Posudek diplomové práce "Nové míry slabé nekompaktnosti" studentky Hany Bendové

Práce studuje několik nezáporných veličin závisejících na neprázdné omezené podmnožině H Banachova prostoru E, které jsou nulové, právě když je H slabě kompaktní. Pokud jsou kladné, dávají kvantitativní představu o tom, do jaké míry neplatí některá z charakterizací (relativní) slabé kompaktnosti. Charakterizace, o kterých je řeč jsou klasické věty Eberleina, Smulyana, Grohendiecka, Jamese. Přesněji jde o charakterizace pomocí uzavřenosti v bodové topologii ($\hat{d}$), záměnnosti limit (γ), spočetné kompaktnosti (ck) a nabývání suprema spojitými funkcionály (Ja). Vychází se z nedávno publikovaných výsledků, které jsou dále zjemňovány pro nově zavedené kvantity. V dalším popisuji podrobněji obsah práce. Z toho důvodu, že nejen důkazy, ale i výsledky jsou poměrně technické, je popis relativně dlouhý a přesto jsou pojmy i výsledky pouze naznačeny pro představu těch, kteří práci nečetli.

Obsah podrobněji. V kapitole 2 jsou dokázány nerovnosti mezi uvedenými čtyřmi typy kvantit ve Větě 2.1. Kromě γ jsou navíc uvažovány modifikace, které měří vzdálenosti od E, případně od lineárního či aboslutně konvexního či konvexního obalu H. Hlavní věta je vlastním zpracováním publikovaných výsledků v citované práci Cascalese, Kalendy a Spurného. Při důkazu nejobtížnějšího odhadu veličiny $\gamma(H)$ veličinou $Ja(H)$ jsou užita pomocná tvrzení z práce Pryce. V závěru kapitoly jsou dokázány dva důsledky Věty 2.1 snadněji, bez použití zmíněného odhadu. Odhad kvantity $\gamma(H)$ pomocí kvantity pro míru spočetné nekompaktnosti je převzat z práce Ágosta a Cascalese, odhady pro měření vzdálenosti od konvexního obalu H pomocí odkadů pro měření vzdáleností od E (pro veličiny $\hat{d}$, ck a Ja) vyžadují společné pozorování, jehož důkaz vychází z lemmat publikovaných v práci Granera a Sáncheze.

V další kapitole jsou příklady ukazující, že ve všech nerovnostech ve Větě 2.1 může nastat rovnost, jsou uvedeny příklady, že některá z nerovností je ostrá a jiné nikoliv. Jsou uvedeny nerovnosti plynoucí z Věty 2.1, pro které není známo, zda mohou být ostré. Příklady jsou přejaty z citované práce Cascalese, Kalendy a Spurného. Při zpracování nejtechničtějšího příkladu, který ukazuje možnost $ck(H) = 2Ja(H)$, vychází autorka z práce Granera, Hájka a Montesinose.

Kapitola 4 se zabývá zavedenými kvantitami pro speciální omezenou množinu, totiž pro jednotkovou kouli v Banachově prostoru. Věta 4.1 říká, že všechny uvažované varianty kvantit pro slabou kompaktnost, slabou spočetnou kompaktnost i nabývání suprema jsou rovny jedné, není-li E reflexivní. Důkaz je zpracován dle článku Granera, Hernándeze a Pfitznera. K odhadu nerovnosti $Ja(B_E) \geq 1$ se užívají věty Morillonové, Rosenthala a Simonse.

Kapitola 5 vychází z práce Cascalese, Kalendy a Spurného a z práce Fabiana, Hájka, Montesinose a Zizlera. Jsou zavedeny modifikované veličiny pro veličinu γ kvantifikující záměnnost limit a provnány s odpovídajícími modifikacemi veličiny Ja pro nabývání suprema (Věta 5.2 - modifikace důkazu obtížné Věty 5.2) a porovnány s veličinami $\hat{d}$ pro spočetnou kompaktnost za předpokladu, že dulální koule je w^*-andělská (důkaz Věty 5.8). Věta 5.8 pomocí uvedených nerovností a Věty 2.1 dává silnější verzi Věty 2.1 (řada nerovností přechází v rovnosti), má-li prostor E w^*-andělskou duální kouli. Díky speciální struktuře $E = c_0(\Gamma)$ (a jeho duálu) pak vychází, že v tomto případě nastávají dokonce u všech nerovností věty 2.1 rovnosti.

