Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Eva Nováková

Markovské procesy (analytický a pravděpodobnostní přístup)

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Josef Janák
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2012

Ráda bych zde poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce Mgr. Josefu Janákovi za trpělivost, studijní materiály a věcné rady, které mi poskytl.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Markovské procesy (analytický a pravděpodobnostní přístup)

Autor: Eva Nováková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Josef Janák, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

E-mail vedoucího: janak@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Bakalářská práce se věnuje základům teorie markovských řetězců. První čtyři kapitoly seznamují čtenáře se základními pojmy a tvrzeními o markovských řetězcích, jak se spojitou, tak s diskrétní množinou stavů, ve spojitém i diskrétním čase. V poslední kapitole jsou uvedeny základní příklady jednotlivých typů markovských řetězců. Závěr popisuje souvislosti mezi typy markovských řetězců, zda a jak si jednotlivé definice odpovídají.

Klíčová slova: markovský řetězec, náhodné procesy, invariatní míra

Title: Markov processes (analytic and probabilistic point of view)

Author: Eva Nováková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Josef Janák, Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor's e-mail address: janak@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This Bachelor Thesis tackles the basics of the Markov chains theory. The first four chapters describe fundamental definitions and theorems of the theory of Markov chains, both in continuous and discrete time and both with discrete and general state space. The last chapter contains examples of each type of Markov chains. The conclusion describes the relation between all four types of Markov chains.

Keywords: Markov chain, Stochastic processes, Invariant measure

Obsah

Úvod

Cílem této práce je seznámit čtenáře se základními pojmy z teorie markovských řetězců, jež má široké uplatnění v mnoha aplikacích, například ve finanční matematice nebo přírodních vědách.

Markovské řetězce jsou náhodné procesy, které splňují určitou podmínku nezávislosti na minulosti. Tato podmínka se nazývá markovská vlastnost a přesněji říká, že známe-li stav procesu v čase t_0, nezávisí jeho budoucí vývoj (tj. v jakých stavech bude v časech $t > t_0$) na jeho vývoji v minulosti (tj. v jakých stavech byl v časech $t < t_0$). Čas může být buď diskrétní ($t \in \mathbb{N}_0$) nebo spojitý ($t \in T \subset \mathbb{R}$). Také množina hodnot, kterých řetězec nabývá, může být diskrétní nebo spojitá. Existují tedy celkem čtyři typy markovských řetězců, jejichž základní vlastnosti a charakteristiky popíšeme v následujích kapitolách.

V první kapitole se čtenář seznámí s nejjednodušším typem markovských řetězců – s řetězcem s diskrétním časem a diskrétními stavy, kterými se zabývá [1]. Mezi tyto markovské řetězce patří například proces zaznamenávající stav konta hráče hrajícího hazardní hru s dalším hráčem. Přesněji, hráč A má na začátku kapitál a, hráč B kapitál b. V každém kole zaplatí poražený vítězi jednu jednotku. Hra končí v okamžiku, kdy je jeden z hráčů bez peněz. Veličina odpovídající stavu konta hráče A je markovský řetězec s diskrétním časem a diskrétní množinou stavů.

Druhá kapitola se věnuje také procesům s diskrétními stavy, ale se spojitým časem, které jsou taktéž popsány v [1]. Příkladem takového markovského řetězce jsou systémy hromadné obsluhy, ve kterých se můžeme zabývat otázkou, kolik prvků bude ve frontě nějakého systému (například, kolik lidí bude čekat u pokladny). Předpokládáme-li, že v intervalu $(t, t+h)$ bude obsloužen jeden zákazník s pravděpodobností $\mu h+o(h)$ a ve stejném intervalu přijde do fronty další zákazník s pravděpodobností $\lambda h+o(h)$, pak veličiny X_t udávající počet zákazníků ve frontě tvoří markovský řetězec.

Třetí kapitola popisuje markovské řetězce se spojitými stavy a s diskrétním časem. Tyto řetězce se používají například při generování pseudonáhodných čísel nebo při numerických výpočtech složitých integrálů tzv. metodou Monte Carlo, které se věnuje text [3].

Ve čtvrté kapitole jsou popsány markovské procesy se spojitým časem i spojitými stavy, kterým je věnována přednáška [4]. Takovým markovským procesem je například Brownův pohyb.

V poslední kapitole jsou pak získané teoretické poznatky aplikovány na konkrétní příklady. Je ale otázka, zda jsou si jednotlivé typy řetězců nějakým způsobem podobné. Odpověď se pokusíme najít v závěru, ve kterém porovnáme jednotlivé definice markovské vlastnosti, vyjádření Chapman-Kolmogorovovy rovnosti a definice stacionárního rozdělení.

1. MŘ s diskrétní množinou stavů a diskrétním časem

Markovské řetězce jsou speciálním případem náhodných procesů, uvedeme zde proto nejprve základní pojmy týkající se náhodných procesů obecně.

Definice 1.1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $T \subset \mathbb{R}$ a $X_t, t \in T$, jsou reálné náhodné veličiny z $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Pak ***náhodný proces*** je soubor $\{X_t, t \in T\}$. Prvky množiny T jsou časové okamžiky, ve kterých řetězec pozorujeme. Pokud $T = \mathbb{N}_0$ nebo $T = \mathbb{Z}$, pak řekneme, že $\{X_t, t \in T\}$ je proces s ***diskrétním časem***. Je-li $T = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, pak $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces se ***spojitým časem***.

Definice 1.2. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces, S množina hodnot náhodných veličin X_t. Pak S se nazývá ***množina stavů*** a dvojice $(S, \mathcal{E})$, kde $\mathcal{E}$ je σ-algebra podmnožin S, se nazývá ***stavový prostor*** procesu $\{X_t, t \in T\}$.

1.1 Základní pojmy

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ náhodný proces nabývající celočíselných hodnot, tj. S je ve tvaru $\{i \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : P(X_n = i) > 0\}$. Tedy S je buď konečná nebo spočetně nekonečná a bez újmy na obecnosti budeme dále předpokládat, že $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ nebo $S = \mathbb{N}_0$.

Definice 1.3. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je náhodný proces, řekneme, že je ***markovský řetězec***, pokud splňuje

$$\mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad (1.1)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $i, j, i_0, \ldots, i_{n-1} \in S$ taková, že $\mathsf{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) > 0$. Vztah (1.1) se nazývá ***markovská vlastnost***.

Markovská vlastnost tedy říká, že pravděpodobnost toho, že v čase $n+1$ bude řetězec ve stavu j, závisí pouze na tom, kde se nachází v čase n. Pro zjednodušení budeme v této kapitole označovat markovský řetězec $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ pouze symbolem $\{X_n\}$.

Nyní zavedeme označení pro podmíněné pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$ a seznámíme se s pojmem homogenity, neboť se budeme zabývat převážně řetězci, které jsou homogenní.

Definice 1.4. Nechť $\{X_n\}$ je markovský řetězec. Budeme vždy předpokládat, že podmíněná pravděpodobnost $\mathsf{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$ je definována a nazveme jí ***pravděpodobností přechodu*** ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n + m$ (obecně budeme výrazy tohoto typu nazývat ***pravděpodobností přechodu*** m-***tého řádu***) a budeme jí značit $p_{ij}(n, n + m)$.

Pokud $\mathsf{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = i) = \mathsf{P}(X_m = j \mid X_0 = i)$, tedy $p_{ij}(n, n+m) = p_{ij}(0, m)$, pak říkáme, že $\{X_n\}$ je ***homogenní řetězec***. Vzhledem k tomu, že pro homogenní řetězec je podmíněná pravděpodobnost $\mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ nezávislá na n, budeme pro homogenní řetězce pravděpodobnost přechodu prvního řádu značit pouze p_{ij}.

Pravděpodobnosti přechodu prvního řádu můžeme uspořádat do čtvercové matice $\mathbf{P} = \{p_{ij}, i, j \in S\}$, kterou nazveme ***matice pravděpodobností přechodu*** a pro kterou (z definice p_{ij}) platí

1. $p_{ij} \geq 0$ pro $\forall i, j \in S$,
2. $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$.

Matice, která splňuje 1. a 2. se nazývá stochastická.

Definice 1.5. Pro homogenní markovský řetězec $\{X_n\}$ definujeme $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$, $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$, $p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$, kde symbolem δ_{ij} rozumíme Kroneckerovo delta (tedy $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$). Matici $\{p_{ij}^{(n)}, i, j \in S\}$ označíme $\mathbf{P}^{(n)}$.

Z definice $p_{ij}^{(n)}$ plyne pro matici pravděpodobností přechodu vztah:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{P}^n,\ n \geq 1.$$

Jelikož mocnina stochastické matice je opět stochastická, jsou i matice $\mathbf{P}^{(n)}, n > 1$, stochastické.

Následující věta říká, co vlastně výše definované veličiny znamenají.

Věta 1.6. *Pro homogenní markovský řetězec $\{X_n\}$ s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ platí $\mathsf{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = i) = p_{ij}^{(m)}$ pro $\forall m \in \mathbb{N}_0$ a $\forall n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $P(X_n = i) > 0$.*

Důkaz. Použijeme indukci podle m. Nechť $m = 1$, pak $\mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$. Nechť tvrzení platí pro m, pro $m+1$ dostáváme

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_{n+m+1} = j \mid X_n = i) &= \sum_{k \in S} \mathsf{P}(X_{n+m+1} = j, X_{n+m} = k \mid X_n = i) \\ &= \sum_{k \in S} \mathsf{P}(X_{n+m+1} = j \mid X_{n+m} = k, X_n = i) \mathsf{P}(X_{n+m} = k \mid X_n = i)\ .\end{aligned}$$

Z markovské vlastnosti plyne, že $\mathsf{P}(X_{n+m+1} = j \mid X_{n+m} = k, X_n = i) = \mathsf{P}(X_{n+m+1} = j \mid X_{n+m} = k)$. A protože předpokládáme, že je řetězec homogenní, tak $\mathsf{P}(X_{n+m+1} = j \mid X_{n+m} = k) = \mathsf{P}(X_1 = j \mid X_0 = k)$. Dostáváme tedy

$$\mathsf{P}(X_{n+m+1} = j \mid X_n = i) = \sum_{k \in S} p_{kj} p_{ik}^{(m)} = p_{ij}^{(m+1)}\ ,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Rovnost $p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$ z definice 1.5 platí v obecnějším znění:

Věta 1.7. *Nechť $\{X_n\}$ je homogenní markovský řetězec, potom platí* ***Chapman-Kolmogorovova rovnost***

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}, \ \forall m, n \in \mathbb{N}_0 \ . \tag{1.2}$$

Důkaz. Víme, že $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{(n)}$, tedy $\mathbf{P}^m\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{m+n} = \mathbf{P}^{(m+n)}$. Protože $p_{ij}^{(m+n)}$ je prvek matice $\mathbf{P}^{(m+n)}$, můžeme ho díky předchozí úvaze vyjádřit jako $\sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$, což jsme chtěli dokázat. □

Nyní zavedeme další důležitý pojem.

