Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Mutňanský

Strategie a rovnováha v teorii her

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Jaroslav Milota, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2012

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 03.08.2012 Michal Mutňanský

Názov práce: Strategie a rovnováha v teorii her

Autor: Michal Mutňanský

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Jaroslav Milota, CSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Teória hier je disciplína aplikovanej matematiky, ktorá analyzuje široké spektrum konfliktných rozhodovacích situácií. V práci sa čitateľ zoznámi so základnými pojmami teórie hier, niektoré sú objasnené na jednoduchých príkladoch. Pomocou hry Hex je dokázaná Brouwerova veta o pevnom bode pre dimenziu 2. Okrem formulácie a dôkazu Nashovej vety o rovnovážnych bodoch práca približuje viacero metód hľadania týchto bodov, napríklad simplexovú metódu. Ich aplikáciou na jednu konkrétnu hru práca ukazuje praktické využitie týchto metód. Práca je určená pre čitateľov zaujímajúcich sa o teóriu hier, nepredpokladá však žiadne predošlé znalosti tejto oblasti matematiky.

Kľúčové slová: hra, stratégia, rovnováha, Nashova veta

Title: Strategies and equilibria in game theory

Author: Michal Mutňanský

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Jaroslav Milota, CSc., Katedra matematické analýzy

Abstract: Game theory is a discipline of applied mathematics that analyses a wide range of decision situations. In this thesis the reader is informed about the basic terms of game theory, some of them are illustrated on simple examples. The two dimensional Brouwer fixed-point theorem is proven using the Hex game. In addition to the formulation and proof of Nash's theorem, the thesis presents several methods for finding Nash equilibrium points, such as the simplex method. Their application to a specific game demonstrates the practical use of these methods. The thesis is intended for readers interested in the game theory, it does not, however, require any previous knowledge of this field of mathematics.

Keywords: game, strategy, equilibrium, Nash's theorem

Za pripomienky, rady a celkové vedenie práce by som sa chcel veľmi pekne poďakovať doc. RNDr. Jaroslavovi Milotovi, CSc.

Obsah

Úvod

Hra. Slovo, s ktorým sa väčšina z nás stretáva odmalička, avšak v trochu inom význame. Nie všetky (detské) hry sú hrami aj v matematickom ponímaní a naopak, nie všetky situácie, ktoré v matematike nazývame hrami, by sa tak dali nazvať aj v skutočnom živote (napr. vojenský konflikt).

Začiatok modernej teórie hier súvisí s myšlienkou existencie rovnovážnych bodov v zmiešaných stratégiách pri hre dvoch hráčov s nulovvým súčtom od Johna von Neumanna. Dnes má svoje uplatnenie najmä v ekonómií, politike, biológií a mnohých ďalších oblastiach. Obrovský prínos teórií hier sa pripisuje Johnovi Nashovi, ktorý bol neskôr ocenený *Nobelovou cenou za ekonómiu*.

Cieľom práce je zasvätiť čitateľa do základov teórie nekooperatívnych hier 2 hráčov. Táto práca je rozdelená do viacerých kapitol. V *prvej* si vysvetlíme a na príkladoch objasníme niekoľko základných pojmov, ktoré budeme ďalej používať. *Druhá* kapitola je venovaná *Nashovej vete*, ktorú dokážeme pomocou *Brouwerovej vety o pevnom bode*. Obecnú *Brouwerovu vetu* dokazovať nebudeme, no predstavíme si hru *Hex*, dokážeme tvrdenie o nej a na základe toho odvodíme platnosť *Brouwerovej vety o pevnom bode* pre dimenziu 2. Cieľom *tretej* kapitoly je priblížiť niekoľko postupov na hľadanie rovnovážnych stratégií, o.i. aj veľmi univerzálnu a často používanú *simplexovú metódu*. V *predposlednej - štvrtej* sa bližšie pozrieme na hru *kameň, papier, nožnice* a niekoľko jej ďalších verzií a skúsime nájsť rovnovážne stratégie za použitia simplexovej metódy.

Posledná kapitola je nematematická, v skratke si predstavíme život jedného z najvýznamnejších matematikov 20. storočia, Johna Nasha.

1. Základné pojmy teórie hier

1.1 Rozhodovanie

Majme množinu možných rozhodnutí (alternatív). Výber jedného prvku z tejto množiny nazývame *rozhodovanie*. Subjekt, ktorý tento výber vykonáva a teda je účastníkom rozhodovacej situácie, sa nazýva *rozhodovateľ*.

Ak sa rozhoduje so zameraním na určitý cieľ, pričom k jeho dosiahnutiu používa všetky objektívne dostupné informácie o dôsledkoch jednotlivých volieb, hovoríme o *racionálnom (inteligentnom)* rozhodovateľovi. Ak je ľahostajný k dôsledkom rozhodnutí, nazývame ho *neracionálny*.

Rozhodovacie situácie môžeme rozdeliť podľa počtu kritérií na *monokriteriálne* a *viackriteriálne*. Taktiež sa dajú rozdeliť podľa počtu racionálnych rozhodovateľov. Matematický model situácie, ktorej výsledok je ovplyvnený aspoň dvomi racionálnymi účastníkmi, nazývame *hra*. V tejto práci sa budeme zameriavať práve na tento typ rozhodovacích situácií, špeciálne potom na hry s 2 účastníkmi (hráčmi).

1.2 Hra v normálnom tvare

Definícia. Nech Q je neprázdna konečná množina s prvkami $1, 2, ..., n$. Majme ďalej n množín $S_1, S_2, ..., S_n$ a n reálnych funkcií, ktoré sú definované na karteziánskom súčine $S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$. *Hrou n hráčov v normálnom tvare* budeme rozumieť usporiadanú $(2n+1)$-ticu $\{Q; S_1, ..., S_n; u_1(s_1, ..., s_n), ..., u_n(s_1, ..., s_n)\}$. Množinu Q nazveme *množinou hráčov*, množinu S_i nazveme *priestorom stratégií hráča i*, prvok $s_i \in S_i$ nazveme *stratégiou hráča i* a funkcia $u_i(s_1, ...s_n)$ bude jeho *výplatnou funkciou.*

Špeciálnym prípadom sú tzv. *konečné hry*, teda hry, v ktorých sú priestory stratégií jednotlivých hráčov konečnými množinami.

Dôležitým pojmom je aj tzv. *rovnovážny bod.* Pôjde o takú kombináciu stratégií jednotlivých hráčov, pri ktorej nebude mať žiaden z nich dôvod zvoliť inú, pretože by nezískal viac. Formálne:

Definícia. *Rovnovážnym bodom* hry nazveme n-ticu stratégií $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$, pre ktorú platí, že pre každé $i \in \{1, 2, ..., n\}$ a všetky $s_i \in S_i$:

$$u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) \leq u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$$

Stratégia s_i^* sa nazýva *rovnovážna stratégia hráča i.*
Táto definícia je zároveň poslednou obecnou definíciou. Až do konca práce budeme hrou nazývať konečnú hru 2 hráčov.

1.3 Hry dvoch hráčov

Existuje v každej konečnej hre 2 hráčov dvojica stratégií, ktorá je rovnovážnym bodom? A je určená jednoznačne?

Príklad 1. *Uvažujme hru 2 hráčov, pri ktorej má každý z nich na výber dve stratégie. V tabuľke sú zachytené výplatné funkcie hráčov pre jednotlivé stratégie, pričom prvé číslo z dvojice vždy udáva hodnotu výplatnej funkcie prvého hráča.*

$$
\begin{array}{cccc}
 & & \multicolumn{2}{c}{\text{Hráč 2}} \\
 & \textit{Stratégia} & t_1 & t_2 \\
 & s_1 & (2,0) & (2,-1) \\
\text{Hráč 1} & & & \\
 & s_2 & (1,1) & (3,-2)
\end{array}
$$

Vidíme, že bod (s_1, t_1)*, ktorému zodpovedajú hodnoty výplatných funkcií* $(2,0)$ *je rovnovážny, pretože ani pre jedného hráča nie je výhodné jednostranne sa z neho vychýliť. Nasledujúca tabuľka ukazuje, že žiaden ďalší bod v nej túto vlastnosť nemá. Šípky znázorňujú smer výhodných jednostranných odchýlení.*

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & \text{Hráč 2} & \\
 & \textit{Stratégia} & t_1 & & t_2 \\
 & s_1 & (2,0) & \leftarrow & (2,-1) \\
\text{Hráč 1} & & \uparrow & & \downarrow \\
 & s_2 & (1,1) & \leftarrow & (3,-2)
\end{array}
$$

Príklad 2.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & \text{Hráč 2} & \\
 & \textit{Stratégia} & t_1 & & t_2 \\
 & s_1 & (0,1) & \rightarrow & (5,4) \\
\text{Hráč 1} & & \downarrow & & \uparrow \\
 & s_2 & (3,2) & \leftarrow & (-2,-1)
\end{array}
$$

V zmysle predošlej definície sú v tejto hre 2 rovnovážne body a to (s_1, t_2) *a* (s_2, t_1).

