UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Úlohy o objemu a povrchu těles v trojrozměrném prostoru

Problems dealing with volume and surface in the three-dimensional space

Autor: Michaela Dlouhá

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Praha 2012

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury.

V Praze dne ....

Michaela Dlouhá

Děkuji Prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za velkou ochotu, odborné rady, cenné připomínky a vedení mé bakalářské práce.

OBSAH

Abstrakt ... 6

Úvod ... 7

1 Geometrická tělesa ... 9

2 Mnohostěny ... 9

2.1 Tělesa hranolového typu ... 10

2.1.1 Základní pojmy ... 10

2.1.2 Krychle ... 11

2.1.3 Kvádr ... 12

2.1.4 Hranol ... 13

2.2 Tělesa jehlanového typu ... 13

2.2.1 Základní pojmy ... 13

2.2.2 Jehlan ... 14

2.2.3 Komolý jehlan ... 16

3 Rotační tělesa ... 17

3.1 Válec ... 17

3.1.1 Základní pojmy ... 17

3.1.2 Rotační válec ... 18

3.2 Kužel ... 19

3.2.2 Rotační kužel ... 20

3.2.3 Komolý rotační kužel ... 21

3.3 Koule ... 21

3.3.1 Základní pojmy ... 21

3.3.2 Koule ... 22

3.3.3 Kulový vrchlík, kulová úseč ... 22

4 Vymezení pojmu slovní úloha ... 23

5 Rozdělení slovních úloh dle zadání ... 24

5.1 Úlohy na představivost ... 24

5.1.1 Příklady ... 25

5.2 Základní výpočtové úlohy ... 28

5.2.1 Příklady ... 28

5.3 Jednoduché slovní úlohy 32
5.3.1 Příklady 32
5.4 Úlohy na převod a změnu jednotek 33
5.4.1 Názorné příklady 33
5.5 Objem jako mezivýpočet 35
5.5.1 Příklady 35
5.6 Využití dalších matematických znalostí 38
5.6.1 Příklady 38
5.7 Objem a povrch v zadání 41
5.7.1 Názorné příklady 41
5.8 Úlohy s proměnnou 43
5.8.1 Názorné příklady 43
5.9 Slovní úlohy se změnou údajů 45
5.9.1 Názorné příklady 45
5.10 Problémové úlohy 47
5.10.1 Názorné příklady 47
5.11 Úlohy na využití goniometrických funkcí 49
5.11.1 Názorné příklady 49
5.12 Úlohy na využití integrálu 51
5.12.1 Příklady 52
Závěr 55
Seznam obrázků 56
Seznam tabulek 57
Použitá literatura 57
Internetové zdroje 58

ABSTRAKT

Cílem této bakalářské práce je uceleně roztřídit a přehledně uspořádat slovní úlohy na objem a povrch těles, které se objevují v učebnicích a sbírkách úloh pro základní a střední školy, a to pro potřeby žáků i učitelů. Úvodní část práce se věnuje charakteristice geometrických těles. Jsou zde definovány a vysvětleny základní pojmy týkající se těles. V následující části je vymezen pojem slovní úloha. Poslední část se zabývá roztříděním, uspořádáním slovních úloh na objem a povrch. Ke každému typu je přiřazeno několik konkrétních úloh vybraných z učebnic a sbírek pro základní i střední školy. Úlohy jsou uvedeny i s řešením.

Klíčová slova: objem, povrch, geometrická tělesa

Abstract

The aim of this bachelor‘s work is to sort out and comprehensively organize the word problems on volume and surface elements that appear in textbooks and tasks collections for elementary and secondary schools, namely for the needs of pupils and teachers. The introductory part deals with the characteristic of geometric solids. There are the basic concepts related to objects defined and explained. In the following part there is the notion of the word problems defined. The last part deals with the sorting and organizing word problems for volume and surface area. There are a number of specific tasks selected from the textbooks and tasks collections for primary and secondary schools assigned to each type of task. Tasks are presented with their solution.

Keywords: volume, surface, geometrical element

ÚVOD

Toto téma jsem si vybrala, protože jsem si uvědomila, že jsme se všichni s tělesy setkali už v dětství. Každý z nás měl doma stavebnici. Většina obsahuje základní tělesa; krychli, kvádr, válec, jehlan … Sice jsme netušili, že se jedná o geometrická tělesa, ale tvar už jsme si zapsali do svého podvědomí.

Další vědomosti o jednotlivých tělesech jsme začali získávat již na prvním stupni základní školy. S přibývajícími roky jsme své vědomosti postupně prohlubovali a poznávali charakteristiky i jiných, ne tak častých, těles (např.: kulový vrchlík).

Další důvod, proč jsem si tuto práci vybrala, je fakt, že povrch a objem využije člověk i v běžném životě (např.: kolik je potřeba obkládaček do koupelny).

Cílem práce je uceleně roztřídit a přehledně uspořádat úlohy na objem a povrch, které se objevují v učebnicích a sbírkách úloh pro základní a střední školy, pro potřeby žáků i učitelů. Úlohy týkající se objemu a povrchu těles jsem propočítala a hledala společné znaky, abych mohla úlohy rozdělit podle různých kritérií. Úlohy jsem nakonec zařadila do několika skupin podle náročnosti a podle toho, co musíme vypočítat.

Práci jsem rozdělila do 5 kapitol. V první kapitole jsem uvedla definice geometrického tělesa obecně, objemu a povrchu tělesa. V druhé kapitole jsem se věnovala mnohostěnům. Zvolila jsem tělesa hranolového a jehlanového typu. Nejdříve jsem zde definovala základní pojmy a poté charakterizovala jednotlivá tělesa, která patří do hranolového či jehlanového typu a která se objevují v úlohách v poslední kapitole této práce. Třetí kapitolu jsem zaměřila na rotační tělesa. Zvolila jsem válec, jehlan, kouli a její části, protože se objevují v úlohách z této práce. Také jsem zde definovala základní pojmy a poté charakterizovala jednotlivá tělesa. Ve čtvrté kapitole jsem vymezila pojem slovní úlohy, protože v další kapitole budu pracovat se slovními úlohami. A v poslední kapitole jsem se věnovala rozdělení úloh podle náročnosti a společných znaků úloh.

Úlohy jsem rozdělila do dvanácti skupin. V první skupině jsem uvedla úlohy na představivost. Do druhé skupiny jsem zařadila základní výpočtové úlohy, které jsou zadány hesly (např. vypočti, doplň tabulku) a jsou zde zadány všechny základní údaje. Ve třetí skupině jsou jednoduché slovní úlohy, které se od základních úloh liší tím, že obsahují více textu. Do čtvrté skupiny jsem zařadila úlohy na převod a změnu jednotek.

V páté skupině jsem se zaměřila na úlohy, ve kterých je potřeba vypočítat objem jako mezivýpočet. V šesté skupině jsou úlohy, ve kterých se musí využít i další matematické znalosti např.: procenta, poměr…. V sedmé skupině jsem se zaměřila na úlohy, ve kterých je zadaný objem a musí se vypočítat povrch, či naopak. Do osmé skupiny jsem zařadila úlohy s proměnnou, nejsou zde zadána konkrétní čísla, ale proměnné. V deváté skupině jsou úlohy se změnou údaje, např.: poloměr se zvětší a) 2krát, b) 4krát. V desáté skupině jsem se zaměřila na úlohy s dlouhým textem a s nejednoznačným zadáním. V jedenácté skupině jsou úlohy na využití goniometrických funkcí. V poslední kapitole jsem se zaměřila na úlohy, ve kterých se využívá k výpočtu integrál. Některé úlohy by mohly být zařazeny do více skupin. U úloh uvádím řešení.

Všechny přímé citace v mé práci jsou uvedeny v uvozovkách a kurzívou, pouze slovní úlohy jsou bez uvozovek a kurzívy, za textem mají uvedený zdroj v závorce. Všechna zadání úloh jsou převzata z učebnic a sbírek pro základní a střední školy, které jsou uvedeny v seznamu literatury. Charakteristiky, vlastnosti a výpočty u jednotlivých těles se v mnoha učebnicích a internetu neliší. Já jsem se inspirovala na wikipedii. Obrázky a náčrtky v mé práci jsou pouze ilustrativní, vzdálenosti ani poměry neodpovídají skutečnosti a některé jsou také převzaty z literatury. Pokud zaokrouhluji, používám symbol $\cong$.

1 GEOMETRICKÁ TĚLESA

Dohledat definici geometrického tělesa bylo téměř nemožné. Nalezla jsem pouze jednu jedinou definici. Ta zní podle E. Pomykalové: „*Geometrické těleso je prostorový omezený souvislý geometrický útvar. Jeho hranicí nazývanou také povrchem je uzavřená plocha.“* (Pomykalová, 2006, s. 123)

V ostatních publikacích jsem vždy narazila jen na pojem geometrické těleso, ale bližší vysvětlení zde nebylo k nalezení.

U každého geometrického tělesa můžeme vypočítat objem a povrch.

Objem vyjadřuje velikost prostoru, kterou těleso zabírá. Objem se počítá v metrech krychlových a odvozených jednotkách, můžeme ho vyjádřit i v dalších (v běžném životě asi používanějších) jednotkách, např. v litrech, hektolitrech. Objem se podle normy značí písmenem *V*.

(Wikipedie, http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Objem&oldid=8620675)

Povrch tělesa je velikost plochy, které těleso tvoří, počítá se v metrech čtverečních a odvozených jednotkách, můžeme ho vyjádřit i v dalších (v běžném životě asi používanějších) jednotkách, např. v arech, hektarech. Povrch se podle normy značí písmenem *S*. (Havrlant, http://www.matweb.cz/objemy-obsahy)

Pro moji práci jsem si z geometrických těles vybrala mnohostěny a rotační tělesa.

2 MNOHOSTĚNY

Mnohostěn je těleso, jehož stěny tvoří mnohoúhelníky. Žádné dva mnohoúhelníky neleží ve stejné rovině a každá strana libovolného mnohoúhelníku je zároveň stranou jiného mnohoúhelníku.

V každém vrcholu se setkávají minimálně tři stěny a stejný počet hran. Pro výpočet vrcholů *v*, hran h a stěn *s* platí Eulerova věta $s + v = h + 2$. (Řídká, 2006, s. 190)

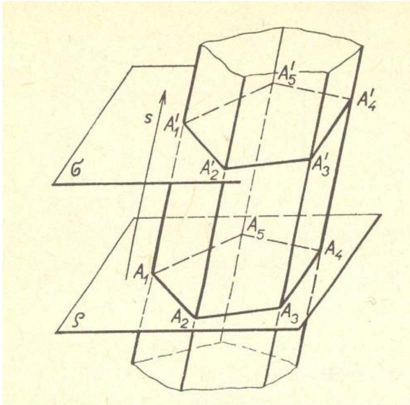
Z mnohostěnů jsem zvolila jen tělesa hranolového a jehlanového typu.