Definice 1.8. Nepodmíněné pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X_n = i), n \in \mathbb{N}$ označíme $p_i(n)$ a nazveme je ***absolutní pravděpodobnosti***.

Pro $n = 0$ značíme $\mathsf{P}(X_0 = i) = p_i$ a pravděpodobnostní vektor[1] $\mathbf{p} = \{p_i, i \in S\}$ nazýváme ***počáteční rozdělení*** řetězce $\{X_n\}$.

Poznámka. Absolutní pravděpodobnost v čase n získáme následujícím výpočtem.

$$\begin{aligned} p_j(n) = \mathsf{P}(X_n = j) = \sum_{k\in S} \mathsf{P}(X_n = j, X_0 = k) = \\ = \sum_{k\in S} \mathsf{P}(X_0 = k)\mathsf{P}(X_n = j \mid X_0 = k) = \sum_{k\in S} p_k p_{kj}^{(n)}. \end{aligned}$$

Tento vztah můžeme zapsat pomocí matice pravděpodobností přechodu jako $\mathbf{p}(n)^T = \mathbf{p}^T\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{p}^T\mathbf{P}^n$, kde $\mathbf{p}(n) = \{p_i(n), i \in S\}$ je vektor absolutních pravděpodobností.

Věta 1.9. *Nechť $\{X_n\}$ je homogenní markovský řetězec s počátečním rozdělením $\mathbf{p} = \{p_j, j \in S\}$ a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. Pak pro konečně rozměrná rozdělení platí $\mathsf{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}$.*

Důkaz. Nechť pro každé $m < n$ platí $\mathsf{P}(X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m) > 0$, pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \mathsf{P}(X_0 = i_0)\mathsf{P}(X_1 = i_1 \mid X_0 = 0) \dots \\ \dots \mathsf{P}(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n} \ . \end{aligned}$$

Nechť existuje $m < n$ takové, že $\mathsf{P}(X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m) = 0$. Najdeme nejmenší takové a označíme ho m^*, tj. $m^* = \min\{m \geq 0 \mid \mathsf{P}(X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m) = 0\}$. Pak $\mathsf{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{m^*-1} = i_{m^*-1}) > 0$, můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} p_{i_{m^*-1} i_{m^*}} &= \mathsf{P}(X_{m^*} = i_{m^*} \mid X_0 = i_0, \dots, X_{m^*-1} = i_{m^*-1}) \\ &= \frac{\mathsf{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{m^*} = i_{m^*})}{\mathsf{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{m^*-1} = i_{m^*-1})} = 0 \,. \end{aligned}$$

□

[1](Sloupcový) vektor $\mathbf{a} = \{a_j, j \in S\}$ splňující $a_j \geq 0 \ \forall j \in S$ a $\sum_{j\in S} a_j = 1$ se nazývá ***pravděpodobnostní vektor***.

1.2 Klasifikace stavů

Jednotlivé stavy markovského řetězce lze klasifikovat podle několika kritérií. Například podle pravděpodobnosti toho, jestli řetězec daný stav někdy navštíví, a pokud ano, jestli se do daného stavu vrátí.

Definice 1.10. Nechť $\{X_n\}$ je markovský řetězec, pak definujeme ***čas prvního návratu*** (resp. ***vstupu***) do j předpisem[2] $\tau_j(1) = \inf\{n > 0 \mid X_n = j\}$.

Pokud $\mathsf{P}(X_0 = j) = 1$, pak τ_j je čas prvního návratu do j, pokud $\mathsf{P}(X_0 = j) = 0$ pak τ_j je čas prvního vstupu.

Poznámka. Pro jednoduchost budeme v následujícím textu používat značení $\mathsf{P}_j(A) = \mathsf{P}(A \mid X_0 = j)$, kde předokládáme, že počáteční rozdělení je zvoleno tak, aby $P(X_0 = j) > 0$. Střední hodnotu počítanou vzhledem k P_j označíme $\mathbb{E}_j$.

Pomocí času prvního návratu můžeme popsat jednotlivé stavy řetězce:

Definice 1.11. Nechť $\{X_n\}$ je markovský řetězec, $j \in S$. Stav j se nazývá ***trvalý***, pokud $\mathsf{P}_j(\tau_j(1) < \infty) = 1$. Je-li $\mathsf{P}_j(\tau_j(1) = \infty) > 0$, pak se stav j nazývá ***přechodný***.

Trvalé stavy můžeme dále rozdělit podle střední hodnoty doby návratu.

Definice 1.12. Nechť $\{X_n\}$ je markovský řetězec a $j \in S$ trvalý stav. Řekneme, že j je ***nenulový***, jestliže $\mu_j = \mathbb{E}_j \tau_j(1) < \infty$. Je-li $\mu_j = \infty$, řekneme, že stav j je ***nulový***.

Je-li stav nenulový, tak se řetězec dostane do stavu j v průměru v konečném čase. Pokud je ovšem nulový, pak je předpokládaná doba návratu nekonečno. Pokud je S konečná, pak jsou všechny trvalé stavy nenulové (důkaz je možné najít v [1, str. 41]).

Definice 1.13. Nechť $\{X_n\}$ je markovský řetězec, $j \in S$. Stav j se nazývá ***absorpční***, pokud $p_{jj} = 1$.

Definice 1.14. Definujme $f_{ij}^{(0)} = 0$, $f_{ij}^{(n)} = P_i(\tau_j(1) = n)$, $n \geq 1$, a $f_{ij} = P_i(\tau_j(1) < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$. Výraz $f_{ij}^{(n)}$ udává rozdělení času n prvního návratu.

Poznámka. Z předchozí definice je zřejmé, že stav j je trvalý právě tehdy, když $f_{jj} = 1$, a přechodný právě tehdy, když $f_{jj} < 1$.

Věta 1.15. *Nechť P_{jj} je vytvořující funkce[3] posloupnosti $\{p_{jj}^{(n)}\}$ a nechť F_{jj} je vytvořující funkce $\{f_{jj}^{(n)}\}$. Pak $P_{jj}(s) = \frac{1}{1-F_{jj}(s)}$,* $0 \leq s < 1$.

[2] Tento předpis je pouze zkrácený zápis náhodné veličiny definované $\tau_j(1)(\omega) = \inf\{n > 0 \mid X_n(\omega) = j\}$.

[3] Nechť $\{a_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost reálných čísel. Pokud pro nějaké $s_0 > 0$ platí, že pro $|s| < s_0$ je $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ konvergentní, pak $A(s)$ se nazývá ***vytvořující funkcí*** posloupnosti $\{a_n\}$.

Důkaz. Platí:

$$P_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} s^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{k=0}^{n} f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = 1 + F_{jj}(s) P_{jj}(s) \ .$$

□

Věta 1.16. *Nechť $\{X_n\}$ je homogenní markovský řetězec, $j \in S$. Pak j je trvalý $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$ a j je přechodný $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$.*

Důkaz. Stav j je trvalý $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1 \Leftrightarrow F_{jj}(1) = 1 \Leftrightarrow P_{jj}(1) = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$. □

Věta 1.17. *Nechť $j \in S$ je trvalý stav markovského řetězce $\{X_n\}$. Pak j je nulový $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$.*

Důkaz. Důkaz je uveden např. v [1, str. 35]. □

Další možný pohled pro popisování stavů řetězce je periodicita.

Definice 1.18. Nechť $\{X_n\}$ je markovský řetězec, $j \in S$. Označme $d_j = \mathrm{NSD}(n \geq 1 \mid p_{jj}^{(n)} > 0)$. Pokud $d_j > 1$, pak se stav j nazývá ***periodický s periodou** d_j*. Pokud $d_j = 1$, pak se stav j nazývá ***neperiodický***.

Poznámka. Je-li $p_{jj} > 0$, pak $d_j = 1$, tedy stav j je neperiodický. Obrácená implikace ale neplatí, i stav, pro který je $p_{jj} = 0$, může být neperiodický.

Definice 1.19. Nechť $\{X_n\}$ je markovský řetězec, $i, j \in S$. Stav j je ***dosažitelný*** z i právě tehdy, když $\exists n \in \mathbb{N}_0 : p_{ij}^{(n)} > 0$. Je-li $p_{ij}^{(n)} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, pak stav j ***není dosažitelný*** ze stavu i.

Definice 1.20. Množina $C \subset S$ je ***uzavřená***, pokud $\forall i \in C\ \forall j \in S \setminus C$ platí, že j není dosažitelný z i.

Definice 1.21. Nechť $\{X_n\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů S. Řekneme, že $A \subset S$ je ***nerozložitelná***, pokud neobsahuje žádnou vlastní uzavřenou podmnožinu (tj. pokud je každý stav v A dosažitelný z každého stavu v A). Pokud je množina S uzavřená, pak řekneme, že řetězec $\{X_n\}$ je ***nerozložitelný***. Obsahuje-li S vlastní uzavřenou podmnožinu, pak se řetězec nazývá ***rozložitelný***.

Věta 1.22. *Množina $C \subset S$ je uzavřená $\Leftrightarrow \forall i \in C, j \notin C : p_{ij} = 0$.*

Důkaz. $\Rightarrow$: Nechť C je uzavřená, pak žádný stav z $S \setminus C$ není dosažitelný z žádného stavu z C. Vyjádříme-li tuto definici pomocí pravděpodobností přechodu, dostáváme, že $p_{ij}^{(n)} = 0$ pro $\forall i \in C, \forall j \in S \setminus C$ a $\forall n \in \mathbb{N}_0$, tedy i pro $n = 1$.

$\Leftarrow$: Nechť $i \in C, j \notin C$, pak $p_{ij} = 0$. Chceme dokázat, že $p_{ij}^{(n)} = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}_0$. K důkazu použijeme matematickou indukci. Pro $n = 0$ a $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že platí také pro $n > 1$. Z definice $p_{ij}^{(n+1)}$ je

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \ .$$

Je-li $k \in C$, pak $p_{kj} = 0$, neboť $j \notin C$. Pokud $k \notin C$, pak $p_{ik}^{(n)} = 0$ z indukčního předpokladu. Sčítáme tedy pouze nuly a dostáváme $p_{ij}^{(n+1)} = 0$. □

1.3 Stacionární rozdělení

Definice 1.23. Nechť $\{X_n\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. Nechť $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, j \in S\}$ je pravděpodobnostní vektor na S. Pokud $\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}$ pro $\forall j \in S$, tj. $\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P}$, pak $\boldsymbol{\pi}$ nazýváme ***vektorem stacionárního rozdělení***.