Príklad 3. *Nasledujúca tabuľka znázorňuje hru, v ktorej nie je žiaden bod rovnovážnym. Odchýlením z ktoréhokoľvek bodu tabuľky by si vždy jeden z hráčov pomohol.*

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & \text{Hráč 2} & \\
 & \textit{Stratégia} & t_1 & & t_2 \\
 & s_1 & (1,-1) & \rightarrow & (-1,1) \\
\text{Hráč 1} & & \uparrow & & \downarrow \\
 & s_2 & (-1,1) & \leftarrow & (1,-1)
\end{array}
$$

Prvé dva príklady znázorňujú tzv. *neantagonistické konflikty*. Tretí naopak znázorňuje *antagonistický konflikt*, teda konflikt pri ktorom sú záujmy hráčov protichodné. Hráč môže získať len na úkor druhého. Tieto konflikty sú popisované *hrami s konštantným súčtom (výplatných funkcií)* a vedú k zavedeniu nasledujúceho pojmu. (Definícia je uvedená pre konečnú hru 2 hráčov)

Definícia. Majme konečnú hru 2 hráčov v normálnom tvare. Počet prvkov priestoru stratégií hráča 1 označme m, počet prvkov stratégií hráča 2 označíme n. *Zmiešanou stratégiou hráča* 1 budeme rozumieť vektor pravdepodobností $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$, taký, že

$$p_i \geq 0 \qquad \forall 1 \leq i \leq m$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Zmiešanou stratégiou hráča 2 bude vektor pravdepodobností $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$

$$q_j \geq 0 \qquad \forall 1 \leq j \leq n$$
$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

Stratégie z priestoru stratégií nazývame *rýdze stratégie*. Zmiešaná stratégia je teda vektor pravdepodobností, ktorý hráčovi udáva pravdepodobnosť, s akou zvolí každú zo svojich rýdzych stratégií.

Konečnú hru dvoch hráčov v normálnom tvare, ktorá je zadaná maticou dvojíc výplatných funkcií, budeme nazývať *dvojmaticovou hrou*.

Definícia. Pri dvojmaticovej hre

$$\begin{pmatrix} (u_1(s_1, t_1), u_2(s_1, t_1)) & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ & & (u_1(s_m, t_n), u_2(s_m, t_n)) \end{pmatrix}$$

so zmiešanými stratégiami $p = (p_1, ..., p_m)$ a $q = (q_1, ..., q_n)$ definujeme *očakávané výhry hráčov* nasledovne:

$$O_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_1(s_i, t_j)$$
$$O_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_2(s_i, t_j)$$

Zavedením zmiešaných stratégií sme konečným hrám zaručili veľmi významnú vlastnosť, ktorú popisuje tzv. *Nashova veta*, ktorej je venovaná nasledujúca kapitola.

2. Nashova veta

K *Nashovej vete* a jej dôkazu sa dostaneme až na konci tejto kapitoly. Významnú úlohu v samotnom dôkaze zohráva *Brouwerova veta o pevnom bode.*

Veta (Brouwerova o pevnom bode). Nech $f : K \to K$ je spojité zobrazenie, K je kompaktná konvexná množina. Potom existuje $x \in K$ taký, že $f(x) = x$.

Obecný prípad dokazovať nebudeme. Pre dimenziu 2 sa dá platnosť tvrdenia ukázať pomocou *Vety o hre Hex.*

2.1 Hra Hex

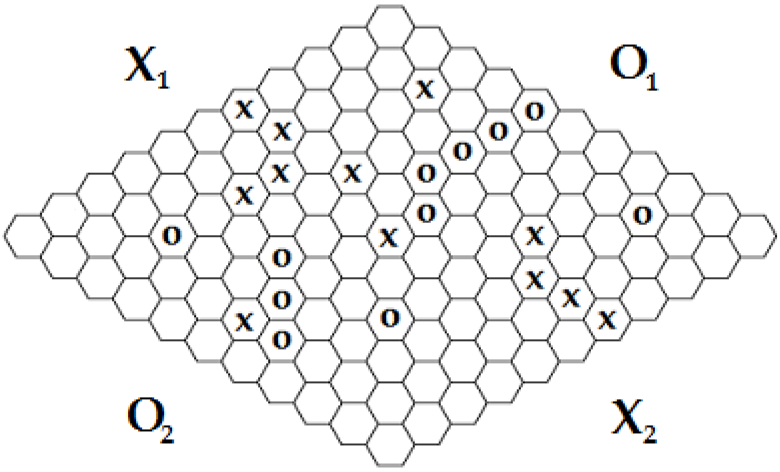
Hru vymyslel počiatkom 40. rokov dánsky matematik Piet Hein. O pár rokov neskôr ju medzi študentami matematiky na Princetone spopularizoval práve John Nash. Pravidlá sú pomerne jednoduché. Ide o hru 2 hráčov, ktorá sa hrá na hracom poli tvorenom šesťuholníkmi usporiadanými do kosoštvorca, pričom ich počet sa môže líšiť, najčastejšie je to 11 × 11. Dve protiľahlé steny poľa sú označené symbolmi X_1, X_2 a zvyšné dve symbolmi O_1, O_2. (Niekedy sa namiesto symbolov používajú rôzne farby, v našom prípade ale bude výhodné používať symboly). Každý hráč používa jeden zo symbolov **x**/**o**. Ťah hráča spočíva v označení jedného neoznačeného políčka svojim symbolom. Hráči sa striedajú po jednotlivých ťahoch a ich cieľom je vytvoriť neprerušenú reťaz svojich symbolov, ktorou spoja príslušné dve steny hracieho poľa.

2.2 Veta o hre Hex

Lemma. Konečný graf, ktorého vrcholy sú stupňa nanajvýš dva, je zjednotením disjkunktných podgrafov, z ktorých každý je jedno z nasledujúcich:

- izolovaný vrchol
- kružnica
- cesta

Dôkaz. Postupujme indukciou podľa počtu hrán v grafe. Uvažujme graf G s N vrcholmi. Každý z nich má stupeň nanajvýš 2, takže graf G má maximálne N hrán. Symbolom G_k budeme značiť graf s k hranami.
V prvom kroku si uvedomíme, že graf G_0 obsahuje samé izolované vrcholy.
Vezmime graf G_{n+1}, z ktorého odoberieme ľubovoľnú hranu (u, v). Vrcholy u a v majú teraz stupeň maximálne 1, takže určite neležia na žiadnej kružnici. Podľa indukčného predpokladu je G_n zjednotením disjunktných izolovaných vrcholov, kružníc a ciest. Pridajme naspäť hranu (u, v). Podgrafy, ktoré boli disjunktné s u a v v G_n sa nezmenili a u a v ležia teraz na ceste alebo na kružnici a teda aj G_{n+1} je zjednotením disjunktných izolovaných vrcholov, kružníc a ciest. Lemma teda platí pre všetky G_k, kde $0 \leq k \leq N$. □



Obr. 2.1: Priebeh jednej hry

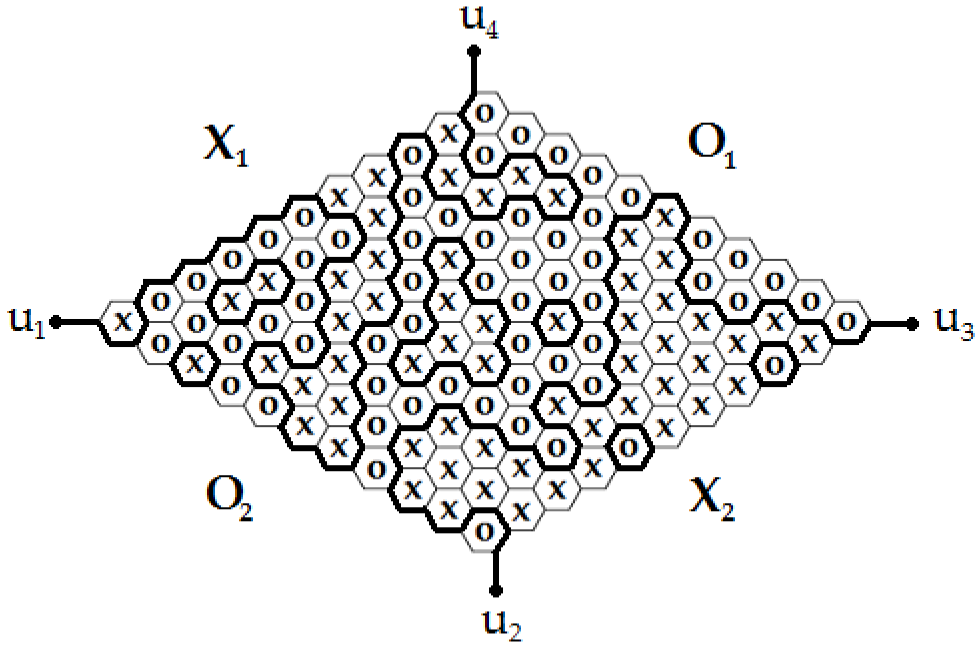
Na hracie pole môžeme tiež nazerať ako na graf $G = (V, E)$. Všetky vrcholy šesťuholníkových políčok budú tvoriť vrcholy grafu a hrany šesťuholníkov budú tvoriť množinu hrán E. Ku grafu pridáme ešte 4 vrcholy, každý z nich bude spojený hranou s jedným rohom hracieho poľa. Označíme ich u_1, u_2, u_3 a u_4 a príslušné hrany, ktoré ich spájajú s hracím poľom označíme e_1, e_2, e_3 a e_4.