2.1 Tělesa hranolového typu

2.1.1 Základní pojmy

Hranolová plocha

Je dán n-úhelník $A_1 A_2 \ldots A_n$ ležící v rovině ρ a přímka $s \nparallel \rho$ (viz obr. 1, $n = 5$). Hranolová plocha je množina všech bodů přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou s a protínají hranici mnohoúhelníku. Přímka s určuje směr hranolové plochy a n-úhelník $A_1 A_2 \ldots A_n$ je řídící mnohoúhelník. (Polák, 1978, s. 488, Pomykalová, 2006, s. 123)



Obr. 1: Hranolová plocha

Hrana hranolové plochy

Hranou je přímka hranolové plochy procházející vrcholem řídícího mnohoúhelníku. (Polák, 1978, s. 489)

Stěna hranolové plochy

Stěna je množina všech bodů přímek hranolové plochy, které protínají tutéž stranu řídícího mnohoúhelníku. Je to pás roviny. (Polák, 1978, s. 489)

Hranolový prostor

Hranolový prostor je množina všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou s a protínají mnohoúhelník $A_1 A_2 \ldots A_n$. (Polák, 1978, s. 489)

Tělesa hranolového typu

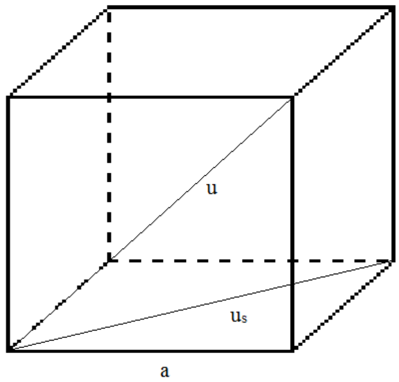
Tělesa hranolového typu jsou tělesa omezená hranolovou plochou a dvěma různými navzájem rovnoběžnými rovinami, které jsou různoběžné se směrem hranolové plochy (viz obr. 1, roviny ρ, σ). Jinak řečeno jde o část hranolového prostoru omezenou dvěma různými rovnoběžnými rovinami protínajícími jeho směr.

Podstavy tělesa tvoří mnohoúhelníky, v nichž protínají tyto roviny hranolový prostor. Jejich strany se nazývají podstavné hrany a jejich vrcholy vrcholy tělesa. Úsečky na hranách hranolové plochy, které jsou omezeny vrcholy, se nazývají boční hrany. Rovnoběžníky, z nichž každý je určen čtyřmi vrcholy téže stěny hranolové plochy, nazýváme boční stěny tělesa. Výška tělesa je vzdálenost jeho podstav. Tělesové úhlopříčky jsou úsečky, jejichž krajní body jsou vrcholy tělesa, které neleží v téže stěně. Stěnové úhlopříčky jsou úhlopříčky boční stěny. (Polák, 1978, s. 489, Pomykalová, 2006, s. 123)

Mezi tato tělesa zařazujem krychli, kvádr a hranol.

2.1.2 Krychle

V této práci nepovažuji krychli za speciální příklad kvádru, ale za samostatné těleso.



Obr. 2: Krychle

2.1.2.1 Charakteristika

Krychle neboli pravidelný šestistěn (hexaedr), je těleso, jehož stěny tvoří šest shodných čtverců. (viz obr. 2) Má osm vrcholů a dvanáct hran stejné délky.

2.1.2.2 Vlastnosti

Díky shodnosti všech svých stěn i hran patří mezi takzvaná platónská tělesa. Každé dvě stěny krychle jsou rovnoběžné nebo kolmé.

Krychle je středově souměrná podle svého středu (tj. průsečíku tělesových úhlopříček).

Krychle je osově souměrná podle devíti os. Krychle je rovinově souměrná podle devíti rovin.

2.1.2.3 Výpočty

a – délka strany

u_s – stěnová úhlopříčka

u – tělesová úhlopříčka

Objem $V = a^3$

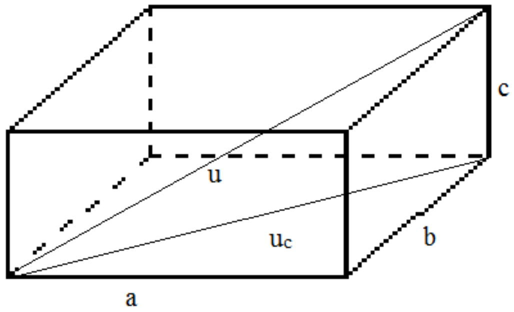
Povrch $S = 6a$

Délka stěnové úhlopříčky $u_s = a\sqrt{2}$

Délku tělesové úhlopříčky $u = a\sqrt{3}$

2.1.3 Kvádr

V této práci nepovažuji kvádr za speciální příklad hranolu, ale za samostatné těleso.



Obr. 3: Kvádr

2.1.3.1 Charakteristika

Kvádr (rovnoběžnostěn) je těleso, jehož stěny tvoří šest pravoúhlých čtyřúhelníků. (viz obr. 3) Každé dvě protilehlé stěny jsou shodné. Kvádr má tři skupiny rovnoběžných hran shodné délky. Tyto délky jsou obvykle označovány jako délka, šířka a výška kvádru. Kvádr má osm vrcholů a dvanáct hran.

2.1.3.2 Vlastnosti

Každé dvě stěny kvádru jsou rovnoběžné nebo kolmé. Každé dvě hrany kvádru jsou rovnoběžné nebo kolmé.

Kvádr je středově souměrný podle průsečíku svých tělesových úhlopříček, osově souměrný podle tří os – spojnic středů protilehlých stěn – a rovinově souměrný podle tří rovin. Každá z těchto rovin je rovnoběžná s některou ze stěn kvádru a prochází průsečíkem úhlopříček kvádru.

2.1.3.3 Výpočty

a, b, c – délky strany

u_a, u_b, u_c – stěnové úhlopříčky

u – tělesová úhlopříčka

Objem $V = abc$

Povrch $S = 2(ab + bc + ac)$

Kvádr má tři různé délky stěnových úhlopříček, vypočítají se pomocí Pythagorovy věty:

$u_a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$u_b = \sqrt{a^2 + c^2}$

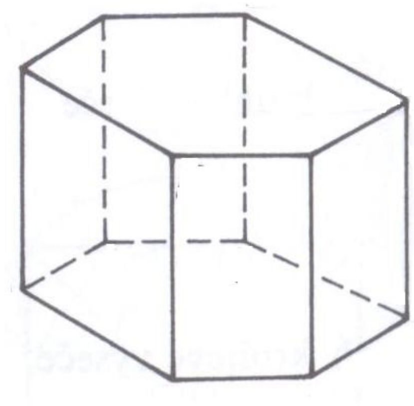
$u_c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Délka tělesové úhlopříčky $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2.1.4 Hranol

2.1.4.1 Charakteristika

Hranol je hranolové těleso, jehož dvě stěny leží v rovnoběžných rovinách. (viz obr. 4) Podle počtu stran podstavy hovoříme o hranolu trojbokém, čtyřbokém, pětibokém atd.



Obr. 4: Hranol

2.1.4.2 Vlastnosti

V případě, že boční stěny hranolu jsou kolmé k rovinám podstav, mluvíme o kolmém hranolu. V případě, že nejsou kolmé, jedná se o kosý hranol. Kolmý hranol s podstavami ve tvaru pravidelných mnohoúhelníků se nazývá pravidelný hranol.

Čtyřboký hranol, jehož podstavou je rovnoběžník, se nazývá rovnoběžnostěn.

2.1.4.3 Výpočty

v – výška hranolu

S_p – obsah podstavy

S_{pl} – obsah pláště

Objem $V = S_p v$

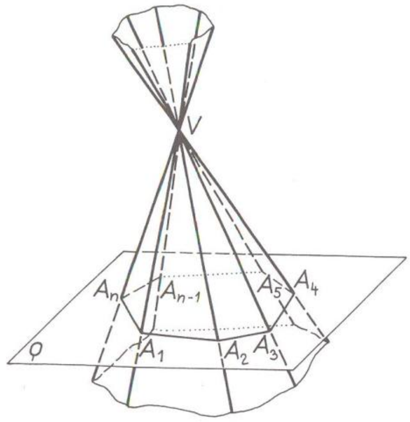
Povrch $S = 2S_p + S_{pl}$

2.2 Tělesa jehlanového typu

2.2.1 Základní pojmy

Jehlanová plocha

Je dán n-úhelník $A_1\ A_2 \ldots A_n$ ležící v rovině ρ a bod V, který v rovině ρ neleží (viz obr. 5). Jehlanová plocha je množina všech bodů přímek, které procházejí bodem V a protínají obvod mnohoúhelníku. Bod V je vrcholem jehlanové plochy a n-úhelník $A_1\ A_2 \ldots A_n$ je řídící mnohoúhelník. (Polák, 1978, s. 491, Pomykalová, 2006, s. 125)



Obr. 5: Jehlanová plocha

Hrana jehlanové plochy

Hranou je přímka jehlanové plochy procházející vrcholem řídícího mnohoúhelníku. (Polák, 1978, s. 491)

Stěna jehlanové plochy

Stěna je množina všech bodů přímek jehlanové plochy, které protínají tutéž stranu řídícího mnohoúhelníku, je to dvojice vrcholových úhlů. (Polák, 1978, s. 491)

Jehlanový prostor

Jehlanový prostor je množina všech bodů přímek, které procházejí bodem *V* a protínají řídící mnohoúhelník $A_1 A_2 \ldots A_n$. (Polák, 1978, s. 491)

Tělesa jehlanového typu

Tělesa jehlanového typu jsou tělesa, která tvoří část jehlanového prostoru omezenou jehlanovou plochou a rovinou, která je různoběžná s hranami jehlanové plochy a zároveň neprochází jejím vrcholem. (viz obr. 5)

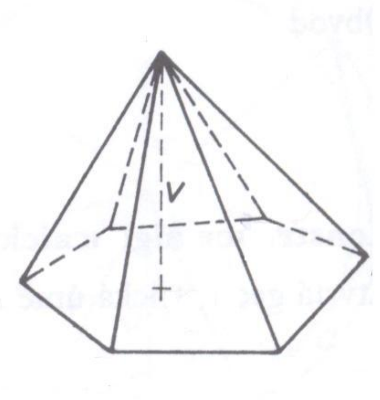
Podstavu tělesa tvoří mnohoúhelník, v němž protíná tato rovina jehlanový prostor. Strany podstavy se nazývají podstavné hrany. Vrcholy podstavy a vrchol *V* jehlanové plochy se nazývají vrcholy jehlanu. Vrchol *V* je hlavní vrchol jehlanu. Úsečky na hranách jehlanové plochy, které jsou omezené hlavním vrcholem a jednotlivými vrcholy podstavy, se nazývají boční hrany tělesa. Trojúhelníky, z nichž každý je určen hlavním vrcholem a dvěma sousedními vrcholy podstavy, jsou boční stěny tělesa. Výška jehlanu je úsečka spojující hlavní vrchol a patu kolmice spuštěné z něho na rovinu podstavy. (Polák, 1978, s. 491, Pomykalová, 2006, s. 125)

Mezi tato tělesa můžeme zařadit jehlan a komolý jehlan.

2.2.2 Jehlan

2.2.2.1 Charakteristika

Jehlan je těleso, jehož základnu (nebo také podstavu) tvoří mnohoúhelník. (viz obr. 6) Podle počtu stran podstavy hovoříme o jehlanu trojbokém, čtyřbokém, pětibokém atd.



Obr. 6: Jehlan

2.2.2.2 Vlastnosti

Pokud tvoří základnu jehlanu mnohoúhelník o n stranách, má jehlan celkem $n + 1$ vrcholů, $2n$ hran a $n + 1$ stěn.

Jehlan nemůže nikdy být středově souměrný. Jehlan je osově souměrný pouze tehdy, je-li podstava středově souměrná a průmět vrcholu jehlanu do roviny podstavy je shodný se středem souměrnosti podstavy. (Jinými slovy: vrchol jehlanu musí ležet „kolmo nad středem souměrnosti podstavy“.) Osou souměrnosti je v takovém případě spojnice vrcholu se středem souměrnosti podstavy.

Jehlan může být rovinově souměrný pouze tehdy, je-li podstava osově souměrná a průmět vrcholu jehlanu do roviny podstavy leží na ose souměrnosti podstavy. (Jinými slovy: vrchol jehlanu musí ležet „kolmo nad osou souměrnosti podstavy“.) Rovinou souměrnosti je v takovém případě rovina určená osou souměrnosti podstavy a vrcholem jehlanu.

