povzbuzovali k včasnému dokončení práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 19. července 2012 Hana Bendová

Název práce: Nové míry slabé nekompaktnosti

Autor: Hana Bendová

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Tato práce se zabývá mírami slabé nekompaktnosti, tj. kvantitami, které různými způsoby měří slabou nekompaktnost omezených podmnožin Banachových prostorů. Kromě některých známých měr slabé nekompaktnosti zavedeme nové míry, které jsou v jistém smyslu přirozenější, a následně ukážeme, jaké jsou mezi nimi vztahy. Dokážeme mimo jiné kvantitativní verze Eberlein-Grothendieckovy, Eberlein-Šmulianovy a Jamesovy věty. Dále se zabýváme mírami slabé nekompaktnosti jednotkové koule a mírami slabé nekompaktnosti množin v Banachových prostorech s w^*-andělskou duální jednotkovou koulí. Ukážeme, že v těchto případech některé z definovaných kvantit splývají. Nakonec se zaměříme na to, jak se definované míry slabé nekompaktnosti chovají při přechodu ke konvexnímu a absolutně konvexnímu obalu. Dokážeme kvantitativní verzi Krejnovy věty a ukážeme též, že v Banachových prostorech s w^*-andělskou duální jednotkovou koulí se většina kvantit při přechodu ke konvexnímu a absolutně konvexnímu obalu nezmění.

Klíčová slova: míry slabé nekompaktnosti, Eberlein-Šmulianova věta, Jamesova věta, Eberlein-Grothendieckovo kritérium, Krejnova věta

Title: New measures of weak non-compactness

Author: Hana Bendová

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The main topic of this thesis is the measures of weak non-compactness, which, in different ways, measure weak non-compactness of bounded sets in Banach spaces. Besides some known measures of weak non-compactness, we introduce new measures, that are more natural in some sense, and we show the relationships between them. We prove quantitative versions of Eberlein-Grothendieck, Eberlein-Šmulian, and James' theorems. Afterwards, we deal with measures of weak non-compactness of the unit ball and measures of weak non-compactness of sets in Banach spaces with w^*-angelic dual unit ball. We prove that in these cases some of the defined measures coincide. Finally, we focus on the behaviour of the defined measures while passing to convex and absolute convex hull. We prove quantitative version of Krein's theorem and we also prove that most of the measures do not change when passing to convex and absolute convex hull in Banach spaces with w^*-angelic dual unit ball.

Keywords: measures of weak non-compactness, Eberlein-Šmulian theorem, James' theorem, Eberlein-Grothendieck double limit criterion, Krein's theorem

Obsah

Úvod

Ve 40. až 60. letech minulého století byly dokázány slavné věty, které charakterizují slabou kompaktnost v Banachových prostorech – Eberlein-Šmulianova věta, Eberlein-Grothendieckovo kritérium a Jamesova věta. Později se v odborných publikacích začaly objevovat kvantitativní verze těchto kvalitativních výsledků a v souvislosti s nimi míry slabé nekompaktnosti – kvantity, které nějakým způsobem měří slabou nekompaktnost. Každé omezené množině v Banachově prostoru přiřadí taková kvantita nezáporné číslo vyjadřující, „jak moc“ je tato množina slabě nekompaktní.

Cílem této práce je představit některé kvantity měřící slabou nekompaktnost, které se objevují v literatuře, zavést nové míry slabé nekompaktnosti, jež jsou v některých ohledech přirozenější, a prozkoumat tyto nové kvantity a jejich vztah ke známým kvantitám.

Na úvod představíme zmíněné slavné věty charakterizující slabou kompaktnost a míry slabé nekompaktnosti, z nichž některé jsou od těchto vět odvozené. Poté definujeme nové míry slabé nekompaktnosti, kterými se budeme ve zbytku práce zabývat. Druhá kapitola zkoumá vztahy mezi definovanými kvantitami. Uvidíme, že všechny tyto míry slabé nekompaktnosti jsou navzájem ekvivalentní. Jsou zde dokázány mimo jiné kvantitativní verze všech tří výše uvedených vět, které charakterizují slabou kompaktnost. Následují příklady sdružené do samostatné kapitoly, jež ukazují optimalitu většiny odhadů, které ve druhé kapitole provedeme.

Dále se zabýváme speciálními případy. Čtvrtá kapitola se věnuje mírám slabé nekompaktnosti jednotkové koule v libovolném Banachově prostoru, pátá mírám slabé nekompaktnosti libovolných omezených množin v Banachově prostoru, který má w^*-andělskou duální jednotkovou kouli. V těchto případech některé z definovaných měr slabé nekompaktnosti splývají.

V poslední kapitole si položíme otázku, jak se definované kvantity chovají při přechodu ke konvexnímu, resp. absolutně konvexnímu obalu množiny, jejíž slabou nekompaktnost měříme. Dokážeme zde kvantitativní verzi Krejnovy věty. Na závěr pomocí výsledků páté kapitoly ukážeme, že v případě, že měříme slabou nekompaktnost v Banachově prostoru s w^*-andělskou duální jednotkovou koulí, se žádná z definovaných měr slabé nekompaktnosti při přechodu ke konvexnímu obalu měřené množiny nezmění a většina z nich, ani když přejdeme k absolutně konvexnímu obalu.

Kromě zpracování známých výsledků z článků [2, 3, 4, 5, 6, 7] se v diplomové práci podařilo zapracovat do věty 2.1, která obsahuje vztahy mezi klasickými kvantitami, nové míry slabé nekompaktnosti, nalézt příklady 3.5 a 3.6, u příkladu 3.7 zjednodušit důkaz z článku [5], zavést v páté kapitole pomocné kvantity „γ_{aco}“ a „γ_{co}“, modifikovat pro ně známé důkazy používající kvantitu „γ_0“ a tím dokázat příslušné nerovnosti ve větě 5.2 a rovnosti ve větě 5.8, potažmo tvrzení 5.9, zpracovat tvrzení 6.3, 6.4, 6.6, 6.7, 6.8 a příklad 6.9 a dokázat větu 6.10 metodou z [4] použitou ve větě 6.2 a její důsledky 6.11, 6.12.

1 Charakterizace slabé kompaktnosti a související kvantity

V úvodní kapitole připomeneme slavné věty, jež charakterizují slabou kompaktnost v Banachových prostorech – Eberlein-Grothendieckovo kritérium, Eberlein-Šmulianovu větu a Jamesovu větu. Ty daly přirozeným způsobem vzniknout kvantitám, které v nějakém smyslu měří slabou nekompaktnost množin v Banachových prostorech. Kromě již známých kvantit zadefinujeme v závěru kapitoly jejich modifikace, které mají v jistých ohledech lepší vlastnosti. Právě jimi se pak budeme v celé práci zabývat.

V celém textu budeme pracovat s reálnými Banachovými prostory. Přitom každý Banachův prostor E automaticky považujeme za podprostor svého druhého duálu E^{**}, do něhož je vnořen pomocí kanonického vnoření. Je-li H omezená podmnožina Banachova prostoru E, pak píšeme-li $\overline{H}^{w^*}$, míníme tím w^*-uzávěr množiny H v prostoru E^{**}.

Značení 1.1. Nechť A, B jsou neprázdné množiny v metrickém prostoru (X, d) a $x \in X$. Pak značíme

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x, A) &= \inf\{d(x, a) : \ a \in A\}, \\ \operatorname{dist}(A, B) &= \inf\{d(a, b) : \ a \in A, \ b \in B\}, \\ \hat{\mathrm{d}}(A, B) &= \sup\{\operatorname{dist}(a, B) : \ a \in A\}. \end{aligned}$$

Pozorování 1.2. Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pak H je relativně slabě kompaktní, právě když $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) = 0$.

Důkaz. Protože H je omezená, $\overline{H}^{w^*}$ je w^*-kompaktní. Pro nějaké $r > 0$ je totiž $H \subset rB_E$, tedy $\overline{H}^{w^*} \subset \overline{rB_E}^{w^*} = rB_{E^{**}}$, ale množina $rB_{E^{**}}$ je w^*-kompaktní podle Banach-Alaogluovy věty a $\overline{H}^{w^*}$ je její w^*-uzavřená podmnožina.

Množina $\overline{H}^{w}$ je w-kompaktní v E, právě když je w^*-kompaktní v E^{**}, jinými slovy když $\overline{H}^{w} \subset \overline{H}^{w^*}$ je w^*-uzavřená v E^{**} neboli $\overline{H}^{w^*} = \overline{H}^{w} \subset E$, což přesně znamená, že $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) = 0$, neboť E je Banachův. $\square$

Pozorování 1.3. Nechť E je Banachův prostor a $C \subset E$ je konvexní omezená. Pak C je relativně slabě kompaktní, právě když $\hat{\mathrm{d}}(\overline{C}^{w^*}, C) = 0$.

Důkaz. Důkaz se provede obdobně jako v předchozím pozorování. Množina $\overline{C}^{w}$ je slabě kompaktní, právě když $\overline{C}^{w^*} = \overline{C}^{w}$, což je díky konvexitě C ekvivalentní tomu, že $\hat{\mathrm{d}}(\overline{C}^{w^*}, C) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{C}^{w^*}, \overline{C}) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{C}^{w^*}, \overline{C}^{w}) = 0$. $\square$

Věta 1.4 (Eberlein-Grothendieck). *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pak H je relativně slabě kompaktní, právě když pro každou dvojici posloupností (x_n) v H a (x_m^*) v B_{E^*} platí*

$$\lim_n \lim_m x_m^*(x_n) = \lim_m \lim_n x_m^*(x_n),$$

pokud uvedené limity existují.

Definice 1.5. Je-li E Banachův prostor a $H \subset E$ omezená, definujeme

$$\begin{aligned}\gamma(H) = \sup\{|\lim_n \lim_m x_m^*(x_n) - \lim_m \lim_n x_m^*(x_n)| :\ (x_m^*) \text{ je posloupnost v } B_{E^*},\\ (x_n) \text{ je posloupnost v } H \quad \& \quad \text{všechny uvedené limity existují}\}.\end{aligned}$$

Pozorování 1.6. Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pak H je relativně slabě kompaktní, právě když $\gamma(H) = 0$.

Důkaz. Toto pozorování je důsledkem Eberlein-Grothendieckovy věty 1.4. □

Značení 1.7. Nechť (x_n) je omezená posloupnost v Banachově prostoru E. Pak značíme

$$\operatorname{clust}_{E^{**}}((x_n)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_m :\ m > n\}}^{w^*}$$

množinu všech jejích hromadných bodů v (E^{**}, w^*).

Věta 1.8 (Eberlein-Šmulian). *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pak H je relativně slabě kompaktní, právě když H je relativně slabě spočetně kompaktní.*

Definice 1.9. Je-li E Banachův prostor a $H \subset E$ omezená, definujeme

$$\begin{aligned}\operatorname{ck}_E(H) &= \sup\{\operatorname{dist}(\operatorname{clust}_{E^{**}}((x_n)), E) :\ (x_n) \text{ je posloupnost v } H\},\\ \operatorname{ck}(H) &= \sup\{\operatorname{dist}(\operatorname{clust}_{E^{**}}((x_n)), H) :\ (x_n) \text{ je posloupnost v } H\}.\end{aligned}$$

Tvrzení 1.10. *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pak H je relativně slabě kompaktní, právě když $\operatorname{ck}_E(H) = 0$.*

Důkaz. Nechť H je relativně slabě kompaktní a buď (x_n) libovolná posloupnost v H. Ta má díky tomu, že H je relativně slabě kompaktní, w-hromadný bod v E, tudíž $\operatorname{dist}(\operatorname{clust}_{E^{**}}((x_n)), E) = 0$. Zřejmě tedy $\operatorname{ck}_E(H) = 0$.

Opačná implikace je zesílením Eberlein-Šmulianovy věty 1.8 a nedá se z ní jednoduše odvodit. Později však dokážeme větu 2.1, z níž bude s pomocí pozorování 1.6 snadno plynout. □

Tvrzení 1.11. *Buď E Banachův prostor a $C \subset E$ konvexní omezená. Pak C je relativně slabě kompaktní, právě když* $\mathrm{ck}(C) = 0$.

Důkaz. Nechť C je relativně slabě kompaktní. Stejně jako v předchozím tvrzení 1.10 libovolná posloupnost (x_n) má w-hromadný bod v $\overline{C}^w \subset E$, tudíž $\mathrm{dist}(\mathrm{clust}_{E^{**}}((x_n)), C) = \mathrm{dist}(\mathrm{clust}_{E^{**}}((x_n)), \overline{C}) = \mathrm{dist}(\mathrm{clust}_{E^{**}}((x_n)), \overline{C}^w) = 0$. Je tedy $\mathrm{ck}(C) = 0$.

Opačná implikace je opět těžší, neboť tvrdí o něco více než Eberlein-Šmulianova věta 1.8, ale plyne z pozorování 1.6 a věty 2.1. □

Věta 1.12 (James). *Nechť E je Banachův prostor a C je konvexní uzavřená omezená podmnožina E. Pak C je slabě kompaktní, právě když každý funkcionál $x^* \in E^*$ nabývá svého suprema na C v nějakém bodě C.*

Definice 1.13. Je-li E Banachův prostor a $H \subset E$ omezená, definujeme

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ja}_E(H) = \inf\{\varepsilon > 0 :\ & \text{pro každý funkcionál } x^* \in E^* \text{ existuje } x^{**} \in \overline{H}^{w^*} \\
& \text{tak, že } x^{**}(x^*) = \sup x^*(H) \text{ a } \mathrm{dist}(x^{**}, E) < \varepsilon\}, \\
\mathrm{Ja}(H) = \inf\{\varepsilon > 0 :\ & \text{pro každý funkcionál } x^* \in E^* \text{ existuje } x^{**} \in \overline{H}^{w^*} \\
& \text{tak, že } x^{**}(x^*) = \sup x^*(H) \text{ a } \mathrm{dist}(x^{**}, H) < \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Tvrzení 1.14. *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pak H je relativně slabě kompaktní, právě když* $\mathrm{Ja}_E(H) = 0$.

Důkaz. Je-li H relativně slabě kompaktní, pak každý funkcionál $x^* \in E^*$ nabývá svého suprema na $\overline{H}^w$, jež je rovno supremu na H, v nějakém bodě $\overline{H}^w$. Pro každý prvek $x \in \overline{H}^w \subset E$ je ovšem $\mathrm{dist}(x, E) = 0$, tedy $\mathrm{Ja}_E(H) = 0$.

Opačná implikace zesiluje Jamesovu větu 1.12 a přímo z ní neplyne, ale dá se nahlédnout z pozorování 1.6 a věty 2.1, kterou dokážeme později. □

Tvrzení 1.15. *Nechť E je Banachův a $C \subset E$ je konvexní omezená. Potom C je relativně slabě kompaktní, právě když* $\mathrm{Ja}(C) = 0$.

Důkaz. Stejně jako v předchozím tvrzení si uvědomíme, že je-li C relativně slabě kompaktní, každý funkcionál $x^* \in E^*$ nabývá svého suprema na C v nějakém bodě $\overline{C}^w = \overline{C}$. Pro každý prvek $x \in \overline{C}$ je však $\mathrm{dist}(x, C) = 0$, tedy $\mathrm{Ja}(C) = 0$.

Opačnou implikaci je opět možné dokázat s použitím pozorování 1.6 a věty 2.1. □

Jamesova věta a od ní odvozené kvantity úzce souvisí s pojmem Jamesovy hranice, který nyní připomeneme.

Definice 1.16 (Jamesova hranice)**.** Nechť X je Banachův prostor a $K \subset X^*$ je konvexní w^*-kompaktní množina. Řekneme, že $B \subset K$ je Jamesova hranice množiny K, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje prvek $b^* \in B$ takový, že $b^*(x) = \sup_{x^* \in K} x^*(x)$.

Nechť H je omezená podmnožina Banachova prostoru E. Pokud uvážíme libovolné $\varepsilon > \mathrm{Ja}_E(H)$, resp. $\mathrm{Ja}(H)$, můžeme z definic těchto kvantit pro každý funkcionál $x^* \in E$ nalézt prvek $b^{**}_{x^*} \in \overline{H}^{w^*}$, pro který $b^{**}_{x^*} = \sup x^*(H)$ a $\mathrm{dist}(b^{**}_{x^*}, E)$, resp. $\mathrm{dist}(b^{**}_{x^*}, H) < \varepsilon$. Množina $B = \{b^{**}_{x^*} : \ x^* \in E^*\}$ pak tvoří Jamesovu hranici $\overline{H}^{w^*}$ a platí $\hat{\mathrm{d}}(B, E)$, resp. $\hat{\mathrm{d}}(B, H) \leq \varepsilon$. Je-li ovšem $B \subset \overline{H}^{w^*}$ Jamesova hranice $\overline{H}^{w^*}$, pak zřejmě $\mathrm{Ja}_E(H) \leq \hat{\mathrm{d}}(B, E)$, $\mathrm{Ja}(H) \leq \hat{\mathrm{d}}(B, H)$. Vidíme tedy, že definice kvantit „Ja_E“ a „Ja“ lze přepsat i takto:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ja}_E(H) &= \inf\{\hat{\mathrm{d}}(B, E) : \ B \subset \overline{H}^{w^*}, \ B \text{ je Jamesova hranice } \overline{H}^{w^*}\}, \\ \mathrm{Ja}(H) &= \inf\{\hat{\mathrm{d}}(B, H) : \ B \subset \overline{H}^{w^*}, \ B \text{ je Jamesova hranice } \overline{H}^{w^*}\}. \end{aligned}$$

Výše uvedená tvrzení a pozorování ukazují, že pro omezenou podmnožinu H Banachova prostoru E jsou kvantity $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E)$, $\mathrm{ck}_E(H)$, $\mathrm{Ja}_E(H)$ a $\gamma(H)$ mírami slabé nekompaktnosti H v tom smyslu, že jsou kladné, právě když množina H není relativně slabě kompaktní. Pro $C \subset E$ konvexní omezenou mají tuto vlastnost i kvantity $\hat{\mathrm{d}}(\overline{C}^{w^*}, C)$, $\mathrm{ck}(C)$, $\mathrm{Ja}(C)$. Pro obecné množiny H však již kvantity $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, H)$, $\mathrm{ck}(H)$, $\mathrm{Ja}(H)$ mírami slabé nekompaktnosti v tomto smyslu nejsou. Následující příklad ukazuje, že pro nekonvexní množinu H mohou být kladné, i když H je relativně slabě kompaktní.

Příklad 1.17. Buď $E = c_0$, $H = \{e_n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Pak H je relativně slabě kompaktní, nicméně $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, H) = \mathrm{ck}(H) = \mathrm{Ja}(H) = 1$.

Důkaz. H je relativně slabě kompaktní, neboť posloupnost (e_n) slabě konverguje k 0. Navíc $\overline{H}^{w^*} = \overline{H}^{w} = H \cup \{0\}$. Odtud vidíme, že $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, H) = \mathrm{ck}(H) = 1$. Uvažme prvek $x^* \in \ell^1 \cong E^*$ definovaný předpisem $x^*(n) = -\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sup_{x \in H} \langle x^*, x\rangle = 0$ a jediný prvek $\overline{H}^{w^*}$, ve kterém x^* nabývá tohoto suprema, je zjevně 0. Ale $\mathrm{dist}(0, H) = 1$, tedy $\mathrm{Ja}(H) \geq 1$. Chceme-li nahlédnout, že $\mathrm{Ja}(H) = 1$, stačí si například uvědomit, že $\mathrm{Ja}(H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, H)$, což plyne triviálně z definic těchto kvantit. □

Pozorování 1.18. Je-li E uzavřený lineární podprostor Banachova prostoru F a $H \subset E \subset F$ je omezená, pak kvantity $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, H)$, $\mathrm{ck}(H)$, $\mathrm{Ja}(H)$, $\gamma(H)$ nezávisí na tom, zda H uvažujeme jako podmnožinu E, či jako podmnožinu F.

Důkaz. Pro kvantity $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, H)$ a $\mathrm{ck}(H)$ tvrzení plyne z toho, že prostor E^{**} je izometricky izomorfní w^*-uzavřenému podprostoru F^{**}, tudíž $\overline{H}^{w^*} \subset E^{**}$ v F^{**}.

Nechť $\gamma(H)_E$, resp. $\gamma(H)_F$ značí kvantity $\gamma(H)$, uvažujeme-li H jako podmnožinu E, resp. F. Na několika následujících řádcích budeme kvůli přehlednosti výjimečně místo „(a_n) je posloupnost prvků množiny M“ psát „$(a_n) \subset M$“, přestože to není zcela korektní. Díky Hahn-Banachově větě platí

$$\begin{aligned}
\gamma(H)_E &= \sup\{|\lim_n \lim_m x^*_m(x_n) - \lim_m \lim_n x^*_m(x_n)| : \ (x_m) \subset H, \ (x^*_m) \subset B_{E^*}\} \\
&= \sup\{|\lim_n \lim_m (y^*_m|_E)(x_n) - \lim_m \lim_n (y^*_m|_E)(x_n)| : \ (x_m) \subset H, \ (y^*_m) \subset B_{F^*}\} \\
&= \sup\{|\lim_n \lim_m (y^*_m)(x_n) - \lim_m \lim_n (y^*_m)(x_n)| : \ (x_m) \subset H, \ (y^*_m) \subset B_{F^*}\} \\
&= \gamma(H)_F,
\end{aligned}$$

přičemž suprema uvažujeme přes výrazy, které mají smysl, tj. když existují příslušné limity.