Věta 1.24. *Nechť $\{X_n\}$ je nerozložitelný homogenní markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. Pak platí následující tvrzení.*

1. *Pokud jsou všechny stavy řetězce přechodné nebo pokud jsou všechny trvalé nulové, pak stacionární rozdělení neexistuje.*

2. *Pokud jsou všechny stavy trvalé nenulové, pak existuje právě jedno stacionární rozdělení.*

3. *Nechť jsou všechny stavy trvalé nenulové. Pokud jsou všechny stavy neperiodické, pak $\boldsymbol{\pi}$ definované vztahem $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$ je vektor stacionárního rozdělení. Pokud jsou všechny stavy periodické, pak $\boldsymbol{\pi}$ definované vztahem $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}$ je vektor stacionárního rozdělení.*

Důkaz. Důkaz čtenář nalezne např. v [1, str. 52]. □

Poznámka. V nerozložitelném řetězci s konečnou množinou stavů stacionární rozdělení vždy existuje, neboť jsou všechny jeho stavy trvalé nenulové (důkaz je uveden v [1, str. 41]).

2. MŘ s diskrétní množinou stavů a spojitým časem

2.1 Základní pojmy

Nejprve opět definujeme pojem markovského řetězce, tentokrát pro procesy se spojitým časem. Stále pracujeme s pravděpodobnostním prostorem $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a náhodným procesem, který nabývá pouze celočíselných hodnot, ovšem v časech $t \in [0, \infty)$. Náhodné procesy, o kterých budeme hovořit, jsou tedy tvaru $\{X_t, t \geq 0\}$ a pojem markovskosti pro ně definujeme takto:

Definice 2.1. Náhodný proces s diskrétní množinou stavů $\{X_t, t \geq 0\}$ je ***markovský řetězec se spojitým časem***, pokud splňuje

$$\mathsf{P}(X_t = j \mid X_s = i, X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_0} = i_0) = \mathsf{P}(X_t = j \mid X_s = i) \tag{2.1}$$

pro všechna $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n < s < t$ a všechna $i, j, i_n, i_{n-1}, \ldots, i_0 \in S$ taková, že $\mathsf{P}(X_s = i, X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = i_0) > 0$. Vztah (2.1) se nazývá ***markovská vlastnost***.

Pro zjednodušení budeme v této kapitole označovat markovské řetězce pouze symbolem $\{X_t\}$ na místo $\{X_t, t \geq 0\}$. Definujeme nyní důležité pojmy analogické předchozí kapitole:

Definice 2.2. Nechť $\{X_t\}$ je markovský řetězec, pak pro $t > s$ definujeme ***pravděpodobnost přechodu*** ze stavu i v čase s do stavu j v čase t předpisem $p_{ij}(s,t) = \mathsf{P}(X_t = j \mid X_s = i)$.

Splňuje-li řetězec $\forall s, t \geq 0$ rovnost $p_{ij}(s, s+t) = p_{ij}(0, t)$, pak se nazývá ***homogenní***. Pro homogenní řetězec značíme $p_{ij}(t) = p_{ij}(0,t)$. Dále definujeme $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$. ***Absolutní pravděpodobnost*** v čase t definujeme vztahem $p_j(t) = \mathsf{P}(X_t = j)$.

Poznámka. Z pravděpodobností přechodu můžeme opět vytvořit matice, jednotlivé pravděpodobnosti ovšem závisí na čase. Proto bude pro každé $t \geq 0$ vypadat matice pravděpodobností přechodu jinak a markovskému řetězci $\{X_t\}$ bude odpovídat celý soubor stochastických matic $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$.

I pro homogenní řetězce se spojitým časem platí rovnost (1.2), a to v následujícím tvaru:

Věta 2.3. *Nechť $\{X_t\}$ je homogenní markovský řetězec, pak platí*

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t), \ i, j \in S \ . \tag{2.2}$$

Vztah (2.2) *se nazývá* ***Chapman-Kolmogorovova rovnost****.*

Důkaz.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_{s+t}=j \mid X_0=i) &= \sum_{k\in S}\mathsf{P}(X_{s+t}=j, X_s=k \mid X_0=i)\\ &= \sum_{k\in S}\mathsf{P}(X_{s+t}=j \mid X_s=k, X_0=i)\mathsf{P}(X_s=k \mid X_0=i)\ .\end{aligned}$$

Díky homogenitě a markovské vlastnosti je poslední výraz roven $\sum_{k\in S} p_{ik}(s)p_{kj}(t)$, což jsme chtěli dokázat. □

2.2 Matice intenzit a Kolmogorovovy diferenciální rovnice

Před uvedením dalších vlastností markovských řetězců definujeme pojmy pro náhodný proces $\{X_t, t\in T\}$, kde $T\subset\mathbb{R}$, který nemusí mít markovskou vlastnost. Rádi bychom zajistili, aby nespočetný průnik $\bigcap_{a\le t\le b}\{\omega \mid X_t(\omega)=j\}$ byl náhodný jev, tedy abychom mohli počítat pravděpodobnosti jevu $[\forall t\in[a,b]: X_t=j]$. To nám zajistí následující definice.

Definice 2.4. Nechť $T\subset\mathbb{R}$ je interval a $\{X_t, t\in T\}$ náhodný proces. Pokud v T existuje spočetná hustá podmnožina D a existuje-li jev $\Lambda\subset\Omega$, pro který platí, že $P(\Lambda)=0$ a že pro každou uzavřenou množinu $C\subset\mathbb{R}$ a libovolný otevřený interval $I\subset T$ je $\{\omega \mid \forall t\in I\cap D: X_t(\omega)\in C\}\setminus\{\omega \mid \forall t\in I\cap T: X_t(\omega)\in C\}\subset\Lambda$. Pak se proces $\{X_t, t\in T\}$ nazývá ***separabilní***.

Dále definujeme spojitost podle pravděpodobnosti neboli stochastickou spojitost.

Definice 2.5. Nechť $\{X_t, t\in T\}$ je náhodný proces a nechť $t_0\in T$. Je-li $\forall\varepsilon>0: \lim_{t\to t_0}\mathsf{P}(|X_t-X_{t_0}|>\varepsilon)=0$, pak řekneme, že $\{X_t, t\in T\}$ je ***stochasticky spojitý v bodě*** t_0. Náhodný proces nazveme ***stochasticky spojitým***, jestliže je stochasticky spojitý v každém bodě T.

Se znalostí těchto pojmů můžeme vyslovit následující důležitou větu.

Věta 2.6. *Každý stochasticky spojitý náhodný proces má stochastickou verzi*[1]*, která je separabilní.*

Důkaz. Důkaz je uveden v [2]. □

Vraťme se nyní k markovským řetězcům a uvažujme homogenní markovský řetězec $\{X_t\}$ se spojitým časem, který navíc splňuje $\lim_{t\to0+}p_{ij}(t)=\delta_{ij}$. Z této podmínky společně s předpokladem $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$ plyne, že řetězec $\{X_t\}$ je stochasticky spojitý (důkaz čtenář nalezne např. v [1, str. 73]). Z předchozí věty dostáváme, že existuje separabilní verze procesu $\{X_t\}$. V následujícím textu budeme uvažovat právě tuto verzi, kterou (vzhledem k předpokladu $\lim_{t\to0+}p_{ij}(t)=\delta_{ij}$) umíme vždy najít.

[1] Nechť $\{X_t\}$ a $\{Y_t\}$ jsou náhodné procesy. Pokud $\mathsf{P}(X_t=Y_t)=\mathsf{P}(\{\omega \mid X_t(\omega)=Y_t(\omega)\})=1$, pak proces $\{Y_t\}$ nazveme ***stochastickou verzí*** procesu $\{X_t\}$.

Věta 2.7. *Nechť $\{X_t\}$ je řetězec s výše zmíněnými vlastnostmi, pak $\forall i \in S$ existuje (ne nutně konečná) $\lim_{h\to 0+} \frac{1-p_{ii}(h)}{h}$, kterou značíme q_i a nazýváme* ***celková intenzita*** *stavu i.*

Pro každé $i, j \in S$, $i \neq j$, existuje $\lim_{h\to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h}$, kterou značíme q_{ij} a nazýváme ***intenzita přechodu*** *ze stavu i do stavu j.*

Dále definujeme $q_{ii} = -q_i$ a platí $\forall i \in S : \sum_{j\in S} q_{ij} \leq 0$, tj. $\sum_{i\neq j} q_{ij} \leq q_i$.

Důkaz. Důkaz může čtenář nalézt v [1, str. 74]. □

V následujícím textu budeme uvažovat pouze řetězce, pro které $q_i = \sum_{i\neq j} q_{ij}$. Intenzity přechodu můžeme uspořádat do matice následovně:

Definice 2.8. Matice $\mathbf{Q} = \{q_{ij}, i, j \in S\}$ se nazývá ***matice intenzit***.

Z předpokladu rovnosti celkové intenzity a součtu intenzit přechodu plyne, že součet prvků v řádcích matice je nula, a z definice celkové intenzity plyne, že na diagonále jsou záporná čísla, případně nuly ($\mathbf{Q}$ tedy není stochastická).

Vztah mezi maticí intenzit a maticemi pravděpodobností přechodu popisují Kolmogorovovy diferenciální rovnice.

Věta 2.9. *Nechť $\{X_t\}$ je markovský řetězec s maticí intenzit $\mathbf{Q}$ a nechť $\forall i \in S$ je $q_i < \infty$. Pak $\forall i, j \in S$ jsou p_{ij} diferencovatelné a platí* ***Kolmogorovovy retrospektivní diferenciální rovnice*** $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$*, tedy:*

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in S} q_{ik} p_{kj}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} q_{ik} p_{kj}(t) \ .$$

Pokud $\frac{p_{ij}(h)}{h}$ konvergují ke q_{ij} stejnoměrně v i, pak platí ***Kolmogorovovy prospektivní diferenciální rovnice*** $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$*, tedy:*

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(t) q_{kj} = -p_{ij}(t) q_j + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t) q_{kj} \ .$$

Důkaz. Vychází z (2.2) a je uveden v [1, str. 83]. □

2.3 Klasifikace stavů

Věta 2.10. *Nechť $\{X_t\}$ je homogenní markovský řetězec, $i, j \in S, i \neq j$ a $0 < q_i < \infty$. Pak pravděpodobnost, že řetězec ze stavu i přejde nejprve do stavu j, je rovna $\frac{q_{ij}}{q_i}$.*

Důkaz. Důkaz je uveden v [1, str. 78]. □

Definice 2.11. Nechť $\{X_t\}$ je markovský řetězec s maticí intenzit $\mathbf{Q}$, $j \in S$. Řekneme, že stav j je ***absorpční***, pokud $q_j = 0$. Je-li $0 < q_j < \infty$, pak stav j se nazývá ***stabilní***. Je-li $q_j = \infty$, tj. pokud pro $\forall \varepsilon > 0$ je $\mathsf{P}(\forall t \in [0, \varepsilon] : X_t = j \mid X_0 = j) = 0$, pak se stav j nazývá ***nestabilní*** (resp. ***prchavý***).