V kapitole 6 jsou porovnávány zkoumané kvantity pro omezenou množinu H s hodnotami pro její konvexní obal a absolutně konvexní obal. Věta 6.2 srovnávající modifikace kvantit pro slabou nekompaktnost ($\hat{d}$) je dokázána podle věty z práce Fabiana, Hájka, Montesinose a Zizlera. Důkaz užívá Ptákovo kombinatorické lemma. Z předchozího pak plynou srovnání mezi verzemi kvantit pro spočetnou kompaktnost pro omezenou množinu, její konvexní a její absolutně konvexní obal. Dále jsou studovány vztahy mezi kvantitami, ve kterých jsou různé obaly uvažovány jak pro množinu H, tak i pro měření vzdáleností v definicích kvantit. Nejvýraznějším výsledkem je Věta 6.11, která shrnuje výsledky pro prostory s w^*-andělskou duální koulí. Kromě dřívějších výsledků potřebuje obdobu Věty 6.2 pro kvantity měřící varianty míry nezáměnnosti limit γ namísto $\hat{d}$.

Z uvedeného je zřejmé, že autorka zpracovala velké množství technicky náročných již publikovaných výsledků. Všechny odkazy jsou řádně uvedeny a na odpovídajících místech je naznačeno, jak byly použity. V některých případech je zpracovala s vlastním příspěvkem pro lepší přehlednost a pochopení. Dodala výsledky pro nově zavedené veličiny, které jsou v jistém smyslu jemnější a přirozenější. Uvedla řadu příkladů, které ukazují meze dosažených výsledků. Několik přirozených a asi obtížných otázek, které zůstávají otevřené, je uvedeno.

Zpracování je přehledné, jasné a neobsahuje příliš nedostatků. Obsahuje většinou známé výsledky a na základě jejich dobrého pochopení různé modifikace a dodatečná zjemnění. V příloze uvádím seznam většinou zcela formálních nedostatků, kterých jsem si povšiml. Považoval bych za vhodné, kdyby se studentka vyjádřila k připomínkám 5, 11, 12, 20, 32. Myslím, že by se v uvedených případech hodila podrobnější vysvětlení. Odpovídalo by to tomu, že práce je ve své rozhodující většině psána velmi podrobně a srozumitelně. U připomínky (otázky) 25 by snad sjednocení lemmat mohlo být vhodným vylepšením textu? U připomínek 8, 18 a 28 jde o omyly, které lze snadno napravit. V každém případě považuji diplomovou práci za velmi zdařilou.

1. Str. 2, řádek 18 shora ... čtenář v tuto chvíli neví, co se "ekvivalencí" myslí; není ani později explicitně definováno.

2. Str. 8, řádek 2 shora ... možná též díky Hahn-Banachově větě jako leccos jiného, např. o 4 řádky níže explicitně zmíněné (trocha nekonzistence?).

3. Str. 8, řádek 6 zdola ... předposlední rovnost (ne nerovnost).

4. Definice 1.19 ... v případě řádku s $\hat{d}(...)$ nejde o definice.

5. Str. 12, řádek 12 zdola ... "můžeme předpokládat" existenci limit přechodem k vhodným podposloupnostem?; myslí se o těch x_m^* a x_n, která splňují zároveň $(i), (ii), (iii)$? Nemyslí se spíš jen, že "můžeme vybrat" podposloupnosti, aby vše konvergovalo a pak užít, že jsou vybrány z posloupností splňujících $(i), (ii), (iii)$? Pro zajímavost však: lze to v silnějším smyslu, jak tomu v textu rozumím?

6. Str. 13, řádek 14 shora ... užívá se to, že B_{E^*} je symetrická (na rozdíl od H)? Vzhledem k podrobnosti jinde (např. konečně mnoho členů vzápětí) by bylo dobré vysvětlit.