Označme $\mathrm{Ja}(H)_E$, resp. $\mathrm{Ja}(H)_F$ kvantity $\mathrm{Ja}(H)$, kde H chápeme jako podmnožinu E, resp. F. Prostor E^{**} je izometricky vnořen do F^{**} pomocí vnoření j definovaného jako $j(x^{**})(x^*) = x^{**}(x^*|_E)$, $x^{**} \in E^{**}$, $x^* \in F^*$. Pro $x^*_E \in E^*$, $x^*_F \in F^*$ označme

$$\begin{aligned}
A_{x^*_F} &= \{x^{**} \in \overline{H}^{(F^{**},w^*)} : \ x^{**}(x^*_F) = \sup x^*_F(H)\}, \\
B_{x^*_F} &= \{x^{**} \in \overline{H}^{(E^{**},w^*)} : \ x^{**}(x^*_F|_E) = \sup (x^*_F|_E)(H)\}. \\
C_{x^*_E} &= \{x^{**} \in \overline{H}^{(E^{**},w^*)} : \ x^{**}(x^*_E) = \sup x^*_E(H)\}.
\end{aligned}$$

Potom pro všechna $x^* \in F^*$ máme $A_{x^*} = j(B_{x^*})$, proto $\mathrm{dist}_{F^{**}}(A_{x^*}, H) = \mathrm{dist}_{E^{**}}(B_{x^*}, H)$. Je tedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ja}(H)_F &= \sup_{x^* \in F^*} \mathrm{dist}_{F^{**}}(A_{x^*}, H) \\
&= \sup_{x^* \in F^*} \mathrm{dist}_{E^{**}}(B_{x^*}, H) \\
&= \sup_{x^* \in E^*} \mathrm{dist}_{E^{**}}(C_{x^*}, H) \\
&= \mathrm{Ja}(H)_E,
\end{aligned}$$

kde předpolední nerovnost plyne z Hahn-Banachovy věty. □

Na rozdíl od těch z předchozího pozorování kvantity $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E)$, $\mathrm{ck}_E(H)$, $\mathrm{Ja}_E(H)$ naopak na prostoru E závisí. Každá z těchto kvantit se může zmenšit, pokud prostor E zvětšíme. V příkladu 3.1 ukážeme, že existují Banachovy prostory E, F a omezená množina $H \subset E \subset F$ tak, že $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) = \mathrm{ck}_E(H) = \mathrm{Ja}_E(H) = 1$, ale $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, F) = \mathrm{ck}_F(H) = \mathrm{Ja}_F(H) = \frac{1}{2}$.

Až na $\gamma(H)$ mají tedy všechny doposud definované kvantity jeden z výše popsaných nedostatků – buď mají jako míry slabé nekompaktnosti smysl jen pro konvexní množiny H, nebo závisí na Banachově prostoru E, v němž H uvažujeme. V následující definici přirozeným způsobem zavedeme míry slabé nekompaktnosti, které tyto nežádoucí vlastnosti nemají.

Definice 1.19. Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pak definujeme následující kvantity:

- $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H)$, $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H)$, $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H)$,
- $$\mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) = \sup\{\operatorname{dist}(\operatorname{clust}_{E^{**}}((x_n)), \operatorname{span} H) : \ (x_n) \text{ je posloupnost v } H\},$$
  $$\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) = \sup\{\operatorname{dist}(\operatorname{clust}_{E^{**}}((x_n)), \operatorname{aco} H) : \ (x_n) \text{ je posloupnost v } H\},$$
  $$\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) = \sup\{\operatorname{dist}(\operatorname{clust}_{E^{**}}((x_n)), \operatorname{co} H) : \ (x_n) \text{ je posloupnost v } H\},$$
- $$\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{ pro každý funkcionál } x^* \in E^* \text{ existuje } x^{**} \in \overline{H}^{w^*} \\ \text{tak, že } x^{**}(x^*) = \sup x^*(H) \text{ a } \operatorname{dist}(x^{**}, \operatorname{span} H) < \varepsilon\},$$
  $$\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{ pro každý funkcionál } x^* \in E^* \text{ existuje } x^{**} \in \overline{H}^{w^*} \\ \text{tak, že } x^{**}(x^*) = \sup x^*(H) \text{ a } \operatorname{dist}(x^{**}, \operatorname{aco} H) < \varepsilon\},$$
  $$\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{ pro každý funkcionál } x^* \in E^* \text{ existuje } x^{**} \in \overline{H}^{w^*} \\ \text{tak, že } x^{**}(x^*) = \sup x^*(H) \text{ a } \operatorname{dist}(x^{**}, \operatorname{co} H) < \varepsilon\}.$$

přičemž $\operatorname{span} H$ označuje lineární obal, $\operatorname{co} H$ konvexní obal a $\operatorname{aco} H$ absolutně konvexní obal množiny H, tj. $\operatorname{aco} H = \bigcap\{C \subset E : \ C \supset H, \ C \text{ je vyvážená konvexní}\}$.

Tvrzení 1.20. *Všechny kvantity z předchozí definice jsou míry slabé nekompaktnosti, tzn. jsou rovny nule, právě když množina H je relativně slabě kompaktní. Navíc žádná z nich nezávisí na prostoru E, v němž množinu H uvažujeme.*

Důkaz. To, že jsou tyto kvantity mírami slabé nekompaktnosti, plyne z pozorování 1.6 a z věty 2.1, kterou dokážeme vzápětí. Nezávislost na E se dokáže stejně jako v pozorování 1.18. $\square$

2 Vztahy mezi kvantitami

Následující věta, jež tvoří celou náplň této kapitoly, porovnává navzájem jak nové, tak původní míry slabé nekompaktnosti a ukazuje, že jsou všechny tyto kvantity ekvivalentní. Jedním z jejích důsledků jsou silnější verze Eberlein-Šmulianovy a Jamesovy věty, které popisují slabou nekompaktnost nejen kvalitativně, jako je tomu u klasických verzí těchto vět, ale také kvantitativně.

Věta 2.1. *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pak platí*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) & \leq & \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) & \leq & \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) & \leq & \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) \leq \gamma(H) \\
 & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} \\
 & & \mathrm{ck}_E(H) & \leq & \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) & \leq & \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) & \leq & \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \\
 & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} \\
\frac{1}{2}\gamma(H) & \leq & \mathrm{Ja}_E(H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H)\,.
\end{array}$$

Důkaz. Následující nerovnosti plynou triviálně přímo z definic příslušných kvantit a z toho, že $\operatorname{co} H \subset \operatorname{aco} H \subset \operatorname{span} H \subset E$ a že pro každou posloupnost (x_n) v H je $\mathrm{clust}_{E^{**}}((x_n)) \subset \overline{H}^{w^*}$:

- $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H)$,

  $\mathrm{ck}_E(H) \leq \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) \leq \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) \leq \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H)$,

  $\mathrm{Ja}_E(H) \leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) \leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) \leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H)$,

- $\mathrm{ck}_E(H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E)$,

  $\mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H)$,

  $\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H)$,

  $\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H)$.

Ostatní nerovnosti dokážeme ve zbytku této kapitoly. □

Poznámka 2.2. Kvantity $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E)$, $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H)$, $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H)$ a $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H)$ můžeme považovat za jakési základní, nejjednodušší míry slabé nekompaktnosti. Nejtěžší, co je potřeba k tomu, abychom nahlédli, že jsou to skutečně míry slabé nekompaktnosti, je Banach-Alaogluova věta. Ostatní kvantity vznikly inspirovány těžšími větami 1.4, 1.8 a 1.12, které různými způsoby charakterizují slabou kompaktnost. Vztahy

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \le \gamma(H) \le 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E),$$
$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) \le \gamma(H) \le 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H),$$
$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \le \gamma(H) \le 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H),$$
$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) \le \gamma(H) \le 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H),$$

které plynou z věty 2.1, lze považovat za kvantitativní verzi Eberlein-Grothendieckovy věty 1.4. Odhady

$$\tfrac{1}{2}\,\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \le \mathrm{ck}_E(H) \le \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E),$$
$$\tfrac{1}{2}\,\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) \le \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) \le \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H),$$
$$\tfrac{1}{2}\,\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \le \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) \le \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H),$$
$$\tfrac{1}{2}\,\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) \le \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \le \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H)$$

jsou kvantitativní verzí Eberlein-Šmulianovy věty 1.8 a konečně vztahy

$$\tfrac{1}{2}\,\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \le \mathrm{Ja}_E(H) \le \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E),$$
$$\tfrac{1}{2}\,\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) \le \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) \le \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H),$$
$$\tfrac{1}{2}\,\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \le \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) \le \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H),$$
$$\tfrac{1}{2}\,\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) \le \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) \le \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H)$$

můžeme považovat za kvantitativní verzi Jamesovy věty 1.12.

Následující dvě tvrzení 2.3 a 2.4 jsou dokázána podle [3, Proposition 2.2]. Důkaz věty 2.5 vychází z [3, Theorem 3.1] a používá lemmata z [10] nebo jejich speciální případy. Důkaz tvrzení 2.9 je převzat z [2, Lemma 1]. Důkaz tvrzení 2.10 je inspirován lemmaty [7, 2.1 a 2.2].

Tvrzení 2.3. *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pak*

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) \le \gamma(H).$$

Důkaz. Volme libovolné $r < \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H)$. Nalezněme prvek $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$, pro nějž $\operatorname{dist}(x^{**}, \operatorname{co} H) > r$. Podle Hahn-Banachovy věty existují $x^{***} \in E^{***}$, $\|x^{***}\| = 1$, a $s \in \mathbb{R}$ takové, že

$$x^{***}(x^{**}) > s + r > s > \sup_{x \in \operatorname{co} H} x^{***}(x) = \sup_{x \in H} x^{***}(x). \tag{2.1}$$

Zkonstruujeme nyní indukcí posloupnosti (x_n) v H a (x_n^*) v B_{E^*} splňující následující podmínky:

(i) $x^{**}(x_n^*) > s + r, \quad n \in \mathbb{N}$,

(ii) $x_n^*(x_m) < s, \quad m, n \in \mathbb{N}, m < n$,

(iii) $x_m^*(x_n) > s + r, \quad m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$.

K tomu účelu označme pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ podmínky

$(\text{i})_n$ $x^{**}(x_k^*) > s + r, \quad k = 1, \ldots, n$,

$(\text{ii})_n$ $x_k^*(x_l) < s, \quad k, l \in \{1, \ldots, n\}, l < k$,

$(\text{iii})_n$ $x_l^*(x_k) > s + r, \quad k, l \in \{1, \ldots, n\}, l \leq k$.

Nejprve najdeme $x_1^* \in B_{E^*}$ splňující $(\text{i})_1$ pomocí (2.1) a Goldstinovy věty. Podmínka $(\text{ii})_1$ je splněna triviálně, neboť je prázdná. Předpokládejme, že jsme pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ zkonstruovali prvky $x_1^*, \ldots, x_n^*$ a $x_1, \ldots, x_{n-1}$, které splňují podmínky $(\text{i})_n$, $(\text{ii})_n$, $(\text{iii})_{n-1}$. Protože $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$ a platí $(\text{i})_n$ a $(\text{iii})_{n-1}$, můžeme najít $x_n \in H$ tak, aby byla splněna podmínka $(\text{iii})_n$. Užitím Goldstinovy věty a vztahu (2.1) poté nalezneme prvek $x_{n+1}^* \in B_{E^*}$ tak, aby platilo $(\text{i})_{n+1}$ a $(\text{ii})_{n+1}$. Tím je konstrukce u konce a takto zkonstruované posloupnosti (x_n), (x_n^*) skutečně splňují podmínky (i)–(iii).

Množina $\{x_m^*(x_n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ je omezená v $\mathbb{R}$, můžeme tedy předpokládat, že existují vlastní limity $\lim_m x_m^*(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, a $\lim_n x_m^*(x_n)$, $m \in \mathbb{N}$, jinak bychom přešli k vhodným podposloupnostem posloupností (x_n) a (x_m^*). Ze stejného důvodu můžeme dále předpokládat i to, že existují dvojné limity $\lim_n \lim_m x_m^*(x_n)$ a $\lim_m \lim_n x_m^*(x_n)$. Díky (iii) je $\lim_m \lim_n x_m^*(x_n) \geq s + r$, zatímco z (ii) plyne, že $\lim_n \lim_m x_m^*(x_n) \leq s$. Je tedy $\gamma(H) \geq r$ a důkaz je hotov. □

Tvrzení 2.4. *Nechť je E Banachův prostor a $H \subset E$ omezená. Potom*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ja}_E(H) &\leq \mathrm{ck}_E(H), \\ \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) &\leq \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H), \\ \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) &\leq \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H), \\ \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) &\leq \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H). \end{aligned}$$

Důkaz. Ukážeme pouze první nerovnost, důkazy ostatních se udělají stejně. Volme libovolné $\varepsilon < \mathrm{Ja}_E(H)$. Podle definice $\mathrm{Ja}_E(H)$ existuje funkcionál $x^* \in E^*$ takový, že pro každý prvek $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$ splňující $x^{**}(x^*) = \sup x^*(H)$ je

$\operatorname{dist}(x^{**}, E) > \varepsilon$. Nalezněme v H posloupnost (x_n) takovou, aby $\sup x^*(H) = \lim_n x^*(x_n)$. Potom každý w^*-hromadný bod x^{**} posloupnosti (x_n) splňuje $x^{**}(x^*) = \sup x^*(H)$, a tedy $\operatorname{dist}(\operatorname{clust}_{E^{**}}((x_n)), E) \geq \varepsilon$. Pro libovolné $\varepsilon < \operatorname{Ja}_E(H)$ tak máme $\operatorname{ck}_E(H) \geq \varepsilon$, skutečně tedy $\operatorname{Ja}_E(H) \leq \operatorname{ck}_E(H)$. □

Věta 2.5. *Je-li E Banachův prostor a $H \subset E$ omezená, pak*

$$\frac{1}{2}\gamma(H) \leq \operatorname{Ja}_E(H).$$

Důkaz. Volme libovolné $r < \gamma(H)$. Označme F prostor všech pozitivně homogenních funkcí na E spojitých v normě a dále

$$p(f) = \sup f(H), \quad f \in F,$$
$$P(f) = \sup |f|(H), \quad f \in F.$$

Zřejmě p je sublineární funkcionál a P je pseudonorma na F.

Z definice $\gamma(H)$ nalezněme (x_i^*) posloupnost v B_{E^*} a (x_j) posloupnost v H tak, že existují dvojné limity $\lim_i \lim_j x_i^*(x_j)$ a $\lim_j \lim_i x_i^*(x_j)$ a platí

$$\lim_i \lim_j x_i^*(x_j) - \lim_j \lim_i x_i^*(x_j) > r.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$\lim_j x_k^*(x_j) - \lim_j \lim_i x_i^*(x_j) > r, \quad k \in \mathbb{N},$$

jinak stačí posloupnost (x_i^*) zkrátit o konečně mnoho členů. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ tedy existuje $j_k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$x_k^*(x_j) - \lim_i x_i^*(x_j) > r, \quad j \geq j_k. \tag{2.2}$$

Lemma 2.6. *Nechť (f_i) je posloupnost stejně lipschitzovských funkcí v F a $X \subset F$ je separabilní v relativní topologii generované pseudonormou P. Pak existuje podposloupnost (g_i) vybraná z (f_i) taková, že*

$$p(f - \liminf_i g_i) = p(f - \limsup_i g_i), \quad f \in X.$$

Důkaz. Protože f_i, $i \in \mathbb{N}$, jsou stejně lipschitzovské a pozitivně homogenní, je pro každou podposloupnost (f_{i_k}) vybranou z (f_i) funkce $\liminf_k f_{i_k}$ lipschitzovská a pozitivně homogenní a leží tedy v prostoru F.

Nechť (h_k) je posloupnost, množina jejíchž členů je hustá v X vzhledem k topologii generované pseudonormou P. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že každý člen posloupnosti (h_k) je jejím hromadným bodem v této topologii, jinak bychom ji nahradili posloupností $(h_1, h_1, h_2, h_1, h_2, h_3, h_1, h_2, h_3, h_4, \dots)$.

Nyní induktivně definujeme body $x_n \in H$ a posloupnosti $(f_i^n)_i$, $n \in \mathbb{N}$, následujícím způsobem: Pro $n = 1$ volme $x_1 \in H$ tak, aby

$$h_1(x_1) - \liminf_i f_i(x_1) > p(h_1 - \liminf_i f_i) - \frac{1}{2},$$

a vyberme z (f_i) podposloupnost (f_i^1) takovou, že

$$\lim_i f_i^1(x_1) = \liminf_i f_i(x_1).$$

Nechť je nyní $n > 1$ a předpokládejme, že jsme již zkonstruovali body $x_1, \dots, x_{n-1}$ a posloupnosti $(f_i^1)_i, \dots, (f_i^{n-1})_i$. Volme $x_n \in H$ tak, aby

$$h_n(x_n) - \liminf_i f_i^{n-1}(x_n) > p(h_n - \liminf_i f_i^{n-1}) - \frac{1}{2^n}, \tag{2.3}$$

a podposloupnost $(f_i^n)_i$ vybranou z posloupnosti $(f_i^{n-1})_i$ splňující

$$\lim_i f_i^n(x_n) = \liminf_i f_i^{n-1}(x_n).$$

Definujme $g_n = f_n^n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak (g_n) je zřejmě podposloupnost (f_i). Kdykoli $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost $(g_n, g_{n+1}, g_{n+2}, \dots)$ podposloupností vybranou z $(f_i^n)_i$, a existuje tedy $\lim_k g_k(x_n) = \lim_i f_i^n(x_n)$. Dále platí

$$\begin{aligned} h_n(x_n) - \liminf_i g_i(x_n) &= h_n(x_n) - \lim_i f_i^n(x_n) \\ &= h_n(x_n) - \liminf_i f_i^{n-1}(x_n) \\ &\overset{(2.3)}{>} p\left(h_n - \liminf_i f_i^{n-1}\right) - \frac{1}{2^n} \\ &\geq p\left(h_n - \liminf_k g_k\right) - \frac{1}{2^n}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

kde poslední nerovnost plyne z toho, že $\liminf_k g_k \geq \liminf_i f_i^{n-1}$, neboť posloupnost $(g_{n-1}, g_n, g_{n+1}, \dots)$ je podposloupností vybranou z $(f_i^{n-1})_i$.

Nechť $f \in X$. Volme libovolné $\varepsilon > 0$. Z hustoty $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ v X v topologii generované pseudonormou P nalezněme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{-n} < \varepsilon$ a zároveň $|f(x) - h_n(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in H$. To je možné díky předpokladu, že každý prvek h_n ($n \in \mathbb{N}$) je hromadným bodem posloupnosti (h_i). Potom

$$\begin{aligned} p(f - \liminf_i g_i) &\leq p(h_n - \liminf_i g_i) + p(f - h_n) \qquad \text{(ze sublinearity } p\text{)} \\ &\overset{(2.4)}{<} h_n(x_n) - \liminf_i g_i(x_n) + \varepsilon + \varepsilon \\ &\leq h_n(x_n) - \limsup_i g_i(x_n) + 2\varepsilon \\ &< f(x_n) - \limsup_i g_i(x_n) + (h_n(x_n) - f(x_n)) + 2\varepsilon \\ &\leq p(f - \limsup_i g_i) + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, dostáváme $p(f - \liminf_i g_i) \leq p(f - \limsup_i g_i)$. Opačná nerovnost platí triviálně, je tedy $p(f - \liminf_i g_i) = p(f - \limsup_i g_i)$, což jsme chtěli dokázat.

Vraťme se nyní zpět k důkazu věty. Položme $X = \operatorname{span}\{x_i^* : i \in \mathbb{N}\}$. Pak X je zřejmě separabilní v topologii generované pseudonormou P a funkcionály x_i^* jsou 1-lipschitzovské v normě na E, podle lemmatu 2.6 tedy můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$p(f - \liminf_i x_i^*) = p(f - \limsup_i x_i^*), \quad f \in X. \tag{2.5}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$K_n = \operatorname{co}\{x_i^* : i \geq n\}.$$

Uvažme libovolnou funkci $f \in K_1$, je tedy $f = \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k x_k^*$, kde $\lambda_k \geq 0$ pro $k = 1, \ldots, k_0$ a $\sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k = 1$. Pak je-li $j \geq \max\{j_1, \ldots, j_{k_0}\}$, platí

$$\begin{aligned} p(f - \liminf_i x_i^*) &\geq f(x_j) - \liminf_i x_i^*(x_j) \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k (x_k^*(x_j) - \liminf_i x_i^*(x_j)) \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k (x_k^*(x_j) - \lim_i x_i^*(x_j)) \\ &\overset{(2.2)}{>} \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k r = r. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Lemma 2.7. *Nechť Y je lineární prostor, β, β' kladná reálná čísla, $\rho \in \mathbb{R}$, p sublineární funkcionál na Y, $C \subset Y$ konvexní množina a $u \in Y$ splňuje*

$$\inf_{c \in C} p(u + \beta c) > \beta\rho + p(u).$$

Pak existuje prvek $c_0 \in C$ takový, že

$$\inf_{c \in C} p(u + \beta c_0 + \beta' c) > \beta' \rho + p(u + \beta c_0). \tag{2.7}$$

Důkaz. Z předpokladu lemmatu je pro nějaké $\delta > 0$

$$-p(u) = \beta\rho - \inf_{c \in C} p(u + \beta c) + \delta. \tag{2.8}$$

Volme $x, y \in C$ libovolně. Položme

$$z = \frac{\beta x + \beta' y}{\beta + \beta'}.$$

Pak z je konvexní kombinací prvků z C, tedy $z \in C$ a platí

$$u + \beta x + \beta' y = u + (\beta + \beta')z = \left(1 + \frac{\beta'}{\beta}\right)(u + \beta z) - \frac{\beta'}{\beta}u.$$

Díky sublinearitě funkcionálu p je

$$p(u + \beta x + \beta' y) \geq p\left(\left(1 + \frac{\beta'}{\beta}\right)(u + \beta z)\right) - p\left(\frac{\beta'}{\beta}u\right),$$

tedy pro $c_0 \in C$ pevné máme

$$\begin{aligned}
&\inf_{c\in C} p(u + \beta c_0 + \beta' c) \\
&\geq \left(1 + \frac{\beta'}{\beta}\right) \inf\left\{p(u + \beta z) : \ z = \frac{\beta c_0 + \beta' a}{\beta + \beta'}, \ a \in C\right\} - \frac{\beta'}{\beta}p(u) \\
&\geq \left(1 + \frac{\beta'}{\beta}\right) \inf_{c\in C} p(u + \beta c) - \frac{\beta'}{\beta}p(u) \\
&\overset{(2.8)}{=} \left(1 + \frac{\beta'}{\beta}\right) \inf_{c\in C} p(u + \beta c) + \frac{\beta'}{\beta}\left(\beta\rho - \inf_{c\in C} p(u + \beta c)\right) + \frac{\beta'}{\beta}\delta \\
&= \beta'\rho + \inf_{c\in C} p(u + \beta c) + \frac{\beta'}{\beta}\delta.
\end{aligned}$$

Stačí tedy volit $c_0 \in C$ tak, aby

$$p(u + \beta c_0) < \inf_{c\in C} p(u + \beta c) + \frac{\beta'}{\beta}\delta.$$

Tím je lemma dokázáno.