2.2.2.3 Výpočty

a – délka strany

v – výška

S_p – obsah podstavy

S_{pl} – obsah pláště

Objem $V = \frac{1}{3} S_p v$

Povrch $S = S_p + S_{pl}$

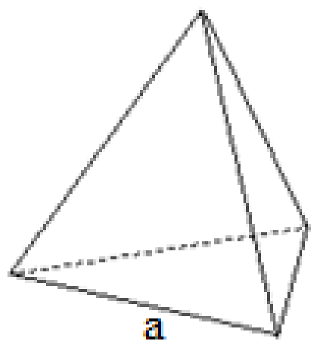
Na výše uvedených vzorcích je zajímavé, že pokud budu vrchol jehlanu posunovat v rovině rovnoběžné s rovinou podstavy, nemění se objem (obsah podstavy i výška zůstávají stejné), ale pouze povrch – ten může při posouvání vrcholu „dostatečně daleko“ v dané rovině růst nad všechny meze.

2.2.2.4 Speciální případy

Pokud je podstavou jehlanu pravidelný mnohoúhelník a vrchol leží kolmo nad těžištěm podstavy, mluvíme o pravidelném jehlanu. „Pravidelnost“ jehlanu obvykle podstatně zjednodušuje výpočet jeho objemu a povrchu.

Pravidelný čtyřstěn

Pravidelný čtyřstěn je jehlan, jehož podstava i všechny tři boční stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. (viz obr. 7) Tento čtyřstěn má stejný tvar všech stěn i délku všech hran. Jedná se tedy o jedno z platónských těles.



Obr. 7: Pravidelný čtyřstěn

Jeho objem a povrch lze vypočítat z délky jeho hrany a:

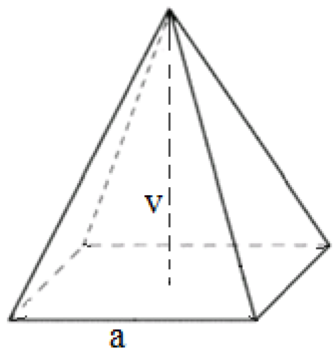
Objem $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

Povrch $S = \sqrt{3} a^2$

Jeho výšku lze vypočítat podle vzorce $v = \frac{\sqrt{6}}{3} a$

Pravidelný čtyřboký jehlan

Pokud má jehlan čtvercovou podstavu a vrchol kolmo nad průsečíkem úhlopříček základny, hovoříme o pravidelném čtyřbokém jehlanu. (viz obr. 8)



Obr. 8: Pravidelný čtyřboký jehlan

Jeho objem a povrch lze vypočítat z délky strany základny a a výšky v :

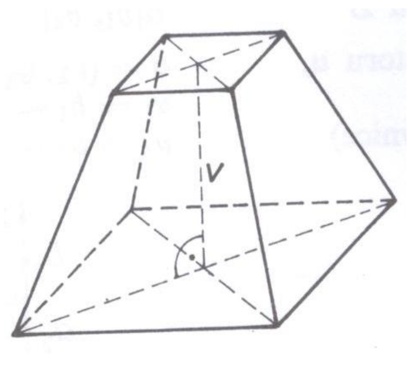
Objem $V = \frac{1}{3} a^2 v$

Povrch $S = a^2 + 4 \frac{a\sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = a\left(a + \sqrt{4v^2 + a^2}\right)$

2.2.3 Komolý jehlan

2.2.3.1 Charakteristika

Komolý jehlan je těleso – část jehlanu, která leží mezi dvěma rovnoběžnými rovinami procházející tímto jehlanem. Jinak řečeno, je to „jehlan s uříznutým vrškem“. (viz obr. 9)



Obr. 9: Komolý jehlan

2.2.3.2 Vlastnosti

Podstavami komolého jehlanu jsou podobné mnohoúhelníky, bočními stěnami jsou lichoběžníky. Bočními stěnami pravidelného kolmého jehlanu jsou shodné rovnoramenné lichoběžníky, které svírají s každou z podstav shodné úhly. Jeho boční hrany jsou shodné.

2.2.3.3 Výpočty

S_1 – obsah dolní podstavy

S_2 – obsah horní podstavy

S_{pl} – obsah pláště

Objem $V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

Povrch $S = S_{1+}S_2 + S_{pl}$

3 ROTAČNÍ TĚLESA

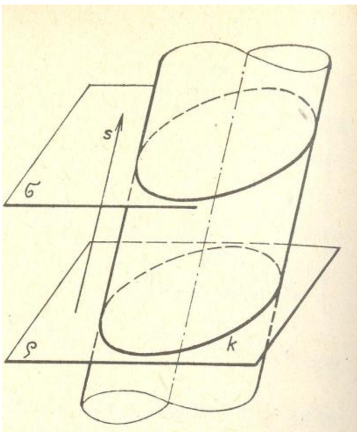
Rotační těleso vznikne rotací rovinného útvaru kolem přímky, která se označuje jako osa rotace, přičemž tato osa rotace leží ve stejné rovině jako daný geometrický útvar. (Pomykalová, 2006, s. 134, Řídká, 2006, s. 192)

3.1 Válec

3.1.1 Základní pojmy

Kruhová válcová plocha

Je dána kružnice k v rovině ρ a přímka s různoběžná s rovinou ρ. Kruhová válcová plocha je množina všech bodů přímek rovnoběžných s přímkou s a protínajících kružnici k. Tyto přímky se nazývají povrchové přímky, kružnice k se nazývá řídící kružnice. (viz obr. 10) (Polák, 1978, s. 491)



Obr. 10: Kruhová válcová plocha

Kruhový válcový prostor

Kruhový válcový prostor je množina všech bodů přímek rovnoběžných s přímkou *s* a protínajících kruh omezený kružnicí *k*. (Polák, 1978, s. 491)

Kruhový válec

Kruhový válec je těleso ohraničené kruhovou válcovou plochou a dvěma rovnoběžnými rovinami, které nejsou rovnoběžné s povrchovými přímkami.

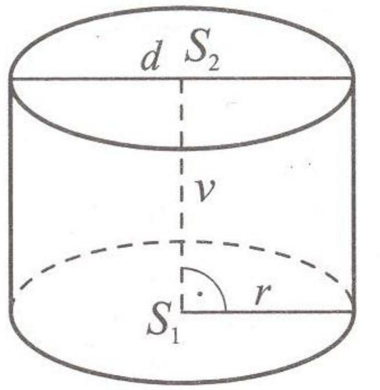
Podstavy tělesa tvoří kruhy, v nichž tyto roviny protínají kruhový válcový prostor. Strany válce jsou úsečky vyťaté rovinami na povrchových přímkách. Plášť válce je množina stran válce. Výška válce je vzdálenost rovin jeho podstav.

Rotační válec je takový kruhový válec, jehož strany jsou kolmé k podstavám. (Polák, 1978, s. 491, Pomykalová, 2006, s. 134)

3.1.2 Rotační válec

3.1.2.1 Charakteristika

Rotační válec neboli kolmý kruhový válec je těleso, které vznikne rotací obdélníku (čtverce) kolem přímky procházející jeho stranou nebo střední příčkou. (viz obr. 11)



Obr. 11: Válec

3.1.2.2 Vlastnosti

Označíme-li si na podstavě válce libovolný bod (kromě středu) a pak valíme válec po rovině, potom označený bod opisuje cykloidu. (Cykloida je cyklická křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se valí (kutálí) po přímce. Cykloida má tvar donekonečna se opakujících oblouků.)

3.1.2.3 Výpočty

d – průměr podstavy

r – poloměr podstavy

v – výška

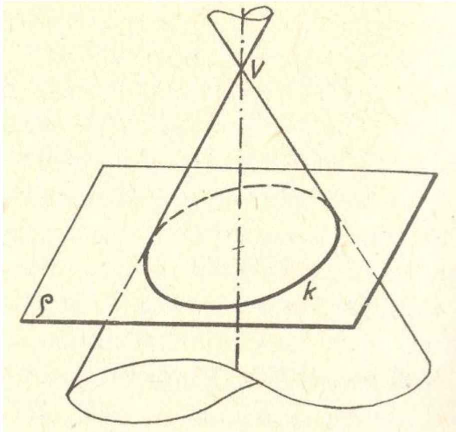
Objem $V = \pi r^2 v = \frac{\pi d^2}{4} v$

Povrch $S = 2\pi r(r + v)$

3.2 Kužel

3.2.1.1 Základní pojmy

Kruhová kuželová plocha



Obr. 12: Kruhová kuželová plocha

Je dána kružnice k v rovině ρ a bod V, který v rovině ρ neleží. Kruhová kuželová plocha je množina všech bodů přímek procházejících bodem V a protínajících kružnici k zvanou řídící kružnice kuželové plochy. Bod V se nazývá vrchol kuželové plochy. (viz obr. 12) (Polák, 1978, s. 492)

Kruhový kuželový prostor

Kruhový kuželový prostor je množina všech bodů přímek procházejících bodem V a protínající řídící kruh, což je kruh omezený řídící kružnicí k. (Polák, 1978, s. 492)

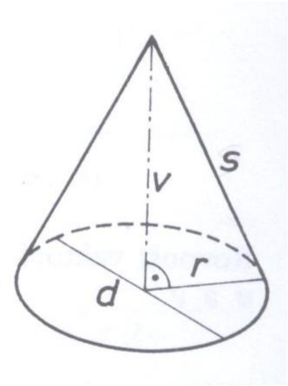
Kruhový kužel

Kruhový kužel je těleso, které tvoří část kruhového kuželového prostoru. Je omezená kruhovou kuželovou plochou a rovinou, která je různoběžná s přímkami kuželové plochy, ale neprochází jejím vrcholem V. Vyplňují jej tedy všechny úsečky, jejichž jeden krajní bod je ve vrcholu V a druhými krajními body jsou jednotlivé body řídícího kruhu.

Podstava kužele je řídící kruh. Strany kužele jsou úsečky, jejichž jeden krajní bod je ve vrcholu V a druhý na řídící kružnici. Plášť tvoří množina stran kužele. Výškou rozumíme úsečku spojující vrchol kužele a patu kolmice spuštěné z něho na rovinu podstavy. Rotační kužel je speciální případ kruhového kužele. (Polák, 1978, s. 493, Pomykalová, 2006, s. 135)

3.2.2 Rotační kužel

3.2.2.1 Charakteristika



Obr. 13: Rotační kužel

Rotační kužel je rotační těleso vzniklé otáčením pravoúhlého trojúhelníku v prostoru okolo jedné z odvěsen. (viz obr. 13) Otáčením druhé odvěsny vznikne kruhová podstava kužele (někdy také nazývaná základna kužele), otáčením přepony pak kuželová plocha nebo jinak plášť kužele. Tento plášť je v podstatě kruhová výseč, jejíž úhel záleží na poměru výšky kužele a poloměru podstavy. Společný vrchol přepony a osy otáčení nazýváme vrchol kužele.

3.2.2.2 Vlastnosti

Kužel není středově souměrný. Kužel je osově souměrný podle spojnice vrcholu kužele se středem podstavy.

Kužel je rovinově souměrný podle nekonečně mnoha rovin – rovinou souměrnosti je každá rovina, která v sobě obsahuje jeho osu (tj. vrchol a střed podstavy).