Na dokázanie *Vety o hre Hex* stačí ukázať, že dva z vrcholov u_1, u_2, u_3 a u_4 sú spojené cestou. Šesťuholníkové políčka lemované touto cestou budú tvoriť práve víťaznú reťaz políčok jedného z hráčov.

Veta (o hre Hex). Hra Hex nemôže skončiť remízou. Inými slovami, ak sú všetky políčka hracieho plánu označené **x** alebo **o**, potom existuje cesta symbolov **x** spájajúcich X_1 a X_2 alebo cesta symbolov **o** spájajúcich O_1 a O_2.

Dôkaz. Za **X**-ovú časť poľa budeme považovať políčka, na ktorých je **x** a oblasti X_1 a X_2. Obdobne zadefinujeme **O**-čkovú časť.
Skonštruujeme podgraf $G' = (V, E')$, ktorý bude obsahovať všetky vrcholy grafu G, ale len podmnožinu jeho hrán. Hrana bude patriť do množiny E' len v prípade, že leží medzi časťami **X** a **O**. Vrcholy u_1, u_2, u_3 a u_4 majú stupeň 1. Všetky ostatné vrcholy ležia na hranici troch políčok. (Za políčko v tomto prípade považujeme aj oblasti X_1, X_2, O_1, O_2). Ak sú všetky políčka okolo vrcholu označené rovnakým symbolom, daný vrchol má stupeň 0. Ak sú dve z nich označené jedným a posledné iným symbolom, má vrchol stupeň 2. Na Obr. 2.2 máme znázornený jeden priebeh hry a vyznačené hrany pografu G'.

Graf G' spĺňa predpoklady Lemmy a je teda zjednotením navzájom disjunktných izolovaných vrcholov, kružníc a ciest. Každý z vrcholov u_1, u_2, u_3 a u_4 je teda koncom nejakej cesty. Keďže vieme, že jednotlivé podgrafy sú navzájom disjunktné, musia nutne existovať 2 cesty, pričom každá z nich spája dva vrcholy z u_1, u_2, u_3 a u_4. A hoci víťaz závisí na orientácií ciest, ukázali sme, že hra nikdy neskončí remízou. $\square$



Obr. 2.2: Vyznačené hrany podgrafu G'

Dôsledok. Existuje víťazná stratégia pre prvého hráča.

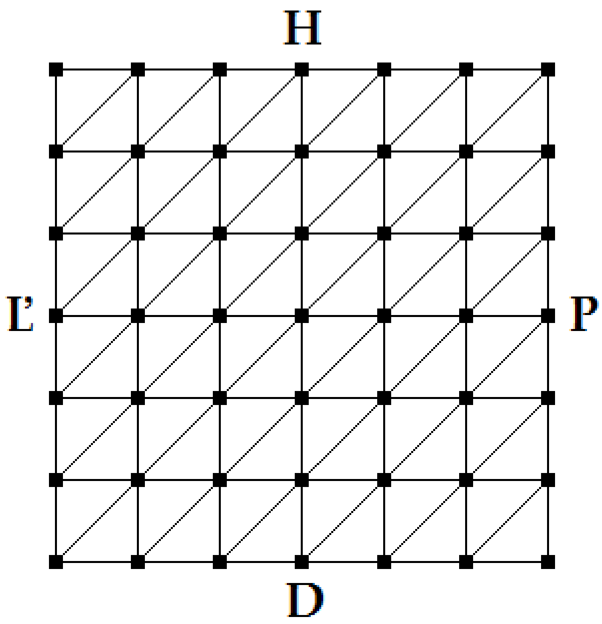
Dôkaz. Ide o tvrdenie založené na jednoduchom argumente *prisvojenia stratégie.* Najprv si uvedomme, že ak má hráč dopredu označené nejaké náhodné políčko v hracom pláne svojim symbolom, nemôže mu to uškodiť. Ak je dané políčko súčasťou jeho víťaznej stratégie, v okamihu, keď by ho chcel označiť, môže hneď označiť ďalšie. Ak nie je súčasťou jeho stratégie, nevadí mu, že už je obsadené.

Podľa *Vety o hre Hex* vždy existuje víťazná stratégia. Pre spor predpokladajme, že existuje pre 2. hráča. Prvý hráč môže umiestniť svoj znak náhodne a tým sa dostane do pozície 2. hráča, teda ďalej bude postupovať podľa víťaznej stratégie 2. hráča. Keďže prvý ťah mu neublížil, používaním víťaznej stratégie druhého hráča sme našli víťaznú stratégiu pre prvého hráča, čo je hľadaný spor. □

Predošlé tvrdenie nám o víťaznej stratégií prvého hráča okrem jej existencie neprezrádza nič. Pre najčastejšie používané pole 11×11 je dodnes neobjavená.

2.3 Ekvivalencia Vety o hre Hex a Brouwerovej vety o pevnom bode

Zmeníme reprezentáciu hracieho poľa hry Hex. Body $\mathbb{Z}^2$ tvoria mriežku v $\mathbb{R}^2$. Pre $x \neq y \in \mathbb{R}^2$: $|x - y| = \max_{i=1,2}(x_i - y_i)$. $x < y$, ak $x_i \leq y_i, i = 1, 2$. Body x a y nazveme *porovnateľnými*, ak $x < y$ alebo $x > y$. Hracie pole veľkosti k bude graf B_k, ktorého vrcholy sú všetky $z \in \mathbb{Z}^2$ také, že $(1, 1) \leq z \leq (k, k)$. Dva vrcholy z, z' budeme nazývať *priľahlé*, pokiaľ $|z - z'| = 1$ a z a z' sú porovnateľné. Dve podmnožiny A, B množiny vrcholov *sa dotýkajú*, ak existujú vrcholy $a \in A$ a $b \in B$, ktoré sú priľahlé.



Obr. 2.3: Hrací plán Hex 6×6

Na Obr. 2.3 je znázornené pole Hex o veľkosti 6×6. Okrajové hrany sme pomenovali horná (H), dolná (D), ľavá ($Ľ$), pravá (P). Hráčov budeme označovať vodorovný (V) a zvislý (Z). Novej reprezentácií je prispôsobená aj formulácia *Vety o hre Hex*:

Veta (o hre Hex). Nech je množina B_k pokrytá dvomi množinami V a Z. Potom buď V obsahuje spojnicu $Ľ$ a P, alebo Z obsahuje spojnicu H a D.

Veta (Brouwerova o pevnom bode pre dimenziu 2). Nech f je spojité zobrazenie z jednotkového štvorca I^2 do seba samého. Potom existuje $x \in I^2$ taký, že $f(x) = x$.

Dokážeme dve implikácie:

Veta o hre Hex $\Rightarrow$ Brouwerova veta o pevnom bode.

Dôkaz. Nech $f : I^2 \to I^2$ je dané ako $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Množina I^2 je kompaktná, preto postačí ukázať, že pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ existuje $x \in I^2$ také, že $|x - f(x)| < \epsilon$. Kompaktnosť I^2 taktiež implikuje, že f je rovnomerne spojité, teda pre každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že ak $|x - x'| < \delta$, potom $|f(x) - f(x')| < \epsilon$. Bez ujmy na obecnosti môžeme zvoliť $\delta < \epsilon$.

Uvažujme hracie pole B_k dostatočne veľké, aby $\frac{1}{k} < \delta$. Zadefinujeme 4 podmnožiny V^+, V^-, Z^+, Z^- nasledovne:

$$V^+ = \{z \mid f_1(\frac{z}{k}) - \frac{z_1}{k} > \epsilon\}$$
$$V^- = \{z \mid \frac{z_1}{k} - f_1(\frac{z}{k}) > \epsilon\}$$
$$Z^+ = \{z \mid f_2(\frac{z}{k}) - \frac{z_2}{k} > \epsilon\}$$
$$Z^- = \{z \mid \frac{z_2}{k} - f_2(\frac{z}{k}) > \epsilon\}$$

Našim cieľom bude dokázať, že tieto 4 množiny nepokrývajú celú množinu B_k. Nepokryté body budú práve žiadané pevné body. (Ak bod z neleží v žiadnej z množín V^+, V^-, Z^+, Z^-, potom $|f(\frac{z}{k}) - \frac{z}{k} < \epsilon|$.)