Uvažujme libovolné $r' < r$. Abstraktní lemma, které jsme právě ukázali, nyní použijeme k důkazu dalšího dílčího lemmatu.

Lemma 2.8. *Nechť (β_n) je posloupnost kladných reálných čísel. Pak existuje posloupnost funkcí (g_n) v F takových, že $g_n \in K_n$, $n \in \mathbb{N}$, a platí*

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i(g_i - \liminf_j x_j^*)\right) > \beta_n r' + p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(g_i - \liminf_j x_j^*)\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Pozn.: Členy typu $p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \dots\right)$ pro $n = 1$ chápeme tak, že v příslušném výrazu vůbec nejsou.

Důkaz. Zkonstruujeme posloupnost (g_n) indukcí. Označme $f_0 = \liminf_j x_j^*$. Abychom našli g_1, aplikujeme předchozí lemma 2.7 na sublineární funkcionál p, $Y = F$, $u = 0$, $\beta = \beta_1$, $\beta' = \beta_2$, $\rho = r'$ a $C = K_1 - f_0$. Z (2.6) dostáváme

$$\begin{aligned}
\inf_{g\in C} p(u + \beta g) &= \inf_{g\in K_1 - f_0} \beta_1 p(g) = \beta_1 \inf_{f\in K_1} p(f - f_0) \\
&= \beta_1 \inf_{f\in K_1} p(f - \liminf_j x_j^*) \overset{(2.6)}{\geq} \beta_1 r > \beta_1 r' = \beta\rho + p(u),
\end{aligned}$$

podle lemmatu 2.7 tedy existuje funkce $g_1 \in K_1$, pro kterou platí

$$\inf_{f\in K_1} p(\beta_1(g_1 - f_0) + \beta_2(f - f_0)) > \beta_2 r' + p(\beta_1(g_1 - f_0)).$$

Předpokládejme nyní, že jsme již pro nějaké přirozené $n \geq 2$ zkonstruovali funkce $g_i \in K_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, které splňují

$$\inf_{g\in K_{n-1}-f_0} p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(g_i - f_0) + \beta_n g\right) > \beta_n r' + p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(g_i - f_0)\right).$$

Použijeme znovu lemma 2.7, tentokrát pro sublineární funkcionál p, $Y = F$, $u = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(g_i - f_0)$, $\beta = \beta_n$, $\beta' = \beta_{n+1}$, $\rho = r'$ a $C = K_n - f_0$. Protože $K_n \subset K_{n-1}$, dostáváme z indukčního předpokladu

$$\inf_{g\in C} p(u + \beta g) \geq \inf_{g\in K_{n-1}-f_0} p(u + \beta g) > \beta\rho + p(u).$$

Podle lemmatu 2.7 existuje funkce $g_n \in K_n$ taková, že

$$\begin{aligned}
\inf_{g\in K_n-f_0} p&\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i(g_i - f_0) + \beta_{n+1}\, g\right) \\
&= \inf_{g\in K_n-f_0} p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(g_i - f_0) + \beta_n(g_n - f_0) + \beta_{n+1}\, g\right) \\
&> \beta_{n+1} r' + p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(g_i - f_0) + \beta_n(g_n - f_0)\right) \\
&= \beta_{n+1} r' + p\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i(g_i - f_0)\right).
\end{aligned}$$

Takto zkonstruovaná posloupnost (g_n) skutečně splňuje podmínku (2.9), neboť každé přirozené n (položíme-li $K_0 = K_1$) platí

$$\inf_{f\in K_{n-1}} p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(g_i - f_0) + \beta_n(f - f_0)\right) > \beta_n r' + p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(g_i - f_0)\right),$$

ale $g_n \in K_n \subset K_{n-1}$, tudíž

$$\begin{aligned}
p\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i(g_i - f_0)\right) &= p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(g_i - f_0) + \beta_n(g_n - f_0)\right) \\
&> \beta_n r' + p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(g_i - f_0)\right).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz lemmatu hotov.

Volme (β_n) dostatečně rychle klesající posloupnost kladných čísel, aby splňovala

$$\lim_n \frac{1}{\beta_n} \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i = 0. \tag{2.10}$$

K této posloupnosti najdeme podle předchozího lemmatu 2.8 posloupnost (g_n) splňující (2.9). Jelikož je $g_n \in K_n \subset B_{E^*}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a B_{E^*} je w^*-kompaktní, můžeme najít $g_0 \in B_{E^*}$ w^*-hromadný bod posloupnosti (g_n). Volme $x \in E$ libovolné. Pak $g_0(x)$ je hromadný bod posloupnosti $g_n(x)$, tedy

$$\liminf_n g_n(x) \leq g_0(x) \leq \limsup_n g_n(x).$$

Protože $g_n \in K_n = \mathrm{co}\{x_i^* : \ i \geq n\}$, můžeme $g_n(x)$ zapsat jako $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_{m_i}^*(x)$, kde $m_i \geq n$ pro $i = 1, \ldots, k$. Alespoň pro jedno $i \in \{1, \ldots, k\}$ je $x_{m_i}^*(x) \leq g_n(x)$, jinak by totiž platilo $g_n(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_{m_i}^*(x) > \sum_{i=1}^k \lambda_i g_n(x) = g_n(x)$. Jinými slovy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m \geq n$ takové, že $x_m^*(x) \leq g_n(x)$. Odtud

$$\liminf_n x_n^*(x) \leq \liminf_n g_n(x).$$

Zcela analogicky dostaneme

$$\limsup_n x_n^*(x) \geq \limsup_n g_n(x).$$

Dohromady máme

$$\liminf_n x_n^*(x) \leq \liminf_n g_n(x) \leq g_0(x) \leq \limsup_n g_n(x) \leq \limsup_n x_n^*(x).$$

Odtud dostáváme pro všechna $f \in F$

$$p(f - \liminf_n x_n^*(x)) \geq p(f - g_0(x)) \geq p(f - \limsup_n x_n^*(x)), \tag{2.11}$$

a protože podle (2.5) předpokládáme, že

$$p(f - \liminf_n x_n^*(x)) = p(f - \limsup_n x_n^*(x)), \quad f \in X,$$

nastávají pro libovolnou funkci $f \in X$ všude v (2.11) rovnosti. Můžeme tedy $\liminf_n x_n^*(x)$ v (2.9) nahradit g_0 a obdržíme tak

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i (g_i - g_0)\right) > \beta_n r' + p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i (g_i - g_0)\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Protože $g_i \in B_{E^*}$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, je $\|g_i - g_0\| \leq 2$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Položme $s = \sup\{\|x\| : \ x \in H\}$ a $g = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (g_i - g_0) \in E^*$. Dokážeme, že kdykoli $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$ splňuje $x^{**}(g) = \sup g(H)$, tak je $\operatorname{dist}(x^{**}, E) \geq \frac{r'}{2}$. Nechť $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$ je libovolný prvek, pro nějž $x^{**}(g) = \sup g(H) = p(g)$. Potom pro $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
x^{**}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i (g_i - g_0)\right) &= x^{**}(g) - x^{**}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i (g_i - g_0)\right) \\
&\geq p(g) - 2s \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i \\
&\geq p\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i (g_i - g_0)\right) - p\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i (g_i - g_0) - g\right) - 2s \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i \\
&= p\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i (g_i - g_0)\right) - \sup_{x \in H}\left(- \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i (g_i - g_0)(x)\right) - 2s \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i \\
&\geq p\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i (g_i - g_0)\right) - 4s \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i \\
&\overset{(2.12)}{>} \beta_n r' + p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i (g_i - g_0)\right) - 4s \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i \\
&\geq \beta_n r' + x^{**}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i (g_i - g_0)\right) - 4s \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i .
\end{aligned}$$

Odtud

$$x^{**}(g_n - g_0) \geq r' - \frac{4s}{\beta_n} \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

a protože posloupnost (β_n) splňuje podmínku (2.10), je

$$\liminf_n x^{**}(g_n - g_0) \geq r'. \tag{2.13}$$

Buď $x \in E$ libovolné. Pak $g_0(x) \geq \liminf_n g_n(x)$, neboť g_0 je w^*-hromadný bod posloupnosti (g_n). Díky tomu z (2.13) dostáváme

$$\begin{aligned}
r' &\leq \liminf_n x^{**}(g_n) - \liminf_n g_n(x) + g_0(x) - x^{**}(g_0) \\
&\leq - \liminf_n \, (x^{**} - x)(g_n) + (x^{**} - x)(g_0) \\
&\leq 2\|x^{**} - x\|.
\end{aligned}$$

Z definice $\mathrm{Ja}_E(H)$ tedy vidíme, že $\mathrm{Ja}_E(H) \geq \frac{1}{2} r'$, a protože jsme čísla $r' < r < \gamma(H)$ volili libovolně, je $\mathrm{Ja}_E(H) \geq \frac{1}{2}\gamma(H)$. □

Tím, že jsme dokázali větu 2.5, jsme dokončili také důkaz věty 2.1. Na závěr kapitoly však ještě podáme snazší důkazy některých odhadů, které z této věty plynou.

Tvrzení 2.9. *Buď E Banachův prostor a $H \subset E$ omezená. Pak*

$$\gamma(H) \leq 2\,\mathrm{ck}_E(H).$$

Důkaz. Toto tvrzení je důsledkem věty 2.5 a tvrzení 2.4. Následující důkaz, který nepoužívá větu 2.5, je však o mnoho jednodušší.

Nechť $\alpha > \mathrm{ck}_E(H)$ je libovolné pevné. Buď (x_n) posloupnost v H, (x^*_m) posloupnost v B_{E^*} a nechť obě dvojné limity $\lim_n \lim_m x^*_m(x_n)$, $\lim_m \lim_n x^*_m(x_n)$ existují. Z definice $\mathrm{ck}_E(H)$ má posloupnost (x_n) w^*-hromadný bod $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$, pro který $\mathrm{dist}(x^{**}, E) < \alpha$. Buď $x \in E$ takový prvek, že $\|x - x^{**}\| < \alpha$. Dále z w^*-kompaktnosti B_{E^*} nalezneme $x^* \in B_{E^*}$ w^*-hromadný bod posloupnosti (x^*_m). Jelikož $x^*(x)$ je hromadným bodem posloupnosti $x^*_m(x)$ v $\mathbb{R}$, můžeme najít podposloupnost $(x^*_{m_k})_k$ vybranou z (x^*_m) takovou, že $\lim_k x^*_{m_k}(x) = x^*(x)$. Potom platí

$$\lim_m \lim_n x^*_m(x_n) = \lim_m x^{**}(x^*_m) = \lim_k x^{**}(x^*_{m_k}),$$
$$\lim_n \lim_m x^*_m(x_n) = \lim_n x^*(x_n) = x^{**}(x^*).$$

Odtud

$$\begin{aligned}
\left|\lim_m \lim_n x^*_m(x_n) - \lim_n \lim_m x^*_m(x_n)\right| &= \left|\lim_k x^{**}(x^*_{m_k}) - x^{**}(x^*)\right| \\
&\leq \left|\lim_k x^{**}(x^*_{m_k}) - \lim_k x^*_{m_k}(x)\right| + |x^*(x) - x^{**}(x^*)| \\
&\leq \sup_k \|x - x^{**}\|\|x^*_{m_k}\| + \|x - x^{**}\|\|x^*\| < 2\alpha.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy $\gamma(H) \leq 2\alpha$, a protože $\alpha > \mathrm{ck}_E(H)$ bylo libovolné, jsme hotovi. $\square$

Tvrzení 2.10. *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Potom platí*

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{span}\, H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{aco}\, H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{co}\, H) \leq 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E),$$
$$\mathrm{ck}_E(H) \leq \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) \leq \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) \leq \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \leq 2\,\mathrm{ck}_E(H),$$
$$\mathrm{Ja}_E(H) \leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) \leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) \leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) \leq 2\,\mathrm{Ja}_E(H).$$

Důkaz. Celé tvrzení plyne z věty 2.1. Nerovnosti $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{co}\, H) \leq 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E)$, $\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \leq 2\,\mathrm{ck}_E(H)$, $\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) \leq 2\,\mathrm{Ja}_E(H)$ se však dají dokázat dokázat i snáze, bez užití těžké věty 2.5.

Dokážeme, že pro všechna $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$ je $\mathrm{dist}(x^{**}, \mathrm{co}\, H) \leq 2\,\mathrm{dist}(x^{**}, E)$, odkud plynou všechny tři výše zmíněné nerovnosti. Předpokládejme pro spor, že existují $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$ a $t \in \mathbb{R}$ tak, že $\mathrm{dist}(x^{**}, \mathrm{co}\, H) > 2t > 2\,\mathrm{dist}(x^{**}, E)$. Můžeme tedy nalézt prvek $x \in E$, pro nějž $\|x^{**} - x\| < t$, neboť $\operatorname{dist}(x^{**}, E) < t$. Dále platí

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{co} H) \geq \operatorname{dist}(x^{**}, \operatorname{co} H) - \|x^{**} - x\| > 2t - t = t.$$

Z Hahn-Banachovy věty najdeme prvky $x^* \in S_{E^*}$ a $r \in \mathbb{R}$ takové, že

$$x^*(x) > r + t > r > \sup_{y \in \operatorname{co} H} x^*(y).$$

Odtud dostáváme

$$\inf_{y \in \operatorname{co} H} x^*(x - y) = x^*(x) - \sup_{y \in \operatorname{co} H} x^*(y) > t.$$

Buď (y_α) net v $H \subset \operatorname{co} H$ takový, že $y_\alpha \overset{w^*}{\to} x^{**}$. Potom $x - y_\alpha \overset{w^*}{\to} x - x^{**}$, tudíž $x^*(x - y_\alpha) \to x^*(x - x^{**})$. Jelikož je ale $\inf_\alpha x^*(x - y_\alpha) > t$, je také $x^*(x - x^{**}) > t$, tedy $\|x^{**} - x\| > t$, což je spor. $\square$

3 Příklady

Tato kapitola obsahuje příklady omezených množin v Banachových prostorech, na nichž demonstrujeme následující poznatky. Prvním z nich je ten, že kdekoli ve větě 2.1 může nastat rovnost. Dále příklady ukazují, že téměř každá z nerovností v této větě může být naopak pro nějakou omezenou množinu H Banachova prostoru E ostrá. Navíc ukazují i to, že konstanta 2 (resp. $\frac{1}{2}$), která figuruje ve všech vztazích mezi libovolnými dvěma uvažovanými kvantitami, je téměř ve všech případech optimální, tzn. nedá se zmenšit (resp. zvětšit). Pouze pro

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) &\leq \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) \leq 2\,\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H),\\
\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) &\leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) \leq 2\,\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H),\\
\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) &\leq \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \leq 2\,\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H)
\end{aligned}
$$

žádný příklad relativně slabě nekompaktní omezené množiny H v Banachově prostoru, pro kterou by byla v některém z těchto vztahů první nerovnost ostrá, či by dokonce na místě druhé nerovnosti nastala rovnost, není znám.

Většina uvedených příkladů je přejata z [3, kap. 5]. Příklad 3.7 je zpracován podle [5].

Příklad 3.1. Buď $E = c$ prostor posloupností, které mají vlastní limitu, a nechť $H = \{x \in E:\ 0 \leq x \leq 1,\ \lim_n x(n) = 0\}$. Pak $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq \frac{1}{2}$, $\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) \geq 1$. Je tedy $\gamma(H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) = 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) = \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) = 2\,\mathrm{ck}_E(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) = 2\,\mathrm{Ja}_E(H) = 1$. Speciálně nerovnosti $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) < \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H)$, $\mathrm{ck}_E(H) < \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H)$, $\mathrm{Ja}_E(H) < \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H)$ jsou ostré.

Důkaz. Abychom dokázali, že $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq \frac{1}{2}$, stačí si všimnout že konstantní posloupnost $\frac{1}{2}$ leží v E a $H \subset \frac{1}{2} + \frac{1}{2}B_E$, tedy $\overline{H}^{w^*} \subset \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\overline{B_E}^{w^*} \subset E + \frac{1}{2}B_{E^{**}}$.

Pro důkaz nerovnosti $\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) \geq 1$ volme $x^{**} = \chi_{\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \cong E^{**}$. Definujme $x^* \in \ell^1(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \cong E^*$ předpisem $x^*(n) = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x^*(\infty) = 0$. Pak x^{**} je zřejmě jediný prvek $\overline{H}^{w^*}$, pro nějž $\langle x^{**}, x^* \rangle = \sup_{x \in H} \langle x^*, x \rangle$. Protože je ovšem $\operatorname{span} H = c_0$ a $\operatorname{dist}(x^{**}, \operatorname{span} H) = 1$, jsme hotovi. Zbytek tvrzení plyne z věty 2.1. □

Příklad 3.2. Buď $E = c_0$, $H = B_E$. Pak $\gamma(H) = 1$ a $\mathrm{Ja}_E(H) = 1$. Tudíž i $\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) = \mathrm{ck}_E(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) = 1$.

Důkaz. Dokážeme nejprve, že $\gamma(H) \leq 1$. Předpokládejme pro spor, že $\gamma(H) > 1$. Můžeme tedy nelézt posloupnosti (x_n) v B_{c_0}, (x_m^*) v $B_{\ell^1} \cong B_{E^*}$ a $\delta > 0$ tak, že

$$|\lim_m \lim_n \langle x_m^*, x_n\rangle - \lim_n \lim_m \langle x_m^*, x_n\rangle| > 1 + \delta > 1.$$

Z w^*-kompaktnosti $B_{\ell^1} \cong B_{E^*}$ najdeme $x^* \in B_{\ell^1}$ w^*-hromadný bod posloupnosti (x_m^*). Podobně $x^{**} \in B_{\ell^\infty} \cong B_{E^{**}}$ buď w^*-hromadný bod posloupnosti (x_n). Potom

$$\begin{aligned}1 + \delta &< |\lim_m \lim_n \langle x_m^*, x_n\rangle - \lim_n \lim_m \langle x_m^*, x_n\rangle| \\ &= |\lim_m \langle x^{**}, x_m^*\rangle - \lim_n \langle x^*, x_n\rangle| \\ &= |\lim_m \langle x^{**}, x_m^*\rangle - \langle x^{**}, x^*\rangle\,|.\end{aligned}$$

Buď $k_0 \in \mathbb{N}$ dost velké, aby

$$\sum_{k>k_0} |x^*(k)| < \frac{\delta}{2}.$$

Zvolme $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$|\,\langle x^{**}, x_m^* - x^*\rangle\,| > 1 + \delta, \quad m \geq m_0.$$

Protože x^* je w^*-hromadný bod (x_m^*), můžeme najít $m \geq m_0$ takové, že

$$|x_m^*(k) - x^*(k)| < \frac{\delta}{2k_0}, \quad k \leq k_0.$$

Pak platí

$$\begin{aligned}|\,\langle x^{**}, x_m^* - x^*\rangle\,| &= \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} x^{**}(k)(x_m^*(k) - x^*(k))\right| \\ &\leq \sum_{k\leq k_0} |x^{**}(k)||x_m^*(k) - x^*(k)| + \sum_{k>k_0} |x^{**}(k)||x_m^*(k)| + \sum_{k>k_0} |x^{**}(k)||x^*(k)| \\ &\leq \sum_{k\leq k_0} 1 \cdot \frac{\delta}{2k_0} + \sum_{k>k_0} 1 \cdot |x_m^*(k)| + \sum_{k>k_0} 1 \cdot |x^*(k)| < \frac{\delta}{2} + \|x_m^*\|_{\ell^1} + \frac{\delta}{2} \\ &\leq 1 + \delta,\end{aligned}$$

což je kýžený spor.

Abychom dokázali, že $\mathrm{Ja}_E(H) \geq 1$, definujme posloupnost $x^* \in \ell^1 \cong E^*$ předpisem $x^*(n) = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Jediný prvek $B_{\ell^\infty} \cong \overline{H}^{w^*}$, ve kterém x^* nabývá svého suprema na H, je zřejmě konstantní posloupnost 1. Ovšem $\operatorname{dist}(1, E) = 1$. Skutečně tedy $\mathrm{Ja}_E(H) \geq 1$ a zbytek plyne z věty 2.1. $\square$

Příklad 3.3. Nechť $E = \ell^1$, $H = B_E$. Pak $\gamma(H) = 2$ a $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) = 1$. Tudíž i $\mathrm{Ja}_E(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) = \mathrm{ck}_E(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) = 1.$

Důkaz. Zřejmě $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) = \hat{\mathrm{d}}(B_{E^{**}}, B_E) \leq \hat{\mathrm{d}}(B_{E^{**}}, \{0\}) = 1$. Podle věty 2.1 tedy stačí dokázat, že $\gamma(H) \geq 2$, k čemuž stačí najít posloupnosti (x_n) v $B_{\ell^1} = H$ a (x^*_m) v $B_{\ell^\infty} \cong B_{E^*}$, pro které $|\lim_n \lim_m \langle x^*_m, x_n\rangle - \lim_m \lim_n \langle x^*_m, x_n\rangle| \geq 2$. Definujeme pro $n, m \in \mathbb{N}$

$$x_n = e_n,$$
$$x^*_m(i) = \begin{cases} 1, & i \leq m, \\ -1, & i > m. \end{cases}$$

Pak skutečně

$$\lim_n \lim_m \langle x^*_m, x_n\rangle = \lim_n 1 = 1, \qquad \lim_m \lim_n \langle x^*_m, x_n\rangle = \lim_m -1 = -1.$$

Zbytek plyne z věty 2.1. □

Příklad 3.4. Nechť $E = C_0([0, \omega_1))$ a $H = \{x \in E : \ 0 \leq x \leq 1\}$. Pak $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) = 1$ a $\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) = \frac{1}{2}$. Je tedy také $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) = \gamma(H) = 1$ a $\mathrm{Ja}_E(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) = \mathrm{ck}_E(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) = \frac{1}{2}$. Speciálně nerovnosti $\mathrm{ck}_E(H) < \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E)$, $\mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) < \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H)$, $\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) < \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H)$, $\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) < \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H)$ jsou ostré.