3.2.2.3 Výpočty

d – průměr podstavy

r – poloměr podstavy

s – délka strany kužele

v – výška

S_p – je obsah podstavy

S_{pl} – je obsah pláště

Objem $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{12}\pi d^2 v$

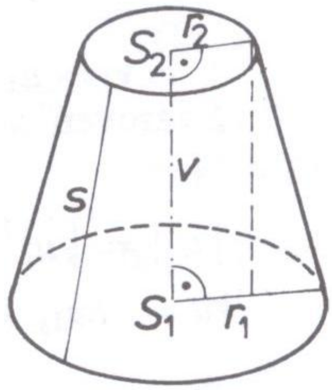
Povrch $S = S_p + S_{pl} = \pi r(r + s)$

3.2.3 Komolý rotační kužel

3.2.3.1 Charakteristika

Komolý rotační kužel je těleso – část kužele, která leží mezi dvěma rovnoběžnými rovinami procházející tímto kuželem. Jinak řečeno, je to „kužel s uříznutým vrškem". (viz obr. 14)

Komolý kužel vznikne rotací pravoúhlého lichoběžníku kolem přímky, v níž leží jeho kratší rameno.



Obr. 14: Komolý rotační kužel

3.2.3.2 Výpočty

r_1 – poloměr dolní podstavy

r_2 – poloměr horní podstavy

s – délka strany komolého kužele

v – výška

Objem $V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

Povrch $S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)s$

$s = \sqrt{v^2(r_1 - r_2)^2}$

3.3 Koule

3.3.1 Základní pojmy

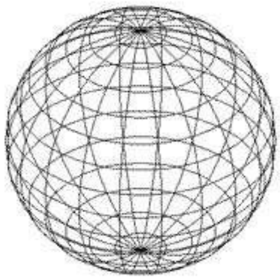
Kulová plocha

Kulová plocha je množina bodů v prostoru, které mají od pevného bodu S stejnou vzdálenost $r > 0$. Bod S je středem kulové plochy a r jejím poloměrem.

(Polák, 1978, s. 493, Pomykalová, 2006, s. 135)

3.3.2 Koule

3.3.2.1 Charakteristika



Obr. 15: Koule

Koule je těleso tvořené množinou všech bodů, jejichž vzdálenost od zadaného bodu (středu) je rovna nebo menší než zadaný poloměr. (viz obr. 15) Body, jejichž vzdálenost je právě rovna poloměru, tvoří povrch koule, tzv. kulovou plochu.

3.3.2.2 Vlastnosti

Koule je dokonale symetrická. Bodově podle středu, osově a rovinně podle libovolné přímky, resp. roviny procházející středem. Koule vznikne otáčením kruhu podle osy.

3.3.2.3 Výpočty

d – průměr koule

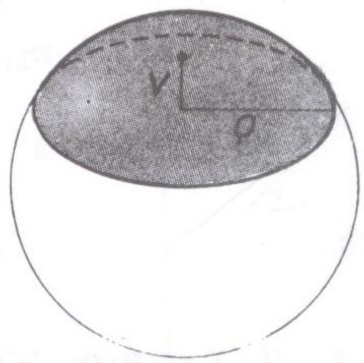
r – poloměr koule

Objem $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$

Povrch $S = 4\pi r^2 = \pi d^2$

3.3.3 Kulový vrchlík, kulová úseč

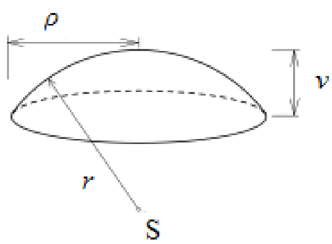
3.3.3.1 Charakteristika



Obr. 16: Kulová úseč

Kulový vrchlík je průnik kulové plochy a poloprostoru s hraniční rovinou obsahující kružnici k (tato rovina rozdělí kulovou plochu na dva kulové vrchlíky). (viz obr. 17)

Kulová úseč je průnik koule a poloprostoru, jehož hraniční rovina protíná kouli v kruhu o poloměru r - kulový vrchlík a kruh tvoří hranici kulové úseče. (viz obr. 16)



Obr. 17: Kulový vrchlík

3.3.3.2 Výpočty

v – výška kulové úseče

ρ – poloměr podstavy úseče

Objem úseče $V = \frac{1}{6}\pi v(3\rho^2 + v^2)$

v – výška vrchlíku

r – poloměr kulové plochy

Povrch vrchlíku $S = 2\pi r v$

4 VYMEZENÍ POJMU SLOVNÍ ÚLOHA

Najít v literatuře přesnou a vyčerpávající definici slovní úlohy se mi nepodařilo, protože různí autoři je vymezují různě a dokonce v některých publikacích není vymezení slovní úlohy vůbec. Jak můžeme vidět na následujících příkladech, v určitých charakteristikách se odborníci shodují a v některých se zase odlišují.

Charakteristika slovní úlohy podle Františka Kuřiny:

„Slovní úlohy, v nichž je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální, společenskou či jinou tématikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky.“ (Kuřina, 1990, s. 61)

Charakteristika slovní úlohy podle Jana Vyšína:

„Slovními úlohami bývají zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešen aritmetické nebo algebraické úlohy.“ (Vyšín, 1972, s. 107)

Charakteristika slovní úlohy podle Jiřího Divíška:

„Slovní úlohou rozumíme obvykle úlohu z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyúsťuje v problém. Předložený problém je možné řešit buď v realitě, nebo matematicky.“ (Divíšek, 1989, s. 123)

Charakteristika slovní úlohy podle Gustava Knížete:
„Slovní úlohou nazýváme požadavek určit číselnou hodnotu nějakého souboru věcí nebo veličiny ze známých číselných hodnot jiných souborů nebo veličin, které jsou určitým způsobem závislé mezi sebou a hodnotou hledanou.“ (Kníže, 1966, s. 5)

Všechna čtyři vymezení slovní úlohy, která jsem uvedla, mají shodné prvky. Jsou v nich však i odlišnosti: například Jan Vyšín tvrdí, že slovní úloha je formulována slovy a ne matematickými symboly. Kdežto Gustav Kníže je opačného názoru. Mezi slovní úlohy zařazuje i ty s matematickými znaky. Dále pak Jan Vyšín uvádí, že zpravidla jsou aritmetické nebo algebraické. Tudíž se dá předpokládat, že geometrické slovní úlohy by do této definice nezařadil.

V této práci rozumíme slovními úlohami úlohy formulované slovy, vycházející z praxe a popisující reálné situace, objekty či jevy. Tyto úlohy vyúsťují v problém, který je potřeba identifikovat a vyřešit.

5 ROZDĚLENÍ SLOVNÍCH ÚLOH DLE ZADÁNÍ

Dlouho jsem zvažovala, jak toto téma zpracovat. Úlohy týkající se objemu a povrchu těles jsem propočítala a hledala společné znaky, abych mohla úlohy rozdělit podle různých kritérií. Úlohy jsem nakonec zařadila do několika skupin podle náročnosti a podle toho, co musíme vypočítat.
V následujících dvanácti podkapitolách jsem uvedla jejich charakteristiku. Ke každému typu jsem přiřadila několik konkrétních úloh vybraných z učebnic a sbírek pro základní i střední školy. Úlohy jsem uvedla i s řešením.

5.1 Úlohy na představivost

Do této podkapitoly jsem zařadila slovní úlohy, ve kterých si žáci uvědomí a připomenou, jak těleso vypadá, z čeho se skládá a jak vypadá jeho síť.

U žáků napomáhají rozvíjet nejen prostorové vidění a představivost, ale i lépe si uvědomit tvar daného tělesa.

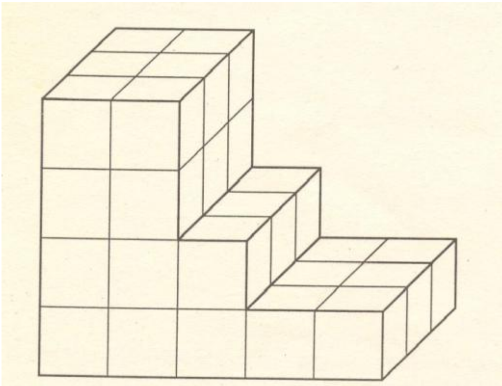
Jelikož se jedná o elementární úlohy, jsou k nalezení na začátku každé kapitoly u daného geometrického tělesa.

5.1.1 Příklady

Příklad 1:

Těleso na obrázku 18 je sestaveno ze dvou větších kvádrů a ze dvou menších kvádrů. Velký i malý kvádr narýsujte. Při rýsování zvolte velikost hrany krychličky 2 cm.

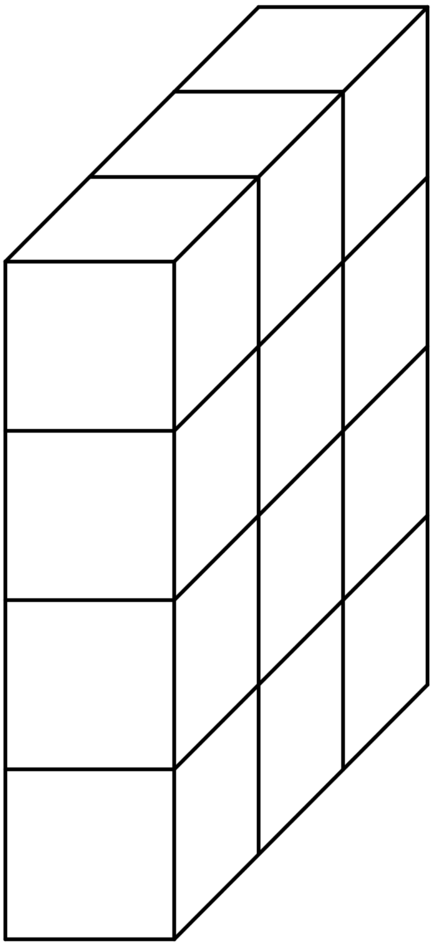
(Kočí, s. 60)



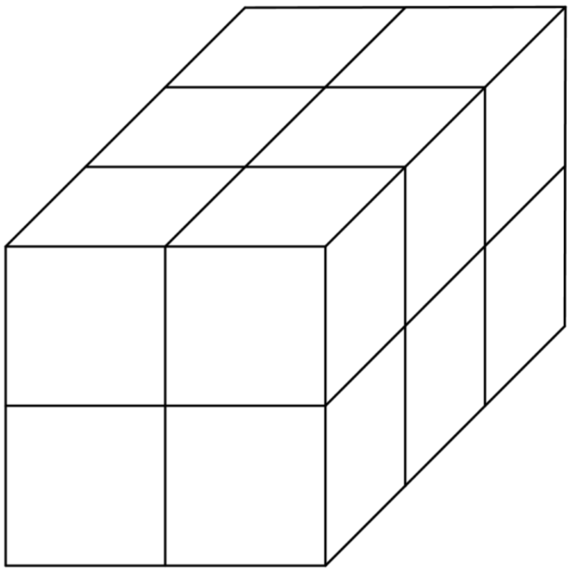
Obr. 18

Řešení:

Velký kvádr:



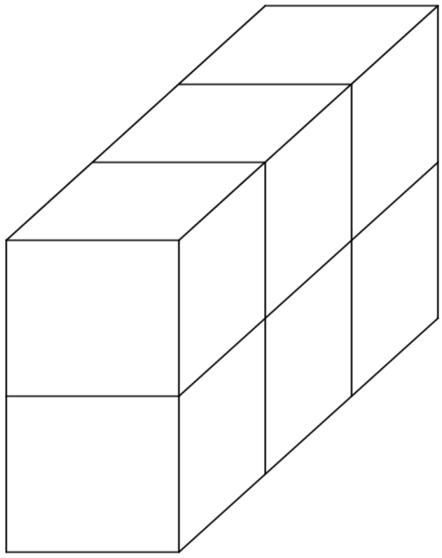
nebo



Obr. 19

Obr. 20

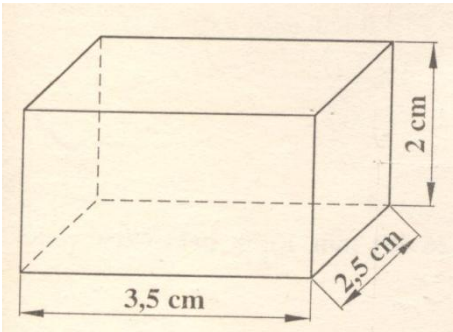
Malý kvádr:



Obr. 21

Příklad 2:

Podle modelu na obrázku 22 nakreslete síť kvádru a do jednotlivých stěn vepište jejich obsah. Vypočítejte celý povrch kvádru.
(Kočí, s. 63)



Obr. 22

Řešení:

a = 3,5 cm

b = 2,5 cm

c = 2 cm

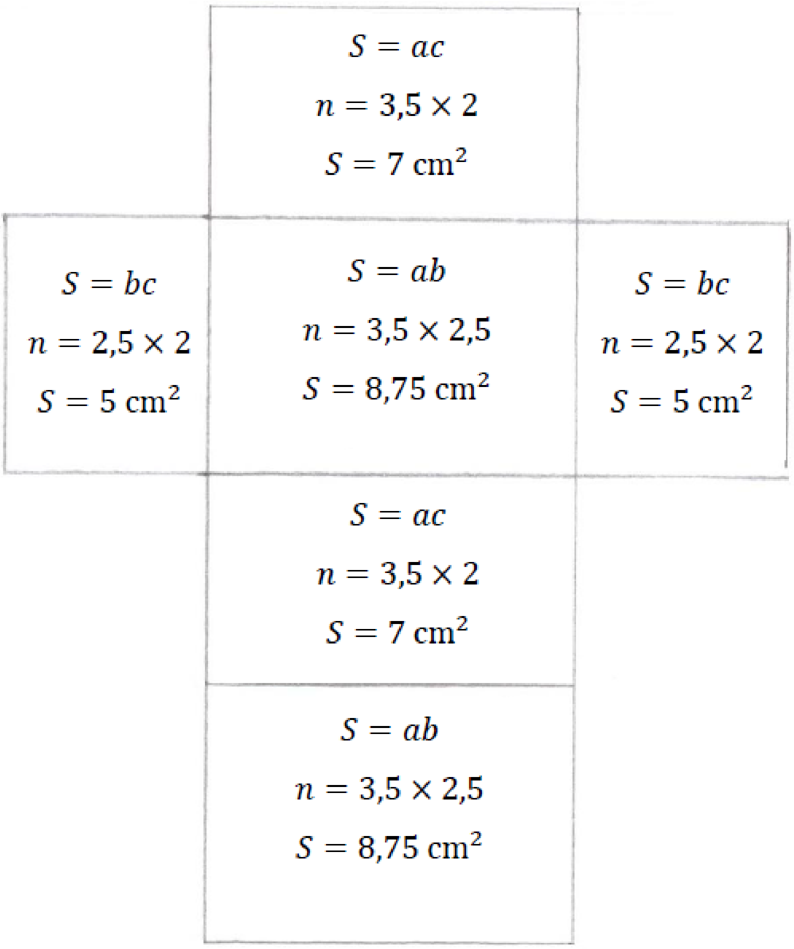
$S = n$ cm^2

$S = 2(ab + bc + ca)$

$n = 2 \times (3{,}5 \times 2{,}5 + 2{,}5 \times 2 + 3{,}5 \times 2)$

$n = 2 \times 20{,}75$

$S = 41{,}50\ \text{cm}^2$


$S = ac$
$n = 3{,}5 \times 2$
$S = 7\ \text{cm}^2$
$S = bc$
$n = 2{,}5 \times 2$
$S = 5\ \text{cm}^2$
$S = ab$
$n = 3{,}5 \times 2{,}5$
$S = 8{,}75\ \text{cm}^2$
$S = bc$
$n = 2{,}5 \times 2$
$S = 5\ \text{cm}^2$
$S = ac$
$n = 3{,}5 \times 2$
$S = 7\ \text{cm}^2$
$S = ab$
$n = 3{,}5 \times 2{,}5$
$S = 8{,}75\ \text{cm}^2$

Obr. 23

5.2 Základní výpočtové úlohy

Tyto úlohy se nedají považovat za slovní už z důvodu, že obsahují velmi málo textu. Většinou jsou zadány pouze hesly, např. Vypočítej povrch/objem., Doplň tabulku., Zjisti, které těleso má největší povrch/objem… Jsou zde zadány všechny potřebné údaje k výpočtu.

Slouží k zapamatování, upevnění a procvičení daného základního vzorce.

Taktéž je nalezneme na počátku kapitol u každého tělesa.

5.2.1 Příklady

Příklad 1:

Vypočítejte, který z kvádrů o rozměrech a, b, c má největší povrch:

a = 4 cm, b = 3 cm, c = 5 cm

a = 4,5 cm, b = 3,5 cm, c = 3 cm

a = 6 cm, b = 2 cm, c = 2 cm

(Žůrek, 1994, s. 33)

Řešení:

a) a = 4 cm

b = 3 cm

c = 5 cm

$S = n$ cm^2

$S = 2(ab + bc + ac)$

$n = 2(4 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 5)$

$S = 94\ \text{cm}^2$

b) a = 4,5 cm

b = 3,5 cm

c = 3 cm

S = n cm^2

$S = 2(ab + bc + ac)$

$n = 2(4{,}5 \times 3{,}5 + 3{,}5 \times 3 + 4{,}5 \times 3)$

$S = 79{,}5\ \text{cm}^2$

c) a = 6 cm

b = 2 cm

c = 2 cm

S = n cm^2

$S = 2(ab + bc + ac)$

$n = 2(6 \times 2 + 2 \times 2 + 6 \times 2)$

$S = 56\ \text{cm}^2$

Největší povrch má kvádr s rozměry a = 4 cm, b = 3 cm, c = 5 cm.

Příklad 2:

Válec je vysoký 7 m. Doplň tabulku.

Tabulka 1

poloměr (m)	$\frac{1}{2}$	2,5	8
povrch (m^2)			

(Žůrek, 1994, 151)

Řešení:

$v = 7$ m

$r = \frac{1}{2}$ m

$S = n$ m^2

$S = 2\pi r(r + v)$

$n = 2 \times 3{,}14 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + 7\right)$

$S = 23{,}55\ \mathrm{m}^2$

$v = 7$ m

$r = 2{,}5$ m

$S = n$ m^2

$S = 2\pi r(r + v)$

$n = 2 \times 3{,}14 \times 2{,}5 \times (2{,}5 + 7)$

$S = 149{,}15\ \mathrm{m}^2$

$v = 7$ m

$r = 8$ m

$S = n$ m^2

$S = 2\pi r(r + v)$

$n = 2 \times 3{,}14 \times 8 \times (8 + 7)$

$S = 753{,}6\ \mathrm{m}^2$

Tabulka 2

poloměr (m)	$\frac{1}{2}$	2,5	8
povrch (m^2)	23,55	149,15	753,6

Příklad 3:

Doplňte tabulku hodnot kužele:

Tabulka 3

	r (cm)	v (cm)	s (cm)	V (cm^3)	S (cm^2)
a)		4	5		
b)	5		13		
c)	8	15			

(Žůrek, 1994, s. 250)

Řešení:

a)

$v = 4$ cm

$s = 5$ cm

$r = n$ cm

$S = n$ cm^2

$V = n$ cm^3

$r^2 = s^2 - v^2$

$n^2 = 5^2 - 4^2$

$n = \sqrt{25 - 16}$

$r = 3$ cm

$S = \pi r(r + s)$

$n = 3{,}14 \times 3 \times (3 + 5)$

$S = 75{,}36$ cm^2

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

$n = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 3^2 \times 4$

$V = 37{,}68$ cm^3

b)

$r = 5$ cm

$s = 13$ cm

$v = n$ cm

$S = n$ cm^2

$V = n$ cm^3

$v^2 = s^2 - r^2$

$n^2 = 13^2 - 5^2$

$n = \sqrt{169 - 25}$

$v = 12$ cm

$S = \pi r(r + s)$

$n = 3{,}14 \times 5 \times (5 + 13)$

$S = 282{,}6$ cm^2

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

$n = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 5^2 \times 12$

$V = 314$ cm^3

c) $r = 8$ cm

$v = 15$ cm

$s = n$ cm

$S = n$ cm^2

$V = n$ cm^3

$s^2 = v^2 + r^2$

$n^2 = 15^2 + 8^2$

$n = \sqrt{225 + 64}$

$s = 17$ cm

$S = \pi r(r + s)$

$n = 3{,}14 \times 8 \times (8 + 17)$

$S = 628$ cm^2

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

$n = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 8^2 \times 15$

$V = 1004{,}8$ cm^3

Tabulka 4

	r (cm)	*v* (cm)	*s* (cm)	*V* (cm^3)	*S* (cm^2)
a)	3	4	5	37,68	75,36
b)	5	12	13	314	282,6
c)	8	15	17	1004,8	628

5.3 Jednoduché slovní úlohy

Od základních se liší tím, že obsahují více textu a díky tomu už jsou považovány za slovní úlohy. Většinou mají ryze matematický text.

I když obsahují všechny potřebné údaje k dosazení do základního vzorce, žák si tyto údaje musí z textu dohledat (nemá je vypsané pod sebou). Díky tomu začínají být pro žáky trochu nepřehledné.

5.3.1 Příklady

Příklad 1:

Vypočítejte objem pravidelného šestibokého hranolu, vysokého 8 cm, jehož podstava je tvořena šesti shodnými rovnostrannými trojúhelníky o rozměrech: a = 6 cm, v_a = 5,2 cm. (Žůrek, 1994, s. 88)

Řešení:

v = 8 cm

a = 6 cm

v_a = 5,2 cm

$V = n$ cm^3

$$V = 6\frac{av_a}{2}v$$

$$n = 6 \times \frac{6 \times 5,2}{2} \times 8$$

$V = 748,8$ cm^3

Objem pravidelného šestibokého hranolu je 748,8 cm^3.

Příklad 2:

Podstavnou hranolu je obdélník o rozměrech 2 dm, 60 cm. Hranol má výšku velikosti 8 dm. Vypočítej jeho objem. (Rosecká, 1998, s. 76)

Řešení:

a = 2 dm

b = 60 cm = 6 dm

v = 8 dm

$V = n$ dm^3

$V = abv$

$n = 2 \times 6 \times 8$

$V = 96$ dm^3

Objem hranolu je 96 dm^3.

5.4 Úlohy na převod a změnu jednotek

V zadání se autor slovní úlohy již neptá přímo na povrch a objem, ale otázka je formulovaná na jednotky povrchu a objemu, např. kolik l, kolik m^2.

U těchto úloh se již předpokládá znalost jednotek a převody mezi nimi (např.: dm^3 = l). Z toho vyplývá, že žák musí umět správně přiřadit jednotky ke vzorci povrchu a objemu.

V následujících zadáních se začíná objevovat nematematický text. To znamená, že se může jednat o příklady z běžného života, např. žák si může spočítat, kolik bude potřebovat balicího papíru na dárek.