Množiny V^+ a V^- a tiež Z^+ a Z^- sú disjunktné, kľúčové však bude pozorovanie, že sa dokonca ani *nedotýkajú*.

Skúsme predpokladať, že $z \in V^+$ a $z' \in V^-$ sú priľahlé. Z definície $f_1(\frac{z}{k}) - \frac{z_1}{k} > \epsilon$ a $\frac{z_1'}{k} - f_1(\frac{z'}{k}) > \epsilon$. Sčítaním dostaneme:

$$f_1(\frac{z}{k}) - f_1(\frac{z'}{k}) + \frac{z_1'}{k} - \frac{z_1}{k} > 2\epsilon \tag{2.1}$$

Vzhľadom k predpokladu, že z a z' sú priľahlé a vzhľadom k voľbe k takej, že $\frac{1}{k} < \delta$ máme:

$$\frac{z_1'}{k} - \frac{z_1}{k} \leq |\frac{z_1'}{k} - \frac{z_1}{k}| = \frac{1}{k} < \delta < \epsilon$$

Teda

$$\frac{z_1}{k} - \frac{z_1'}{k} > -\epsilon \tag{2.2}$$

Sčítame (2.1) a (2.2):

$$f_1(\frac{z}{k}) - f_1(\frac{z'}{k}) > \epsilon \tag{2.3}$$

Pokiaľ ale z a z' boli priľahlé, potom $|\frac{z}{k} - \frac{z'}{k}| = \frac{1}{k} < \delta$ by implikovalo $|f(\frac{z}{k}) - f(\frac{z'}{k})| < \epsilon$. (2.3) je v rozpore s našou voľbou δ a V^+, V^- sa teda nemôžu dotýkať. Obdobne Z^+ a Z^-.

Položme $V = V^+ \cup V^-$, $Z = Z^+ \cup Z^-$. Predpokladajme, že Q je množina spojených vrcholov ležiaca vo V. Potom Q leží celá buď vo V^+ alebo V^-, pretože tieto sa navzájom nedotýkajú. Uvedomme si, že V^+ nesiaha až k pravej časti, pretože f zobrazuje I^2 do seba samého. Pre všetky $z \in I^2$ platí $f(\frac{z}{k}) \leq 1$, takže $f(\frac{z}{k}) - 1 \leq 0 < \epsilon$. Obdobne V^- nesiaha k ľavej hrane, takže Q nemôže spájať $Ľ$ a P. Rovnako dospejeme k tvrdeniu, že ani Z neobsahuje množinu spojených vrcholov siahajúcu od H k D. Použitím *Vety o hre Hex* dostávame, že B_k tým pádom nemôže byť celá pokrytá množinami Z a V. Nepokryté body sú práve pevné body. $\square$

Pred samotným dôkazom opačnej implikácie si uvedomme, že ľubovoľný bod štvorca I_k^2 (štvorec s rozmermi $k \times k$) sa dá jednoznačne vyjadriť ako konvexná kombinácia nanajvýš troch vrcholov v B_k. Ďalej si všimnime, že ľubovoľné zobrazenie f z B_k do $\mathbb{R}^2$ vieme rozšíriť na spojité *simpliciálne* zobrazenie $\widehat{f}$, čo znamená, že ak $x = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3$, kde $\lambda_i > 0$ a $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$, potom $\widehat{f}(x) = \lambda_1 f(z^1) + \lambda_2 f(z^2) + \lambda_3 f(z^3)$.

Lemma. Nech z^1, z^2, z^3 sú vrcholy ľubovoľného trojuholníku v $\mathbb{R}^2$. ρ nech je zobrazenie dané $\rho(z^i) = z^i + v^i$, kde v^1, v^2, v^3 sú dané vektory a $\widehat{\rho}$ nech je jeho simplicálne rozšírenie. Potom $\widehat{\rho}$ má pevný bod vtedy a len vtedy, ak 0 leží v konvexnom obale v^1, v^2, v^3.

Dôkaz. $x = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3$.

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(x) &= \lambda_1(z^1 + v^1) + \lambda_2(z^2 + v^2) + \lambda_3(z^3 + v^3) \\ &= (\lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3) + (\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 v^3) = \\ &= x + (\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 v^3) \end{aligned}$$

Vidíme, že $\widehat{\rho}(x) = x$ práve vtedy, keď $\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 v^3 = 0$.

□

Brouwerova veta o pevnom bode $\Rightarrow$ Veta o hre Hex.

Dôkaz. Predpokladajme, že B_k je rozdelená na 2 množiny V a Z. *V-cestou* (*Z-cestou*) budeme rozumieť cestu vo V (Z). Zadefinujeme štyri podmnožiny B_k nasledovne: $\widehat{L}$ nech sú vrcholy spojené s L pomocou $V - cesty$ a $\widehat{P} = V \setminus \widehat{L}$. $\widehat{D}$ sú vrcholy spojené s D $Z - cestou$ a $\widehat{H} = Z \setminus \widehat{D}$. Množiny $\widehat{L}$ a $\widehat{P}$ sa nedotýkajú a rovnako ani $\widehat{D}$ a $\widehat{H}$. Budeme predpokladať, že neexistuje $V - cesta$ z L do P a ani $Z - cesta$ z D do H a dôjdeme k sporu.

$e^1 = (1, 0)$, $e^2 = (0, 1)$ sú jednotkové vektory. Zobrazenie f nech je dané nasledovne:

$$f(z) = \begin{cases} z + e^1 & z \in \widehat{L} \\ z - e^1 & z \in \widehat{P} \\ z + e^2 & z \in \widehat{D} \\ z - e^2 & z \in \widehat{H} \end{cases}$$

Nie je ťažké nahliadnuť, že v každom zo štyroch prípadov bude $f(z)$ opäť patriť do B_k. Jediná možnosť, ako by napríklad $z + e^1$ mohlo *vypadnúť* z B_k by bola, keby $z \in \widehat{L}$ ležalo na P. My sme ale predpokladali, že neexistuje $V - cesta$ z L do P, takže $\widehat{L}$ nemôže siahať až k P. Keďže $\widehat{L}$ a $\widehat{P}$ sa nedotýkajú, $z - e^1$ patrí do B_k pre všetky $z \in \widehat{P}$.

Zamerajme sa teraz na $\widehat{f}$, ktoré je simpliciálnym rozšírením f na I_k^2. $\widehat{f}$ je spojité. Nedotýkanie sa $\widehat{L}$ a $\widehat{P}$ implikuje, že zobrazenie f posunie akýkoľvek trojuholník s vrcholmi vzájomne priľahlými výhradne len o e^1 alebo $-e^1$, nikdy nie oboje. Nedotýkanie sa $\widehat{D}$ a $\widehat{H}$ implikuje posunutie výhradne jedným smerom aj v druhej súradnici. f posúva tri vrcholy pomocou dvoch vektorov, ktoré ležia v jednom kvadrante $\mathbb{R}^2$ a teda nie je ich konvexnou kombináciou možné dostať 0. Podľa lemmy je $\widehat{f}$ spojité zobrazenie na I_k^2 bez pevného bodu, čo je spor s *Brouwerovou vetou o pevnom bode*. Platnosť *Brouwerovej vety o pevnom bode* teda nutne implikuje platnosť *Vety o hre Hex*.

□

Konečne môžme pristúpiť k hlavnému tvrdeniu teórie hier:

Veta (Nashova). V zmiešaných stratégiách má každá konečná hra aspoň jeden rovnovážny bod.

Dôkaz. Pre dvojicu zmiešaných stratégií (p, q), kde $p = (p_1, ...p_m)$ a $q = (q_1, ..., q_n)$ položíme

$$p_i^* = \frac{p_i + c_i(p,q)}{1 + \sum_{k=1}^m c_k(p,q)}, \quad c_i(p,q) = \max\{O_1(s_i,q) - O_1(p,q), 0\} \quad i = 1, ..., m$$

$$q_j^* = \frac{q_j + d_j(p,q)}{1 + \sum_{l=1}^n c_l(p,q)}, \quad d_j(p,q) = \max\{O_2(p,t_j) - O_2(p,q), 0\} \quad j = 1, ..., n$$

$$0 \le p_i \le 1, \quad 0 \le c_i(p,q) \Rightarrow c_i(p,q) \le \sum_{k=1}^m c_k(p,q) \Rightarrow 0 \le p_i^* \le 1 \quad \forall i$$

$$0 \le q_j \le 1, \quad 0 \le d_j(p,q) \Rightarrow d_j(p,q) \le \sum_{l=1}^n d_l(p,q) \Rightarrow 0 \le q_j^* \le 1 \quad \forall j$$

$$\sum_{i=1}^m p_i^* = \frac{\sum_{i=1}^m p_i + \sum_{i=1}^m c_i(p,q)}{1 + \sum_{k=1}^m c_k(p,q)} = 1$$

Podobne $\sum_{j=1}^n q_j^* = 1$.
Nazveme $p^* = (p_1^*, ..., p_m^*)$ a $q^* = (q_1^*, ..., q_n^*)$. Máme teda zobrazenie

$$\pi : [0,1]^m \times [0,1]^n \to [0,1]^m \times [0,1]^n$$

$$\pi(p,q) = (p^*, q^*)$$

Dokážeme nasledujúcu ekvivalenciu:
(p,q) je rovnovážny bod $\Leftrightarrow \pi(p,q) = (p,q)$ ((p,q) je pevný bod zobrazenia π).