Důkaz. Pro důkaz toho, že $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \geq 1$, si stačí uvědomit, že konstantní funkce $1 \in \ell^\infty([0, \omega_1)) \cong E^{**}$ leží v $\overline{H}^{w^*}$ a $\operatorname{dist}(1, E) = 1$.

Dokážeme nyní, že $\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \leq \frac{1}{2}$. Nechť (x_n) je nějaká posloupnost v H. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$ existuje $\alpha^k_n < \omega_1$ tak, že $x_n < \frac{1}{k}$ na $[\alpha^k_n, \omega_1)$. Položme $\alpha = \sup\{\alpha^k_n : \ n, k \in \mathbb{N}\} < \omega_1$. Pak $x_n|_{(\alpha, \omega_1)} = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jelikož je interval $[0, \alpha]$ spočetný, můžeme z posloupnosti (x_n) vybrat podposloupnost $(x_{n_k})_k$, která bodově konverguje na $[0, \alpha]$, tedy i na celém intervalu $[0, \omega_1)$. Označme její bodovou limitu $x^{**} \in \ell^\infty([0, \omega_1)) \cong E^{**}$. Posloupnost $(x_{n_k})_k$ w^*-konverguje k x^{**}, zřejmě tedy $x^{**} \in \mathrm{clust}_{E^{**}}((x_n))$. Položme $x = \frac{1}{2}\chi_{[0,\alpha]}$. Pak $x \in H$ a $\|x^{**} - x\| \leq \frac{1}{2}$, neboť $0 \leq x^{**} \leq 1$ a $x^{**}|_{(\alpha, \omega_1)} = 0$. Odtud $\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \leq \frac{1}{2}$. Z věty 2.1 pak plyne vše ostatní. □

Příklad 3.5. Buď $E = C([0, \omega])$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ a $H = \{x \in E : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq x(\omega) \leq \varepsilon\}$. Potom $\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) \geq 1 - \varepsilon$ a $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) \leq \frac{1}{2}$. Dále tedy $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \geq \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) \geq 1 - \varepsilon$, $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) \geq \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \geq \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) \geq 1 - \varepsilon$, $\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) \leq \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) \leq \frac{1}{2}$, $\mathrm{Ja}_E(H) \leq \mathrm{ck}_E(H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq \frac{1}{2}$, $1 - \varepsilon \leq \gamma(H) \leq 1$. Speciálně nerovnosti $\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) < \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H)$, $\mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) < \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H)$, $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) < \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H)$ jsou ostré, a navíc konstanta 2 v odhadech $\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) \le 2\,\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H)$, $\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) \le 2\,\mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H)$ a $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{aco}\, H) \le 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{span}\, H)$ je optimální (nedá se zmenšit), neboť ε může být libovolně malé.

Důkaz. Zřejmě $\mathrm{span}\, H = E$. Konstantní funkce $\frac{1}{2}$ leží v E a platí $H \subset \frac{1}{2} + \frac{1}{2}B_E$, tedy $\overline{H}^{w^*} \subset \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\overline{B_E}^{w^*} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}B_{E^{**}}$. Odtud $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{span}\, H) \le \frac{1}{2}$.

Definujme prvek $x^* \in \ell^1([0,\omega]) \cong E^*$ předpisem $x^*(n) = \frac{1}{2^n}$, $n < \omega$, $x^*(\omega) = -1$. Jediným prvkem $\overline{H}^{w^*}$, v němž x^* nabývá svého suprema na H, je zřejmě funkce $\chi_{[0,\omega)} \in \ell^\infty([0,\omega]) \cong E^{**}$, jejíž vzdálenost od $\mathrm{aco}\, H = \{x \in B_E : |x(\omega)| \le \varepsilon\}$ je rovna $1-\varepsilon$. Proto je $\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) \ge 1-\varepsilon$. Zbytek plyne z věty 2.1. □

Příklad 3.6. Nechť je $E = C([0,\omega])$ a $H = \{x \in B_E : x(\omega) = 1\}$. Potom $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{aco}\, H) = 1$ a $\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) = 2$. Je tedy také $\mathrm{Ja}_E(H) = \mathrm{ck}_E(H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{span}\, H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) = 1$, $\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{co}\, H) = \gamma(H) = 2$. Speciálně nerovnosti $\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) < \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H)$, $\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) < \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H)$, $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{aco}\, H) < \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{co}\, H)$ jsou ostré.

Důkaz. Protože $\overline{H}^{w^*} \subset \overline{B_E}^{w^*} = B_{E^{**}}$ a $0 \in \mathrm{aco}\, H$, dostáváme $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{aco}\, H) \le \hat{\mathrm{d}}(B_{E^{**}}, \{0\}) = 1$.

Abychom dokázali, že $\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) \ge 2$, uvažme prvek $x^* \in \ell^1([0,\omega]) \cong E^*$ definovaný jako $x^*(n) = -\frac{1}{2^n}$, $n < \omega$, $x^*(\omega) = 0$. Definujme $x^{**} \in \ell^\infty([0,\omega]) \cong E^{**}$ předpisem $x^{**}(n) = -1$, $n < \omega$, $x^{**}(\omega) = 1$. Je evidentní, že x^{**} je jediný prvek $\overline{H}^{w^*}$, ve kterém x^* nabývá svého suprema na H. Ovšem $\mathrm{dist}(x^{**}, \mathrm{co}\, H) = \mathrm{dist}(x^{**}, H) = 2$. Vše ostatní plyne opět z věty 2.1. □

Příklad 3.7. Existuje Banachův prostor E a omezená množina $H \subset E$ tak, že $\mathrm{Ja}_E(H) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{ck}_E(H) = 1$.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, a $k \in \{1, \dots, n^2\}$ označme $D_k^n = \left[\frac{k-1}{n^2}, \frac{k}{n^2}\right]$ k-tý „dílek“ intervalu $[0,1]$ rozřezaného na n^2 stejně dlouhých dílků. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, a každou n-tici $(i_1, \dots, i_n)$ (ne nutně různých) čísel z množiny $\{1, \dots, n^2\}$ definujme spojitou funkci $g_{(i_1,\dots,i_n)} \colon [0,1] \to [0,1]$ tak, aby nebyla všude nulová, byla rovna 0 na dílcích $D_{i_1}^n, \dots, D_{i_n}^n$ a 1 na všech zbývajících dílcích, které s žádným z $D_{i_1}^n, \dots, D_{i_n}^n$ nesousedí, tj.

$$
\begin{aligned}
&g_{(i_1,\dots,i_n)} \equiv 0 \text{ na } D_{i_k}^n,\ k = 1, \dots, n, \\
&g_{(i_1,\dots,i_n)} \equiv 1 \text{ na } D_m^n,\ m \in \{1, \dots n^2\},\ \min_{k \in \{1,\dots n\}} |m - i_k| \ge 2.
\end{aligned}
$$

Taková funkce zřejmě splňuje

$$
\lambda\left(g^{-1}_{(i_1,\dots,i_n)}(\{1\})\right) \ge 1 - n \cdot 3 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{3}{n}, \tag{3.1}
$$

kde λ značí Lebesgueovu míru. Uspořádejme množinu $\{g_{(i_1,\dots,i_n)}:\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,$ $i_1,\dots,i_n\in\{1,\dots,n^2\}\}$ do posloupnosti (h_n). Díky (3.1) platí

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N}\quad\forall n\geq n(\varepsilon):\quad\lambda\left(h_n^{-1}(\{1\})\right)\geq 1-\varepsilon. \tag{3.2}$$

Definujme zobrazení $\psi\colon[0,1]\to(\ell^\infty,\tau_p)$ jako $\psi(t)=(h_1(t),h_2(t),\dots)$, $t\in[0,1]$, a označme $K=\psi([0,1])$. Díky spojitosti funkcí h_i je ψ spojité a množina K je tedy kompaktní v (ℓ^∞,τ_p). Pro $n\in\mathbb{N}$ označme $P_n\colon\ell^\infty\to\ell^\infty$ projekci na prvních n složek, tj. $P_n((a_1,a_2,\dots))=(a_1,\dots,a_n,0,0,\dots)$. Položme $K_0=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}P_n(K)$. Ukážeme, že $\overline{K_0}^{\tau_p}=K_0\cup K$. Zřejmě $\overline{K_0}^{\tau_p}\supset K_0\cup K$. Pro spor předpokládejme, že $y\in\overline{K_0}^{\tau_p}\setminus K_0\cup K$. Protože K je τ_p-uzavřená množina a $y\notin K$, existuje $\varepsilon>0$ a $n\in\mathbb{N}$ tak, že $\max_{i\leq n}|x(i)-y(i)|>\varepsilon$, kdykoli $x\in K$. Je tedy $\max_{i\leq n}|x(i)-y(i)|>\varepsilon$ pro každý prvek $x\in P_m(K)$, $m\geq n$. Proto $y\in\overline{\bigcup_{i=1}^{n-1}P_i(K)}^{\tau_p}$. Ale $P_i(K)$, $i=1,\dots,n-1$, jsou τ_p-kompaktní, tedy $y\in\bigcup_{i=1}^{n-1}P_i(K)\subset K_0$, což je kýžený spor.

Pro $x\in\ell^\infty$ budeme značit $x^{-1}(0)=\{i\in\mathbb{N}:x(i)=0\}$. Uvažme libovolné prvky $x_1,\dots,x_n\in K$ $(n\geq 2)$, tj. $x_j=\psi(t_j)$ pro nějaká $t_j\in[0,1]$, $j=1,\dots,n$. Volme $i_1,\dots,i_n\in\{1,\dots,n^2\}$ tak, aby $t_j\in D^n_{i_j}$, $j=1,\dots,n$. Potom $g_{(i_1,\dots,i_n)}(t_j)=0$, $j=1,\dots,n$. Proto $x_1^{-1}(0)\cap\ldots\cap x_n^{-1}(0)\neq\emptyset$, neboť $x_1^{-1}(0)\cap\ldots\cap x_n^{-1}(0)\ni m$, kde $m\in\mathbb{N}$ splňuje $g_{(i_1,\dots,i_n)}=h_m$. Systém množin $\{x^{-1}(0):\ x\in K\}$ tedy generuje filtr na $\mathbb{N}$. Ten lze rozšířit na ultrafiltr u, který nechť je po zbytek důkazu pevný. Tento ultrafiltr je navíc netriviální. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ je totiž funkce h_n nenulová, tj. existuje $t\in[0,1]$ takové, že $h_n(t)\neq 0$, a tedy $\psi(t)^{-1}(0)\not\ni n$.

Prostor $\beta\mathbb{N}$ budeme ztotožňovat s prostorem ultrafiltrů na $\mathbb{N}$. Označme $\kappa\colon(\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)\to(C(\beta\mathbb{N}),\|\cdot\|_\infty)$ kanonický izometrický izomorfizmus definovaný jako

$$\kappa(x)(p)=\lim_p x(i),\quad x\in\ell^\infty,\ p\in\beta\mathbb{N}.$$

Položme $E=\{x\in C(\beta\mathbb{N}):\ x(u)=0\}$. Zřejmě E je Banachův podprostor $C(\beta\mathbb{N})$. Pro $x\in K_0$ je $x\in c_0(\mathbb{N})$, tedy $\lim_p x(i)=0$ pro každý ultrafiltr $p\in\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. Speciálně $\kappa(x)(u)=\lim_u x(i)=0$, tudíž $\kappa(K_0)\subset E$. Buď $H=\operatorname{co}\kappa(K_0)$.

Dokážeme, že $\hat{\mathrm{d}}(\overline{\kappa(K_0)}^{w^*},E)\leq\frac{1}{2}$. Odtud potom

$$\mathrm{Ja}_E(H)\leq\hat{\mathrm{d}}(\operatorname{ext}\overline{H}^{w^*},E)\leq\hat{\mathrm{d}}(\overline{\kappa(K_0)}^{w^*},E)\leq\frac{1}{2},$$

neboť $\overline{\kappa(K_0)}^{w^*}$ obsahuje extremální body $\overline{H}^{w^*}$ a ty tvoří Jamesovu hranici množiny $\overline{H}^{w^*}$ – připomeňme, že

$$\mathrm{Ja}_E(H)=\inf\{\hat{\mathrm{d}}(B,E):\ B\subset\overline{H}^{w^*},\ B\text{ je Jamesova hranice }\overline{H}^{w^*}\}.$$

Z Rieszovy věty o reprezentaci $C(\beta\mathbb{N})^* \cong M(\beta\mathbb{N}) \cong \ell^1 \oplus M(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$. Nechť $B(\beta\mathbb{N})$ značí prostor omezených borelovsky měřitelných funkcí na $\beta\mathbb{N}$. Každý prvek $f \in B(\beta\mathbb{N})$ můžeme ztotožnit s nějakým prvkem $C(\beta\mathbb{N})^{**} \cong M(\beta\mathbb{N})^*$ pomocí reprezentace

$$\langle f, \mu\rangle = \int_{\beta\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu, \quad \mu \in M(\beta\mathbb{N}).$$

Označme dále $\rho\colon (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) \to (B(\beta\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ izometrické vnoření definované jako

$$\rho(f)(p) = \begin{cases} f(p), & p \in \mathbb{N}, \\ 0, & p \in \beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}. \end{cases}$$

Po zbytek tohoto důkazu budeme pro libovolnou reálnou funkci f na $\beta\mathbb{N}$ značit $\operatorname{supp} f = \{p \in \beta\mathbb{N} : \ f(p) \neq 0\}$. Nechť $x \in K_0$. Pak $\lim_p x(i) = 0$, kdykoli $p \in \beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, a tedy $\operatorname{supp}\kappa(x) \subset \mathbb{N}$. Pro každý prvek $y \in \overline{\kappa(K_0)}^{w^*}$ a míru $\mu \in M(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ je tudíž $y(\mu) = 0$. Můžeme tedy takový funkcionál y chápat jako funkci z $B(\beta\mathbb{N})$ se $\operatorname{supp} y \subset \mathbb{N}$, jíž se dá reprezentovat. Na $\{f \in B(\beta\mathbb{N}) : \operatorname{supp} f \subset N\} \subset C(\beta\mathbb{N})^{**}$ splývá w^* topologie s topologií generovanou funkcionály z $\ell^1 \cong M(\mathbb{N})$ a ta zde na omezených množinách splývá s topologií bodové konvergence na $\mathbb{N}$. Proto množina $\overline{\kappa(K_0)}^{w^*} \subset \{f \in B(\beta\mathbb{N}) : \ \operatorname{supp} f \subset N\}$ splývá s množinou $\rho(\overline{K_0}^{\tau_p}) = \rho(K_0 \cup K)$. Volme $y \in \overline{\kappa(K_0)}^{w^*}$ libovolně, je tedy $y = \rho(z) \in B(\beta\mathbb{N})$ pro nějaký prvek $z \in K_0 \cup K$. Ultrafiltr u jsme definovali tak, že $\kappa(z)(u) = 0$, tedy $\kappa(z) \in E$. Potom pro $x = \frac{1}{2}\kappa(z) \in E \subset C(\beta\mathbb{N}) \subset B(\beta\mathbb{N})$ máme

$$\begin{aligned}\|y - x\|_\infty &= \sup_{p\in\beta\mathbb{N}} |y(p) - \tfrac{1}{2}\kappa(z)(p)| \\ &= \max\{\sup_{i\in\mathbb{N}} |\tfrac{1}{2}z(i)|, \sup_{p\in\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}} |\tfrac{1}{2}\kappa(z)(p)|\} \leq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Skutečně tedy $\hat{\mathrm{d}}(\overline{\kappa(K_0)}^{w^*}, E) \leq \frac{1}{2}$.

Ukážeme nyní, že $\mathrm{ck}_E(H) \geq 1$. Začneme následujícím lemmatem.

Lemma 3.8. *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ existuje $y \in \operatorname{co} K_0$ tak, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 \leq i \leq n$ je $y(i) \geq 1 - \varepsilon$.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $n_0 = n(\varepsilon)$ z podmínky (3.2), která dává, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\lambda\left(h_n^{-1}(\{1\})\right) \geq 1 - \varepsilon$. Volme libovolné $n > n_0$. Množina $P_n(K) = P_n \circ \psi([0,1])$ je kompaktní podmnožinou n-dimenzionálního prostoru. Proto i $\operatorname{co} P_n(K)$ je kompaktní. Definujme na $P_n(K)$ pravděpodobnostní míru

$\mu = P_n \circ \psi(\lambda)$ jako obraz Lebesgueovy míry λ na $[0,1]$ při zobrazení $P_n \circ \psi$. Buď y těžištěm této míry μ, tj.

$$y = \int_{P_n(K)} x \, \mathrm{d}\mu(x),$$

kde integrál (na konečnědimenzionálním prostoru) definujeme po složkách. Pak zřejmě $y \in \overline{\operatorname{co} P_n(K)} = \operatorname{co} P_n(K) \subset \operatorname{co} K_0$ a navíc pro $n_0 \leq i \leq n$ máme

$$y(i) = \int_{P_n(K)} x(i) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_0^1 (P_n \circ \psi(t))(i) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 h_i(t) \, \mathrm{d}t \geq 1 - \varepsilon,$$

čímž je důkaz lemmatu dokončen.

Volme $\varepsilon > 0$ libovolně malé. Najdeme n_0 z lemmatu 3.8 a pro každé přirozené $n > n_0$ prvek $y_n \in \operatorname{co} K_0$ tak, že $y_n(i) \geq 1 - \varepsilon$, $n_0 \leq i \leq n$. Pak $(\kappa(y_n))_n$ je posloupnost v H. Nechť z je libovolný w^*-hromadný bod posloupnosti $(\kappa(y_n))_n$ v $C(\beta\mathbb{N})^{**}$. Stejnou úvahou jako výše dostaneme, že $\rho(\overline{\operatorname{co} K_0}^{\tau_p}) = \overline{\operatorname{co} \kappa(K_0)}^{w^*} \subset B(\beta\mathbb{N})$ a navíc existuje $y \in \overline{\operatorname{co} K_0}^{\tau_p}$ tak, že $\rho(y) = z$ a y je τ_p-hromadným bodem posloupnosti (y_n) v ℓ^∞. Zřejmě $\liminf_i y(i) \geq 1 - \varepsilon$, a tudíž $\lim_u y(i) \geq 1 - \varepsilon$. Pro libovolný prvek $x \in E \subset C(\beta\mathbb{N}) \subset B(\beta\mathbb{N})$ je naopak $\lim_u x(i) = 0$ a dostáváme tedy

$$\|z - x\|_\infty \geq \|\rho(y) - x\|_\infty \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\rho(y)(n) - x(n)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |y(n) - x(n)| \geq 1 - \varepsilon.$$

Odtud $\operatorname{ck}_E(H) \geq 1 - \varepsilon$, a protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je $\operatorname{ck}_E(H) \geq 1$. $\square$

4 Míry slabé nekompaktnosti jednotkové koule

Když E je reflexivní Banachův prostor, je jeho jednotková koule B_E slabě kompaktní a všechny definované míry slabé nekompaktnosti B_E jsou tedy rovny 0. Pro nereflexivní Banachův prostor jsou všechny míry slabé nekompaktnosti B_E kladné, nicméně i v tomto případě je si naprostá většina z nich rovna. O tom vypovídá následující věta.

Věta 4.1. *Nechť E je nereflexivní Banachův prostor. Pak*

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{d}}(\overline{B_E}^{w^*}, E) &= \hat{\mathrm{d}}(\overline{B_E}^{w^*}, \operatorname{span} B_E) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{B_E}^{w^*}, \operatorname{aco} B_E) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{B_E}^{w^*}, \operatorname{co} B_E)\\ &= \mathrm{ck}_E(B_E) = \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(B_E) = \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(B_E) = \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(B_E)\\ &= \mathrm{Ja}_E(B_E) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(B_E) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(B_E) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(B_E) = 1.\end{aligned}$$

Důkaz právě uvedené věty, který vychází z článku [6], provedeme ve zbytku této kapitoly pomocí několika lemmat a tvrzení. Vzhledem k tomu, že $\hat{\mathrm{d}}(\overline{B_E}^{w^*}, \operatorname{co} B_E) \leq \hat{\mathrm{d}}(B_{E^{**}}, \{0\}) = 1$, stačí díky větě 2.1 dokázat $\mathrm{Ja}_E(B_E) \geq 1$. K tomu účelu potřebujeme nejprve zavést některé nové pojmy.

Definice 4.2. Omezená posloupnost (x_n) v Banachově prostoru E je *ekvivalentní kanonické bázi ℓ^1*, jestliže lineární operátor $T\colon \ell^1 \to E$ definovaný na kanonické bázi ℓ^1 předpisem $T(e_n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$, je izomorfizmus z ℓ^1 do E, tzn. existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každou posloupnost $(\lambda_n) \in \ell^1$ platí

$$C\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n\right\|.$$

Definice 4.3. Nechť E je Banachův prostor. Řekneme, že E *obsahuje asymptoticky izometrickou kopii ℓ^1*, jestliže existuje posloupnost (x_n) v B_E, která je ekvivalentní kanonické bázi ℓ^1, a posloupnost (δ_n) v $(0,1]$, která konverguje k 1, tak, že pro každou konečnou posloupnost $(\lambda_i)_{i=1}^n$ reálných čísel platí

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i|\lambda_i| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right\|. \tag{4.1}$$

Nyní rozlišíme dva případy podle toho, zda E obsahuje asymptoticky izometrickou kopii ℓ^1, nebo ne. Budeme se zabývat každým zvlášť a právě teď tím prvním, který je jednodušší.