5.4.1 Názorné příklady

Příklad 1:

Kolik litrů vody je třeba nalít do prázdného válcového sudu s průměrem dna 80 cm a hloubkou 120 cm, aby byla naplněna $\frac{1}{3}$ jeho objemu. (Trejbal, 2004, s. 106)

Řešení:

d = 80 cm → r = 40 cm

v = 120 cm

$\frac{1}{3}V = n$ l

$\frac{1}{3}V = \pi r^2 v$

$\frac{1}{3}n = 3{,}14 \times 40^2 \times 120$

$\frac{1}{3}n = \ 602880$

$n = \frac{602880}{3}$

$V = 200960\ \mathrm{cm}^3 = 200{,}96\ \mathrm{l}$

K naplnění $\frac{1}{3}$ objemu je potřeba 200,96 l vody.

Příklad 2:

Kolik m^2 barevného papíru potřebujeme na oblepení krabice o rozměrech 50 cm, 80 cm a 40 cm? (Žůrek, 1994, s. 88)

Řešení:

a = 50 cm

b = 80 cm

c = 40 cm

$S = n$ m^2

$S = 2(ab + bc + ac)$

$n = 2 \times (50 \times 80 + 80 \times 40 + 50 \times 40)$

$n = 2 \times 9200$

$S = 18400\ \mathrm{cm}^2 = 18{,}4\ \mathrm{m}^2$

K oblepení krabice potřebujeme 18,4 m^2 barevného papíru.

Příklad 3:

Vejde se do hrníčku tvaru válce s průměrem dna 8,5 cm a výškou 9 cm půl litru mléka? (Trejbal, 1992, s. 124)

Řešení:

d = 8,5 cm → r = 4,25 cm

v = 9 cm

$V = n$ l

$V = \pi r^2 v$

$n = 3{,}14 \times 4{,}25^2 \times 9$

$V \cong 510\ \mathrm{cm}^3 = 0{,}51\ \mathrm{l}$

Ano, do hrnečku se vejde půl litru mléka, protože objem hrnečku je 0,51 l.

5.5 Objem jako mezivýpočet

Zpravidla se jedná o slovní úlohy z praxe, které se ptají na hmotnost nebo za jak dlouho se naplní nádoba vodou atd. K těmto úlohám je zapotřebí znát nejen vzorec na výpočet objemu, ale i na výpočet hmotnosti. Tyto vzorce spolu úzce souvisejí.

Žáci by si měli uvědomit, že hustota je poměr hmotnosti tělesa k jeho objemu.

5.5.1 Příklady

Příklad 1:

Cihlový tovární komín vysoký 70 m má tvar „dutého“ komolého kužele. Průměr vnější části paty komínu je 5,2 m a vnější části vrcholu komínu je 3 m. Průměr vnitřní části paty komínové šachty je také *3* m a vnitřní části vrcholu komínové šachty je 1,8 m. Určete hmotnost komínu v tunách, je-li hustota jeho zdiva ρ = 1 600$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

(Trejbal, 2004, s. 200)

Řešení:

v = 70 m

d_{1a} = 5,2 m → r_{1a} = 2,6 m

d_{2a} = 3 m → r_{2a} = 1,5 m

d_{1b} = 3 m → r_{1b} = 1,5 m

d_{2b} = 1,8 m → r_{2b} = 0,9 m

ρ = 1 600 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

V_1 = n m^3

V_2 = n m^3

V = n m^3

m = n t

$$V_1 = \frac{\pi v}{3}(r_{1a}^2 + r_{1a}r_{2a} + r_{2a}^2)$$

$$n = \frac{3{,}14 \times 70}{3} \times (2{,}6^2 + 2{,}6 \times 1{,}5 + 1{,}5^2)$$

$$V_1 \cong 946\ \mathrm{m}^3$$

$$V_2 = \frac{\pi v}{3}(r_{1b}^2 + r_{1b}r_{2b}r_{2b}^2)$$

$$n = \frac{3{,}14 \times 70}{3} \times (1{,}5^2 + 1{,}5 \times 0{,}9 + 0{,}9^2)$$

$$V_2 \cong 323\ \mathrm{m}^3$$

$V = V_{1-}V_2$	$m = \rho V$
$n = 946 - 323$	$n = 1\,600 \times 623$
$V = 623\ \mathrm{m}^3$	$m = 996\,800\ \mathrm{kg} \cong 997\ \mathrm{t}$

Hmotnost komínu je 997 t.

Příklad 2:

Koule, kterou muži vrhají při atletických závodech, má hmotnost 7 250 g. Vypočítejte její průměr, víte-li, že hustota oceli, z níž byla vyrobena, je ρ = 7 800 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

(Trejbal, 2004, s. 196)

Řešení:

m = 7 250 g

ρ = 7 800 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$= 7,8 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

V = n cm^3

d = n cm

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$n = \frac{7\,250}{7{,}8}$$

$V \cong 929$ cm^3

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3$$

$$d^3 = 6\frac{V}{\pi}$$

$$n^3 = 6 \times \frac{929}{3{,}14}$$

$$n = \sqrt[3]{1\,775}$$

$d \cong 12{,}1$ cm

Průměr koule je 12,1 cm.

Příklad 3:

Vedle koupaliště pro plavce je dětské brouzdaliště, ve kterém se denně vyměňuje voda. Jeho vnitřní prostor má tvar válce s průměrem dna 6,2 m a s hloubkou 60 cm. V 8 h bylo zapnuto čerpadlo, které začalo do prázdného brouzdaliště přivádět vodu. Mělo výkon 2 $\frac{\mathrm{hl}}{\mathrm{min}}$. Když byla hladina vody vzdálena 20 cm od horního okraje brouzdaliště, bylo čerpadlo vypnuto. Kolik bylo v tomto okamžiku hodin? (Trejbal, 2004, s. 107)

Řešení:

d = 6,2 m = 62 dm

v = 40 cm = 4 dm

V = n hl

t = n h

$$V = \frac{\pi d^2}{4} v$$

$$n = \frac{3{,}14 \times 62^2}{4} \times 4$$

$$V \cong 12\,070{,}16\ \mathrm{l} = 120{,}701\,6\ \mathrm{hl}$$

$$2\ \mathrm{hl} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1\ \mathrm{min}$$

$$120{,}701\,6\ \mathrm{hl} \cdots\cdots\cdots\cdots\ x\ \mathrm{min}$$

$$x = \frac{120{,}701\,6}{2}$$

$$x = 60{,}350\,8\ \mathrm{min} \cong 1\ \mathrm{h}$$

$$n = 8 + 1$$

$$t = 9\ \mathrm{h}$$

Bylo přibližně 9 hodin.

5.6 Využití dalších matematických znalostí

Jsou to slovní úlohy, které propojují matematické znalosti, které by měl žák znát už z dříve probírané látky. Jedná se například o Pythagorovu větu, poměr, procenta…

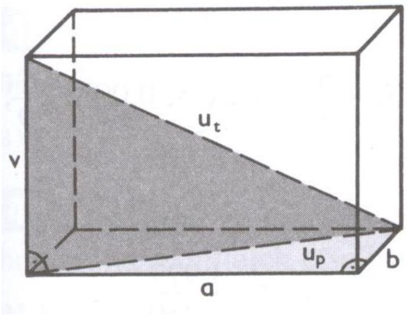
Cílem úloh je, aby žáci dokázali správně propojit již nabyté znalosti s právě probíranou látkou. Dále rozvíjejí žákovu představivost a logické myšlení.

5.6.1 Příklady

Příklad 1:

Prohlédněte si kvádr na obrázku 24. (*a*, *b* jsou jeho podstavné hrany, *v* výška, u_p úhlopříčka podstavy, u_t tělesová úhlopříčka). Vypočítejte a) délku u_p, b) výšku *v*, c) objem *V*, d) povrch *S* kvádrů, je-li $a = 3{,}6$ cm, $b = 2{,}7$ cm, $u_t = 5{,}1$ cm.

(Trejbal, 2004, s. 89)



Obr. 24

Řešení:

a = 3,6 cm

b = 2,7 cm

u_t = 5,1 cm

a) u_p = n cm

b) v = n cm

c) V = n cm^3

d) S = n cm^2

a) $u_p^2 = a^2 + b^2$

$n_p^2 = 3{,}6^2 + 2{,}7^2$

$n_p^2 = 12{,}96 + 7{,}29$

$n_p = \sqrt{20{,}25}$

$u_p = 4{,}5$ cm

b) $v^2 = u_t^2 - u_p^2$

$n^2 = 5{,}1^2 - 4{,}5^2$

$n^2 = 26{,}01 - 20{,}25$

$n = \sqrt{5{,}76}$

$v = 2{,}4$ cm

c) $V = abv$

$n = 3{,}6 \times 2{,}7 \times 2{,}4$

$V = 23{,}328$ cm^3

d) $S = 2(ab + bv + va)$

$n = 2 \times (3{,}6 \times 2{,}7 + 2{,}7 \times 2{,}4 + 3{,}6 \times 2{,}4)$

$S = 2 \times (9{,}72 + 6{,}48 + 8{,}64)$

$S = 2 \times 24{,}84$

$S = 49{,}68$ cm^2

Úhlopříčka podstavy je dlouhá 4,5 cm. Výška je 2,4 cm. Objem kvádru je 23,328 cm^3 a povrch kvádru 49,68 cm^2.

Příklad 2:

Poměr množství železa a betonu v železobetonovém nosníku je 2 : 17. Nosník má tvar válce, který je vysoký 30 m a průměr podstavy má 4 m. Jaké množství železa a betonu bylo použito na nosník? (Žůrek, 1994, s. 155)

Řešení:

v = 30 m

d = 4 m → r = 2 m

V = n m^2

železo : beton = 2 : 17

$V = \pi r^2 v$

$n = 3{,}14 \times 2^2 \times 30$

$V = 376{,}8\ \mathrm{m}^3$

množství železa: $376{,}8 \times \frac{2}{19} \cong 39{,}7\ \mathrm{m}^3$

množství betonu: $376{,}8 \times \frac{17}{19} \cong 337{,}1\ \mathrm{m}^3$

Na nosník bylo použito 39,7 m^3 železa a 337,1 m^3 betonu.

Příklad 3:

Střecha věže má podobu pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavná hrana má délku 5,4 m a výška je 5 m. Odhadem bylo zjištěno, že je třeba opravit 35 % krytiny na střešní ploše. Kolik čtverečných metrů krytin bude třeba k opravě této střechy? (Müllerová, 2000, s. 65)

Řešení:

a = 5,4 m

v = 5 m

v_a = n m

S = n m^2

$v_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2$ $\qquad$ $S = 4\frac{av_a}{2}$

$n_a^2 = 2{,}7^2 + 5^2$ $\qquad$ $n = 4 \times \frac{5{,}4 \times 5{,}7}{2}$

$n_a = \sqrt{32{,}29}$ $\qquad$ $S = 61{,}56\ \mathrm{m}^2$

$v_a \cong 5{,}7\ \mathrm{m}$

$61{,}56\ \mathrm{m}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 100\ \%$

$0{,}615\,6\ \mathrm{m}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1\ \%$

$x\ \mathrm{m}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 35\ \%$

$x = 0{,}615\,6 \times 35$

$x = 21{,}546\ m^2$

K opravě bude potřeba 21,546 m^2 krytiny.

5.7 Objem a povrch v zadání

V případě těchto úloh je důležitá provázanost mezi objemem a povrchem. Jak můžete vidět na následujících příkladech, jedná se o typ úloh, kdy žák zná povrch a musí vypočítat objem, nebo naopak zná objem a musí vypočítat povrch. V jednodušších případech se může jednat o úlohy, kdy žák zná povrch nebo objem a musí vypočítat jednu veličinu ze vzorečku pomocí klasického upravení rovnice.