Poznámka. Nechť j je absorpční stav markovského řetězce $\{X_t\}$, pak vzhledem k předpokladu $q_j = \sum_{j \neq k} q_{jk}$, bude j-tý řádek matice $\mathbf{Q}$ nulový.

Nechť $\{X_t\}$ je homogenní markovský řetězec. Nechť pro nějaké $i \in S$ platí $\mathsf{P}(X_0 = i) = 1$. Pokud je $q_i > 0$, pak řetězec setrvá v i po dobu, kterou označíme T_i, poté přejde s pravděpodobností $\frac{q_{ij}}{q_i}$ do stavu j. Je-li $q_j > 0$, řetězec setrvá ve stavu j po dobu T_j a poté s pravděpodobností $\frac{q_{jk}}{q_j}$ přejde do stavu k. Pokud je $q_j = 0$, pak řetězec zůstává navždy ve stavu j, tedy $T_j = \infty$, stav j je tedy absorpční.

Nechť $J_0 = 0$, $J_1 = \inf\{t > 0 \mid X_t \neq X_0\}$, $J_2 = \inf\{t > J_1 \mid X_t \neq X_{J_1}\}$, $\ldots$, $J_{n+1} = \inf\{t > J_n \mid X_t \neq X_{J_n}\}$. J_n jsou okamžiky[2], ve kterých dochází ke změně stavu řetězce. Doby mezi přechody pak můžeme vyjádřit jako $S_1 = J_1$, $S_2 = J_2 - J_1$ (pokud je $J_1 = \infty$, definujeme $S_2 = \infty$). Pro $n \geq 1$ je pak $J_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$.

Definice 2.12. ***Časem exploze*** nazveme náhodnou veličinu $\xi = \sup J_n = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$.

Definice 2.13. Nechť $\{X_t\}$ je homogenní řetězec se stabilními stavy splňující pro $\forall i \in S$ vztah $\mathsf{P}(\xi = \infty \mid X_0 = i) = 1$ se nazývá ***regulární***. Pokud řetězec není regulární, pak se nazývá ***explozivní***.

Definice 2.14. Pro markovský řetězec $\{X_t\}$ definujeme ***čas prvního návratu*** (resp. ***příchodu***) $\mathcal{T}_j(1)$ předpisem $\mathcal{T}_j(1) = \inf\{t \geq J_1, X_t = j\}$.

Definice 2.15. Nechť $\{X_t\}$ je markovský řetězec, $j \in S$. Řekneme, že stav j je ***trvalý***, pokud buď $q_j = 0$ nebo $q_j > 0$ a zároveň $\mathsf{P}(\mathcal{T}_j(1) < \infty \mid X_0 = j) = 1$. Je-li $q_j > 0$ a $P(\mathcal{T}_j(1) = \infty \mid X_0 = j) > 0$, pak stav j se nazývá ***přechodný***.

Definice 2.16. Nechť $\{X_t\}$ je markovský řetězec, $j \in S$ trvalý stav. Je-li $q_j > 0$ a zároveň $\mathbb{E}(\mathcal{T}_j(1) \mid X_0 = j) = \infty$, pak je stav j ***nulový***. Řekneme, že j je ***nenulový***, jestliže $q_j = 0$ nebo platí-li $q_j > 0$ a zároveň $\mathbb{E}(\mathcal{T}_j(1) \mid X_0 = j) < \infty$.

Poznámka. V markovských řetězcích se spojitým časem nedefinujeme periodické stavy.

Následující věta říká, jaká je pravděpodobnost toho, že řetězec v daném stavu setrvá alespoň danou dobu.

Věta 2.17. *Nechť $\{X_t\}$ je homogenní markovský řetězec, pak platí, že $\mathsf{P}(\forall t \in [s, s+h] : X_t = i \mid X_s = i) = e^{-q_i h}$ pro $\forall s \geq 0$ a pro $\forall h > 0$.*

Důkaz. Důkaz čtenář nalezne například v [1, str. 76]. $\square$

Věta 2.18. *Nechť $\{X_t\}$ je homogenní markovský řetězec. Nechť $q_j = 0$, pak pro $\forall t \geq 0$ je $p_{jj}(t) = 1$. Nechť $0 < q_j < \infty$, potom doba setrvání ve stavu j je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{q_j}$ (doba setrvání má tedy hustotu $f(t) = q_j e^{-q_j t}$, $t \geq 0$).*

[2] Jedná se ve skutečnosti o náhodné veličiny definované vztahy $J_{n+1}(\omega) = \inf\{t > J_n(\omega) \mid X_t(\omega) \neq X_{J_n(\omega)}(\omega)\}$.

Důkaz. Nechť $q_j = 0$, pak $p_{jj}(t) = \mathsf{P}(X_t = j \mid X_0 = j) \geq \mathsf{P}(\forall s \in [0,t] : X_s = j \mid X_0 = j) = e^{-q_j t} = e^0 = 1$.

Nechť $0 < q_j < \infty$. Označme dobu setrvání v j symbolem T_j. Pak platí $[T_j > x] = [\forall t \in [0,x] : X_t = j]$, tudíž $\mathsf{P}(T_j > x \mid X_0 = j) = \mathsf{P}(\forall t \in [0,x] : X_t = j \mid X_0 = j) = e^{-q_j x}$. Z toho plyne, že $\mathsf{P}(T_j \leq x \mid X_0 = j) = 1 - e^{-q_j x}, x \geq 0$, což je distribuční funkce exponenciálního rozdělení. □

Definice 2.19. Nechť $\{X_t\}$ je markovský řetězec, $i, j \in S$. Řekneme, že stav j je ***dosažitelný*** ze stavu i, pokud $\exists t > 0$ takové, že $p_{ij}(t) > 0$. Je-li každý stav dosažitelný z každého stavu, pak řekneme, že řetězec $\{X_t\}$ je ***nerozložitelný***.

2.4 Stacionární rozdělení

Definice 2.20. Nechť $\{X_t\}$ je homogenní markovský řetězec. Nechť $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, j \in S\}$ je pravděpodobnostní vektor na S. Potom π se nazývá ***stacionární rozdělení***, pokud pro $\forall t \geq 0$ platí $\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P}(t)$.

Definice 2.21. Nechť $\{X_t\}$ je homogenní markovský řetězec, $\boldsymbol{a} = (a_j, j \in S)$ je pravděpobnostní vektor. Pokud $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = a_j$ pro všechna $i, j \in S$, pak $\boldsymbol{a}$ se nazývá ***limitní rozdělení***.

Věta 2.22. *Nechť v markovském řetězci $\{X_t\}$ existuje limitní rozdělení, pak je stacionární.*

Důkaz. Nechť existuje limitní rozdělení $\{a_j\}$, tedy existují limity $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = a_j$ a $a_j \geq 0, \sum_{j\in S} a_j = 1$. Chceme dokázat, že je stacionární, tj. $a_j = \sum_{k\in S} a_k p_{kj}(t)$, $j \in S, t \geq 0$. Zvolme pevné $h \geq 0$, pak z Chapman-Kolmogorovovy rovnosti je $p_{ij}(t+h) = \sum_{k\in S} p_{ik}(t) p_{kj}(h)$. Limitním přechodem pro $t \to \infty$ dostáváme

$$a_j = \lim_{t\to\infty} \sum_{k\in S} p_{ik}(t) p_{kj}(h) \geq \sum_{k=0}^{N} \lim_{t\to\infty} p_{ik}(t) p_{kj}(h) = \sum_{k=0}^{N} a_k p_{kj(h)} \ .$$

Tedy $a_j \geq \sum_{k\in S} a_k p_{kj}(h)$ (v případě nekonečné S provedeme na obou stranách limitní přechod $N \to \infty$). Nechť pro nějaké j platí ostrá nerovnost, pak

$$1 = \sum_{j\in S} a_j > \sum_{j\in S} \sum_{k\in S} a_k p_{kj}(h) = \sum_{k\in S} a_k \sum_{j\in S} p_{kj}(h) = 1 \ .$$

Dospěli jsme ke sporu a tudíž platí $a_j = \sum_{k\in S} a_k p_{kj}(h)$. □

Věta 2.23. *Nechť $\{X_t\}$ je regulární markovský řetězec, definujme posloupnost náhodných veličin $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ předpisem $Y_0 = X_0$, $Y_n = X_{J_n}$ (tj. $Y_n(\omega) = X_{J_n(\omega)}(\omega)$). Pak $\{Y_n\}$ je markovský řetězec s diskrétním časem a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{Q}^* = \{q^*_{ij}, i, j \in S\}$, kde pro $q_i = 0$ je $q^*_{ij} = \delta_{ij}$ a pro $q_i > 0$ je $q^*_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$, pokud $i \neq j$, a $q^*_{jj} = 0$.*

Poznámka. Řetězec $\{Y_n\}$ definovaný v předchozí větě se nazývá ***vnořený diskrétní řetězec*** (někdy též ***skeleton***).

Poznámka. Pro markovský řetězec se spojitými stavy a jeho vnořený řetězec platí

$$\mathsf{P}(X_t = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(Y_n = i,\ J_n \leq t < J_{n+1})\ .$$

Poznámka. Nechť $\{X_t\}$ je markovský řetězec se spojitým časem a $\{Y_n\}$ vnořený řetězec. Pak $j \in S$ je trvalý v $\{X_t\}$ právě tehdy, když je trvalý v $\{Y_n\}$. Nemůžeme ale tvrdit, že stav, který je nenulový ve vnořeném řetězci bude nenulový také v $\{X_t\}$.