Tvrzení 4.4. *Nechť E je Banachův prostor, který obsahuje asymptoticky izometrickou kopii ℓ^1. Pak* $\mathrm{Ja}_E(B_E) \geq 1$.

Důkaz. Uvažme posloupnosti (x_n) v B_E a (δ_n) v $(0, 1]$ z předchozí definice. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ definujme na $\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ spojitý lineární funkcionál x_m^* předpisem

$$x_m^*(x_n) = \begin{cases} -\delta_n, & n < m, \\ \delta_n, & n \geq m. \end{cases}$$

Rozšiřme podle Hahn-Banachovy věty každý z těchto funkcionálů se zachováním normy na celý prostor E (a označme stejně). Pro každé $m \in \mathbb{N}$ a $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je díky (4.1)

$$|x_m^*(x)| \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i||x_m^*(x_i)| = \sum_{i=1}^k |\lambda_i|\delta_i \overset{(4.1)}{\leq} \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right\| = \|x\|,$$

tedy $\|x_m^*\| \leq 1$. Díky w^*-kompaktnosti B_{E^*} existuje w^*-hromadný bod posloupnosti (x_m^*), označme jej x^*. Ten zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ splňuje $x^*(x_n) = -\delta_n$. Položme

$$y^* = \left(\sum_{m=1}^\infty 2^{-m} x_m^* \right) - x^*.$$

Protože jak x^*, tak všechny x_m^*, $m \in \mathbb{N}$, mají normu nejvýše rovnu 1, je $\|y^*\| \leq 2$. Zároveň ale

$$\begin{aligned} \|y^*\| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} y^*(x_n) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left(\sum_{m=1}^\infty 2^{-m} x_m^*(x_n) \right) - x^*(x_n) \right) \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left(\sum_{m \leq n} 2^{-m} \delta_n - \sum_{m > n} 2^{-m} \delta_n \right) + \delta_n \right) \\ &= 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \delta_n = 2. \end{aligned}$$

Uvažme libovolný funkcionál $x^{**} \in \overline{B_E}^{w^*} = B_{E^{**}}$ takový, že $x^{**}(y^*) = \sup y^*(B_E) = \|y^*\| = 2$. Dokážeme, že $\operatorname{dist}(x^{**}, E) \geq 1$. Protože $x^{**}(y^*) = 2$, je díky způsobu, jakým je funkcionál y^* definován, nutně $x^{**}(x_m^*) = 1$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ a $x^{**}(x^*) = -1$. Nechť $x \in E$ je libovolný prvek. Snadno nahlédneme, že $|(x^{**} - x)(x^*)| \geq 1$ nebo $|(x^{**} - x)(x_m^*)| \geq 1$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. V opačném případě je totiž $|-1 - x^*(x)| = |(x^{**} - x)(x^*)| < 1$ a $|1 - x_m^*(x)| = |(x^{**} - x)(x_m^*)| < 1$, $m \in \mathbb{N}$, neboli $x^*(x) < 0$, zatímco $x_m^*(x) > 0$ pro každé $m \in \mathbb{N}$, což je spor s tím, že x^* je w^*-hromadný bod posloupnosti (x_m^*). Dostáváme tak

$$\|x^{**} - x\| \geq \sup\{(x^{**} - x)(z^*) : z^* \in \{x^*\} \cup \{x_m^* : m \in \mathbb{N}\}\} \geq 1.$$

Skutečně je tedy $\operatorname{dist}(x^{**}, E) \geq 1$, odkud vidíme, že $\operatorname{Ja}_E(B_E) \geq 1$. $\square$

Ukázali jsme, že věta 4.1 platí pro E obsahující asymptoticky izometrickou kopii ℓ^1. Důkaz pro E neobsahující asymptoticky izometrickou kopii ℓ^1 je složitější a žádá si zavedení dalších pojmů.

Definice 4.5. Nechť (x_n) je posloupnost v Banachově prostoru E. Řekneme, že posloupnost (b_n) v E je *normalizovanou blokovou posloupností posloupnosti* (x_n), jestliže existují po dvou disjunktní konečné množiny $F_n \subset \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, a posloupnost (a_i) v $\mathbb{R}$ splňující $\sum_{i \in F_n} |a_i| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $b_n = \sum_{i \in F_n} a_i x_i$.

Lemma 4.6. *Nechť (x_n) je omezená posloupnost v Banachově prostoru E, která je ekvivalentní kanonické bázi ℓ^1. Pak každá normalizovaná bloková posloupnost této posloupnosti je opět ekvivalentní kanonické bázi ℓ^1.*

Důkaz. Nechť (b_n) je normalizovaná bloková posloupnost posloupnosti (x_n), tj. $b_n = \sum_{i \in F_n} a_i x_i$, $n \in \mathbb{N}$, kde F_n, a_n splňují podmínky z předchozí definice. Díky podmínce $\sum_{i \in F_n} |a_i| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost (b_n) omezená (stejnou konstantou jako (x_n)). Je-li (λ_n) libovolná posloupnost reálných čísel, pak díky tomu, že posloupnost (x_n) je ekvivalentní kanonické bázi ℓ^1, dostáváme

$$\begin{aligned}\left\|\sum_n \lambda_n b_n\right\| &= \left\|\sum_n \lambda_n \left(\sum_{i \in F_n} a_i x_i\right)\right\| = \left\|\sum_n \sum_{i \in F_n} (\lambda_n a_i) x_i\right\| \\ &\geq C \sum_n \sum_{i \in F_n} |\lambda_n a_i| = C \sum_n |\lambda_n| \sum_{i \in F_n} |a_i| = C \sum_n |\lambda_n|.\end{aligned}$$

□

Definice 4.7. Nechť E je Banachův prostor. Duální jednotková koule B_{E^*} je *w^*-blokově kompaktní*, jestliže každá posloupnost v B_{E^*} má normalizovanou blokovou posloupnost, která je w^*-konvergentní.

Následující dvě věty, které jsou potřeba pro důkaz pomocného lemmatu 4.10, uvádíme bez důkazu. První z nich (věta 4.8) je dokázána v [9, Theorem 2]. Rosenthalovu větu 4.9 lze najít v [13].

Věta 4.8. *Jestliže E je Banachův prostor, který neobsahuje asymptoticky izometrickou kopii ℓ^1, pak B_{E^*} je w^*-blokově kompaktní.*

Věta 4.9 (Rosenthalova ℓ^1-věta)**.** *Nechť E je Banachův prostor a (x_n) je omezená posloupnost v E. Pokud žádná podposloupnost (x_n) není ekvivalentní kanonické bázi ℓ^1, pak existuje podposloupnost (x_n), která je slabě cauchyovská.*

Lemma 4.10. *Nechť E je nereflexivní Banachův prostor, který neobsahuje asymptoticky izometrickou kopii ℓ^1. Pak existuje posloupnost (x_n^*) v E^*, která w^*-konverguje k 0, ale není slabě konvergentní.*

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat, že existuje posloupnost (z_n^*) v E^* taková, že $z_n^* \xrightarrow{w^*} z^*$ pro nějaký ne nutně nulový prvek $z^* \in E^*$, ale (z_n^*) nekonverguje slabě. Hledanou posloupnost pak definujeme jako $x_n^* = z_n^* - z^*$, $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme pro spor, že každá w^*-konvergentní posloupnost v E^* je i slabě konvergentní.

Ukažme nejprve, že E^* neobsahuje kopii ℓ^1. V opačném případě existuje posloupnost v B_{E^*} ekvivalentní kanonické bázi ℓ^1, která má podle věty 4.8 w^*-konvergentní normalizovanou blokovou posloupnost. Ta je ale podle lemmatu 4.6 rovněž ekvivalentní kanonické bázi ℓ^1 a taková posloupnost nemůže konvergovat slabě, což je spor s předpokladem.

Uvažme libovolnou posloupnost v B_{E^*}. Protože X^* neobsahuje kopii ℓ^1, má tato posloupnost podle Rosenthalovy věty 4.9 slabě cauchyovskou podposloupnost. Ta je tím pádem i w^*-cauchyovská, a tedy w^*-konvergentní díky w^*-kompaktnosti B_{E^*}, čili je dle předpokladu je slabě konvergentní. Duální jednotková koule B_{E^*} je tak slabě sekvenciálně kompaktní, tedy slabě kompaktní podle Eberlein-Šmulianovy věty 1.8. Prostor E je proto reflexivní, což je spor s předpokladem lemmatu. $\square$

Lemma 4.11. *Nechť E je nereflexivní Banachův prostor, jenž neobsahuje asymptoticky izometrickou kopii ℓ^1. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje prvek $x_\varepsilon^{**} \in S_{E^{**}}$ a posloupnost (x_n^*) v B_{E^*} tak, že $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $x_\varepsilon^{**}(x_n^*) > 1-\varepsilon$.*

Důkaz. Volme $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle předešlého lemmatu 4.10 najdeme posloupnost (z_n^*) v B_{E^*} takovou, že $z_n^* \xrightarrow{w^*} 0$, ale (z_n^*) nekonverguje slabě. Případným přechodem k podposloupnosti můžeme zaručit existenci $z^{**} \in S_{E^{**}}$ a $\varepsilon_0 > 0$ takových, že $z^{**}(z_n^*) \geq \varepsilon_0 > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a(n) = \inf\{\|z^*\| : \ z^* \in \mathrm{co}\{z_k^* : \ k \geq n\}\}.$$

Zřejmě $\varepsilon_0 \leq a(n) \leq a(n+1) \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Položme

$$a = \lim_n a(n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} a(n).$$

Volme $\eta > 0$ dostatečně malé, aby $\frac{a-\eta}{a+\eta} > 1-\varepsilon$, a k němu $n_0 \in \mathbb{N}$ dostatečně velké, aby $a(n_0) > a-\eta$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nyní nalezněme prvek $y_n^* \in \mathrm{co}\{z_k^* : \ k \geq n_0+n\}$ splňující $\|y_n^*\| \leq a(n_0+n) + \eta \leq a + \eta$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n^* = \frac{y_n^*}{a+\eta} \in B_{E^*}$. Protože $z_n^* \xrightarrow{w^*} 0$, tak i $y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$, a tedy také $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. Kdykoli $x^* \in \mathrm{co}\{x_n^* :\ n \in \mathbb{N}\}$, pak $x^* \in \mathrm{co}\{\frac{z_k^*}{a+\eta} :\ k \geq n_0\}$, a tudíž

$$\|x^*\| \geq \frac{a(n_0)}{a+\eta} > \frac{a-\eta}{a+\eta}.$$

Je tedy $\mathrm{co}\{x_n^* :\ n \in \mathbb{N}\} \cap \frac{a-\eta}{a+\eta} B_{E^*} = \emptyset$ a Hahn-Banachova věta nám dává hledaný funkcionál $x_\varepsilon^{**} \in S_{E^{**}}$ takový, že $x_\varepsilon^{**}(x^*) \geq \frac{a-\eta}{a+\eta} > 1 - \varepsilon$ pro každý prvek $x^* \in \mathrm{co}\{x_n^* :\ n \in \mathbb{N}\}$. □

Vybaveni lemmaty můžeme nyní přistoupit k samotnému důkazu věty 4.1 pro prostor E neobsahující asymptoticky izometrickou kopii ℓ^1. Využijeme v něm Simonsovu rovnost 4.12, která je přímým důsledkem Simonsovy nerovnosti [12, Theorem 3].

Věta 4.12 (Simonsova rovnost)**.** *Nechť X je Banachův prostor, $K \subset X^*$ je konvexní w^*-kompaktní množina, $\mathcal{B} \subset K$ je Jamesova hranice K a (x_n) je posloupnost v B_X. Pak*

$$\sup_{b^* \in \mathcal{B}} \limsup_{n \to \infty} b^*(x_n) = \sup_{x^* \in K} \limsup_{n \to \infty} x^*(x_n).$$

Tvrzení 4.13. *Buď E nereflexivní Banachův prostor, který neobsahuje asymptoticky izometrickou kopii ℓ^1. Pak $\mathrm{Ja}_E(B_E) \geq 1$.*

Důkaz. Volme libovolné $\varepsilon > 0$. Nechť (x_n^*) je posloupnost v B_{E^*} z lemmatu 4.11, která w^*-konverguje k 0. Nechť B je Jamesova hranice $B_{E^{**}}$. Simonsova rovnost 4.12 aplikovaná na $X = E^*$, $K = B_{E^{**}}$ a $\mathcal{B} = B$ dává

$$\sup_{b^{**} \in B} \limsup_{n \to \infty} b^{**}(x_n^*) = \sup_{x^{**} \in B_{E^{**}}} \limsup_{n \to \infty} x^{**}(x_n^*). \tag{4.2}$$

Z lemmatu 4.11 máme funkcionál $x_\varepsilon^{**} \in S_{E^{**}}$ takový, že $x_\varepsilon^{**}(x_n^*) > 1 - \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, tedy pro pravou, potažmo levou stranu rovnosti (4.2) platí

$$\sup_{x^{**} \in B_{E^{**}}} \limsup_{n \to \infty} x^{**}(x_n^*) \geq \limsup_{n \to \infty} x_\varepsilon^{**}(x_n^*) \geq 1 - \varepsilon.$$

Můžeme proto najít prvek $b^{**} \in B$ takový, že $\limsup_{n \to \infty} b^{**}(x_n^*) > 1 - 2\varepsilon$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $b^{**}(x_n^*) > 1 - 2\varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jinak přejdeme k podposloupnosti. Nechť $x^{***} \in B_{E^{***}}$ je w^*-hromadný bod posloupnosti (x_n^*) v E^{***}. Pak $x^{***}(b^{**}) \geq 1 - 2\varepsilon$ a $x^{***}(x) = 0$ pro všechna $x \in E$, neboť $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. Kdykoli je nyní $x \in E$, platí $\|b^{**} - x\| \geq x^{***}(b^{**} - x) = x^{***}(b^{**}) \geq 1 - 2\varepsilon$, tedy $\mathrm{dist}(b^{**}, E) \geq 1 - 2\varepsilon$. Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je $\hat{\mathrm{d}}(B, E) \geq 1$. Protože $\mathrm{Ja}_E(B_E) = \inf\{\hat{\mathrm{d}}(B, E) :\ B \subset B_{E^{**}}$ je Jamesova hranice $B_{E^{**}}\}$ a pro libovolnou Jamesovu hranici B množiny $B_{E^{**}}$ máme $\hat{\mathrm{d}}(B, E) \geq 1$, je $\mathrm{Ja}_E(B_E) \geq 1$. □

5 Případ prostorů s w^*-andělskou duální jednotkovou koulí

Splňuje-li Banachův prostor E, v němž měříme slabou nekompaktnost omezených množin, nějaké další podmínky, mohou některé nerovnosti ve větě 2.1 přejít v rovnosti. To je i případ Banachových prostorů s w^*-andělskou duální jednotkovou koulí, kterému se věnuje tato kapitola, především pak věta 5.8. Ve speciálním případě, kdy $E = c_0(\Gamma)$, se pro omezenou množinu $H \subset E$ dokonce všechny kvantity rovnají, což ukazuje věta 5.11.

Věta 5.2 je částečně dokázána v [3, Theorem 6.1], důkaz věty 5.8 vychází z [4, Proposition 14(ii)]. Věta 5.11 je dokázána podle [3, Theorem 6.2].

Definice 5.1. Pro E Banachův prostor a $H \subset E$ omezenou definujeme

$$\begin{aligned}
\gamma_0(H) &= \sup\{|\lim_m \lim_n x_m^*(x_n)| : \ (x_n) \text{ posloupnost v } H,\ (x_m^*) \\
&\qquad\qquad \text{posloupnost v } B_{E^*},\ x_m^* \xrightarrow{w^*} 0 \ \ \& \ \text{ uvedené limity existují}\},\\
\gamma_{\mathrm{co}}(H) &= \sup\{\lim_m \lim_n x_m^*(x_n) - \sup x^*(H) : \ (x_n) \text{ posloupnost v } H,\ (x_m^*) \\
&\qquad\qquad \text{posloupnost v } B_{E^*},\ x_m^* \xrightarrow{w^*} x^* \ \ \& \ \text{ uvedené limity existují}\},\\
\gamma_{\mathrm{aco}}(H) &= \sup\{\lim_m \lim_n x_m^*(x_n) - \sup |x^*|(H) : \ (x_n) \text{ posloupnost v } H,\ (x_m^*) \\
&\qquad\qquad \text{posloupnost v } B_{E^*},\ x_m^* \xrightarrow{w^*} x^* \ \ \& \ \text{ uvedené limity existují}\}.
\end{aligned}$$

Věta 5.2. *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pak*

$$\begin{aligned}
\gamma_0(H) &\le \mathrm{Ja}_E(H),\\
\gamma_{\mathrm{aco}}(H) &\le \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H),\\
\gamma_{\mathrm{co}}(H) &\le \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H).
\end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz provedeme obdobně jako důkaz věty 2.5. Předpokládejme, že $\gamma_0(H)$, resp. $\gamma_{\mathrm{aco}}(H)$, resp. $\gamma_{\mathrm{co}}(H) > r$. Na E^* definujeme sublineární funkcionál p předpisem

$$p(f) = \sup f(H), \quad f \in E^*.$$

Podle definice $\gamma_0(H)$, resp. $\gamma_{\mathrm{aco}}(H)$, resp. $\gamma_{\mathrm{co}}(H)$ nalezneme posloupnost (x_i^*) v B_{E^*} splňující $x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$ (v případě, že dokazujeme $\gamma_0(H) \le \mathrm{Ja}_E(H)$, je $x^* = 0$) a posloupnost (x_j) v H tak, že $\lim_i \lim_j x_i^*(x_j) - \xi > r$, kde

$$\xi = \begin{cases} 0, & \text{dokazujeme-li } \gamma_0(H) \le \mathrm{Ja}_E(H),\\ \sup |x^*|(H), & \text{dokazujeme-li } \gamma_{\mathrm{aco}}(H) \le \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H),\\ \sup x^*(H), & \text{dokazujeme-li } \gamma_{\mathrm{co}}(H) \le \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H). \end{cases}$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $\lim_j x_k^*(x_j) - \xi > r$ neboli existuje $j_k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$x_k^*(x_j) > \xi + r, \quad j \geq j_k. \tag{5.1}$$

Definujme $K_n = \operatorname{co}\{x_i^* : i \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Uvažme libovolný funkcionál $f \in K_1$, tj. $f = \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k x_k^*$, kde $\lambda_k \geq 0$ pro $k = 1, \ldots, k_0$ a $\sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k = 1$, a nechť $j \geq \max\{j_1, \ldots, j_{k_0}\}$. Pak

$$p(f) \geq f(x_j) = \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k (x_k^*(x_j)) \overset{(5.1)}{>} \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k (\xi + r) = \xi + r. \tag{5.2}$$

Zvolme $r' < r$ libovolné. Podobně jako v důkazu věty 2.5 dokážeme nyní pomocí lemmatu 2.7 obdobu lemmatu 2.8.

Lemma 5.3. *Nechť (β_n) je posloupnost kladných reálných čísel. Pak existuje posloupnost (g_n) takových funkcionálů, že $g_n \in K_n$, $n \in \mathbb{N}$, a platí*

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i\right) > \beta_n(\xi + r') + p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i g_i\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Důkaz. Stejně jako v lemmatu 2.8 zkonstruujeme posloupnost (g_n) indukcí. Je-li $n = 1$, aplikujeme lemma 2.7 na sublineární funkcionál p, $Y = E^*$, $u = 0$, $\beta = \beta_1$, $\beta' = \beta_2$, $\rho = \xi + r'$ a $C = K_1$. Z (5.2) dostáváme

$$\inf_{g \in C} p(u + \beta g) = \beta_1 \inf_{g \in K_1} p(g) \overset{(5.2)}{\geq} \beta_1(\xi + r) > \beta_1(\xi + r') = \beta\rho + p(u),$$

předpoklad lemmatu 2.7 je tedy splněn. Existuje tudíž funkcionál $g_1 \in K_1$ splňující

$$\inf_{g \in K_1} p(\beta_1 g_1 + \beta_2 g) > \beta_2(\xi + r') + p(\beta_1 g_1).$$

Předpokládejme, že jsme již pro nějaké přirozené $n \geq 2$ zkonstruovali funkcionály $g_i \in K_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, pro které platí

$$\inf_{g \in K_{n-1}} p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i g_i + \beta_n g\right) > \beta_n(\xi + r') + p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i g_i\right).$$

Opět použijeme lemma 2.7, tentokrát pro sublineární funkcionál p, $Y = E^*$, $u = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i g_i$, $\beta = \beta_n$, $\beta' = \beta_{n+1}$, $\rho = \xi + r'$ a $C = K_n$. Protože $K_n \subset K_{n-1}$, dostáváme z indukčního předpokladu

$$\inf_{g \in C} p(u + \beta g) \geq \inf_{g \in K_{n-1}} p(u + \beta g) > \beta\rho + p(u).$$

Podle lemmatu 2.7 tedy existuje funkcionál $g_n \in K_n$ takový, že

$$\begin{aligned}\inf_{g\in K_n} p\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i g_i + \beta_{n+1}\, g\right) &= \inf_{g\in K_n} p\left(\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i g_i + \beta_n g_n + \beta_{n+1}\, g\right)\\ &> \beta_{n+1}(\xi + r') + p\left(\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i g_i + \beta_n g_n\right)\\ &= \beta_{n+1}(\xi + r') + p\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i g_i\right).\end{aligned}$$

Tím je naše konstrukce u konce. Pro každé přirozené n s využitím toho, že $g_n \in K_n \subset K_{n-1}$ (je-li $K_0 = K_1$), dostáváme

$$p\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i g_i\right) \geq \inf_{g\in K_{n-1}} p\left(\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i g_i + \beta_n g\right) > \beta_n(\xi + r') + p\left(\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i g_i\right).$$

Zkonstruovaná posloupnost (g_n) tedy skutečně splňuje podmínku (5.3) a lemma je tím dokázáno.