5.7.1 Názorné příklady

Příklad 1:

Vypočítejte povrch kvádru s objemem 82,11 cm^3 a délkami podstavných hran 3,4 cm a 6,9 cm. (Trejbal, 2004, s. 70)

Řešení:

V = 82,11 cm^3

a = 3,4 cm

b = 6,9 cm

c = n cm

S = n cm^2

$V = abc$

$c = \dfrac{V}{ab}$

$n = \dfrac{82{,}11}{3{,}4 \times 6{,}9}$

$c = 3{,}5$ cm

$S = 2(ab + bc + ca)$

$n = 2(3{,}4 \times 6{,}9 + 6{,}9 \times 3{,}5 + 3{,}4 \times 3{,}5)$

$n = 2 \times 59{,}51$

$S = 119{,}02\ \mathrm{cm}^2$

Povrch kvádru je 119,02 cm^2.

Příklad 2:

Povrch válce je 12,56 m^2, poloměr podstavy 1 m. Vypočítejte objem tohoto válce. (Žůrek, 1994, s. 153)

Řešení:

r = 1 m

S = 12,56 m^2

v = n m

V = n m^3

$S = 2\pi r(r + v)$ $\qquad$ $V = \pi r^2 v$

$v = \frac{S}{2\pi r} - r$ $\qquad$ $n = 3{,}14 \times 1^2 \times 1$

$n = \frac{12{,}56}{2\times 3{,}14\times 1} - 1$ $\qquad$ $V = 3{,}14$ m^3

$v = 1$ m

Objem válce je 3,14 m^3.

Příklad 3:

Jak je hluboký bazén tvaru kvádru s rozměry dna 6,2 m a 3,5 m, jestliže k jeho naplnění až po okraj je zapotřebí 34,72 m^3 vody? (Kočí, s. 61)

Řešení:

V = 34,72 m^3

a = 6,2 m

b = 3,5 m

c = n m

$V = abc$

$$c = \frac{V}{ab}$$

$$n = \frac{34{,}72}{6{,}2 \times 3{,}5}$$

$$n = \frac{34{,}72}{21{,}7}$$

$c = 1{,}6$ m

Bazén je hluboký 1,6 m.

5.8 Úlohy s proměnnou

V těchto slovních úlohách jsou místo konkrétních čísel zadány proměnné. Žáci si zde procvičí počítání s proměnnou.

5.8.1 Názorné příklady

Příklad 1:

a) Kolikrát menší je objem krychle s hranou délky x než objem pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou délky $2x$ a s výškou $1,5x$?

b) Správnost řešení předchozího příkladu ověřte pro $x = 4$ dm. (Trejbal, 2004, s. 22)

Řešení:

a) krychle: $a = x$ hranol: $a = 2x$

$V_{krychle} = n$ $v = 1,5x$

$V_{hranol} = n$

$V_{krychle} = a^3$ $V_{hranol} = a^2 \times v$

$V_{krychle} = x^3$ $V_{hranol} = (2x)^2 \times 1,5x$

$V_{hranol} = 6x^3$

Objem krychle je 6 krát menší než objem hranolu.

b) Ověření: $x = 4$ dm

$V_{krychle} = x^3$ $V_{hranol} = 6x^3$

$n = 4^3$ $n = 6 \times 4^3$

$V_{krychle} = 64\ \text{dm}^3$ $V_{hranol} = 384\ \text{dm}^3$

$$\frac{384}{64} = 6$$

Objem krychle je opravdu 6 krát menší než objem hranolu.

Příklad 2:

Hrana krychle má délku $2a$ cm. Kvádr má rozměry $4a$ cm, $2a$ cm a $0,5a$ cm. Které z těchto těles má větší

a) povrch a o kolik čtverečních centimetrů,

b) objem a kolikrát větší? (Trejbal, 2004, s. 41)

Řešení:

krychle: $a = 2a$ cm

$S_{krychle} = n$ cm^2

$V_{krychle} = n$ cm^3

kvádr: $a = 4a$ cm

$b = 2a$ cm

$c = 0{,}5a$ cm

$S_{kvádrem} = n$ cm^2

$V_{kvádr} = n$ cm^3

$S_{krychle} = 6a^2$

$n = 6 \times (2a)^2$

$S_{krychle} = 24a^2$ cm^2

$S_{kvádr} = 2(ab + bc + ac)$

$n = 2(4a \times 2a + 2a \times 0{,}5a + 4a \times 0{,}5a)$

$n = 2(8a^2 + a^2 + 2a^2)$

$S_{kvádr} = 22\mathrm{a}^2$ cm^2

$V_{krychle} = a^3$

$\mathrm{n} = (2a)^3$

$V_{krychle} = 8a^3$ cm^3

$V_{kvádr} = abc$

$\mathrm{n} = 4a \times 2a \times 0{,}5a$

$V_{kvádr} = 4a^3$ cm^3

Větší povrch má krychle o $2a$ cm^2.

Krychle má 2 krát větší objem než kvádr.

Příklad 3:

Určete a) objem kvádru, b) povrch kvádru s rozměry *x*, (*x*+1), (*x*+2).

(Trejbal, 2004, s. 44)

Řešení:

$a = x$

$b = x+1$

$c = x+2$

a) $V = ?$

b) $S = ?$

$S = 2(ab + bc + ac)$

$S = 2\big(x(x + 1) + (x + 1)(x + 2) + x(x + 2)\big)$

$S = 2(3x^2 + 6x + 2)$

$S = 6x^2 + 12x + 4$

$V = abc$

$V = x(x + 1)(x + 2)$

$V = x^3 + 3x^2 + 2x$

5.9 Slovní úlohy se změnou údajů

V těchto úlohách žák řeší opakovaně stejné zadání, ale pokaždé s jinými údaji. Jedná se o úlohy typu: kolikrát se zvětší atd. Dochází ke změně jednoho nebo více údajů. Tyto úlohy slouží nejen k zapamatování vzorečku, ale i k procvičení jiných matematických znalostí.

5.9.1 Názorné příklady

Příklad 1:

Vypočítejte objem válce, jehož výška je 10 cm a poloměr podstavy 3 cm. Vypočítejte, kolikrát se tento objem zvětší, jestliže se poloměr podstavy zvětší:

a) 2krát b) 3krát c) 4krát

Co pozorujete? (Žůrek, 1994, s. 153)

Řešení:

v = 10 cm a) r = 6 cm

r = 3 cm b) r = 9 cm

$V =n$ cm^3 c) r = 12 cm

$V = \pi r^2 v$

$n = 3{,}14 \times 3^2 \times 10$

$V = 282{,}6 \text{ cm}^3$

a) $V = \pi r^2 v$

$n = 3{,}14 \times 6^2 \times 10$

$V = 1\,130{,}4 \text{ cm}^3$ zvětšil se 4krát

b) $V = \pi r^2 v$

$n = 3{,}14 \times 9^2 \times 10$

$V = 2\,543{,}4 \text{ cm}^3$ zvětšil se 9krát

c) $V = \pi r^2 v$

$n = 3{,}14 \times 12^2 \times 10$

$V = 4\,521{,}6 \text{ cm}^3$ zvětšil se 16krát

Příklad 2:

Vypočítejte povrch a objem pravidelného čtyřbokého hranolu, je-li

a) délka jeho podstavné hrany rovna 3 dm a jeho výška v decimetrech je vyjádřena nejmenším dvojciferným přirozeným číslem,

b) délka jeho podstavné hrany v centimetrech je vyjádřena největším jednociferným přirozeným číslem a výška je 15 cm,

c) součet délek všech jeho hran se rovná 48 cm, přičemž jeho výška je dvakrát větší než délka podstavné hrany. (Trejbal, 2004, s. 168)

Řešení:

a) a = 3 dm

v = 10 dm

$S = n$ dm^2

$V = n$ dm^3

$S = 2a^2 + 4av$

$n = 2 \times 3^2 + 4 \times 3 \times 10$

$S = 138 \text{ dm}^2$

$V = a^2 v$

$n = 3^2 \times 10$

$V = 90 \text{ dm}^3$

b) a = 9 cm

v = 15 cm

$S = n$ cm^2

$V = n$ cm^3

$S = 2a^2 + 4av$

$n = 2 \times 9^2 + 4 \times 9 \times 15$

$S = 702 \text{ cm}^2$

$V = a^2 v$

$n = 9^2 \times 15$

$V = 1215 \text{ cm}^3$

c) a = 3 cm

v = 6 cm

S = n cm^2

V = n cm^3

$S = 2a^2 + 4av$ $\quad\quad$ $V = a^2v$

$n = 2 \times 3^2 + 4 \times 3 \times 6$ $\quad\quad$ $n = 3^2 \times 6$

$S = 90\ \text{cm}^2$ $\quad\quad$ $V = 54\ \text{cm}^3$

5.10 Problémové úlohy

Tuto podkapitolu jsem nazvala problémové úlohy, protože se jedná o úlohy s dlouhými texty nebo s nejednoznačnými zadáními (viz úloha se stanem, kde si žák musí uvědomit, že se podstava nepočítá). Žáci se v dlouhých textech hůře orientují. Proto si musí úlohu přečíst několikrát, než, pochopí, na co jsou tázáni.

5.10.1 Názorné příklady

Příklad 1:

Kolik čtverečných metrů stanového plátna se spotřebuje k ušití stanu tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu, který je široký 2 m a vysoký 1,5 m?

Připočítejte 5 % látky navíc na švy. (Müllerová, 2000, s. 64)

Řešení:

a = 2 m

v = 1,5 m

v_a = n m

S = n m^2

$v_a^2 = \frac{a^2}{2} + v^2$ $\quad\quad$ $S = 4\frac{av_a}{2}$

$n^2 = 2 + 1{,}5^2$ $\quad\quad$ $n = 4 \times \frac{2\times 2{,}1}{2}$

$n = \sqrt{4{,}25}$ $\quad\quad$ $S = 8{,}4\ \text{m}^2$

$v_a \cong 2{,}1\ \text{m}$

$8{,}4\ \mathrm{m}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 100\ \%$

$0{,}084\ \mathrm{m}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1\ \%$

$x\ \mathrm{m}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 105\ \%$

$x = 105 \times 0{,}084$

$x = 8{,}82\ \mathrm{m}^2$

Potřebujeme 7,56 m^2 stanového plátna.

Příklad 2:

Dětská stavebnice obsahuje 12 krychlí s hranami dlouhými 2 cm, 8 kvádrů s hranami dlouhými 4 cm, 3 cm a 2 cm, 10 jehlanů s podstavnou hranou dlouhou 2 cm a výškou 4 cm a 15 kuželů s poloměrem podstavy 1 cm a výškou 3 cm. Vypočítejte hmotnost stavebnice, která je vyrobena ze dřeva o hustotě 600 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Hmotnost krabice je 300 g. (Jehlany mají čtvercovou podstavu.)

Řešení:

$a_{krychle} = 2\ \mathrm{cm}$

$a_{kvádr} = 4\ \mathrm{cm}$

$b_{kvádr} = 3\ \mathrm{cm}$

$c_{kvádr} = 2\ \mathrm{cm}$

$a_{jehlan} = 2\ \mathrm{cm}$

$v_{jehlan} = 4\ \mathrm{cm}$

$r_{kužel} = 1\ \mathrm{cm}$

$v_{kužel} = 3\ \mathrm{cm}$

$\rho = 600\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 0{,}6 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

$m_{krabice} = 300\ \mathrm{g}$

$V_{krychle} =\ n\ \mathrm{cm}$

$V_{kvádr} =\ n\ \mathrm{cm}$

$V_{jehlan} =\ n\ \mathrm{cm}$

$V_{kužel} =\ n\ \mathrm{cm}$

$m_{stavebnice} = n\ \mathrm{kg}$

$V_{krychle} = a^3$

$n = 2^3$

$V_{krychle} = 8 \text{ cm}^3$

$V_{kvádru} = abc$

$n = 4 \times 3 \times 2$

$V_{kvádru} = 24 \text{ cm}^3$

$V_{jehlan} = \frac{1}{3} a^2 v$

$n = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 4$

$V_{jehlan} = \frac{16}{3} \text{ cm}^3$

$V_{kužel} = \frac{1}{3} \pi r^2 v$

$n = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 1^2 \times 3$

$V_{kužel} = \frac{157}{50} \text{cm}^3$

$$m_{stavebnice} = \left(\left(12V_{krychle} + 8V_{kvádru} + 10V_{jehlan} + 15V_{kužel}\right) \times \rho\right) + m_{krabice}$$

$$n = \left(\left(12 \times 8 + 8 \times 24 + 10 \times \frac{16}{3} + 15 \times \frac{157}{50}\right) \times 0{,}6\right) + 300$$

$$m_{stavebnice} = \frac{26\,653}{50} \text{ g} \cong 533 \text{ g}$$

Hmotnost stavebnice je přibližně 533 g.