7. Str. 14, řádek 3 zdola ... bez explicitního připomenutí, že existuje limita, je lepší aspoň napsat rovnost.

8. Str. 14, řádek 2 zdola ... místo ostré nerovnosti rovnost?

9. Lemma 2.7 ... lépe předpokládat C neprázdná, než to vysvětlovat (či nevysvětlovat) v důkaze?

10. Str. 17, řádek 6 zdola ... pro každé ...

11. Str. 19, řádek 10 shora ... zaslouží podrobnější vysvětlení (x^{**} hromadný bod H, definice p a nějaká spojitost?).

12. Str. 19, řádek 7 zdola ... hádám správně, že x^{**} a x jsou přehozeny? Prosím tak jako tak vysvětlit podrobněji.

13. Str. 20, řádek 5 zdola ... "dokázat dokázat".

14. Str. 20, řádek 4 zdola ... "Celé tvrzení ...". Nepatří do důkazu. Působí dojmem, že snadněji jsou dokázány jen některé (totiž ty explicitně uvedené) z nerovností Tvrzení 2.10.

15. Str. 22, řádek 4 shora ... "Kdekoliv ve větě může nastat rovnost." Bez dalšího nezajímavé sdělení. $\frac{1}{2}\gamma(H) = \gamma(H)$ pro slabě kompaktní H, pak i ostatní ...

16. Str. 27, řádky 17, 15 zdola ... N namísto $\mathbb{N}$.

17. Str. 29 ... bylo by dobré připomenout Příklad 3.3.

18. Str. 31, řádek 15 shora ... je skutečně posloupnost (λ_n) libovolná?, není v ℓ_1?

19. Str. 31, řádek 18 shora ... první nerovnost zaslouží komentář? užijeme, že $(\lambda_n) \in \ell_1$, F_n disjunktní a doplníme nuly pro $i \notin \bigcup F_n$?

20. Str. 32, řádek 8 shora ... "neobsahuje kopii" v jakém smyslu? myslím, že nebylo definováno těmito slovy; izomorfně? izometricky?

21. Str. 32, řádek 16 shora ... "je ... je".

22. Str. 32, řádek 16 shora ... "dle předpokladu", jakého? zaslouží podrobnější vysvětlení.

23. Str. 33, řádky 2, 3 zdola ... nebyl by špatný odkaz na definici 1.16 a následující formule (asi by bylo dobré je nějak označit pro ten účel).

24. Str. 34, řádky 4-6 shora ... "nějaké podmínky" moc neříká; např. reflexivní?

25. Lemma 5.3 ... lze zformulovat nějaké lemma, které by sloužilo pro důkaz Lemmatu 2.8 i 5.3, aby se společná část důkazu neopakovala?

26. Str. 38, řádek 3 shora … možná lze jasněji formulovat, když zdůrazníme, že dokážeme nerovnosti z předpokladu, že E je libovolný s B_{E^*} w^*-andělskou a pak dokázané užijeme na $E = \overline{\operatorname{span} H}$ a H?

27. Str. 38, řádek 8 shora … "Volme libovolné …"; nemusí existovat; lépe "Nechť …" či "Předpokládejme, že …".

28. Str. 38, řádek 15 zdola … $r = 0$?; spíš $r > \sup x^{***}(E) = 0$? (Pak $r + \varepsilon > \varepsilon$, což tím spíš stačí.).

29. Věta 5.11 … H je libovolná omezená neprázdná podmnožina E?

30. Příklad 6.5 … bylo by vhodné v důkazu vlastností Příkladu 3.7 označit nerovnosti, na které se teď odkazuje, když už se musíme odkazovat na důkaz.

31. Str. 45, řádek 6 zdola … "měří měří".

32. Str. 47, řádek 7 zdola … Stačí dokázat …, protože $\mathrm{ck}_{\mathrm{aco}}(\mathrm{aco}\, H) = \mathrm{ck}_{\mathrm{co}}(\mathrm{aco}\, H)$?

V Praze dne 28.8.2012.

Doc. RNDr. Petr Holický, CSc.