3. MŘ se spojitou množinou stavů a diskrétním časem

3.1 Základní pojmy

Definice 3.1. Nechť $(S, \mathcal{E})$ je meřitelný prostor a nechť funkce $P : S \times \mathcal{E} \to [0, 1]$ splňuje

1. $\forall x \in S$ je $P(x, \cdot)$ pravděpodobnostní míra na $\mathcal{E}$,
2. $\forall A \in \mathcal{E}$ je $P(\cdot, A)$ $\mathcal{E}$-měřitelná.

Pak P se nazývá ***markovské*** (resp. ***přechodové***) ***jádro*** na $(S, \mathcal{E})$.

Definice 3.2. Nechť S je obecná množina stavů, $\mathcal{E}$ spočetně generovaná σ-algebra a ρ pravděpodobnostní míra na S. Řekneme, že náhodný proces $\{X_n\}$ s obecnou množinou stavů S je ***homogenní markovský řetězec*** s počátečním rozdělením ρ a přechodovým jádrem P, pokud platí[1]

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \\ = \int_{A_0} \dots \int_{A_{n-1}} P(y_{n-1}, A_n) P(y_{n-2}, dy_{n-1}) \dots P(y_0, dy_1) \rho(dy_0) \end{aligned} \tag{3.1}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a pro všechna $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$.

Poznámka. Nechť $\{X_n\}$ je homogenní markovský řetězec s přechodovým jádrem P. Pak pro každou omezenou měřitelnou funkci h na S a pro $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\mathbb{E}(h(X_{n+1}) \mid X_n, \dots, X_0) = \mathbb{E}(h(X_{n+1}) \mid X_n) \ . \tag{3.2}$$

Definice 3.3. Nechť $P^0(x, A) = \delta_x(A)$, kde δ_x je Diracova míra[2]. Definujeme ***přechodové jádro*** n***-tého řádu***, $n \in \mathbb{N}$, indukčním vzorcem

$$P^n(x, A) = \int_S P(y, A) P^{n-1}(x, dy) \ .$$

I pro řetězce s obecnou množinou stavů platí ***Chapman-Kolmogorovova rovnost***:

Věta 3.4. *Nechť $\{X_n\}$ je homogenní markovský řetězec s obecnou množinou stavů. Pak platí*

$$P^{n+m}(x, A) = \int_S P^m(x, A) P^n(x, dy)$$

pro každé $m, n \in \mathbb{N}_0$.

---

[1] Symbol $\int f(x)\mu(dx)$ je pouze jiný způsob zápisu $\int f(x) d\mu(x) = \int f d\mu$.

[2] Diracova míra je definována předpisem $\delta_x(A) = 1$ pro $x \in A$, $\delta_x(A) = 0$ jinak.

Důkaz. Důkaz je uveden v [3, str. 15]. □

Definice 3.5. Nechť $A \in \mathcal{E}$, řekneme, že množina A je ***trvalá***, pokud pro $\forall x \in A$ platí $\mathbb{E}(\eta_A \mid X_0 = x) = \infty$, kde $\eta_A = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{[X_n \in A]}$ je ***doba setrvání*** v množině A. Je-li $\mathbb{E}(\eta_A \mid X_0 = x) < \infty$ pro $\forall x \in A$, pak A se nazývá ***přechodná***.

Definice 3.6. Nechť $\{X_n\}$ je markovský řetězec s markovským jádrem P. Řekneme, že množina $A \subset \mathcal{E}$ je ***absorpční***, pokud $P(x, A) = 1$ pro $\forall x \in A$.

Definice 3.7. Markový řetězec $\{X_n\}$ je ***periodický***, pokud existuje $q \in \mathbb{N},\ q > 1$, a pokud existují po dvou disjunktní $A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}, A_q = A_0 \in \mathcal{E}$ takové, že pro $\forall x \in A_i,\ i \in \{0, \ldots, q-1\}$, je $P(x, A_{i+1}) = 1$. V opačném případě se nazývá ***neperiodický***.

Definice 3.8. Náhodnou veličinu $\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in A\}$ nazýváme ***dobou prvního návratu do*** A.

Definice 3.9. Nechť φ je pravděpodobnostní míra na $\mathcal{E}$. Markovský řetězec $\{X_n\}$ je φ***-nerozložitelný***, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $P^n(x, A) = 0$ pro každé $x \in S$ a každé $A \in \mathcal{E}$, pro které $\varphi(A) > 0$.

Poznámka. Předchozí definice je ekvivalentní definici pomocí doby prvního návratu: markovský řetězec $\{X_n\}$ je φ-nerozložitelný právě tehdy, když $\mathsf{P}(\tau_A < \infty \mid X_0 = x) = 0$ pro $\forall x \in S$ a pro všechna $A \in \mathcal{E}$, pro které $\varphi(A) > 0$.

3.2 Stacionární rozdělení

Nechť $P(x, \cdot)$ je homogenní markovské jádro na měřitelném prostoru $(S, \mathcal{E})$. Označme $\mathcal{P}$ množinu pravděpodobnostních měr na $\mathcal{E}$.

Definice 3.10. Pro $\nu \in \mathcal{P}$ definujeme $P^*(\nu) \in \mathcal{P}$ předpisem $(P^*(\nu))(A) = \int_S P(x, A) d\nu(x)$.

Definice 3.11. Nechť $\{X_n\}$ je markovský řetězec, nechť π je σ-konečná míra na S. Potom π se nazývá ***invariantní míra***, pokud $\pi = P^*(\pi)$. Když je π pravděpodobnostní míra, pak se nazývá ***stacionární rozdělení*** markovského řetězce.

Definice 3.12. Nechť π je pravděpodobnostní míra na S, $\{X_n\}$ markovský řetězec. Řekneme, že π je ***limitní rozdělení*** markovského řetězce, pokud pro π-s.v. $x \in S$ a pro všechna $A \in \mathcal{E}$ platí $\lim_{n\to\infty} P^n(x, A) = \pi(A)$.

Věta 3.13. *Nechť $\{X_n\}$ je markovský řetězec a nechť π je jeho limitní rozdělení. Pak π je stacionární.*

Důkaz. Nechť $A \in \mathcal{E}$, pak platí

$$\begin{aligned}\pi(A) = \lim_{n\to\infty} P^n(x, A) &= \lim_{n\to\infty} \int_S P(y, A) P^{n-1}(x, dy) \\ &= \int_S P(y, A)\pi(dy) = (P^*(\pi))(A)\ .\end{aligned}$$

□

4. MŘ se spojitou množinou stavů a spojitým časem

4.1 Pojmy z teorie pravděpodobnosti

Definice 4.1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. ***Filtrace*** indexovaná $T \subseteq \mathbb{R}$ je systém $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ pod-σ-algeber $\mathcal{A}$, pro který platí

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \text{ pokud } s \leq t, \; s, t \in T\,.$$

Definice 4.2. Označme $\mathbb{L}(\mathcal{A})$ množinu všech reálných $\mathcal{A}$-měřitelných náhodných veličin, tj. $\mathbb{L}(\mathcal{A}) = \{X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})\}$. Proces $\{X_t, t \in T\}$ je $(\mathcal{F}_t)$***-adaptovaný***, pokud $X_t \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_t)$ pro každé $t \in T$.

Definice 4.3. Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor a $\{\mathcal{F}_t\}$ je filtrace v $(\Omega, \mathcal{F})$. Pak $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathsf{P})$ nazveme ***filtrovaným pravděpodobnostním prostorem*** (resp. ***stochastickou bází***).

Definice 4.4. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $1 \leq p < \infty$. Symbolem $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ značíme systém všech náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, pro které platí $\mathbb{E}|X|^p < \infty$.

Definice 4.5. Nechť $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a nechť $\mathcal{B} \subset A$ je σ-algebra. ***Podmíněná střední hodnota*** X ***vzhledem k*** $\mathcal{B}$ je náhodná veličina $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})$, která splňuje

1. $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}) \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$,
2. $\int_B \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}) d\mathsf{P} = \int_B X d\mathsf{P}$ pro všechna $B \in \mathcal{B}$.

Definice 4.6. Nechť $\mathcal{B} \subset A$ je σ-algebra a nechť $A \in \mathcal{A}$, pak náhodnou veličinu $\mathsf{P}(A \mid \mathcal{B}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mid \mathcal{B})$ nazveme ***podmíněnou pravděpodobností*** A ***při*** $\mathcal{B}$.

Definice 4.7. Nechť X je náhodná veličina na prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, pak řekneme, že $\sigma\{X\} = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{E}\}$ je σ***-algebra náhodné veličiny*** X. Obecněji $\sigma\{X_t \mid t \in T\} = \sigma\{\bigcup_{t \in T} \sigma\{X_t\}\}$.

4.2 Základní pojmy

Nechť $(S, \mathcal{E})$ je měřitelný prostor. Označme b$\mathcal{E}$ je prostor všech omezených reálných $\mathcal{E}$-měřitelných funkcí na S a dále Δ množinu všech uspořádaných indexů, tedy $\Delta = \{(s,t) \mid s, t \in \mathbb{R}_0^+, s \leq t\}$.

Definice 4.8. Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathsf{P})$ je filtrovaný pravděpodobnostní prostor. Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptovaný náhodný proces s hodnotami v S. Náhodný proces $\{X_t, t \geq 0\}$ má $\{\mathcal{F}_t\}$***-markovskou vlastnost***, pokud pro každou $A \in \mathcal{A}$ a pro všechna $(s,t) \in \Delta$ platí[1]

$$\mathsf{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathsf{P}(X_t \in A \mid X_s) \ .$$

Věta 4.9. *Nechť X je $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptovaný proces. Pak následující tvrzení jsou ekvivaletní:*

1. *X má $\{\mathcal{F}_t\}$-markovskou vlastnost.*
2. *$\forall f \in \mathrm{b}\mathcal{E}$ a $\forall (s,t) \in \Delta$ platí*
$$\mathbb{E}(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t) \mid X_s)\,.$$
3. *$\forall s \geq 0$ a $\forall B \in \sigma\{X_r \mid r \geq s\}$ platí*
$$\mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}_s) = \mathsf{P}(B \mid X_s)\,.$$
4. *$\forall s \geq 0$ a $\forall \eta \in \mathrm{b}\sigma\{X_r \mid r \geq s\}$ platí*
$$\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\eta \mid X_s)\,.$$
5. *$\forall s \geq 0$ a $\forall B \in \sigma\{X_r \mid r \geq s\}$ $\forall C \in \mathcal{F}_s$ je*
$$\mathsf{P}(B \cap C \mid \mathcal{F}_s) = \mathsf{P}(B \mid X_s)\mathsf{P}(C \mid X_s)\,.$$

Důkaz. Důkaz je uveden v [4, str. 3]. □

Definice 4.10. Pro markovské jádro P definujeme pro každou $f \in \mathrm{b}\mathcal{E}$ ***lineární operátor*** T_P předpisem $(T_P f)(x) = \int_E f(y)P(x,dy),\ x \in S.$

Poznámka. T_P je omezený pozitivní lineární operátor s normou 1.