„$\Rightarrow$" Z definície rovnovážneho bodu vyplýva

$$\forall i \quad c_i(p,q) = 0 \Rightarrow p = p^*$$

$$\forall j \quad d_j(p,q) = 0 \Rightarrow q = q^*$$

„$\Leftarrow$" (p,q) je pevný bod zobrazenia π.
Rozpísaním definície $O_1(p,q)$ dostávame

$$O_1(p,q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j u_1(s_i,t_j) = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n q_j u_1(s_i,t_j) = \sum_{i=1}^m p_i O_1(s_i,q)$$

Predpokladajme, že pre každé i pre ktoré $p_i > 0$ platí $c_i(p,q) > 0$, teda $O_1(s_i,q) > O_1(p,q)$. Z toho vyplýva

$$\sum_i p_i O_1(s_i, q) > \sum_i p_i O_1(p, q)$$
$$\sum_i p_i O_1(s_i, q) > O_1(p, q) \sum_i p_i$$
$$\sum_i p_i O_1(s_i, q) > O_1(p, q)$$

Dospeli sme ku sporu. Musí teda existovať aspoň jedno i, pre ktoré $p_i > 0$ a $c_i(p, q) = 0$

$$p_i^* = \frac{p_i}{1 + \sum_{k=1}^m c_k(p, q)} \overset{\textit{pevný bod}}{=} p_i \Rightarrow \sum_{k=1}^m c_k(p, q) = 0$$

$c_k(p, q)$ sú nezáporné, takže nutne $c_k(p, q) = 0$ pre všetky k.

$$\forall k : O_1(s_k, q) \leq O_1(p, q) \Rightarrow p \text{ je rovnovážna stratégia.}$$

Obdobne dostaneme, že q je rovnovážna stratégia.

Existencia pevného bodu plynie z *Brouwerovej vety o pevnom bode.* □

Dôkaz nie je konštrukčný, nedáva nám teda návod, ako môžeme rovnovážne body nájsť.

3. Nashove rovnovážne body a ich hľadanie

Z predošlej kapitoly vieme, že pri konečnej hre 2 hráčov existuje v zmiešaných stratégiách aspoň jeden rovnovážny bod.

3.1 Dominované stratégie

Príklad 4. *Uvažujme hru zadanú touto dvojmaticou:*

$$\begin{array}{cc} & \text{\textit{Hráč} } 2 \\ & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{r} s_1 \\ \text{\textit{Hráč} } 1 \quad s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{pmatrix} (\ 2,\ \ 0) & (-3,\ \ 2) & (\ 0,\ \ 1) \\ (\ 2,\ \ 2) & (\ 1,\ \ 2) & (-3,\ \ 2) \\ (\ 3,-5) & (\ 2,-3) & (\ 0,\ \ 3) \end{pmatrix} \end{array}$$

Všimnime si, že ak by hráč 1 zvolil stratégiu s_1, pri voľbe stratégií t_1, t_2, t_3 hráčom 2 by boli hodnoty jeho výplatnej funkcie porade 2,-3,0. Ak by však zvolil s_3, získal by 3,2,0. Bez ohľadu na to, akú stratégiu zvolí hráč 2, je pre hráča 1 nevýhodné voliť s_1.

Definícia. Stratégia $s_i \in S$ hráča 1 je *dominovaná* stratégiou $s_j \in S$, pokiaľ $\forall t \in T$ (T je priestor stratégií hráča 2) platí

$$u_1(s_i, t) \leq u_1(s_j, t) \qquad \wedge \qquad \exists t \in T : u_1(s_i, t) < u_1(s_j, t)$$

V príklade je teda stratégia s_1 dominovaná stratégiou s_3. Stratégia t_1 je dominovaná t_2 aj t_3. Vynechaním dominovaných stratégií dostaneme jednoduchšiu dvojmaticu:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} t_2^{'} & t_3^{'} \end{array} \\ \begin{array}{c} s_2^{'} \\ s_3^{'} \end{array} & \begin{pmatrix} (\ 1,\ \ 2) & (-3,\ \ 2) \\ (\ 2,-3) & (\ 0,\ \ 3) \end{pmatrix} \end{array}$$

Ďalej vidíme, že $s_{2'}$ je dominovaná $s_3^{'}$ a rovnako $t_2^{'}$ je dominovaná $t_3^{'}$. Ostal nám teda len jediný bod $(s_3^{'}, t_3^{'})$, ktorý je rovnovážnym bodom v redukovanej dvojmatici a teda v pôvodnej dvojmatici je rovnovážnym bodom (s_3, t_3).

Postupnou elimináciou dominovaných stratégií sa vieme dopracovať k rovnovážnemu bodu alebo k jednoduchšej dvojmatici.

3.2 Najlepšie odpovede

Definícia. Nech hráč číslo 2 zvolí stratégiu t. Množinu stratégií hráča 1, pri ktorých je hodnota jeho výplatnej funkcie najvyššia, nazveme *najlepšou odpoveďou hráča* 1 *na stratégiu* t. Označíme $N_1^{odp}(t)$.

$$N_1^{odp}(t) = \{s \in S,\ u_1(s,t) \geq u_1(s^*,t)\ \forall s^* \in S\}$$

Obdobne definujeme $N_2^{odp}(s)$.

Tvrdenie. (s^*, t^*) je rovnovážny bod $\Leftrightarrow s^* = N_1^{odp}(t^*)$ a zároveň $t^* = N_2^{odp}(s^*)$.

Pozrime sa znovu na Príklad 4 a vypíšme najlepšie odpovede na jednotlivé stratégie.

$$\begin{array}{ll} N_1^{odp}(t_1) = \{s_3\} & N_2^{odp}(s_1) = \{t_2\} \\ N_1^{odp}(t_2) = \{s_3\} & N_2^{odp}(s_2) = \{t_1, t_2, t_3\} \\ N_1^{odp}(t_3) = \{s_1, s_3\} & N_2^{odp}(s_3) = \{t_3\} \end{array}$$

Vidíme, že jedinou dvojicou stratégií, ktoré sú vzájomne najlepšími odpoveďami je (s_3, t_3).

Pojem najlepšej odpovede má zmysel aj pri zmiešaných stratégiách, miesto výplatnej funkcie budeme požadovať maximalitu očakávaných výhier hráčov.

3.3 Indiferentnosť medzi rýdzymi stratégiami

Nech hráč 1 zvolí zmiešanú stratégiu s^*. Najlepšou odpoveďou hráča 2 na s^* je nejaká zmiešaná stratégia $t^* = (q_1, ..., q_n)$. Vektor t^* nutne obsahuje nejaké nenulové zložky. Ich pozície udávajú rýdze stratégie, medzi ktorými sa rozhoduje a ich veľkosť udáva pravdepodobnosť s akou sa k tej-ktorej rýdzej stratégií prikloní. Uvedomme si, že každá rýdza stratégia, ktorú hráč 2 zvažuje, musí byť sama o sebe najlepšou odpoveďou spomedzi všetkých rýdzych stratégií. Ak by bola očakávaná výhra pre nejakú rýdzu stratégiu menšia než pre inú, hráč by nemal dôvod zvažovať prvú, keďže výberom inej by mohol získal viac.