Volme (β_n) posloupnost kladných čísel splňujících podmínku (2.10) jako v důkazu věty 2.5. Právě dokázané lemma 5.3 nám dává posloupnost (g_n) takovou, že $g_n \in K_n \subset B_{E^*}$ a platí vztah (5.3). Definujme funkcionál $g = \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i g_i \in E^*$ a uvažme libovolný prvek $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$, pro který $x^{**}(g) = \sup g(H) = p(g)$. Pak analogickým výpočtem jako v důkazu věty 2.5 s tím rozdílem, že vynecháváme g_0, místo r' píšeme $\xi + r'$ a místo vztahu (2.12) v závěru použijeme (5.3), dostaneme

$$\liminf_n x^{**}(g_n) \geq \xi + r'. \tag{5.4}$$

Protože $x_i^* \stackrel{w^*}{\to} x^*$, tak rovněž $g_n \stackrel{w^*}{\to} x^*$. Dokazujeme-li $\gamma_0(H) \leq \mathrm{Ja}_E(H)$, volme libovolné $x \in E$. V tomto případě $\xi = 0$, $x^* = 0$ a z (5.4) dostáváme

$$\begin{aligned} r' &\leq \liminf_n x^{**}(g_n) = \liminf_n x^{**}(g_n) - \lim_n g_n(x)\\ &= \liminf_n\,(x^{**} - x)(g_n) \leq \|x^{**} - x\|.\end{aligned}$$

Pakliže dokazujeme $\gamma_{\mathrm{aco}}(H) \leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H)$, volme libovolné $x \in \operatorname{aco} H$. Protože je zde $\xi = \sup |x^*|(H) = \sup x^*(\operatorname{aco} H)$, dostáváme z (5.4)

$$\begin{aligned} r' &\leq \liminf_n x^{**}(g_n) - \sup x^*(\operatorname{aco} H) \leq \liminf_n x^{**}(g_n) - x^*(x)\\ &= \liminf_n x^{**}(g_n) - \lim_n g_n(x) = \liminf_n\,(x^{**} - x)(g_n) \leq \|x^{**} - x\|.\end{aligned}$$

Dokazujeme-li $\gamma_{\mathrm{co}}(H) \leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H)$, volme libovolné $x \in \operatorname{co} H$. Jelikož je v tomto případě $\xi = \sup x^*(H) = \sup x^*(\operatorname{co} H)$, vztah (5.4) dává

$$\begin{aligned} r' &\leq \liminf_n x^{**}(g_n) - \sup x^*(\operatorname{co} H) \leq \liminf_n x^{**}(g_n) - x^*(x) \\ &= \liminf_n x^{**}(g_n) - \lim_n g_n(x) = \liminf_n (x^{**} - x)(g_n) \leq \|x^{**} - x\|. \end{aligned}$$

Odtud $\mathrm{Ja}_E(H)$, resp. $\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H)$, resp. $\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) \geq r'$, a protože jsme $r' < r < \gamma_0(H)$, resp. $\gamma_{\mathrm{aco}}(H)$, resp. $\gamma_{\mathrm{co}}(H)$ volili libovolně, platí kýžené nerovnosti. □

Definice 5.4. Topologický prostor X je *andělský*, jestliže platí, že je-li $A \subset X$ relativně spočetně kompaktní, pak A je relativně kompaktní a pro každý prvek $x \in \overline{A}$ existuje posloupnost (x_n) v A taková, že $x_n \to x$.

Poznámka 5.5. V kompaktních prostorech je každá množina relativně kompaktní, definice andělskosti se proto v tomto případě zjednoduší: Kompaktní prostor X je andělský, jestliže platí, že kdykoli $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak existuje posloupnost (x_n) v A taková, že $x_n \to x$.

Lemma 5.6. *Nechť X je kompaktní andělský prostor, Y je topologický prostor a $f\colon X \to Y$ je spojité. Pak $f(X) \subset Y$ je opět kompaktní andělský prostor.*

Důkaz. Zřejmě $f(X)$ je kompaktní. Nechť $A \subset f(X)$ je libovolná množina. Pak ze spojitosti f máme $f(\overline{f^{-1}(A)}) \subset \overline{A}$. Ale $f(\overline{f^{-1}(A)})$ je kompaktní, a tedy uzavřená a obsahuje A. Odtud $f(\overline{f^{-1}(A)}) = \overline{A}$. Uvažme nyní $y \in \overline{A}$. Existuje $x \in \overline{f^{-1}(A)}$ tak, že $f(x) = y$. Díky andělskosti X existuje posloupnost (x_n) v $f^{-1}(A)$ taková, že $x_n \to x$. Pak $(f(x_n))$ je posloupnost v A a $f(x_n) \to f(x) = y$, tedy $f(X)$ je andělský. □

Důsledek 5.7. *Nechť X je Banachův prostor, jehož duální jednotková koule B_{E^*} je w^*-andělská, a nechť Y je podprostor X. Pak B_{Y^*} je také w^*-andělská.*

Důkaz. Koule B_{Y^*} je zřejmě obrazem koule B_{X^*} při w^*-w^* spojitém zobrazení $x^* \in B_{X^*} \mapsto x^*|_Y \in Y^*$, a je tedy w^*-andělská podle předchozího lemmatu 5.6. □

Věta 5.8. *Nechť E je Banachův prostor, pro nějž je prostor (B_{E^*}, w^*) andělský, a $H \subset E$ je omezená. Pak*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) & \leq & \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) & \leq & \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) & \leq & \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) \leq \gamma(H) \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| \\
 & & \mathrm{ck}_E(H) & \leq & \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) & \leq & \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) & \leq & \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| \\
\frac{1}{2}\gamma(H) & \leq & \mathrm{Ja}_E(H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) \\
 & & \| & & & & \| & & \| \\
 & & \gamma_0(H) & & & & \gamma_{\mathrm{aco}}(H) & & \gamma_{\mathrm{co}}(H)\,.
\end{array}$$

Důkaz. Ve větě 5.2 jsme dokázali, že $\gamma_0(H) \leq \mathrm{Ja}_E(H)$, $\gamma_{\mathrm{aco}}(H) \leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H)$ a $\gamma_{\mathrm{co}}(H) \leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H)$. Když ukážeme, že $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq \gamma_0(H)$, $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \leq \gamma_{\mathrm{aco}}(H)$ a $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) \leq \gamma_{\mathrm{co}}(H)$, vyplyne pak zbytek z věty 2.1 a z toho, že koule $B_{(\overline{\operatorname{span} H})^*}$ je w^*-andělská podle předchozího důsledku 5.7. Označme

$$M = \begin{cases} E, & \text{dokazujeme-li } \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq \gamma_0(H), \\ \operatorname{aco} H, & \text{dokazujeme-li } \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \leq \gamma_{\mathrm{aco}}(H), \\ \operatorname{co} H, & \text{dokazujeme-li } \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) \leq \gamma_{\mathrm{co}}(H). \end{cases}$$

Volme libovolné $0 < \varepsilon < \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, M)$. Z definice $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, M)$ existuje prvek $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$ takový, že $\operatorname{dist}(x^{**}, M) > \varepsilon$. Podle Hahn-Banachovy věty nalezneme $x^{***} \in S_{E^{***}}$ a $r \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$x^{***}(x^{**}) > r + \varepsilon > r > \sup x^{***}(M).$$

Buď $C = \{x^* \in B_{E^*} : \ x^{**}(x^*) > r + \varepsilon\}$. Podle Goldstinovy věty $x^{***} \in \overline{C}^{(E^{***}, w^*)}$, a tedy $x^{***}|_E \in \overline{C}^{(E^*, w^*)}$. Protože (B_{E^*}, w^*) je andělský, existuje posloupnost (x^*_m) v C taková, že $x^*_m \xrightarrow{w^*} x^{***}|_E$. Přechodem k podposloupnosti můžeme navíc zařídit, že $(x^{**}(x^*_m))_m$ konverguje. Nechť (x_n) je posloupnost v H, která v E^{**} bodově konverguje k x^{**} na množině $\{x^*_m : \ m \in \mathbb{N}\}$.

V případě, že dokazujeme $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq \gamma_0(H)$, je $M = E$ a zřejmě tedy $r = 0$. Proto platí

$$\gamma_0(H) \geq \lim_m \lim_n x^*_m(x_n) = \lim_m x^{**}(x_m) \geq r + \varepsilon = \varepsilon$$

a díky tomu, že $0 < \varepsilon < \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E)$ bylo libovolné, dostáváme $\gamma_0(H) \geq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E)$.

Jestliže dokazujeme $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \leq \gamma_{\mathrm{aco}}(H)$, pak $M = \operatorname{aco} H$, tedy $\sup |x^{***}|(H) = \sup x^{***}(\operatorname{aco} H) = \sup x^{***}(M)$ a dostáváme tak

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathrm{aco}}(H) &\geq \lim_m \lim_n x^*_m(x_n) - \sup |x^{***}|(H) \\ &= \lim_m \lim_n x^*_m(x_n) - \sup x^{***}(M) \\ &> (r + \varepsilon) - r = \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud stejně jako v předchozím případě plyne $\gamma_{\mathrm{aco}}(H) \geq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H)$.

Podobně když dokazujeme $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) \leq \gamma_{\mathrm{co}}(H)$, je $M = \operatorname{co} H$ a platí $\sup x^{***}(H) = \sup x^{***}(\operatorname{co} H) = \sup x^{***}(M)$. Proto je

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathrm{co}}(H) &\geq \lim_m \lim_n x^*_m(x_n) - \sup x^{***}(H) \\ &= \lim_m \lim_n x^*_m(x_n) - \sup x^{***}(M) \\ &> (r + \varepsilon) - r = \varepsilon, \end{aligned}$$

odkud plyne $\gamma_{\mathrm{co}}(H) \geq \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H)$. □

Speciálním případem Banachových prostorů s w^*-andělskou duální jednotkovou koulí jsou separabilní Banachovy prostory, neboť jejich duální jednotková koule s w^* topologií je metrizovatelná. Jelikož prostory v příkladech 3.1, 3.2, 3.3, 3.5 a 3.6 jsou separabilní, ukazují tyto příklady, že libovolná z nerovností ve větě 5.8 může být ostrá.

Tvrzení 5.9. *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Je-li H separabilní, pak*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) &= \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H), \\ \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) &= \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H), \\ \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) &= \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H). \end{aligned}$$

Důkaz. Díky separabilitě H je také $\overline{\operatorname{span} H}$ separabilní, duální jednotková koule $B_{\left(\overline{\operatorname{span} H}\right)^*}$ je proto w^*-andělská. Nyní stačí použít větu 5.8 a fakt, že kvantity, kterých se tvrzení týká, nezávisí na Banachově prostoru, v němž množinu H uvažujeme (tvrzení 1.20). □

Poznámka 5.10. Příklad 3.7, v němž jsme našli omezenou množinu H v Banachově prostoru E, pro kterou $\mathrm{Ja}_E(H) < \mathrm{ck}_E(H)$, nelze použít k důkazu toho, že i některá z nerovností $\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) \le \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H)$, $\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) \le \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H)$ nebo $\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) \le \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H)$ může být ostrá. Ve zmíněném příkladu je totiž H separabilní, a tedy $\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H)$, $\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H)$ a $\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H)$ podle předchozího tvrzení 5.9.

Věta 5.11. *Nechť Γ je libovolná množina a $E = c_0(\Gamma)$. Pak*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) = \gamma(H) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \mathrm{ck}_E(H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \gamma_0(H) & = & \mathrm{Ja}_E(H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H). \end{array}$$

Důkaz. Ve větě 5.2 jsme dokázali, že $\gamma_0(H) \le \mathrm{Ja}_E(H)$. S ohledem na větu 2.1 tedy stačí ukázat, že $\gamma(H) \le \gamma_0(H)$. Pokud $\gamma(H) = 0$, jsme hotovi. Předpokládejme tedy, že $\gamma(H) > 0$, a volme libovolné $0 < r < \gamma(H)$. Z definice $\gamma(H)$ najdeme posloupnosti (x_m) v H a (x_n^*) v $B_{\ell^1(\Gamma)} \cong B_{E^*}$ a $\eta > 0$ tak, že

$$\lim_n \lim_m \langle x_n^*, x_m \rangle - \lim_m \lim_n \langle x_n^*, x_m \rangle > r(1 + \eta).$$

Množina $B_{\ell^1(\Gamma)}$ je τ_p-sekvenciálně kompaktní, neboť prvky $\ell^1(\Gamma)$ mají spočetné nosiče a sjednocení nosičů prvků nějaké posloupnosti v $\ell^1(\Gamma)$ je tedy také spočetné.

Jelikož w^* topologie splývá na omezených množinách v $\ell^1(\Gamma)$ s topologií bodové konvergence, je $B_{\ell^1(\Gamma)}$ také w^*-sekvenciálně kompaktní. Můžeme tedy předpokládat, že (x_n^*) w^*-konverguje k nějakému prvku $x^* \in B_{\ell^1(\Gamma)}$, jinak přejdeme k podposloupnosti. Pak platí

$$\lim_n \lim_m \langle x_n^* - x^*, x_m \rangle > r(1+\eta).$$

Dokážeme nyní, že $\limsup_n \|x_n^* - x^*\| \leq 1$. Předpokládejme pro spor, že tomu tak není. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\|x_n^* - x^*\| \geq 1+\delta$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a nějaké $\delta > 0$, jinak opět přejdeme k podposloupnosti. Pro x^* jakožto prvek $\ell^1(\Gamma)$ najdeme konečnou množinu $K \subset \Gamma$ tak, aby

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} |x^*(\gamma)| < \frac{\delta}{2}.$$

Protože $x_n^* \xrightarrow{\tau_p} x^*$, můžeme najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$\sum_{\gamma \in K} |x_n^*(\gamma) - x^*(\gamma)| < \frac{\delta}{2}.$$

Pro libovolné $n \geq n_0$ je potom

$$\begin{aligned}
\|x_n^*\| \geq \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} |x_n^*(\gamma)| &\geq \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} |x_n^*(\gamma) - x^*(\gamma)| - \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} |x^*(\gamma)| \\
&= \|x_n^* - x^*\| - \sum_{\gamma \in K} |x_n^*(\gamma) - x^*(\gamma)| - \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} |x^*(\gamma)| \\
&> 1 + \delta - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = 1,
\end{aligned}$$

což je spor.

Případným zkrácením posloupnosti (x_n^*) o konečně mnoho členů tedy můžeme dosáhnout toho, že $\|x_n^* - x^*\| < 1 + \eta$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Položme nyní

$$y_n^* = \frac{x_n^* - x^*}{1+\eta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě $y_n^* \in B_{\ell^1(\Gamma)} \cong B_{E^*}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ a

$$\lim_n \lim_m \langle y_n^*, x_m \rangle > r.$$

Proto je $\gamma_0(H) > r$ a díky tomu, že $r < \gamma(H)$ bylo voleno libovolně, dostáváme $\gamma_0(H) \geq \gamma(H)$. $\square$

6 Vztah kvantit ke konvexním a absolutně konvexním obalům

Tato kapitola si klade za cíl prozkoumat, jak se změní definované míry slabé nekompaktnosti, pokud místo zkoumané množiny uvážíme její konvexní nebo absolutně konvexní obal. Věta 6.2, kterou dokážeme na úvod, ukazuje, že hodnota kvantity „γ“ se tím nezmění. Jejími důsledky jsou pak tvrzení 6.3, 6.4 6.6, 6.7 a 6.8, která popisují, jak se v tomto ohledu chovají ostatní kvantity. Tato věta a zmíněná tvrzení se dají chápat jako kvantitativní verze Krejnovy věty, která říká, že uzavřený absolutně konvexní obal slabě kompaktní podmnožiny Banachova prostoru je slabě kompaktní.

Závěr kapitoly se věnuje případu, kdy se pohybujeme na Banachově prostoru s w^*-andělskou duální jednotkovou koulí. Pak totiž při přechodu ke konvexnímu obalu zkoumané množiny nezmění hodnotu dokonce žádná z definovaných kvantit a většina ani při přechodu k absolutně konvexnímu obalu. To je obsahem věty 6.11.

Obecný případ

Pro potřeby dalších tvrzení zavedeme následující značení: Označme

$$C(\mathbb{N}) = \{\varphi : \mathbb{N} \to [0,1] : \ \operatorname{supp}\varphi \text{ je konečný}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(n) = 1\},$$

kde $\operatorname{supp}\varphi = \{n \in \mathbb{N} : \ \varphi(n) \neq 0\}$ je nosič φ. Pro $M \subset \mathbb{N}$ budeme značit

$$C(M) = \{\varphi \in C(\mathbb{N}) : \ \operatorname{supp}\varphi \subset M\}.$$

Je-li navíc $\mathcal{G}$ nějaký soubor konečných podmnožin $\mathbb{N}$ a $\varepsilon > 0$, označme

$$C(M, \mathcal{G}, \varepsilon) = \{\varphi \in C(M) : \ \forall G \in \mathcal{G} \quad \sum_{n\in G} \varphi(n) < \varepsilon\}.$$

Následující lemma 6.1, jež uvádíme bez důkazu, pochází z [11]. Bezprostředně navazující věta 6.2, která jej používá, je dokázána podle [4, Theorem 13].

Lemma 6.1 (Pták)**.** *Nechť $\mathcal{G}$ je nějaký soubor konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) Existuje ostře rostoucí posloupnost $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots$ konečných podmnožin $\mathbb{N}$ a posloupnost (G_n) v $\mathcal{G}$ tak, že $A_n \subset G_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Existuje nekonečná množina $M \subset \mathbb{N}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $C(M, \mathcal{G}, \varepsilon) = \emptyset$.

Věta 6.2. *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pak*

$$\gamma(H) = \gamma(\operatorname{co} H) = \gamma(\operatorname{aco} H).$$

Důkaz. Nerovnosti $\gamma(H) \leq \gamma(\operatorname{co} H) \leq \gamma(\operatorname{aco} H)$ jsou triviální. Dokážeme, že $\gamma(\operatorname{aco} H) \leq \gamma(H)$. Je-li $\gamma(\operatorname{aco} H) = 0$, platí tato nerovnost triviálně. Předpokládejme, že $\gamma(\operatorname{aco} H) > 0$ a volme libovolné $0 < r < \gamma(\operatorname{aco} H)$. Z definice $\gamma(\operatorname{aco} H)$ nalezněme posloupnosti (x_n) v $\operatorname{aco} H$ a (x_m^*) v B_{E^*} takové, že

$$\lim_m \lim_n x_m^*(x_n) - \lim_n \lim_m x_m^*(x_n) > r.$$

Snadno nalezneme $D \subset H$ spočetnou, jež splňuje $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \operatorname{aco} D$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že (x_m^*) bodově konverguje na D, jinak přejdeme k vhodné podposloupnosti. Nechť $x^* \in B_{E^*}$ je w^*-hromadný bod posloupnosti (x_m^*), ten jistě existuje díky w^*-kompaktnosti B_{E^*}. Potom

$$r < \lim_m \lim_n x_m^*(x_n) - \lim_n \lim_m x_m^*(x_n) = \lim_m \lim_n x_m^*(x_n) - \lim_n x^*(x_n).$$

Bez újmy na obecnosti dále

$$\lim_n x_m^*(x_n) - \lim_n x^*(x_n) > r, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6.1}$$

jinak stačí posloupnost (x_m^*) zkrátit o konečně mnoho členů.

Volme $0 < r' < r$ libovolné. Pro $y \in D$ definujme

$$\Gamma(y) = \{m \in \mathbb{N} : \ |(x_m^* - x^*)(y)| \geq r'\}.$$

Buď $\mathcal{G} = \{\Gamma(y) : \ y \in D\}$. Protože (x_m^*) na D bodově konverguje k x^*, je $\mathcal{G}$ soubor konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Označme $\mu = \sup\{\|x\| : \ x \in H\}$ a volme $\varepsilon > 0$ dostatečně malé, aby $2\varepsilon\mu + r' < r$. Dokážeme, že $C(\mathbb{N}, \mathcal{G}, \varepsilon) = \emptyset$.

Předpokládejme pro spor, že existuje $\varphi \in C(\mathbb{N}, \mathcal{G}, \varepsilon)$. Platí tedy

$$\sum_{m \in \Gamma(y)} \varphi(m) < \varepsilon, \quad y \in D.$$

Definujme funkcionál

$$z^* = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varphi(m)(x_m^* - x^*).$$

Pak pro $y \in D$ máme

$$
\begin{aligned}
|z^*(y)| &= \left| \sum_{m\in\mathbb{N}} \varphi(m)(x_m^* - x^*)(y) \right| \\
&\le \sum_{m\in\Gamma(y)} \varphi(m)\,|(x_m^* - x^*)(y)| + \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\Gamma(y)} \varphi(m)\,|(x_m^* - x^*)(y)| \\
&\le \sum_{m\in\Gamma(y)} \varphi(m)\|x_m^* - x^*\|\|y\| + \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\Gamma(y)} \varphi(m)\,|(x_m^* - x^*)(y)| \\
&< \sum_{m\in\Gamma(y)} \varphi(m)\cdot 2\mu + \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\Gamma(y)} \varphi(m) r' \\
&\le 2\varepsilon\mu + r' < r.
\end{aligned}
$$

Odtud $|z^*(x_n)| < r$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Na druhou stranu díky (6.1) musí platit

$$\lim_n z^*(x_n) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \varphi(m) \lim_n (x_m^* - x^*)(x_n) > r,$$

což je spor.