Definice 4.11. Nechť P, Q jsou markovská jádra, jejich skládání definujeme předpisem

$$(PQ)(x,A) = \int_E Q(y,A)P(x,dy)$$

pro $x \in S$, $A \in \mathcal{E}$.

Takto definované PQ je opět markovské jádro, ale PQ není nutně rovno QP (tj. skládání markovských jader není komutativní).

Příklad 4.12. Nechť $S = [0,1], Q(x,\cdot) = \lambda$ (Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$) a $P(x,\cdot) = \delta_{\frac{x}{2}}$. Pak

$$PQ(x,[0,\tfrac{1}{2}]) = \int_0^1 \lambda([0,\tfrac{1}{2}])P(x,dy) = \frac{1}{2}\int_0^1 d\delta_{\frac{y}{2}} = \frac{1}{2}\ ,$$

ale

$$QP(x,[0,\tfrac{1}{2}]) = \int_0^1 \underbrace{\delta_{\frac{y}{2}}([0,\tfrac{1}{2}])}_{1}\, d\lambda(y) = 1\ .$$

[1] Výraz $\mathsf{P}(X_t \in A \mid X_s)$ je definován jako $\mathsf{P}(X_t \in A \mid \sigma\{X_s\})$.

Definice 4.13. ***Přechodová pravděpodobnost*** je systém markovských jader $P = \{P_{s,t} \mid (s,t) \in \Delta\}$ splňující ***Chapman-Kolmogorovovu rovnost***

$$P_{s,t} = P_{s,u}P_{u,t}, \forall s \leq u \leq t, s,t,u \in \mathbb{R}^+ \ . \tag{4.1}$$

Pro přechodovou pravděpodobnost budeme užívat také značení

$$P(s,x,t,A) = P_{s,t}(x,A) \ .$$

Na P tedy můžeme nahlížet jako na funkci čtyř proměnných. Chapman-Kolmogorovovu rovnost pak můžeme zapsat ve tvaru

$$P(s,x,t,A) = \int_E P(u,y,t,A)P(s,x,u,dy) \ , \forall s \leq u \leq t \ .$$

Ze vztahu (4.1) plyne, že $P_{s,s} = P_{s,s}^2$. To ale nutně neznamená, že $P_{s,s}$ je neutrální prvek vzhledem ke skládání markovských jader, tj. obecně pro $x \in S, s \geq 0$, neplatí $P(s,x,s,\cdot) = \delta_x$. Taková $x \in S$, pro která rovnost neplatí, se nazývají ***body větvení***. Přechodové pravděpodobnosti, které naopak rovnost splňují, se nazývají ***normální***. V dalším textu předpokládáme, že přechodové pravděpodobnosti jsou normální.

$\{\mathcal{F}_t\}$-adaptovanému náhodnému procesu $\{X_t\}$ je přiřazena ***přechodová pravděpodobnost*** P, platí-li

$$\forall (s,t) \in \Delta : \mathsf{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = P(s, X_s, t, A) \ .$$

Z tohoto vztahu plyne $\mathsf{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathsf{P}(X_t \in A \mid X_s)$, tedy proces $\{X_t\}$ má $\{\mathcal{F}_t\}$-markovskou vlastnost.

Definice 4.14 (Dynkin)**.** Nechť $\forall x \in S$ je $\{x\} \in \mathcal{E}$ a nechť P je přechodová pravděpodobnost na $(S,\mathcal{E})$. Pak systém $(\Omega, \{\mathcal{F}_{s,t}, (s,t) \in \Delta\}, \{X_t\}, \{\mathsf{P}_{s,x}, s \geq 0, x \in S\})$ je ***markovský proces*** v S s přechodovou pravděpodobností P, pokud

1. $\forall (s,t) \in \Delta$ je $\mathcal{F}_{s,t}$ σ-algebra na Ω a $\mathcal{F}_{s,t} \subset \mathcal{F}_{q,r}$ pro $0 \leq q \leq s \leq t \leq r < \infty$,
2. $\forall (s,t) \in \Delta$ je X_t $\mathcal{F}_{s,t}$-měřitelná náhodná veličina,
3. $\forall s \geq 0, x \in S$ je $\mathsf{P}_{s,x}$ pravděpodobnostní míra na $\mathcal{F}_{s,\infty} = \sigma\{\bigcup_{t \geq s} \mathcal{F}_{s,t}\}$, pro kterou platí $\mathsf{P}_{s,x}(X_s = x) = 1$ a $\mathsf{P}_{s,x}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_{s,r}) = P(r, X_r, t, A)$ $\mathsf{P}_{s,x}$-skoro jistě pro $\forall A \in \mathcal{E}$ a $r,s,t \in \mathbb{R}_0^+$ takové, že $s \leq r < t$.

Markovský proces je celý soubor náhodných procesů, nikoli náhodný proces ve smyslu předcházejících kapitol.

Definice 4.15. Nechť P je přechodová pravděpodobnost. P je ***homogenní***, pokud

$$P(s,x,t,A) = P(0,x,t-s,A)$$

pro $\forall x \in S, A \in \mathcal{E}, (s,t) \in \Delta$.

Obvykle se pak píše $P(0, x, t, A) = P(t, x, A) = P_t(x, A)$ a Chapman-Kolmogorovovu rovnost můžeme napsat ve tvaru $P_{t+s}(x, A) = \int_S P_t(y, A) P_s(x, dy)$.

Definice 4.16. ***Homogenní markovský proces*** je markovský proces $(\Omega, \{\mathcal{F}_{s,t}\}, \{X_t\}, \{\mathsf{P}_{s,x}\})$ v měřitelném prostoru $(S, \mathcal{E})$, pro který platí, že

1. přechodová funkce P je homogenní,
2. pro každé $t \geq 0$ existuje zobrazení $\theta_t : \Omega \to \Omega$ takové, že pro každé $h \geq 0$ a pro všechny $\omega \in \Omega$ platí $X_h\big(\theta_t(\omega)\big) = X_{t+h}(\omega)$.

4.3 Stacionární rozdělení

Nechť $P_t(x, \cdot)$ je homogenní měřitelná přechodová funkce na měřitelném prostoru $(S, \mathcal{E})$.

Definice 4.17. Pro $\nu \in \mathcal{P}$ se $P_t^* : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ nazývá ***adjungovaná markovská semigrupa***.

Poznámka. $P_t^*(\nu)$ je definováno stejným předpisem jako v předchozí kapitole, tedy $(P_t^*(\nu))(A) = \int_S P_t(x, A) d\nu(x)$.

Definice 4.18. Míra $\mu^* \in \mathcal{P}$ se nazývá ***invariantní mírou vůči*** P_t právě tehdy, když pro všechna $t \geq 0$ platí $\mu^* = P_t^* \mu^*$.

Definice 4.19. Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je náhodný proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ se spojitým časem a stavovým prostorem $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť $x \in S$ a označme $\mathbb{E}_x$ střední hodnotu vzhledem k pravděpodobnosti $\mathsf{P}(\cdot \,|\, X_0 = x)$. Proces $\{X_t, t \geq 0\}$ se nazývá ***fellerovský***, pokud pro každé $t \geq 0$ a každou spojitou $g \in \mathrm{b}\mathcal{E}$ je $\mathbb{E}_x(g(X_t))$ spojitá funkce proměnné x.

Definice 4.20. Nechť (Z, T) je topologický prostor a Σ nechť je σ-algebra, pro kterou $T \subseteq \Sigma$. Nechť M je množina pravděpodobnostních měr na Σ. Pak se M nazývá ***těsná***, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní podprostor $K \subseteq Z$ takový, že pro každou $\mu \in M$ je $\mu(K) > 1 - \varepsilon$.

Věta 4.21 (Krylov–Bogoljubov)**.** *Nechť stavový prostor $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je úplný metrický podprostor. Nechť $\{X_t\}$ je fellerovský markovský proces a nechť existuje alespoň jedno x takové, že množina měr $\{P_t(x, \cdot) \mid t \geq 0\}$ je těsná. Pak existuje invariantní míra $\mu^* \in \mathcal{P}$.*

Důkaz. Důkaz čtenář nalezne v [5, str. 21]. □

4.4 Semigrupy operátorů

Nechť S je Banachův prostor. Označme $\mathcal{L}(S)$ množinu omezených lineárních operátorů na S.

Definice 4.22. Systém omezených lineárních operátorů $\{T(t), t \in \mathbb{R}_0^+\}$, $T(t) : S \to S$, nazveme ***silně spojitou semigrupou*** (resp. C_0***-semigrupou***) s operací skládání na S, pokud platí

1. $T : \mathbb{R}_0^+ \to \mathcal{L}(S)$ je homomorfismus, tj. $T(0) = \mathbf{I}$ a $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$ pro $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$,
2. $\lim_{t \to 0+} \|T(t)x - x\| = 0$ pro $\forall x \in S$.

Příklad 4.23. Nechť $S = \mathbb{R}^n$, definujeme $T(t)x = e^{At}x$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$. Pak platí

1. $e^{At}e^{As} = e^{At+As} = e^{A(t+s)}$, neboť pokud $AB = BA$, pak $e^{A+B} = e^A e^B$,
2. $\|e^{At}x - x\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!}\| \leq \sum \frac{t^k}{k!}\|A\|^k\|x\| \to 0$ pro $t \to 0+$.

Tedy $\{T(t)\}$ je silně spojitá semigrupa.

Poznámka. V předchozím příkladě definovaná $e^{At}x$ je vlastně řešením diferenciální rovnice $y' = Ay$ s počáteční podmínkou $y(0) = x$.

Příklad 4.24. K $\{P_t\}$ (homogennímu systému přechodových pravděpodobností) můžeme přiřadit systém operátorů $\hat{P}_t(\varphi) = \int \varphi(y)P_t(x, dy)$, $\varphi \in \mathrm{b}\mathcal{E}$. Na $\mathrm{b}\mathcal{E}$ lze přirozeně definovat normu vztahem $\|\varphi\| = \sup_{x \in S} |\varphi(x)|$, s níž se tento prostor stává Banachovým prostorem a $\hat{P}_t$ jsou omezené lineární funkcionály. Je možné ukázat, že tento systém operátorů tvoří silně spojitou semigrupu.