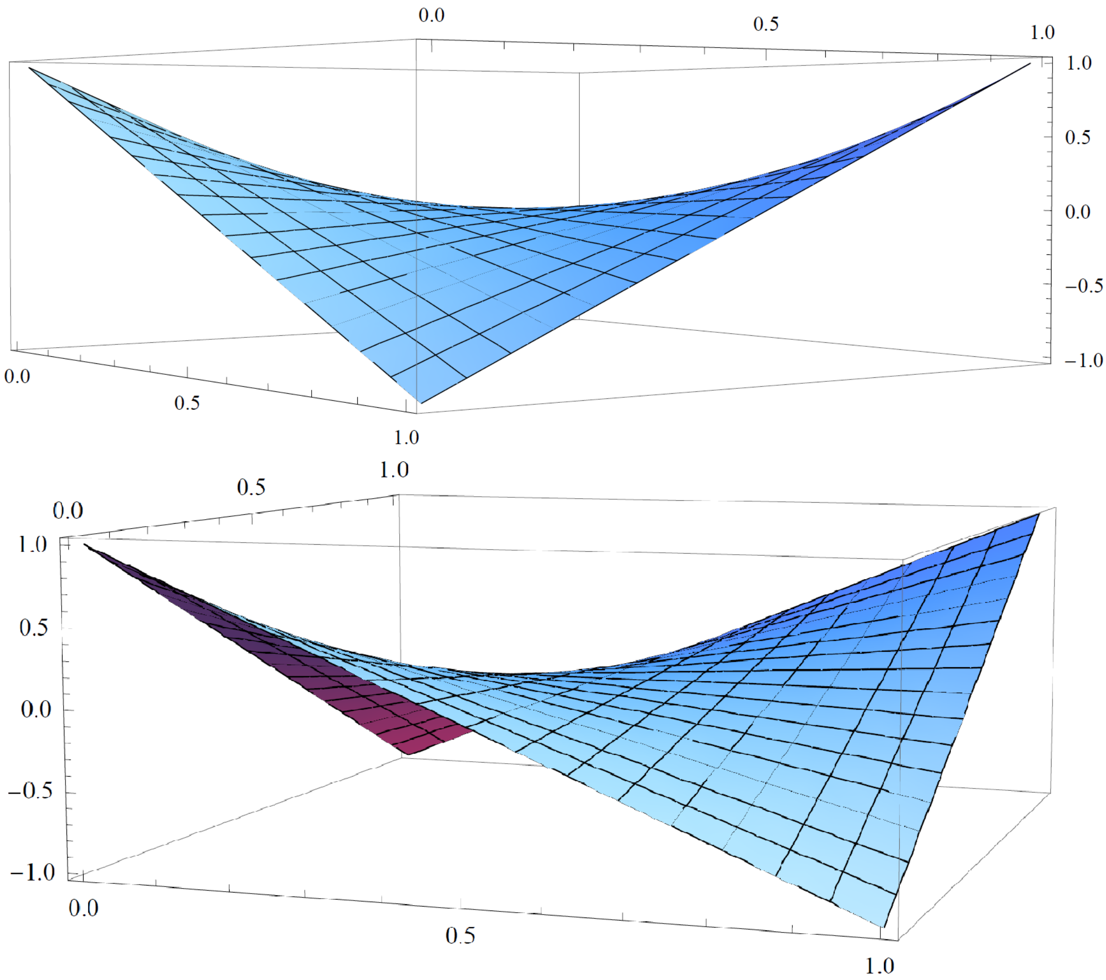
Príklad 5.

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{r} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} (\ \ 1,-1) & (-1,\ \ 1) \\ (-1,\ \ 1) & (\ \ 1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Vieme, že v tejto hre neexistuje rovnovážny bod v rýdzych stratégiách. Hráč 1 môže využiť fakt, že jeho zmiešaná stratégia $(p, 1-p)$ *bude rovnovážnou vtedy, ak bude hráč 2 indiferentný medzi svojimi rýdzymi stratégiami, teda ak budú jeho očakávané výhry v oboch prípadoch rovnaké.*

$$-p + (1-p) = p - (1-p) \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

Rovnako hráč 2 dostane $q = \frac{1}{2}$. *Rovnovážne stratégie sú teda* $s^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *a* $t^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



Obr. 3.1: Sedlový prvok v Príklade 5

Problémom tohto postupu je, že pri väčšom počte rýdzych stratégií nevieme dopredu povedať, ktoré zložky rovnovážnej zmiešanej stratégie budú nenulové a teda môžeme dostať sústavu rovníc, ktorá nemá riešenie.

Antagonistické konflikty

Hry 2 hráčov s konečnými priestormi rýdzych stratégií môžu byť pri antagonistických konfliktoch zadané maticou výplatnej funkcie len jedného z hráčov (prvého).

Rovnovážnym (sedlovým) bodom v rýdzych stratégiách je ten prvok matice, ktorý je najväčší v stĺpci a zároveň najmenší v riadku. Ako už vieme, nie vždy existuje, preto sme zaviedli *zmiešané stratégie*. Prečo sa rovnovážny bod nazýva *sedlový* ozrejmuje Obr. 3.1, na ktorom je zachytená hodnota očakávanej výhry v Príklade 5 v závislosti na p a q. Bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ je sedlovým bodom danej hry.

Ak budeme na zložky zmiešaných stratégií nazerať ako na premenné, hľadanie rovnovážnej stratégie pri antagonistickom konflikte bude ekvivalentné úlohe lineárneho programovania. Najznámejšou efektívnou metódou na riešenie úloh tohto typu je tzv. *simplexová metóda.* Pri jej opise vychádzame z [1].

3.4 Simplexová metóda

$$x^T = (x_1, ..., x_n)$$
$$c^T = (c_1, ..., c_n)$$

Chceme maximalizovať

$$c^T x$$

pri obmedzeniach

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

A je matica $m \times n$, $b^T = (b_1, ..., b_m)$

Úlohu upravíme pridaním nových premenných, aby sa z nerovností $Ax \leq b$ stali rovnice. Hodnota výplatnej funkcie bude taktiež nová premenná x_0, pri ktorej, na rozdiel od ostatných, nepožadujeme nezápornosť. Dostávame:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & a_{11}x_1 & + & ... & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & & & & & = & b_1 \\ & & a_{21}x_1 & + & ... & + & a_{2n}x_n & & & + & x_{n+2} & & & = & b_2 \\ & & & & & \vdots & & & & & & & & & \\ & & a_{m1}x_1 & + & ... & + & a_{mn}x_n & & & & & + & x_{n+m} & = & b_m \\ x_0 & - & c_1x_1 & - & ... & - & c_nx_n & & & & & & & = & 0 \\ & & & & & & \multicolumn{3}{c}{x_1 \geq 0, ..., x_m \geq 0} & & & & & & \end{array}$$

Hľadáme také riešenie sústavy, pri ktorom je x_0 maximálne a $x_1, ..., x_{n+m}$ sú nezáporné. Použijeme modifikovanú *Gauss-Jordanovu eliminačnú metódu* pre sústavu lineárnych rovníc. Jedno riešenie je zrejmé a to $x_1 = 0, ..., x_n = 0$. Nie je však optimálne, preto musíme iterovať. Kľúčový prvok pri eliminácií musíme voliť nasledovne:
Najprv zvolíme kľúčový stĺpec. Vyberieme ten, v ktorom leží najmenší záporný koeficient v poslednej rovnici. Premenná, ktorej kľúčový stĺpec zodpovedá je momentálne rovná 0. Po uskutočnení iteračného kroku bude kladná a teda výber stĺpca na základe opísaného kritéria zaručí najväčší prírastok hodnoty x_0 na jednotku prírastku novo vyeliminovanej premennej. (Prvý stĺpec nikdy nevyberáme.) Keď už máme kľúčový stĺpec, vydelíme pravé strany obmedzení kladnými prvkami kľúčového stĺpca a za kľúčový riadok vyberieme ten, ktorému prislúcha najmenší podiel. Posledný riadok ním nemôže byť. Touto voľbou kľúčového riadku zabezpečujeme, že sa na pravých stranách sústavy nikdy neobjaví záporné číslo a teda aj v nasledujúcom kroku dostaneme riešenie vyhovujúce podmienke nezápornosti premenných. Kľúčový prvok leží na priesečníku kľúčového stĺpca a kľúčového riadku. Úpravami získame na mieste kľúčového prvku 1 a nad aj pod ním nuly. V tejto transformovanej sústave sa medzi vyeliminované premenné zaradila niektorá z premenných $x_1, ..., x_n$. Rovnaký postup budeme aplikovať aj na

'novú' sústavu a opakovať ho budeme, pokiaľ budú v poslednej rovnici nejaké záporné koeficienty. Ak už žiadne záporné koeficienty nie sú, za nevyeliminované premenné dosadíme 0 a hodnoty vyeliminovaných premenných (vrátane x_0) prečítame na pravých stranách.

Výpočty sa väčšinou usporiadavajú do tabuliek kvôli prehľadnosti.

Použitie simplexovej metódy budeme ilustrovať na príklade v nasledujúcej kapitole.

Neantagonistické konflikty

Častejšie než antagonostické konflikty su konflikty neantagonistické. Pri hrách s konštantným súčtom sme mohli hovoriť o optimálnych stratégiách. Ak sa hráč odchýlil a zvolil si pre seba menej výhodnú stratégiu, automaticky tým pomohol súperovi. Pri hrách s nekonštantným súčtom sa ale môže stať, že hráč poškodením seba dosiahne výraznejšie poškodenie súpera, čo môže byť niekedy výhodnejšie, než používať rovnovážnu stratégiu.

Ak sa hráči nemôžu dohodnúť na spoločnom postupe, hovoríme o tzv. *nekooperatívnej teórií*, opačný prípad je *kooperatívna teória*.
Hry môžu mať viacero rovnovážnych bodov, Príklad 2 demonštroval hru s dvomi.

$$\begin{pmatrix} (\ \ 0, & 1) & (\ \ 5, & 4) \\ (\ \ 3, & 2) & (-2, & -1) \end{pmatrix}$$

Je zrejmé, že bod (s_1, t_2) je pre oboch hráčov výhodnejší než (s_2, t_1).

