Posudek vedoucího diplomové práce

Hana Bendová: „Nové míry slabé nekompaktnosti“

Zadáním diplomové práce bylo zavést nové kvantity měřící relativní slabou nekompaktnost omezených podmnožin Banachových prostorů, prozkoumat jejich vzájemné vztahy a vztahy ke známým kvantitám. Důvodem zavedení nových kvantit je skutečnost, že na rozdíl od známých kvantit nezávisí na prostoru, ve kterém je množina vnořena. Přesněji: Nechť E je Banachův prostor a F jeho uzavřený podprostor. Pak pro podmnožiny prostoru F známé kvantity počítané vzhledem k E a k F se mohou lišit, zatímco nové nikoli. Proto jsou nové kvantity v jistém smyslu přirozenější. Navíc se zdá možné, že pomocí nových kvantit by bylo možné dokázat přesnější verze některých kvantitativních vět (například Krejnovy věty), protože příklady dokumentující optimalitu nerovností pro známé kvantity jsou založeny právě na závislosti kvantit na základním prostoru.

Toto zadání bylo více než splněno.

V první kapitole jsou definovány jednotlivé kvantity měřící relativní slabou nekompaktnost (tj. míry slabé nekompaktnosti), které jsou motivovány různými charakterizacemi slabé kompaktnosti. Hlavní náplní druhé kapitoly je důkaz Věty 2.1 shrnující nerovnosti mezi kvantitami. Některé z těchto nerovností lze interpretovat jako kvantitativní verze známých charakterizací slabé kompaktnosti (Eberlein-Šmulianova věta, Jamesova věta). Klasické věty jsou pak snadným důsledkem. Třetí kapitola obsahuje příklady dokumentující, že většina nerovností z Věty 2.1 může být ostrá a že konstanty obsažené v nerovnostech jsou ve většině případů optimální. Výjimky, pro které to není známo, jsou vyjmenovány na začátku kapitoly. Ve čtvrté kapitole se dokazuje, že pro případ jednotkové koule Banachova prostoru všechny míry slabé nekompaktnosti kromě jedné nabývají buď hodnoty 0 (je-li prostor reflexivní) nebo 1 (není-li prostor reflexivní). V páté kapitole je ukázáno, že v prostorech, jejichž duální koule je andělská ve w^* topologii, některé z kvantit splývají. Odtud plyne, že příslušné nové kvantity splývají například pro separabilní množiny (proto, že nezávisí na prostoru, v němž jsou vnořeny, a lze je tedy počítat vzhledem k uzavřenému lineárnímu obalu). Poslední kapitola se věnuje kvantitativní verzi Krejnovy věty, tedy chování jednotlivých kvantit při přechodu ke konvexnímu nebo absolutně konvexnímu obalu, a to nejprve v obecném případě a pak v případě, že duální koule je w^*-andělská.

Práce je založena na modifikacích známých výsledků. Důkazy z druhé kapitoly jsou víceméně přepsáním známých důkazů do nové situace. Ve třetí kapitole jsou jednak známé příklady upravené pro novou situaci (3.1-3.4, 3.7; přitom u Příkladu 3.7 byl zjednodušen důkaz) a jednak příklady dokumentující vztahy mezi novými kvantitami (3.5 a 3.6). V páté kapitole jsou známé výsledky týkající se kvantity γ_0 doplněny analogickými výsledky pro nové kvantity (pro tento účel jsou zavedeny a zkoumány kvantity γ_{co} a γ_{aco}). Výsledky jsou to sice analogické, ale v důkazu bylo třeba provést několik netriviálních změn. V šesté kapitole jsou nejprve zpracovány známy výsledky (Věta 6.2 a její důsledky, Příklad 6.5), dále je v nových Tvrzeních 6.6-6.8 pečlivě analyzováno chování dalších kvantit při přechodu ke konvexním či absolutně konvexním obalům. Ve druhé části je ve Větě 6.10 zkombinován známý výsledek pro kvantitu γ_0 s jeho analogiemi pro γ_{co} a γ_{aco} a jako důsledek jsou vyvozeny Věta 6.11 a Tvrzení 6.12.

Předložená práce je psána velmi pečlivě. Za zmínku stojí i skutečnost, že většina tvrzení v práci je dokázána s využitím pouze základních vět funkcionální analýzy. Druhá kapitola tedy obsahuje například úplný důkaz nejen Eberlein-Šmulianovy věty, ale i Jamesovy věty, která bývá (mylně) považována za nepřístupně obtížnou. Jediné výsledky nad rámec základních vět užité v práci jsou tři věty užité ve čtvrté kapitole (Věta 4.8, Rosenthalova věta 4.9 a Simonsova rovnost 4.12) a Ptákovo lemma 6.1.

Domnívám se, že předložená práce zcela nepochybně splňuje požadavky kladené na diplomovou práci.

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.
Katedra matematické analýzy MFF UK

V Praze dne 4. 9. 2012