Definice 4.25. Nechť A je operátor definovaný předpisem $Ax = \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x|_{t=0}$ se nazývá ***infinitezimální generátor*** semigrupy $\{T(t)\}$. Nechť $\mathsf{Dom}(A) = \{x \in S \mid \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}$ existuje v $S\}$, pak A je lineární zobrazení z $\mathsf{Dom}(A)$ do S. Silně spojitá semigrupa generovaná operátorem A se často značí e^{At}.

Příklad 4.26. Pro markovský řetězec s diskrétními stavy a se spojitým časem odpovídá semigrupě z příkladu 4.24 systém matic $\{\mathbf{P}(t)\}$, které můžeme chápat jako lineární operátory na $\mathbb{R}^n$. Řešením Kolmogorovovy rovnice $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{QP}(t)$ s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = I$ dostaneme $\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}$, tedy podle příkladu 4.23 tvoří systém $\{\mathbf{P}(t)\}$ silně spojitou semigrupu a $\mathbf{Q}$ je její infinitezimální generátor.

5. Příklady

5.1 Hazardní hra dvou hráčů

Uvažujme hazardní hru dvou hráčů, A a B, která může skončit pouze výhrou jednoho z nich. Nechť hráč A má v čase 0 kapitál $a \in \mathbb{N}$, hráč B kapitál $b = c - a$, kde $c > a$, $c \in \mathbb{N}$ je celková suma, které je ve hře. Hráč, který prohraje, zaplatí výherci jednu jednotku. Hra končí v okamžiku, kdy je jeden z hráčů bez peněz.

Nechť $p \in (0,1)$ značí pravděpodobnost výhry hráče A a $q = 1 - p$ pravděpodobnost výhry hráče B. Definujeme náhodnou veličinu X_n jako kapitál hráče A v čase n. Platí tedy:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_0 = a) &= 1 \\ \mathsf{P}(X_1 = a+1) &= p \\ \mathsf{P}(X_1 = a-1) &= q \ . \end{aligned}$$

Zajímá nás, zda má náhodný proces $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ markovskou vlastnost. To zjistíme spočítáním podmíněných pravděpodobností $\mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = a)$ a $\mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$.

Definujeme pomocnou náhodnou veličinu Y_n, která bude udávat zisk, resp. ztrátu, hráče A v n-tém kole, tj. $Y_n = \pm 1$. Veličinu X_n pak můžeme zapsat ve tvaru: $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$, pokud hra neskončila už v n-tém kole, tedy pokud $X_n \neq 0$ nebo $X_n \neq c$.

Předpokládejme, že hra v čase n neskončila a počítejme podmíněné pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = a) = \\ &= \mathsf{P}(X_n + Y_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = a) = \\ &= \mathsf{P}(Y_{n+1} = j - i \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = a) = \mathsf{P}(Y_{n+1} = j - i) \ . \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z toho, že Y_{n+1} je nezávislá na $X_k, k \leq n$. Druhá strana rovnosti:

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathsf{P}(X_n + Y_{n+1} = j \mid X_n = i) = \\ &= \mathsf{P}(Y_{n+1} = j - i \mid X_n = i) = \mathsf{P}(Y_{n+1} = j - i) \ . \end{aligned}$$

Pokud hra v čase n skončila, pak se řetězec v časech $k \geq n$ dále nevyvíjí. Náhodný proces $\{X_n\}$ má tedy markovskou vlastnost a pravděpodobnosti přechodu vypadají následovně:

$$p_{ij} = \begin{cases} p & j = i+1 \\ q & j = i-1 \\ 1 & j = i = 0, j = i = c \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} .$$

Matice pravděpodobnosti přechodu má rozněr $(c+1) \times (c+1)$ a vypadá takto:

$$
\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & p & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .
$$

5.2 Poissonův proces

Uvažujme události, které přicházejí náhodně v čase a předpokládejme, že počty událostí v disjunktních intervalech jsou nezávislé náhodné veličiny. Pravděpodobnost, že během intervalu $(t, t+h]$ dojde k jedné události, je $\lambda h + o(h)$, k více než jedné události dojde s pravděpodobností $o(h)$ a pravděpodobnost, že nenastane žádná událost, je $1 - \lambda h + o(h)$. Označme $X_0 = 0$ a X_t počet událostí, které nastanou v inervalu $(0, t]$. Platí

$$
\mathsf{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = i) = p_{ij}(h) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & j = i+1 \\ o(h) & j > i+1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & j = i \\ 0 & j < i \end{cases} .
$$

Když známe pravděpodobnosti přechodu, můžeme spočítat intenzity – z definice je $q_{ij} = \lim_{h \to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h}$. V tomto případě

$$
\lim_{h \to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \begin{cases} \lambda & j = i+1 \\ 0 & j > i+1 \\ -\lambda & j = i \\ 0 & j < i \end{cases} .
$$

Matice intenzit tedy vypadá následovně:

$$
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} .
$$

Zkusme nyní najít absolutní pravděpodobnosti $p_j(t) = \mathsf{P}(X_t = j)$. K tomu použijeme postup uvedený v [1, str. 100]. Předpokládejme, že $\mathsf{P}(X_0 = 0) = 1$, pak pro $j \in S$ platí

$$
p_j(t) = \mathsf{P}(X_t = j) = \sum_{k \in S} \mathsf{P}(X_t = j \mid X_0 = k) \mathsf{P}(X_0 = k) = p_{ij}(t) .
$$

Z Kolmogorovovy retrospektivní rovnice pro $j \in S$ dostáváme

$$p'_{ij}(t) = p'_j(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) q_{kj} = \sum_{k \in S} p_k(t) q_{kj} \ .$$

Naším cílem je tedy vyřešit rovnici

$$p'_j(t) = \sum_{k \in S} p_k(t) q_{kj} \ . \tag{5.1}$$

Použijeme metodu vytvořující funkce. Nechť $\Pi(s,t)$ je vytvořující funkce posloupnosti $\{p_j(t)\}$, tedy $\Pi(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k$. Pak

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} p'_k(t) s^k$$

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(s) s^{k-1} \ .$$

Nejprve sestavíme parciální diferenciální rovnice pro Π s předpokladem, že počáteční podmínky rovnice (5.1) jsou $p_0(0) = 1$ a $p_i(0) = 0$ pro $i \neq 0$. Potom počáteční podmínka pro Π je $\Pi(s,0) = s^0 = 1$

Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) \\
p'_1(t) &= -\lambda p_1(t) + \lambda p_0(t) \\
&\vdots \\
p'_j(t) &= -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

První rovnici vynásobíme číslem s^0, další rovnici s^1 a tak dále, dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned}
p'_0(t) s^0 &= -\lambda p_0(t) s^0 \\
p'_1(t) s^1 &= -\lambda p_1(t) s^1 + \lambda p_0(t) s^1 \\
&\vdots \\
p'_j(t) s^j &= -\lambda p_j(t) s^j + \lambda p_{j-1}(t) s^j \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nyní všechny rovnice sečteme a dostaneme

$$\sum_{k=0}^{\infty} p'_k(t) s^k = -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1}(k) s^k \ .$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial t}(s,t) &= -\lambda \Pi(s,t) + \lambda s \Pi(s,t) \\
\frac{\partial \Pi}{\partial t}(s,t) &= -\lambda \Pi(s,t)(1-s) \\
\frac{1}{\Pi(s,t)} \frac{\partial \Pi}{\partial t}(s,t) &= -\lambda(1-s) \ .
\end{aligned}$$

Z toho plyne

$$\Pi(s,t) = c e^{-\lambda(1-s)t} \ .$$

Z počáteční podmínky $\Pi(s,0) = 1$, dostáváme $c = 1$, tedy

$$\Pi(s,t) = e^{-\lambda(1-s)t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda s t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} s^k \ .$$

Z definice $\Pi(s,t)$ dostáváme

$$e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k \ ,$$

tedy

$$p_k(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \ .$$

Zjistili jsme, že absolutní pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X_n = k)$ mají Poissonovo rozdělení.

5.3 Monte Carlo integrace

Monte Carlo integrace je metoda, která pomocí markovských řetězců řeší následující problém. Máme numericky spočítat integrál $\int_S h(x) f(x) dx$, kde $f(x)$ je hustota nějaké náhodné veličiny a $h(x)$ je funkce. Naším úkolem je tedy spočítat střední hodnotu $\mathbb{E}h(X)$. Vytvoříme markovský řetězec, jehož stacionární rozdělení bude mít hustotu f, tedy takový řetězec, který po N krocích bude mít přibližně rozdělení s hustotou f. Ze silného zákona velkých čísel dostaneme, že pro $n \to \infty$ platí:

$$\frac{1}{n} \sum_{t=N+1}^{N+n} h(X_t) \to \int_S h(x) f(x) dx.$$

Musíme ovšem požadovat, aby byl řetězec geometricky ergodický[1], neboť X_t nejsou nutně nezávislé.

[1] Definici geometrické ergodicity nalezne čtenář v [3, str. 17].

Ne vždy ale umíme řetězec se stacionárním rozdělením f nasimulovat, proto se někdy používá tzv. ***importance sampling***, který spočívá v rozšíření integrandu funkcí $g(x)$, tj. integrál zapíšeme ve tvaru

$$\int_S h(x)\frac{f(x)}{g(x)}g(x)dx \ .$$

Funkci g volíme tak, abychom uměli generovat proces s rozdělením g a aby platilo, že $f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$.

Pak ze silného zákona velkých čísel plyne, že

$$\frac{1}{n}\sum_{t=N+1}^{N+n} h(X_t)\frac{f(X_t)}{g(X_t)} \to \int_S h(x)\frac{f(x)}{g(x)}g(x)dx \ .$$

5.4 Brovnův pohyb

Věta 5.1. *Nechť S je úplný separabilní metrický prostor a nechť P je přechodová pravděpodobnost na $(S, \mathcal{B}(S))$. Pak pro každou pravděpodobnostní míru π na S a pro každé $s > 0$ existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ a proces $\{X_t, t \geq s\}$ na Ω s hodnotami v S takový, že $\mathsf{P}(X_s \in B) = \pi(B)$ pro $B \in \mathcal{B}(S)$ a $P(X_t \in A \mid \sigma\{X_u \mid u \in [s,r]\}) = P(r, X_r, t, A)$ pro všechna $A \in \mathcal{B}(S)$ a všechna $s, r, t \in \mathbb{R}^+$, $s \leq r < t$.*

Důkaz. Důkaz je uveden v [4, str. 13] □

Definujeme-li

$$P_0(x, A) = \delta_x(A) \ ,$$

a pro $t > 0$

$$P_t(x, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_A e^{\frac{-(y-x)^2}{2t}}dy \ ,$$

pak z předchozí věty plyne, že existuje markovský proces $\{B_t\}$ s touto přechodovou pravděpodobností. Tato věta ovšem nezaručuje spojitost procesu B_t. Přidáme-li navíc podmínku spojitosti procesu, pak se $\{B_t\}$ nazývá Brownovým pohybem a popisuje stejnojmenný fyzikální děj.