Definícia. Nech (s^*, t^*) je rovnovážny bod. Pokiaľ

$$u_1(s^*, t^*) \geq u_1(s^{'}, t^{'})$$
$$u_2(s^*, t^*) \geq u_2(s^{'}, t^{'})$$

pre ľubovoľný rovnovážny bod $(s^{'}, t^{'})$, hovoríme, že bod (s^*, t^*) je *dominujúci.*

Pozmeňme trošku maticu:

Príklad 6.

$$\begin{pmatrix} (-2, & -1) & (\ \ 5, & 4) \\ (\ \ 5, & 4) & (-2, & -1) \end{pmatrix}$$

(s_1, t_2) aj (s_2, t_1) sú dominujúce rovnovážne body. Ak ale hráči nebudú mať možnosť dohodnúť sa, môže sa stať, že zvolia (s_1, t_1) alebo (s_2, t_2), čo by bolo pre oboch veľmi nevýhodné.

Definícia. Nech $(s_{(i)}, t_{(i)})$, $i \in I$ sú rovnovážne body. Nazveme ich *zámennými*, pokiaľ je $(u_1(s_{(j)}, t_{(k)}), u_2(s_{(j)}, t_{(k)}))$ pre všetky $j, k \in I$ rovnaká.

Definícia. Dominujúce rovnovážne body, ktoré sú navzájom zámenné, nazývame *optimálnymi rovnovážnymi bodmi.*

Hľadaniu rovnovážnych bodov v neantagonistických konfliktoch sa v tejto práci venovať nebudeme.

4. Hry s kameňom, papierom a nožnicami

Hru *Kameň, papier, nožnice* poznajú zrejme všetci a už odmalička ju používajú na rýchle rozhodnutie nejakého konfliktu. Stačí napočítať do troch, ukázať jeden zo symbolov a máme výsledok. V tejto kapitole rozoberieme niekoľko rôznych verzií (foriem) a pokúsime sa určiť rovnovážne stratégie.

Kameň, papier, nožnice

Začneme najzákladnejšou verziou hry. Každý hráč zvolí jeden z troch objektov (kameň, papier, nožnice), naraz si ich navzájom ukážu a na základe princípu *kameň tupí nožnice*, *nožnice prestrihnú papier*, *papier obalí kameň* sa určí víťaz. Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že v prípade, že ukážu rovnaký symbol hra skončí remízou. Ide o antagonistický konflikt s nasledujúcou maticou:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} K & P & N \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ P \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vidíme, že matica nemá sedlový prvok. Musíme teda vziať do úvahy zmiešané stratégie a rovnovážny bod určíme pomocou simplexovej metódy. Kvôli výpočtu budeme potrebovať maticu s kladnými prvkami, využijeme preto

Tvrdenie. Rovnovážna stratégia zmiešaného rozšírenia maticovej hry sa nezmení, ak ku každému prvku matice hry pripočítame to isté nenulové číslo c.

Ku každému prvku pripočítame 2 a dostaneme maticu

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} K & P & N \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ P \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

Cenu hry pre rovnovážne zmiešané stratégie $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3)$ a $\overline{q} = (\overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{q}_3)$ definujeme ako $v = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \overline{p}_i a_{ij} \overline{q}_j$.
$\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3)$ bude rovnovážnou stratégiou hráča 1 a v bude cena hry, pokiaľ pre každú zmiešanú stratégiu q platí $\overline{p}^T Aq \geq v$, čo je ekvivalentné

$$\begin{aligned} 2\overline{p}_1 + 3\overline{p}_2 + 1\overline{p}_3 &\geq v \quad (q = (1,0,0)) \\ 1\overline{p}_1 + 2\overline{p}_2 + 3\overline{p}_3 &\geq v \quad (q = (0,1,0)) \\ 3\overline{p}_1 + 1\overline{p}_2 + 2\overline{p}_3 &\geq v \quad (q = (0,0,1)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

a zároveň

$$\overline{p}_1 + \overline{p}_2 + \overline{p}_3 = 1, \quad \overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3 \geq 0$$

Obdobne pre $\overline{q}$ a ľubovoľnú zmiešanú stratégiu p: $p^T A\overline{q} \leq v$:

$$\begin{aligned} 2\overline{q}_1 + 1\overline{q}_2 + 3\overline{q}_3 &\leq v \quad (p = (1,0,0)) \\ 3\overline{q}_1 + 2\overline{q}_2 + 1\overline{q}_3 &\leq v \quad (p = (0,1,0)) \\ 1\overline{q}_1 + 3\overline{q}_2 + 2\overline{q}_3 &\leq v \quad (p = (0,0,1)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

a zároveň

$$\overline{q}_1 + \overline{q}_2 + \overline{q}_3 = 1, \quad \overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{q}_3 \geq 0$$

Zaveďme nové nezáporné premenné $x_i = \frac{\overline{p}_i}{v}$, $y_j = \frac{\overline{q}_j}{v}$. (3.1) a (3.2) môžeme prepísať nasledovne:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 &\geq 1 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 1 \\ 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 &\geq 1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} 2y_1 + 1y_2 + 3y_3 &\leq 1 \\ 3y_1 + 2y_2 + 1y_3 &\leq 1 \\ 1y_1 + 3y_2 + 2y_3 &\leq 1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Na (4.3) môžeme nazerať ako na obmedzenia úlohy lineárneho programovania s výplatnou funkciou $x_1 + x_2 + x_3 (= \frac{1}{v})$, ktorú máme minimalizovať a na (4.4) ako na obmedzenia duálnej úlohy s výplatnou funkciou $y_1 + y_2 + y_3 (= \frac{1}{v})$, ktorú máme maximalizovať. Pochopiteľne budeme riešiť len jednu z týchto úloh a to tú s obmedzeniami (4.4). Postupom popísaným v predchádzajúcej kapitole (simplexová metóda) nájdeme riešenie.

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	2	1	3	1	0	0	1
0	$\boxed{3}$	2	1	0	1	0	1
0	1	3	2	0	0	1	1
1	-1	-1	-1	0	0	0	0
0	0	-1/3	$\boxed{7/3}$	1	-2/3	0	1/3
0	1	2/3	1/3	0	1/3	0	1/3
0	0	7/3	5/3	0	-1/3	1	2/3
1	0	-1/3	-2/3	0	1/3	0	1/3
0	0	-1/7	1	3/7	-2/7	0	1/7
0	1	5/7	0	-1/7	3/7	0	2/7
0	0	$\boxed{18/7}$	0	-5/7	1/7	1	3/7
1	0	-3/7	0	2/7	1/7	0	3/7
0	0	0	1	7/18	-5/18	1/18	1/6
0	1	0	0	1/18	7/18	-5/18	1/6
0	0	1	0	-5/18	1/18	7/18	1/6
1	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/2

$y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow v = 2$. $(y_1, y_2, y_3) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}) \Rightarrow \overline{q} = (\overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{q}_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Rovnako aj $\overline{p} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Keďže už vieme, že všetky zložky rovnovážnych stratégií sú nenulové, môžeme použiť metódu indiferentnosti medzi rýdzymi stratégiami a pozrieť sa, či dospejeme k rovnakému výsledku. Vychádzame z pôvodnej matice. Máme

$$\begin{aligned} &(1) \quad -q_2+q_3=q_1-q_3 \\ &(2) \quad -q_2+q_3=-q_1+q_2 \end{aligned}$$

$$(1)+(2) \quad 3q_2=3q_3 \Rightarrow q_2=q_3$$

Dosadíme do (1):

$$q_1=q_3$$

$q_1=q_2=q_3$ a zároveň $q_1+q_2+q_3=1 \Rightarrow q_1=q_2=q_3=\frac{1}{3}$. Rovnakým postupom dostaneme $p_1=p_2=p_3=\frac{1}{3}$.