Protože $C(\mathbb{N}, \mathcal{G}, \varepsilon) = \emptyset$, můžeme podle předchozího lemmatu 6.1 najít množiny $A_n = \{m_1, m_2, \dots, m_n\} \subset \mathbb{N}$ a prvky $y_n \in D \subset H$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $A_n \subset \Gamma(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, neboli

$$|(x_{m_k}^* - x^*)(y_n)| \ge r', \quad n \in \mathbb{N},\ k = 1, \dots, n.$$

Bez újmy na obecnosti je $(m_k)_k$ rostoucí posloupnost indexů a $(x_{m_k}^*)_k$ je tedy podposloupnost vybraná z posloupnosti (x_m^*). Dále můžeme předpokládat, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $\lim_n (x_{m_k}^* - x^*)(y_n)$, jinak nahradíme (y_n) vhodnou podposloupností, a dále že existuje $\lim_k \lim_n (x_{m_k}^* - x^*)(y_n)$, jinak přejdeme ještě k podposloupnosti $(x_{m_k}^*)_k$. Potom

$$
\begin{aligned}
|\lim_k \lim_n x_{m_k}^*(y_n) - \lim_n \lim_k x_{m_k}^*(y_n)| &= |\lim_k \lim_n x_{m_k}^*(y_n) - \lim_n x^*(y_n)| \\
&= \lim_k \lim_n |(x_{m_k}^* - x^*)(y_n)| \ge r'.
\end{aligned}
$$

Dostáváme tedy $\gamma(H) \ge r'$, a protože jsme $r' < r < \gamma(\operatorname{aco} H)$ volili libovolně, je $\gamma(H) \ge \gamma(\operatorname{aco} H)$. □

Tvrzení 6.3. *Nechť E je Banachův prostor a $k(M)$ ať značí libovolnou z kvantit $\hat{\mathrm{d}}(\overline{M}^{w^*}, E)$, $\hat{\mathrm{d}}(\overline{M}^{w^*}, \operatorname{span} M)$, $\hat{\mathrm{d}}(\overline{M}^{w^*}, \operatorname{aco} M)$ pro omezené množiny $M \subset E$. Pak je-li $H \subset E$ omezená, platí*

$$k(H) \le k(\operatorname{co} H) = k(\operatorname{aco} H) \le 2k(H).$$

Důkaz. První nerovnost plyne přímo z definic uvažovaných kvantit. Poslední je důsledkem předchozí věty 6.2 a věty 2.1, vskutku

$$k(\operatorname{aco} H) \overset{2.1}{\leq} \gamma(\operatorname{aco} H) \overset{6.2}{=} \gamma(H) \overset{2.1}{\leq} 2k(H).$$

Rovnost $k(\operatorname{co} H) = k(\operatorname{aco} H)$ snadno nahlédneme, pokud si uvědomíme, že $\operatorname{aco} H = \operatorname{co}(\operatorname{co} H \cup \operatorname{co}(-H))$. Nechť

$$M = \begin{cases} E, & \text{dokazujeme-li } \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, E) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, E), \\ \operatorname{span} H, & \text{dokazujeme-li } \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{span}(\operatorname{co} H)) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{span}(\operatorname{aco} H)), \\ \operatorname{aco} H, & \text{dokazujeme-li } \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{aco}(\operatorname{co} H)) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{aco}(\operatorname{aco} H)). \end{cases}$$

Protože $\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, M) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co}(-H)}^{w^*}, M)$, platí

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*} \cup \overline{\operatorname{co}(-H)}^{w^*}, M) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, M).$$

Množiny $\operatorname{co} H$, $\operatorname{co}(-H)$ jsou konvexní a relativně w^*-kompaktní, tedy

$$\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*} = \overline{\operatorname{co}(\operatorname{co} H \cup \operatorname{co}(-H))}^{w^*} = \operatorname{co}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*} \cup \overline{\operatorname{co}(-H)}^{w^*}).$$

Odtud díky tomu, že M je absolutně konvexní, dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, M) &= \hat{\mathrm{d}}(\operatorname{co}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*} \cup \overline{\operatorname{co}(-H)}^{w^*}), M) \\ &= \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*} \cup \overline{\operatorname{co}(-H)}^{w^*}, M) \\ &= \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, M), \end{aligned}$$

což je přesně ta rovnost, kterou jsme ve všech třech případech potřebovali dokázat. □

V právě dokázaném tvrzení může zřejmě pro nějakou slabě nekompaktní množinu H na místě první nerovnosti nastat rovnost, například když H je konvexní množina, třeba ta z příkladu 3.2. V případě, kdy $k(M)$ je $\hat{\mathrm{d}}(\overline{M}^{w^*}, E)$, může i druhá nerovnost v tvrzení 6.3 přejít v rovnost, přičemž první nerovnost je potom ostrá. To ukážeme v příkladu 6.5 (i analogii pro kvantitu „ck_E“, kterou se zabývá následující tvrzení 6.4). Není však známo, jestli mohou být ostré také nerovnosti

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{span}(\operatorname{co} H)),$$
$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{aco}(\operatorname{co} H)),$$

nebo dokonce zda mohou pro nějakou relativně slabě nekompaktní množinu H platit rovnosti

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{span}(\operatorname{co} H)) = 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H),$$
$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{aco}(\operatorname{co} H)) = 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H).$$

Tvrzení 6.4. *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená množina. Pak*

$$\begin{aligned} \mathrm{ck}_E(H) &\le \mathrm{ck}_E(\mathrm{co}\, H) \le \mathrm{ck}_E(\mathrm{aco}\, H) \le 2\,\mathrm{ck}_E(H), \\ \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) &\le \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(\mathrm{co}\, H) \le \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(\mathrm{aco}\, H) \le 2\,\mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H), \\ \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) &\le \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(\mathrm{co}\, H) \le \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(\mathrm{aco}\, H) \le 2\,\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H). \end{aligned}$$

Důkaz. První dvě nerovnosti v každém řádku plynou triviálně z definice kvantit, jichž se tvrzení týká. Poslední je pak důsledkem vět 2.1 a 6.2, neboť

$$\mathrm{ck}_E(\mathrm{aco}\, H) \overset{2.1}{\le} \gamma(\mathrm{aco}\, H) \overset{6.2}{=} \gamma(H) \overset{2.1}{\le} 2\,\mathrm{ck}_E(H)$$

a totéž platí pro kvantity „$\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}$“ a „$\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}$“. □

Pro každou z kvantit v tomto tvrzení mohou první dvě nerovnosti přejít pro nějakou relativně slabě nekompaktní množinu H v rovnost. Stačí vzít například množinu H z příkladu 3.2, která je absolutně konvexní. Kromě nerovnosti $\mathrm{ck}_E(H) \le \mathrm{ck}_E(\mathrm{co}\, H)$ se však neví, zda může být některá z těchto nerovností naopak ostrá. Ostrost zmíněné nerovnosti ukazuje následující příklad. Uvidíme dokonce, že může nastat rovnost $\mathrm{ck}_E(\mathrm{aco}\, H) = 2\,\mathrm{ck}_E(H)$.

Příklad 6.5. Existuje Banachův prostor E a omezená množina $H \subset E$ taková, že $\hat{\mathrm{d}}(\overline{\mathrm{co}\, H}^{w^*}, E) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{\mathrm{aco}\, H}^{w^*}, E) = 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) = \mathrm{ck}_E(\mathrm{co}\, H) = \mathrm{ck}_E(\mathrm{aco}\, H) = 2\,\mathrm{ck}_E(H) = 1$.

Důkaz. V příkladu 3.7 jsme zkonstruovali Banachův prostor E a omezenou množinu $\kappa(K_0) \subset E$ takovou, že $\hat{\mathrm{d}}(\overline{\kappa(K_0)}^{w^*}, E) \le \frac{1}{2}$ a $\mathrm{ck}_E(\mathrm{co}\, \kappa(K_0)) \ge 1$. Stačí tedy vzít za H právě množinu $\kappa(K_0)$, neboť potom z tvrzení 6.3 a 6.4 plyne

$$\begin{array}{ccccccc} & & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\mathrm{co}\, H}^{w^*}, E) & \le & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\mathrm{aco}\, H}^{w^*}, E) & \overset{6.3}{\le} & 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) \le 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ & & \vee\!\mid & & \vee\!\mid & & \vee\!\mid \\ 1 & \le & \mathrm{ck}_E(\mathrm{co}\, H) & \le & \mathrm{ck}_E(\mathrm{aco}\, H) & \overset{6.4}{\le} & 2\,\mathrm{ck}_E(H) \end{array}$$

a všude nastává rovnost. □

Dvě tvrzení, která budou nyní následovat, se zabývají chováním kvantit $\hat{\mathrm{d}}(\overline{M}^{w^*}, \mathrm{co}\, M)$ a $\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(M)$ (pro omezené podmnožiny M Banachova prostoru) při přechodu ke konvexnímu a absolutně konvexnímu obalu zkoumané množiny. To je zde složitější než u kvantit z tvrzení 6.3 a 6.4. Je-li totiž $H \subset E$ omezená, pak množina $\mathrm{co}\, H$, od níž se v těchto kvantitách měří měří nějaký druh vzdálenosti $\overline{H}^{w^*}$, resp. w^*-hromadných bodů posloupností v H, se při přechodu k absolutně konvexnímu obalu H zvětší na $\mathrm{co}(\mathrm{aco}\, H) = \mathrm{aco}\, H$, což se u kvantit v tvrzení 6.3 neděje. Měříme-li slabou nekompaktnost absolutně konvexní množiny M (speciálně absolutně konvexního obalu nějaké množiny H), splývají kvantity $\hat{\mathrm{d}}(\overline{M}^{w^*}, \mathrm{co}\, M)$ a $\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(M)$ s kvantitami $\hat{\mathrm{d}}(\overline{M}^{w^*}, \mathrm{aco}\, M)$ a $\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(M)$.

Tvrzení 6.6. *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pak*

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) & \rotatebox{-30}{$\leq$} & & \rotatebox{30}{$\leq$} & 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) \\ & & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{co} H)) & & \\ \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{aco} H)) & \rotatebox{30}{$\leq$} & & \rotatebox{-30}{$\leq$} & 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{aco} H)). \end{array}$$

Důkaz. Stejně jako v tvrzení 6.3 i zde z vět 2.1 a 6.2 či přímo z definice plyne

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) &\leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co} H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{co} H)) \\ &\overset{2.1}{\leq} \gamma(\operatorname{co} H) \overset{6.2}{=} \gamma(H) \overset{2.1}{\leq} 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H), \end{aligned}$$

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{co} H)) \overset{2.1}{\leq} \gamma(\operatorname{co} H) \leq \gamma(\operatorname{aco} H) \overset{2.1}{\leq} 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{aco} H)).$$

Dokážeme nyní, že $\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co} H)$. Zřejmě

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co} H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co}(-H)}^{w^*}, \operatorname{co}(-H)),$$

a platí tedy

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*} \cup \overline{\operatorname{co}(-H)}^{w^*}, \operatorname{co} H \cup \operatorname{co}(-H)) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co} H).$$

Odtud

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*} \cup \overline{\operatorname{co}(-H)}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{co} H \cup \operatorname{co}(-H))) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co} H),$$

ale protože $\operatorname{co}(\operatorname{co} H \cup (-\operatorname{co} H))) = \operatorname{aco} H$, dostáváme

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*} \cup \overline{\operatorname{co}(-H)}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co} H). \tag{6.2}$$

Jelikož množiny $\operatorname{co} H$, $\operatorname{co}(-H)$ jsou konvexní a relativně w^*-kompaktní, je

$$\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*} = \overline{\operatorname{co}(\operatorname{co} H \cup \operatorname{co}(-H))}^{w^*} = \operatorname{co}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*} \cup \overline{\operatorname{co}(-H)}^{w^*}). \tag{6.3}$$

Díky konvexitě $\operatorname{aco} H$ navíc

$$\hat{\mathrm{d}}(\operatorname{co}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*} \cup \overline{\operatorname{co}(-H)}^{w^*}), \operatorname{aco} H) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*} \cup \overline{\operatorname{co}(-H)}^{w^*}, \operatorname{aco} H). \tag{6.4}$$

Použijeme-li nyní postupně (6.3), (6.4) a (6.2), dostaneme kýžený odhad

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co} H).$$

□

V právě uvedeném tvrzení zřejmě mohou obě nerovnosti nalevo přejít pro nějakou relativně slabě nekompaktní množinu H v rovnost, například je-li H absolutně konvexní. Později v příkladu 6.9 ukážeme, že existuje omezená množina H, pro niž platí $\hat{\mathrm{d}}(\overline{\mathrm{co}\, H}^{w^*}, \mathrm{co}(\mathrm{co}\, H)) = 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{\mathrm{aco}\, H}^{w^*}, \mathrm{co}(\mathrm{aco}\, H))$ a nerovnost $\hat{\mathrm{d}}(\overline{\mathrm{aco}\, H}^{w^*}, \mathrm{co}(\mathrm{aco}\, H)) < \hat{\mathrm{d}}(\overline{\mathrm{co}\, H}^{w^*}, \mathrm{co}(\mathrm{co}\, H))$ je tedy ostrá. Není však známo, zda může být pro nějakou omezenou množinu H ostrá také nerovnost $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{co}(H)) \leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{\mathrm{co}\, H}^{w^*}, \mathrm{co}(\mathrm{co}\, H))$, nebo jestli může dokonce nastat rovnost $\hat{\mathrm{d}}(\overline{\mathrm{co}\, H}^{w^*}, \mathrm{co}(\mathrm{co}\, H)) = 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \mathrm{co}(H))$.

Tvrzení 6.7. *Je-li E Banachův prostor a $H \subset E$ omezená, pak*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) & \leq & & \leq & 2\,\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \\ & & \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\mathrm{co}\, H) & & \\ \frac{2}{3}\,\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\mathrm{aco}\, H) & \leq & & \leq & 2\,\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\mathrm{aco}\, H). \end{array}$$

Důkaz. Z vět 2.1 a 6.2 nebo triviálně z definice plyne

$$\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) \leq \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\mathrm{co}\, H) \overset{2.1}{\leq} \gamma(\mathrm{co}\, H) \overset{6.2}{=} \gamma(H) \overset{2.1}{\leq} 2\,\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H),$$
$$\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\mathrm{co}\, H) \overset{2.1}{\leq} \gamma(\mathrm{co}\, H) \leq \gamma(\mathrm{aco}\, H) \overset{2.1}{\leq} 2\,\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\mathrm{aco}\, H).$$

Zbývá ukázat $\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\mathrm{aco}\, H) \leq \frac{3}{2}\,\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\mathrm{co}\, H)$. Označme pro potřeby důkazu

$$\mathrm{ck}(A, B) = \sup\{\mathrm{dist}(\mathrm{clust}_{E^{**}}((x_n)), B) : \ (x_n) \text{ posloupnost v } A\},$$

kde A, B jsou množiny v E. Pak zřejmě $\mathrm{ck}(\mathrm{co}\, H, \mathrm{co}\, H) = \mathrm{ck}(\mathrm{co}(-H), \mathrm{co}(-H))$, a tedy

$$\mathrm{ck}(\mathrm{co}\, H \cup \mathrm{co}(-H), \mathrm{co}\, H \cup \mathrm{co}(-H)) \leq \mathrm{ck}(\mathrm{co}\, H, \mathrm{co}\, H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\mathrm{co}\, H).$$

Odtud triviálně plyne

$$\mathrm{ck}(\mathrm{co}\, H \cup \mathrm{co}(-H), \mathrm{aco}\, H) = \mathrm{ck}(\mathrm{co}\, H \cup \mathrm{co}(-H), \mathrm{co}(\mathrm{co}\, H \cup \mathrm{co}(-H))) \leq \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\mathrm{co}\, H).$$

Stačí tedy dokázat, že $\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(\mathrm{aco}\, H) \leq \frac{3}{2}\,\mathrm{ck}(\mathrm{co}\, H \cup \mathrm{co}(-H), \mathrm{aco}\, H)$. Volme libovolné $\delta > \mathrm{ck}(\mathrm{co}\, H \cup \mathrm{co}(-H), \mathrm{aco}\, H)$ a posloupnost (x_n) v $\mathrm{aco}\, H = \mathrm{co}(\mathrm{co}\, H \cup \mathrm{co}(-H))$, tj. $x_n = \lambda_n y_n + (1 - \lambda_n)(-z_n)$, $\lambda_n \in [0, 1]$, $y_n, z_n \in \mathrm{co}\, H$, $n \in \mathbb{N}$. Vyberme z (λ_n) podposloupnost $(\lambda_{n_k})_k$ takovou, že $\lambda_{n_k} \overset{k}{\to} \lambda \in [0, 1]$.

Předpokládejme nejprve, že $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$. Protože $(y_{n_k})_k$ je posloupnost prvků z $\mathrm{co}\, H \subset \mathrm{co}\, H \cup \mathrm{co}(-H)$, existuje z definice $\mathrm{ck}(\mathrm{co}\, H \cup \mathrm{co}(-H), \mathrm{aco}\, H)$ w^*-hromadný bod $y^{**} \in \overline{\mathrm{co}\, H}^{w^*}$ této posloupnosti splňující $\mathrm{dist}(y^{**}, \mathrm{aco}\, H) < \delta$.

Vyberme podnet (y_α) posloupnosti $(y_{n_k})_k$ takový, že $y_\alpha \xrightarrow{w^*} y^{**}$. Díky w^*-kompaktnosti $\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}$ můžeme navíc případným vybráním dalšího podnetu zařídit, aby odpovídající net (z_α) w^*-konvergoval k nějakému prvku $z^{**} \in \overline{\operatorname{co} H}^{w^*}$. S využitím věty 2.1 dostáváme

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(z^{**}, \operatorname{aco} H) &\leq \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \overset{2.1}{\leq} 2\operatorname{ck}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{co} H)\\ &\leq 2\operatorname{ck}(\operatorname{co} H \cup \operatorname{co}(-H), \operatorname{aco} H) < 2\delta.\end{aligned}$$

Prvek $x^{**} = \lambda y^{**} + (1-\lambda)(-z^{**})$ je w^*-hromadným bodem posloupnosti (x_n), neboť podnet (x_α) této posloupnosti w^*-konverguje k x^{**}. Díky absolutní konvexitě $\operatorname{aco} H$ pro tento hromadný bod platí

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x^{**}, \operatorname{aco} H) &\leq \lambda \operatorname{dist}(y^{**}, \operatorname{aco} H) + (1-\lambda)\operatorname{dist}(-z^{**}, \operatorname{aco} H)\\ &< \lambda\delta + (1-\lambda)2\delta = (2-\lambda)\delta \leq \tfrac{3}{2}\delta.\end{aligned}$$

V případě, že $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$, postupujeme obdobně s tím rozdílem, že tentokrát w^*-hromadný bod z^{**} posloupnosti (z_{n_k}) volíme tak, aby $\operatorname{dist}(z^{**}, \operatorname{aco} H) < \delta$, zatímco pro odpovídající w^*-hromadný bod y^{**} posloupnosti (y_{n_k}) platí pouze $\operatorname{dist}(y^{**}, \operatorname{aco} H) < 2\delta$. Potom w^*-hromadný bod $x^{**} = \lambda y^{**} + (1-\lambda)(-z^{**})$ posloupnosti (x_n) bude splňovat

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x^{**}, \operatorname{aco} H) &\leq \lambda \operatorname{dist}(y^{**}, \operatorname{aco} H) + (1-\lambda)\operatorname{dist}(-z^{**}, \operatorname{aco} H)\\ &< \lambda \cdot 2\delta + (1-\lambda)\delta = (1+\lambda)\delta < \tfrac{3}{2}\delta.\end{aligned}$$

Protože jsme $\delta > \operatorname{ck}(\operatorname{co} H \cup \operatorname{co}(-H), \operatorname{aco} H)$ i posloupnost (x_n) v $\operatorname{aco} H$ volili libovolně, je $\operatorname{ck}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H) \leq \frac{3}{2}\operatorname{ck}(\operatorname{co} H \cup \operatorname{co}(-H), \operatorname{aco} H)$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Jistě existuje relativně slabě nekompaktní množina H, pro niž $\operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(H) = \operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) = \operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H)$. Stačí, aby byla absolutně konvexní. Není však známo, zda může být někdy nerovnost $\operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(H) \leq \operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H)$ ostrá, nebo dokonce zda může nerovnost $\operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) \leq 2\operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(H)$ přejít v rovnost. Dále není jasné, zda je konstanta $\frac{2}{3}$ v odhadu $\frac{2}{3}\operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) \leq \operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H)$ optimální. Naopak víme, že odhad $\operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) \leq 2\operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H)$ optimální je, neboť v něm může nastat rovnost, což ukážeme v příkladu 6.9.

Zbývá nám popsat, co udělá přechod ke konvexnímu a absolutně konvexnímu obalu zkoumané množiny s kvantitami typu „Ja“. Ty se v tomto ohledu chovají jinak než ostatní míry slabé nekompaktnosti, jak ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 6.8. *Nechť E je Banachův a $H \subset E$ je omezená. Pak*

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{2}\,\mathrm{Ja}_E(H) & \leq & \mathrm{Ja}_E(\operatorname{aco} H) & \leq & \mathrm{Ja}_E(\operatorname{co} H) & \leq & \mathrm{Ja}_E(H), \\
\frac{1}{2}\,\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(\operatorname{aco} H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(\operatorname{co} H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H), \\
\frac{1}{2}\,\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{co} H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H), \\
 & & \parallel & & & & \\
\frac{1}{2}\,\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) & \leq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H).
\end{array}$$

Důkaz. Poslední nerovnost pro každou ze čtyř kvantit plyne z toho, že pro $x^* \in E^*$ je $\sup x^*(H) = \sup x^*(\operatorname{co} H)$, a z definice příslušných kvantit. Čtveřice prvních nerovností plyne z vět 6.2 a 2.1, odkud $\frac{1}{2}\,\mathrm{Ja}_E(H) \leq \frac{1}{2}\gamma(H) = \frac{1}{2}\gamma(\operatorname{aco} H) \leq \mathrm{Ja}_E(\operatorname{aco} H)$ a totéž splňují ostatní kvantity. Rovnost $\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H)$ je triviální.