Závěr

V obecném procesu $\{X_t\}$, ať už t a X_t nabývá diskrétních nebo spojitých hodnot, můžeme X_t chápat jako na nositele informace o tom, s jakou pravděpodobností se systém v daném čase nachází v dané množině stavů. V markovských řetězcích nás zajímá především pravděpodobnost $\mathsf{P}(X_t \in B \mid X_s \in A)$ (tj. pravděpodobnost, že se systém, který byl v čase s ve stavu ležícím v množině A, bude v čase $t > s$ nacházet ve stavu z množiny B), jelikož podmínka markovskosti nám zajišťuje, že tato pravděpodobnost nezávisí na časech menších než s. Nyní se pokusíme ukázat, že definice markovskosti v jednotlivých případech (spojité a diskrétní stavy a čas) jsou si v principu velmi podobné, pouze terminologie a značení se poněkud liší.

Napišme si definici markovské vlastnosti pro řetězec s diskrétními stavy. Pro diskrétní čas má tvar

$$\mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \ .$$

Pro spojitý čas:

$$\mathsf{P}(X_t = j \mid X_s = i, X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_0} = i_0) = \mathsf{P}(X_t = j \mid X_s = i) \ .$$

Vidíme tedy, že definice jsou zcela analogické.

Pro řetězce se spojitým časem a diskrétními stavy využijeme vztah (3.2). pro $h = \mathbf{1}_B$ a dostáváme, že

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X_{n+1}) \mid \sigma\{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0\}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X_{n+1}) \mid \sigma\{X_n\}) \ .$$

Po úpravě využitím definice $\mathsf{P}(A \mid \sigma\{X_n\})$ a toho, že $\mathbf{1}_B(X_{n+1}) = \mathbf{1}_{[X_{n+1} \in B]}$, dostáváme

$$\mathsf{P}(X_{n+1} \in B \mid \sigma\{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0\}) = \mathsf{P}(X_{n+1} \in B \mid \sigma\{X_n\}) \ . \tag{$*$}$$

Jelikož podmiňování $\sigma\{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0\}$ v podstatě říká „v závislosti na hodnotách $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0$“, je tento výraz analogií definice z první kapitoly. Definice $\{\mathcal{F}_t\}$-markovské vlastnosti ze čtvrté kapitoly říká, že

$$P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A \mid \sigma\{X_s\}) \ ,$$

což je analogií vztahu $(*)$, neboť $\mathcal{F}_s$ je zobecněním $\sigma\{X_s, X_{t_n}, \ldots, X_{t_0}\}$. Zesílením této definice je Dynkinova definice markovského procesu.

Poznamenejme, že markovská vlastnost byla ve třetí kapitole definována vztahem, který můžeme zapsat jako

$$\mathsf{P}(X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \int_{A_0} \cdots \int_{A_n} P(y_{n-1}, dy_n) P(y_{n-2}, dy_{n-1}) \ldots P(y_0, dy_1) \rho(dy_0) \ .$$

V diskrétním případě je $P(x, \{y\}) = p_{xy}$ a zvolíme-li $\rho(\{x\}) = p_x$, dostaneme

$$\mathsf{P}(X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \sum_{i_0 \in A_0} \cdots \sum_{i_n \in A_n} p_{i_{n-1} i_n} p_{i_{n-2} i_{n-1}} \cdots p_{i_0 i_1} p_{i_0} ,$$

což je pro jednoduchým zobecněním věty 1.9.

Nyní se pokusíme najít souvislost mezi jednotlivými vyjádřeními Chapman-Kolmogorovovy rovnosti. Označme $\mathbf{P}(s, A, t, B) = \mathsf{P}(X_t \in B \mid X_s \in A)$. Uvažujme homogenní markovský řetězec s diskrétními stavy. Chapman-Kolmogorovovu rovnost můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(0, A, s+t, B) &= \sum_{z \in S} \mathbf{P}(0, A, s, \{z\}) \mathbf{P}(s, \{z\}, s+t, B) \\ &= \sum_{z \in S} \mathbf{P}(0, A, s, \{z\}) \mathbf{P}(0, \{z\}, t, B) .\end{aligned}$$

Pokud pravděpodobnosti „rozdělíme“ ještě po jednotlivých prvcích B, můžeme psát

$$\sum_{y \in B} \mathbf{P}(0, A, s+t, \{y\}) = \sum_{z \in S} \sum_{y \in B} \mathbf{P}(0, A, s, \{z\}) \mathbf{P}(0, \{z\}, t, \{y\}) .$$

Označme ještě $P(s, x, t, B) = \mathbf{P}(s, \{x\}, t, B)$, pak můžeme psát

$$\sum_{y \in B} P(0, x, s+t, \{y\}) = \sum_{z \in S} \sum_{y \in B} P(0, x, s, \{z\}) P(0, z, t, \{y\}) .$$

Ve značení první kapitoly je $P(0, x, n, \{y\}) = p_{xy}^{(n)}$, a tedy Chapman-Kolmogorovovu rovnost můžeme zapsat jako

$$\sum_{y \in B} p_{xy}^{(n+m)} = \sum_{z \in S} \sum_{y \in B} p_{xz}^{(n)} p_{zy}^{(m)} .$$

Pro homogenní markovský řetězec se spojitým časem je $P(0, x, s, \{y\}) = p_{xy}(s)$ a Chapman-Kolmogorovova rovnost tedy vypadá takto:

$$\sum_{y \in B} p_{xy}(s+t) = \sum_{z \in S} \sum_{y \in B} p_{xz}(s) p_{xy}(t) .$$

Přes spojitou množinu stavů již samozřejmě nemůžeme sčítat, proto s $\mathbf{P}(0, A, s, B)$ musíme pracovat jinak. Nabízí se možnost pracovat s funkcí $P(s, x, t, B)$, ale ne již ve smyslu předchozích odstavců, ale jako s určitou „hustotou pravděpodobnosti“ (vzhledem k x), že se řetězec ze stavu x v čase s dostane do množiny B v čase t. Tuto funkci už jsme ale přesně ve stejném smyslu zavedli ve čtvrté kapitole definicí 4.13, která také přesně charakterizuje podmínky, které tato funkce musí splňovat. Ve skutečnosti je tento nový význam stejný jako doposud, neboť pro diskrétní množinu stavů je hustota totéž co pravděpodobnost.

Pro homogenní řetězec se spojitou množinou stavů říká Chapman-Kolmogorovova rovnost, že

$$P(0,x,s+t,B) = \int_S P(s,z,s+t,B)P(0,s,x,dz)\ .$$

Tyto pravděpodobnosti ještě můžeme „roztrhnout“ podle množiny B a danou rovnost pak zapíšeme jako

$$\begin{aligned}\int_B P(0,x,s+t,dy) &= \int_S \int_B P(s,z,s+t,dy)P(0,x,s,dz) \\ &= \int_S \int_B P(0,z,t,dy)P(0,x,s,dz)\ .\end{aligned}$$

Můžeme si všimnout, že při volbě míry $P(0,x,t,\cdot)$ jako v diskrétním případě přímo dostaneme diskrétní verzi (integrál podle diskrétní míry zapíšeme jako sumu). Ve značení třetí kapitoly je $P(0,x,n,B) = P^n(x,B)$ a Chapman-Kolmogorovova rovnost má tedy tvar

$$\int_B P^{n+m}(x,dy) = \int_S \int_B P^m(z,dy)P^n(x,dz)\ .$$

Ve spojitém čase (tj. při značení čtvrté kapitoly) je $P(0,x,t,B) = P_t(x,B)$ a Chapman-Kolmogorovovu rovnost můžeme zapsat jako

$$\int_B P_{s+t}(x,dy) = \int_S \int_B P_t(z,dy)P_s(x,dz)\ .$$

Na závěr porovnejme definice stacionárních rozdělení pro jednotlivé typy řetězců. Uvažujme nejprve markovský řetězec s diskrétní množinou stavů. Je-li i čas diskrétní, pak je stacionární rozdělení $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_i, i \in S\}$ definováno vztahem

$$\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T\mathbf{P}\ . \tag{$**$}$$

Tento vztah odpovídá definici stacionárního rozdělení pro spojitý čas, která říká, že $\boldsymbol{\pi}$ je stacionární rozdělelní, pokud pro každé $t \geq 0$ platí

$$\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T\mathbf{P}(t)\ . \tag{$***$}$$

Tyto zdánlivě odlišné definice jsou ve skutečnosti analogické, v diskrétním případě bychom mohli také požadovat, aby $\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T\mathbf{P}^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, ale to plyne indukcí z požadavku $\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T\mathbf{P}$.

Je-li množina stavů markovského řetězce obecná, tak pro diskrétní čas definujeme stacionární rozdělení předpisem

$$\pi = P^*(\pi) = \int_S P(x,A)d\pi(x)\ ,$$

a analogicky pro řetězec se spojitým časem je μ stacionární rozdělení, pokud pro každé t platí

$$\mu = P_t^*(\mu)\ .$$

Ze spojitého případu přejdeme k diskrétnímu opět vhodnou volbou míry π, a sice $\pi(\{i\}) = \pi_i$, a markovského jádra, které volíme jako $P(i, \{j\}) = p_{ij}$, čímž dostaneme

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}$$

a pro řetězce s diskrétními stavy a spojitým časem volíme $P_t(i, \{j\}) = p_{ij}(t)$ a tedy

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}(t) \ .$$

Poslední dvě rovnice jsou pouze přepisem rovnic $(**)$ a $(***)$ do složek.

Seznam použité literatury

[1] Prášková, Z.; Lachout, P. *Základy náhodných procesů*. 1. vydání. Praha: Nakladatelství Karolinum, 2001.

[2] Štěpán, J. *Teorie pravděpodobnosti: matematické základy*. 1. vydání. Praha: Academia, 1987.

[3] Pawlas, Z. *Studijní text k přednášce Metody MCMC (Markov Chain Monte Carlo)*.
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pawlas/2007/STP139/mcmc.pdf`

[4] Seidler, J. *Studijní text k přednášce Markovské procesy*.
`http://simu0292.utia.cas.cz/seidler/mp1.pdf`

[5] Da Prato, G.; Zabczyk, J. *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*. 1. vydání. Cambridge University Press, 1996.