Kameň, papier, nožnice a vedro

Jednou z modifikácií je pridanie vedra. Kameň aj nožnice doňho spadnú, ale papier ho obalí. Matica tejto hry vyzerá nasledovne

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} K & P & N & V \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ P \\ N \\ V \end{array} & \left(\begin{array}{rrrr} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

U oboch hráčov je stratégia *kameň* dominovaná stratégiou *vedro*, vyškrtnutím prvého riadku a prvého stĺpca dostaneme rovnakú maticu ako v predošlom prípade. Bez nutnosti čokoľvek počítať môžeme hneď písať rovnovážne stratégie $p=(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ a rovnako $q=(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

Kameň, papier, nožnice, jašter, Spock

Túto verziu vymysleli Sam Kass a Karen Bryla. Pridaním dvoch nových symbolov sa znižuje šanca na remízu. Na výpočet optimálnej stratégie opäť použijeme simplexovú metódu. Matica hry je tvaru:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} K & P & N & J & S \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ P \\ N \\ J \\ S \end{array} & \left(\begin{array}{rrrrr} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Pripočítame 2 ku každému prvku matice.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} K & P & N & J & S \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ P \\ N \\ J \\ S \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

Dopracujeme sa k nasledujúcej sústave:

$$
\begin{aligned}
2y_1 + 1y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 1y_5 &\leq 1 \\
3y_1 + 2y_2 + 1y_3 + 1y_4 + 3y_5 &\leq 1 \\
1y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 1y_5 &\leq 1 \\
1y_1 + 3y_2 + 1y_3 + 2y_4 + 3y_5 &\leq 1 \\
3y_1 + 1y_2 + 3y_3 + 1y_4 + 2y_5 &\leq 1
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Maximalizujeme $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 (= \frac{1}{v})$

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_5	
0	2	1	3	3	1	1	0	0	0	0	1
0	$\boxed{3}$	2	1	1	3	0	1	0	0	0	1
0	1	3	2	3	1	0	0	1	0	0	1
0	1	3	1	2	3	0	0	0	1	0	1
0	3	1	3	1	2	0	0	0	0	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	$-1/3$	$7/3$	$7/3$	-1	1	$-2/3$	0	0	0	$1/3$
0	1	$2/3$	$1/3$	$1/3$	1	0	$1/3$	0	0	0	$1/3$
0	0	$7/3$	$5/3$	$8/3$	0	0	$-1/3$	1	0	0	$2/3$
0	0	$7/3$	$2/3$	$5/3$	2	0	$-1/3$	0	1	0	$2/3$
0	0	-1	$\boxed{2}$	0	-1	0	-1	0	0	1	0
1	0	$-1/3$	$-2/3$	$-2/3$	0	0	$1/3$	0	0	0	$1/3$
$\vdots$			$\vdots$					$\vdots$			$\vdots$
0	0	0	0	1	0	$31/50$	$11/50$	$-9/50$	$1/50$	$-29/50$	$1/10$
0	1	0	0	0	0	$1/50$	$31/50$	$11/50$	$-29/50$	$-9/50$	$1/10$
0	0	1	0	0	0	$-29/50$	$1/50$	$31/50$	$-9/50$	$11/50$	$1/10$
0	0	0	0	0	1	$11/50$	$-9/50$	$-29/50$	$31/50$	$1/50$	$1/10$
0	0	0	1	0	0	$-9/50$	$-29/50$	$1/50$	$11/50$	$31/50$	$1/10$
1	0	0	0	0	0	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/2$

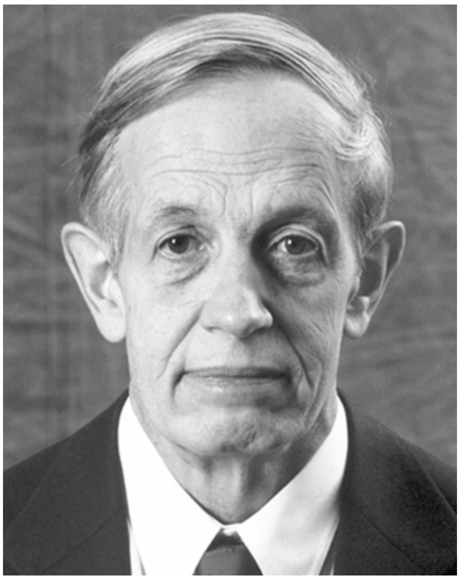
Podobne ako pri základnej verzii vyšli zmiešané stratégie pre oboch hráčov rovnako a to $\overline{p} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ a $\overline{q} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, čo sa dá interpretovať tak, že v prípade jednej hry sa môže hráč rozhodnúť úplne náhodne a pri viacnásobnom opakovaní je optimálne voliť každú z rýdzych stratégií približne rovnako často.

5. Kto je John Nash?

Životopis je prebraný z Wikipedie:

John Nash sa narodil v malom mestečku v oblasti Appalačských vrchov v Spojených štátoch amerických. Jeho otec, John Nash starší, bol elektrotechnickým inžinierom a matka, Virginia Martin, vyučovala jazyky. Už ako dieťa prejavoval veľký záujem o rôzne vedecké pokusy. Veľa času strávil čítaním a experimentovaním zavretý vo svojej izbe, z ktorej si urobil provizórne laboratórium. Zatiaľčo jeho sestra Martha bola úplne obyčajným dieťaťom, Johnny sa už v detstve od iných odlišoval. Na MIT (Massachusettský technologický inštitút) sa spoznal s Aliciou Lopez-Harrison de Lardé, študentkou matematiky pochádzajúcou zo Salvadora. V roku 1957 sa s ňou oženil a od dva roky neskôr, v roku 1959, sa im narodil syn John Charles Martin. Stal sa tiež matematikom, ale rovnako ako jeho otec trpel paranoidnou schizofréniou. Alicia sa s ním v roku 1963 rozviedla, ale v roku 1970 sa k nemu vrátila. Podľa Nashovho životopisu od autorky Sylvie Nasar, John a Alicia spolu žili ako „dvaja vzdialene príbuzní jedinci pod jednou strechou“. Potom ako John získal Nobelovu cenu, obnovili svoj vzťah a 1. júna 2001 sa znovu stali manželmi.

V roku 1958 John Nash začal prejavovať prvé známky rozvíjajúcej sa duševnej poruchy. Začal byť paranoidný a počas pobytu v nemocnici v roku 1959 bola jeho diagnóza určená ako paranoidná schizofrénia. Po absolvovaní problematického pobytu v Paríži a Ženeve sa Nash vrátil v roku 1960 do Princetonu. Až do roku 1970 striedavo pobýval v rôznych psychiatrických nemocniciach a podstúpil rozličné formy terapie. Niektoré druhy liečby pravdepodobne neboli vhodne zvolené a prispeli k zhoršovaniu jeho stavu. Lekári totiž podcenili kľúčový význam práce a komunity pri prekonávaní duševnej poruchy. V prípade Johna Nasha sa ako najúčinnejší krok k zlepšeniu jeho stavu javí administratívne rozhodnutie princetonskej fakulty matematiky a výpočtového centra, ktorým Nashovi v tomto ťažkom období povolili využívať prostriedky univerzity pre svoj výskum. V povedomí študentov sa tak John Nash stal „fantómom Fine Hall“ (Fine Hall je matematické centrum v Princetone), záhadnou postavou, ktorá uprostred noci čmára po tabuliach a oknách tajomné rovnice. V roku 1978 mu bola udelená cena Johna von Neumanna za objav nekooperatívnych rovnovážnych bodov, ktoré sú dnes známe ako *Nashove rovnovážne body*. Vďaka podpore manželky Alicie Nash zotrval pri svojej práci aj v komunite, kde jeho výstrednosti zostali nepovšimnuté a medzi inými záujmami rozvinul aj svoj záujem o výpočet presných hodnôt veľkých čísel. Tento výskum ho priviedol do princetonských výpočtových stredísk, kde pre svoju prácu vyvinul počítačové programy vysokej úrovne. Zároveň bol tak v užšom kontakte s ľuďmi z Princetonu a od konca 80. rokov 20. storočia začal aktívne využívať elektronickú poštu na komunikáciu s ostatnými matematikmi. Odborná verejnosť tak dostala možnosť zistiť, že nová práca legendárneho Johna Nasha má význam a hodnotu. Táto skupina matematikov potom navrhla Johna Nasha komisii Švédskej národnej banky, ktorá udeľuje Nobelou cenu, ako kandidáta v oblasti ekonómie. V roku 1994 mu bola spolu s Johnom Harsanyim a Reinhardom Seltenom udelená. 90. roky 20. storočia znamenali návrat génia -



Obr. 5.1: John Nash

Nashovi sa podarilo zvládnuť prejavy jeho duševnej choroby. Stále dúfa, že sa mu podaria zásadné vedecké odhalenia. Jeho súčasná práca sa zaoberá pokročilou teóriou hier.

Záver

V prvej časti práce boli vysvetlené niektoré základné pojmy teórie hier. V druhej, teoretickej časti sme dokázali hlavné tvrdenie teórie hier, tzv *Nashovu vetu* a rovnako sme dokázali *Brouwerovu vetu o pevnom bode* pomocou hry Hex. Samotnému hľadaniu rovnovážnych bodov a stratégií sme sa venovali v tretej kapitole, pričom najpodrobnejšie sme objasnili *simplexovú metódu* na hľadanie optimálych stratégií v antagonostických konfliktoch. Na záver sme aplikovali poznatky z predošlých častí na hru *kameň, papier, nožnice* a našli sme v nej rovnovážne stratégie. Hoci je teória hier veľmi zaujímavá, rozsah práce mi nedovolil venovať sa niektorým veciam podrobnejšie a väčšine som sa nemohol venovať vôbec. Nemenej zaujímavé sú kooperatívne hry, pri ktorých hráči spolupracujú, no musia vyjednávať. Tieto problémy sú skvelým námetom na ďalšie bakalárske práce.

Zoznam použitej literatúry

[1] MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a optimální rozhodování.* SNTL, 1974.

[2] NASAR, Sylvia, KUHN, Harold W. *The essential John Nash.* Princeton University Press, 2002.

[3] HYKŠOVÁ, Magdalena. *http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/*

[4] *http://sk.wikipedia.org/wiki/John_Forbes_Nash*