Ukažme, že $\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) \leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H)$. Obdobně se pak dokáže prostřední ze tří nerovností i pro zbylé tři kvantity. Volme libovolné $\varepsilon > \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H)$ a uvažme libovolný funkcionál $x^* \in E^*$. Protože $\operatorname{aco} H = \operatorname{co}(\operatorname{co} H \cup \operatorname{co}(-H))$, je

$$\begin{aligned}
\sup x^*(\operatorname{aco} H) &= \sup x^*(\operatorname{co}(\operatorname{co} H \cup \operatorname{co}(-H))) \\
&= \sup x^*(\operatorname{co} H \cup \operatorname{co}(-H)) \\
&= \max\{\sup x^*(\operatorname{co} H), \sup(-x^*)(\operatorname{co} H)\}.
\end{aligned}$$

Pokud $\sup x^*(\operatorname{aco} H) = \sup x^*(\operatorname{co} H)$, najdeme z definice $\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H)$ funkcionál $x^{**} \in \overline{\operatorname{co} H}^{w^*} \subset \overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}$ takový, že $x^{**}(x^*) = \sup x^*(\operatorname{co} H) = \sup x^*(\operatorname{aco} H)$, přičemž platí $\operatorname{dist}(x^{**}, \operatorname{aco} H) \leq \operatorname{dist}(x^{**}, \operatorname{co} H) < \varepsilon$. Pakliže je $\sup x^*(\operatorname{aco} H) = \sup(-x^*)(\operatorname{co} H)$, najdeme podle téže definice $y^{**} \in \overline{\operatorname{co} H}^{w^*}$ splňující $y^{**}(-x^*) = \sup(-x^*)(\operatorname{co} H) = \sup x^*(\operatorname{aco} H)$, přičemž $\operatorname{dist}(y^{**}, \operatorname{co} H) < \varepsilon$. Potom funkcionál $x^{**} = -y^{**} \in -\overline{\operatorname{co} H}^{w^*} \subset \overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}$ zřejmě splňuje $x^{**}(x^*) = \sup x^*(\operatorname{aco} H)$ a $\operatorname{dist}(x^{**}, \operatorname{aco} H) = \operatorname{dist}(y^{**}, \operatorname{aco} H) \leq \operatorname{dist}(y^{**}, \operatorname{co} H) < \varepsilon$. Proto $\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) < \varepsilon$, a tedy $\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) \leq \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H)$. □

Pro mnoho relativně slabě nekompaktních množin H přejdou v právě dokázaném tvrzení poslední dvě nerovnosti týkající se každé ze čtveřice kvantit v rovnost. Není však jasné, zda může pro některou kvantitu s výjimkou „$\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}$“ nastat rovnost na místě první nerovnosti nebo alespoň zda může být některá ze zbývajících nerovností ostrá. Pouze pro kvantitu „$\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}$“ máme

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) < \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H),$$

je-li H množina z následujícího příkladu 6.9.

Příklad 6.9. Nechť $E = C([0,\omega])$ a $H = \{x \in B_E : x(\omega) = 1\}$. Pak

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{co} H)) &= \operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) = \operatorname{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) = 2,\\
\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{aco} H)) &= \operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) = \operatorname{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) = 1.
\end{aligned}$$

Důkaz. Prostor E a množinu H jsme převzali z příkladu 3.6. V něm jsme ukázali, že $\operatorname{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) = \operatorname{Ja}_{\mathrm{co}}(H) \geq 2$. Protože $H \subset B_E$, je $\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*} \subset \overline{B_E}^{w^*} = B_{E^{**}}$. Navíc zřejmě $0 \in \operatorname{aco} H$, tudíž

$$\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{aco} H)) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) \leq \hat{\mathrm{d}}(B_{E^{**}}, \{0\}) = 1.$$

Odtud a z věty 2.1 a tvrzení 6.6, 6.7, 6.8 plyne

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 2\operatorname{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) & \overset{2.1}{\leq} & 2\operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) & \leq & 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{aco} H)) & \leq 2\\
 & {\scriptstyle 6.8}\vee\mid & & {\scriptstyle 6.7}\vee\mid & & {\scriptstyle 6.6}\vee\mid & \\
2 \leq & \operatorname{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) & \overset{2.1}{\leq} & \operatorname{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) & \leq & 2\hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{co} H)) &
\end{array}$$

a všude nastávají rovnosti. □

Případ w^*-andělské duální jednotkové koule

Nyní dokážeme analogii věty 6.2 pro kvantity „γ_0“, „γ_{aco}“ a „γ_{co}“. Budeme ji potřebovat pro důkaz bezprostředně následující věty 6.11. Ta se zabývá případem, kdy Banachův prostor, v němž měříme slabou nekompaktnost množin a jejich konvexních a absolutně konvexních obalů, má w^*-andělskou duální jednotkovou kouli.

Věta 6.10. *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset X$ je omezená. Pak*

$$\begin{array}{ccccc}
\gamma_0(H) & = & \gamma_0(\operatorname{co} H) & = & \gamma_0(\operatorname{aco} H),\\
\gamma_{\mathrm{aco}}(H) & = & \gamma_{\mathrm{aco}}(\operatorname{co} H) & = & \gamma_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H)\\
 & & & & \parallel\\
\gamma_{\mathrm{co}}(H) & = & \gamma_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) & \geq & \gamma_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H).
\end{array}$$

Důkaz. Nejprve dokážeme $\gamma_0(H) = \gamma_0(\operatorname{co} H) = \gamma_0(\operatorname{aco} H)$. Přímo z definice plyne $\gamma_0(H) \leq \gamma_0(\operatorname{co} H) \leq \gamma_0(\operatorname{aco} H)$. Nerovnost $\gamma_0(\operatorname{aco} H) \leq \gamma_0(H)$ je důsledkem důkazu věty 6.2. V něm jsme ukázali, že kdykoli nějaká dvojice posloupností (x_n) v $\operatorname{aco} H$ a (x_m^*) v B_{E^*} splňuje pro pevné $r > 0$

$$\lim_m \lim_n x_m^*(x_n) - \lim_n \lim_m x_m^*(x_n) > r,$$

pak pro libovolné $0 < r' < r$ existuje posloupnost (y_n) v H a podposloupnost $(x_{m_k}^*)_k$ vybraná z (x_m^*) tak, že

$$|\lim_k \lim_n x_{m_k}^*(y_n) - \lim_n \lim_k x_{m_k}^*(y_n)| \geq r'.$$

Stačí tedy podobně jako v důkazu věty 6.2 volit libovolné $0 < r < \gamma_0(\operatorname{aco} H)$ a posloupnosti (x_n) v $\operatorname{aco} H$ a (x^*_m) v B_{E^*} tak, aby $x^*_m \overset{w^*}{\to} 0$ a

$$\lim_m \lim_n x^*_m(x_n) = \lim_m \lim_n x^*_m(x_n) - \lim_n \lim_m x^*_m(x_n) > r.$$

Pro libovolné $0 < r' < r$ pak dostaneme $\gamma_0(H) \geq r'$.

Nyní dokážeme příslušné vztahy pro kvantity „γ_{aco}“ a „γ_{co}“. Následující rovnost a nerovnosti plynou z definic těchto kvantit okamžitě:

$$\begin{array}{ccccc} \gamma_{\mathrm{aco}}(H) & \leq & \gamma_{\mathrm{aco}}(\operatorname{co} H) & \leq & \gamma_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H) \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & \| \\ \gamma_{\mathrm{co}}(H) & \leq & \gamma_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) & & \gamma_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H). \end{array}$$

K dokončení celého důkazu tedy postačí ukázat nerovnosti $\gamma_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H) \leq \gamma_{\mathrm{aco}}(H)$ a $\gamma_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) \leq \gamma_{\mathrm{co}}(H)$. To opět provedeme podobně jako důkaz věty 6.2.

Dokažme nejprve, že $\gamma_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) \leq \gamma_{\mathrm{co}}(H)$. Pokud $\gamma_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) = 0$, jsme hotovi. Předpokládejme, že $\gamma_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) > 0$ a volme libovolné $0 < r < \gamma_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H)$. Z definice $\gamma_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H)$ nalezněme posloupnost (x_n) v $\operatorname{co} H$ a posloupnost (x^*_m) v B_{E^*} tak, že $x^*_m \overset{w^*}{\to} x^*$ a platí

$$\lim_m \lim_n x^*_m(x_n) - \sup x^*(H) = \lim_m \lim_n x^*_m(x_n) - \sup x^*(\operatorname{co} H) > r.$$

Bez újmy na obecnosti

$$\lim_n x^*_m(x_n) - \sup x^*(H) > r, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

Volme libovolné $r' \in (0, r)$. Pro $y \in H$ definujme

$$\Gamma(y) = \{m \in \mathbb{N} : \ x^*_m(y) \geq r' + \sup x^*(H)\}.$$

Ať $\mathcal{G} = \{\Gamma(y) : \ y \in H\}$. Jelikož $x^*_m \overset{w^*}{\to} x^*$ a $r' > 0$, je $\mathcal{G}$ soubor konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Buď $\mu = \sup\{\|x\| : \ x \in H\}$ a volme $\varepsilon > 0$ dostatečně malé, aby $\varepsilon\mu + r' < r$. Obdobně jako ve větě 6.2 dokážeme, že $C(\mathbb{N}, \mathcal{G}, \varepsilon) = \emptyset$.

Pro spor nechť existuje $\varphi \in C(\mathbb{N}, \mathcal{G}, \varepsilon)$, tedy

$$\sum_{m \in \Gamma(y)} \varphi(m) < \varepsilon, \quad y \in H.$$

Definujme funkcionál

$$z^* = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varphi(m) x^*_m.$$

Pro libovolný prvek $y \in H$ pak platí

$$\begin{aligned} z^*(y) &= \sum_{m\in\Gamma(y)} \varphi(m)x_m^*(y) + \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\Gamma(y)} \varphi(m)x_m^*(y) \\ &< \sum_{m\in\Gamma(y)} \varphi(m)\|x_m^*\|\|y\| + \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\Gamma(y)} \varphi(m)(r' + \sup x^*(H)) \\ &\leq \varepsilon\mu + r' + \sup x^*(H) < r + \sup x^*(H). \end{aligned}$$

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je tedy $z^*(x_n) < r + \sup x^*(H)$. Díky (6.5) ale zároveň musí platit

$$\lim_n z^*(x_n) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \varphi(m) \lim_n x_m^*(x_n) > r + \sup x^*(H),$$

což je spor a skutečně tedy $C(\mathbb{N}, \mathcal{G}, \varepsilon) = \emptyset$.

Podle lemmatu 6.1 najdeme množiny $A_n = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \subset \mathbb{N}$ a prvky $y_n \in H$, $n \in \mathbb{N}$, splňující $A_n \subset \Gamma(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, neboli

$$x_{m_k}^*(y_n) \geq r' + \sup x^*(H), \quad n \in \mathbb{N},\ k = 1, \ldots, n. \tag{6.6}$$

Protože $x_m^* \overset{w^*}{\to} x^*$, tak i $x_{m_k}^* \overset{w^*}{\to} x^*$, $k \to \infty$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že existuje $\lim_k \lim_n x_{m_k}^*(y_n)$. Pak díky (6.6) platí

$$\lim_k \lim_n x_{m_k}^*(y_n) - \sup x^*(H) \geq r'.$$

Odtud $\gamma_{\mathrm{co}}(H) \geq r'$. Protože jsme $0 < r' < r < \gamma_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H)$ volili libovolně, dostáváme $\gamma_{\mathrm{co}}(H) \geq \gamma_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H)$.

To, že $\gamma_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H) \leq \gamma_{\mathrm{aco}}(H)$, dokážeme v zásadě stejně, pouze s drobnými změnami. Předpokládejme, že $\gamma_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H) > r > 0$ pro pevné $r > 0$, a z definice nalezněme posloupnosti (x_n) v $\operatorname{aco} H$ a (x_m^*) v B_{E^*} splňující $x_m^* \overset{w^*}{\to} x^*$ a

$$\lim_m \lim_n x_m^*(x_n) - \sup |x^*|(H) = \lim_m \lim_n x_m^*(x_n) - \sup |x^*|(\operatorname{aco} H) > r.$$

Bez újmy na obecnosti

$$\lim_n x_m^*(x_n) - \sup |x^*|(H) > r, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{6.7}$$

Volme libovolné $r' \in (0, r)$. Definujme

$$\Gamma(y) = \{m \in \mathbb{N} : \ |x_m^*(y)| \geq r' + \sup |x^*|(H)\}$$

pro $y \in H$ a dále $\mathcal{G} = \{\Gamma(y) : \ y \in H\}$. Pak $\mathcal{G}$ je opět soubor konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Definujme z^* a μ a volme $\varepsilon > 0$ stejně jako výše. Předpokládejme, že existuje $\varphi \in C(\mathbb{N}, \mathcal{G}, \varepsilon)$. Pro libovolný prvek $y \in H$ pak analogickým výpočtem jako výše dostaneme $|z^*(y)| < r + \sup|x^*|(H)$. Odtud $z^*(x_n) < r + \sup|x^*|(H)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je ale ve sporu s tím, že $\lim_n z^*(x_n) > r + \sup|x^*|(H)$, což plyne z (6.7).

Podobně jako výše obdržíme použitím lemmatu 6.1 posloupnost $(x^*_{m_k})_k$ v B_{E^*}, která w^*-konverguje k x^*, a posloupnost (y_n) v H splňující

$$|x^*_{m_k}(y_n)| \geq r' + \sup|x^*|(H), \quad n \in \mathbb{N},\ k = 1, \dots, n. \tag{6.8}$$

Bez újmy na obecnosti existuje $\lim_k \lim_n x^*_{m_k}(y_n)$. Z (6.8) dostáváme

$$|\lim_k \lim_n x^*_{m_k}(y_n)| - \sup|x^*|(H) = \lim_k \lim_n |x^*_{m_k}(y_n)| - \sup|x^*|(H) \geq r'.$$

Pokud $|\lim_k \lim_n x^*_{m_k}(y_n)| = \lim_k \lim_n x^*_{m_k}(y_n)$, vidíme, že $\gamma_{\mathrm{aco}}(H) \geq r'$. Nechť je naopak $|\lim_k \lim_n x^*_{m_k}(y_n)| = -\lim_k \lim_n x^*_{m_k}(y_n) = \lim_k \lim_n (-x^*_{m_k})(y_n)$. Posloupnost $(-x^*_{m_k})_k$ v B_{E^*} zřejmě w^*-konverguje k $-x^*$ a platí

$$\lim_k \lim_n (-x^*_{m_k})(y_n) - \sup|-x^*|(H) = |\lim_k \lim_n x^*_{m_k}(y_n)| - \sup|x^*|(H) \geq r'.$$

I v tomto případě je tedy $\gamma_{\mathrm{aco}}(H) \geq r'$. Odtud dostáváme $\gamma_{\mathrm{aco}}(H) \geq \gamma_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H)$ a důkaz je hotov. $\square$

Nerovnost v právě dokázané větě může být ostrá. Dokladem toho je příklad 3.6. V něm je prostor E separabilní, a má tudíž w^*-andělskou duální jednotkovou kouli a množina H splňuje $\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) < \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H)$. Podle věty 5.8 je tedy $\gamma_{\mathrm{aco}}(H) = \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) < \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) = \gamma_{\mathrm{co}}(H)$.

Věta 6.11. *Nechť E je Banachův prostor, jehož duální jednotková koule B_{E^*} je w^*-andělská, a buď $H \subset E$ omezená. Pak*

$$(i)\qquad \begin{array}{ccccc} \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, E) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, E) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathrm{ck}_E(H) & = & \mathrm{ck}_E(\operatorname{co} H) & = & \mathrm{ck}_E(\operatorname{aco} H) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathrm{Ja}_E(H) & = & \mathrm{Ja}_E(\operatorname{co} H) & = & \mathrm{Ja}_E(\operatorname{aco} H), \end{array}$$

$$(ii)\qquad \begin{array}{ccccc} \hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{span}(\operatorname{co} H)) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{span}(\operatorname{aco} H)) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(\operatorname{co} H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(\operatorname{aco} H) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(\operatorname{co} H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(\operatorname{aco} H), \end{array}$$

$$
(iii) \qquad \begin{array}{ccccc}
\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{aco}(\operatorname{co} H)) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{aco}(\operatorname{aco} H)) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{co} H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{co} H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H) \\
 & & & & \parallel \\
\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{co} H)) & \geq & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{aco} H)) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) & \geq & \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) & \geq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H).
\end{array}
$$

Důkaz. Ve větě 5.8 jsme dokázali, že v Banachově prostoru F s w^*-andělskou duální jednotkovou koulí pro libovolnou omezenou množinu $M \subset F$ platí $\gamma_0(M) = \mathrm{Ja}_F(M) = \mathrm{ck}_F(M) = \hat{\mathrm{d}}(\overline{M}^{w^*}, F)$. To spolu s předchozí větou 6.10 dává (i), položíme-li $F = E$, a (ii) pro $F = \overline{\operatorname{span} H}$ (koule $B_{(\overline{\operatorname{span} H})^*}$ je w^*-andělská podle důsledku 5.7). Část (iii) plyne ze stejných vět stejným způsobem, pokud se zaměříme tentokrát na vlastnosti kvantit „γ_{aco}“ a „γ_{co}“. $\square$

Tvrzení 6.12. *Nechť E je Banachův prostor a $H \subset E$ je omezená. Pokud je H separabilní, pak platí*

$$
\begin{array}{ccccc}
\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{span} H) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{span}(\operatorname{co} H)) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{span}(\operatorname{aco} H)) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
\mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(\operatorname{co} H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(\operatorname{aco} H) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
\mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(\operatorname{co} H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{span}}(\operatorname{aco} H),
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{aco} H) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{aco}(\operatorname{co} H)) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{aco}(\operatorname{aco} H)) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{co} H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
\mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{co} H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{aco}}(\operatorname{aco} H) \\
 & & & & \parallel \\
\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, \operatorname{co} H) & = & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{co} H)) & \geq & \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{aco} H}^{w^*}, \operatorname{co}(\operatorname{aco} H)) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(H) & = & \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) & \geq & \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H) \\
\parallel & & \parallel & & \parallel \\
\mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(H) & = & \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{co} H) & \geq & \mathrm{Ja}_{\mathrm{co}}(\operatorname{aco} H).
\end{array}
$$

Důkaz. Jestliže H je separabilní, je i $\overline{\operatorname{span} H}$ separabilní. Koule $B_{(\overline{\operatorname{span} H})^*}$ je tudíž metrizovatelná, speciálně w^*-andělská. Protože kvantity, s nimiž zde pracujeme, nezávisí na Banachově prostoru, v němž H uvažujeme (tvrzení 1.20), plynou uvedené rovnosti a nerovnosti z předchozí věty 6.11, kde stačí položit $E = \overline{\operatorname{span} H}$. $\square$

Poznamenejme, že nerovnosti ve větě 6.11 a tvrzení 6.12 mohou být ostré, a to například pro separabilní podmnožinu H separabilního prostoru E (tedy s w^*-andělskou koulí B_{E^*}) z příkladu 6.9.

Poznámka 6.13. Příklad 6.5, který ukazuje ostrost nerovností $\hat{\mathrm{d}}(\overline{H}^{w^*}, E) < \hat{\mathrm{d}}(\overline{\operatorname{co} H}^{w^*}, E)$ a $\mathrm{ck}_E(H) < \mathrm{ck}_E(\operatorname{co} H)$, se nedá použít k tomu, abychom ukázali také ostrost nerovností $k(H) \leq k(\operatorname{co} H)$, pokud $k(M)$ značí kteroukoliv z kvantit $\hat{\mathrm{d}}(\overline{M}^{w^*}, \operatorname{span} M)$, $\hat{\mathrm{d}}(\overline{M}^{w^*}, \operatorname{aco} M)$, $\hat{\mathrm{d}}(\overline{M}^{w^*}, \operatorname{co} M)$, $\mathrm{ck}_{\mathrm{span}}(M)$, $\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(M)$, $\mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(M)$ pro omezené množiny M. Množina H z tohoto příkladu je totiž separabilní, proto podle předchozího tvrzení 6.12 všechny tyto nerovnosti přejdou v rovnosti.

Literatura

[1] C. Angosto a B. Cascales, *The quantitative difference between countable compactness and compactness*, J. Math. Anal. Appl., 343:479–491, 2008.

[2] C. Angosto a B. Cascales, *Measures of weak noncompactness in Banach spaces*, Topology Appl., 156(7):1412–1421, 2009.

[3] B. Cascales, O. F. K. Kalenda, J. Spurný, *A quantitative version of James' compactness theorem*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 55(2):369–386, 2012.

[4] M. Fabian, P. Hájek, V. Montesinos a V. Zizler, *A quantitative version of Krein's theorem*, Rev. Mat. Iberoamericana, 21(1):237–248, 2005.

[5] A. S. Granero, P. Hájek a V. Montesinos Santalucía, *Convexity and w^*-compactness in Banach spaces*, Math. Ann., 328(4):625–631, 2004.

[6] A. S. Granero, J. M. Hernández a H. Pfitzner. *The distance* $\operatorname{dist}(\mathcal{B}, X)$ *when* $\mathcal{B}$ *is a boundary of* $B(X^{**})$, Proc. Amer. Math. Soc., 139(3):1095–1098, 2011.

[7] Antonio S. Granero a Marcos Sánchez, *Distances to convex sets*, Studia Math. 182:165–181, 2007.

[8] R. C. James, *Weakly compact sets*, Trans. Amer. Math. Soc., 113:129–140, 1964.

[9] M. Morillon, *A new proof of James' sup theorem*, Extracta Math., 20:261–271, 2005.

[10] J. D. Pryce, *Weak compactness in locally convex spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 17:148–155, 1966.

[11] V. Pták, *A combinatorial lemma on the existence of convex means and its applications to weak compactness*, Proc. Symp. Pure Math. 7:437–450, 1963.

[12] S. Simons, *A convergence theorem with boundary*, Pacific J. Math., 40:703–708, 1972.

[13] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing ℓ^1*, Proc. Natl. Acad. Sci.,71:2411–2413, 1974.