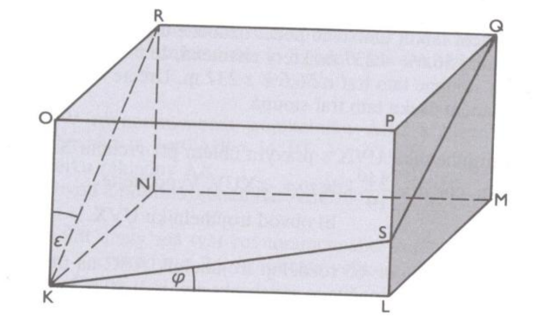
5.11 Úlohy na využití goniometrických funkcí

K získání údajů, které jsou potřebné k vypočtení povrchu nebo objemu, použijeme goniometrickou funkci. Žák musí znát goniometrické funkce a jejich vlastnosti.

5.11.1 Názorné příklady

Příklad 1:

Na obrázku 25 je kvádr KLMNOPQR s rozměry $|KL| = 6$ cm, $|LM| = 5$ cm. Stěnová úhlopříčka *KR* a hrana *KO* svírají úhel $\varepsilon = 59°$. Na hraně *LP* je vyznačen bod *S* tak, že $|\sphericalangle SKL| = \varphi = 10°$. Vypočítejte



Obr. 25

a) objem kvádru,

b) délku lomené čáry tvořené úsečkami *KS* a *SQ*. (Trejbal, 2004, s.185 – 186)

Řešení:

$|KL| \ = \ 6$ cm

$|LM| \ = \ 5$ cm

$\varepsilon \ = \ 59°$

$|\sphericalangle SKL| = \varphi = 10°$

$|KO| = \ n$ cm

$|LS|$= n cm

$|KS|$= n cm

$|SQ|$= n cm

a) V = n cm^3

b) $|KS| + |SQ|$ = n cm

tg $\varepsilon = \frac{|\mathrm{KL}|}{|\mathrm{KO}|}$

tg $(59°) = \frac{5}{n}$

$n = \frac{5}{tg(59°)}$

$|KO| = 3$ cm

a) $V = |KL||LM||KO|$

$n = 6 \times 5 \times 3$

$V = 90$ cm^3

tg $\varphi = \frac{|LS|}{|KL|}$

tg $(10°) = \frac{n}{6}$

$n =$ tg$(10°) \times 6$

$|LS| = 1{,}1$ cm

cos $\varphi = \frac{|KL|}{|KS|}$

cos $(10°) = \frac{6}{n}$

$n = \cos\ (10°) \times 6$

$|KS| = 5{,}9$ cm

$|SQ|^2 = |SP|^2 + |PQ|^2$

$n^2 = (3 - 1{,}1)^2 + 5^2$

$n^2 = 3{,}61 + 25$

$n = \sqrt{28{,}61}$

$|SQ| \cong 5{,}3$ cm

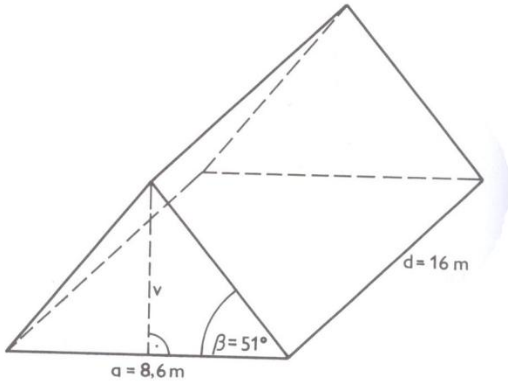
b) $|KS| + |SQ| = 5{,}9 + 5{,}3 = 11{,}2$ cm

Objem kvádru je 90 cm^3. A délka lomené čáry tvořené úsečkami *KS* a *SQ* je 11,2 cm.

Příklad 2:

Vypočítejte objem půdního prostoru, který má tvar trojbokého hranolu s podstavou (štítem) tvaru rovnoramenného trojúhelníku, je-li $a = 8{,}6$ m, β = 51°, d = 16 m. (viz obr. 26)

(Trejbal, 2004, s. 186)



Obr. 26

Řešení:

a = 8,6 m

d = 16 m

β = 51°

v = n cm

V = n cm^3

$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{v}{\frac{a}{2}}$

$\mathrm{tg}\,(51°) = \frac{n}{4{,}3}$

$n = \mathrm{tg}\,(51°) \times 4{,}3$

$v = 5{,}31$ cm

$V = \frac{av}{2} d$

$n = \frac{8{,}6 \times 5{,}31}{2} \times 16$

$V \cong 365{,}3\ \mathrm{cm}^3$

Objem půdního prostoru je 365,3 cm^3.

5.12 Úlohy na využití integrálu

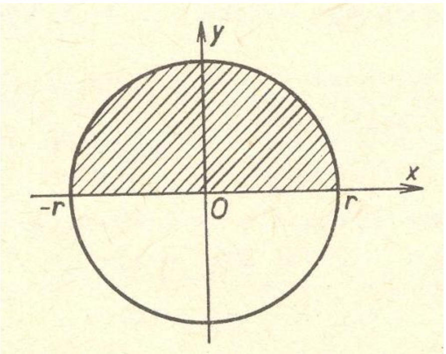
V těchto úlohách se využívá k výpočtu integrál. V základních hodinách matematiky na SŠ se žáci s integrálem obvykle nesetkají. Tato problematika je probírána v rozšiřujících seminářích z matematiky, kde se většinou setkají pouze se základní problematikou integrálu a nestačí jej aplikovat na povrch a objem.

5.12.1 Příklady

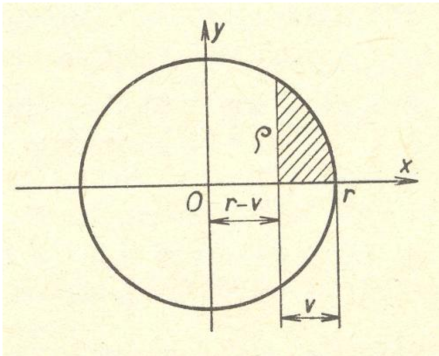
Příklad 1:

a) Odvoďte vzorec pro objem koule o poloměru r. (Pokyn: Užijte toho, že koule vznikne, otáčí-li se kolem osy x polokruh, tj. základní obrazec [-*r*, *r*, *f(x)*], kde *f(x)* = *y* $\sqrt{r^2 - x^2}$, obr. 27)

b) Odvoďte vzorec pro objem kulové úseče výšky *v*, jež je vyťata z koule o poloměru r. (Pokyn: Kulová úseč vznikne, otáčí-li se kolem osy x základní obrazec [r - *v*, *r*, *f(x)*], kde *f(x)* = *y* = $\sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $0 < v < 2r$, obr. 28) (Polák, 1987, s. 505 – 506)



Obr. 27



Obr. 28

Řešení:

a) $V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$

b) $V = \pi \int_{r-v}^{r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-v}^{r} =$

$= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^3 + r^2 v + \frac{r^3 - 3r^2 v + 3rv^2 - v^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi v^2 (3r - v)$

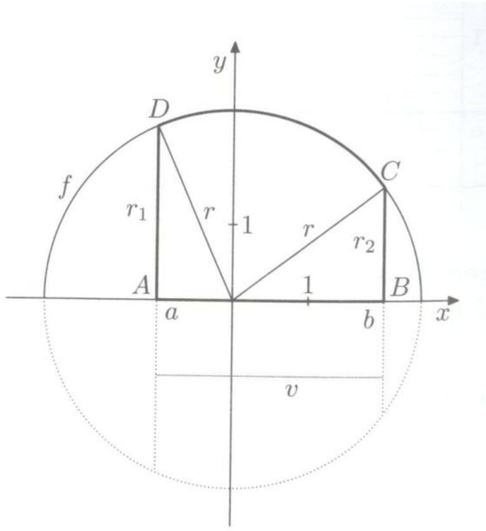
Podle Euklidovy věty o výšce je $\rho^2 = (2r - v)v$, odkud $r = \frac{\rho^2 + v^2}{2v}$. Dosadíme-li za r do odvozeného vzorce, vychází po úpravě $V = \frac{1}{6} \pi v (3\rho^2 + v^2)$.

Odvozený vzorec pro objem koule o poloměru *r je* $\frac{4}{3} \pi r^3$.

Odvozený vzorec pro objem kulové úseče je $\frac{1}{6} \pi v (3\rho^2 + v^2)$.

Příklad 2:

Odvoďte vzorec pro výpočet kulové plochy. (viz obr. 29) (Řídká, 2006, s. 278 – 279)



Obr. 29

Řešení:

Kulová plocha vznikne oddělením dvou kulových úsečí z koule rovnoběžnými rovinami. Rovněž se vytvoří rotací plochy *ABCD* kolem souřadnicové osy *x*.

Kružnice má rovnici $x^2 + y^2 = r^2$. Horní půlkružnice se dá popsat funkcí $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Oblouk *DC* je určen funkcí *f*, kde $x \in \langle a; b \rangle$. Pak tedy platí: $f^2(x) = r^2 - x^2$

$$V = \pi \int_a^b (r^2 - x^2)dx = \pi \left[r^2 v - \frac{x^3}{3} \right]_a^b = \pi \left[r^2(b-a) - \frac{b^3 - a^3}{3} \right] =$$

$$= \pi(b-a)\left(r^2 - \frac{b^2+ab+a^2}{3} \right)$$

Dále platí: $b - a = v$, $a^2 = r^2 - r_1^2$, $b^2 = r^2 - r_2^2$

Ve zlomku pro výpočet objemu *V* je třeba určit člen *ab*:

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2 = r^2 - r_1^2 + r^2 - r_2^2 - v^2 = 2r^2 - (r_1^2 + r_2^2 + v^2)$

$$ab = r^2 - \frac{r_1^2 + r_2^2 + v^2}{2}$$

Proto je $V = \pi v \left[r^2 - \frac{1}{3}\left(r^2 - r_2^2 + r^2 - \frac{r_1^2+r_2^2+v^2}{2} + r^2 - r_1^2 \right) \right] = \frac{\pi v}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2)$.

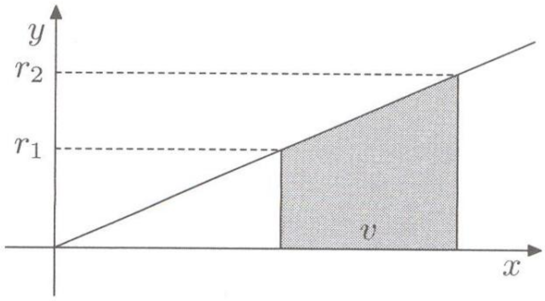
Vzorec pro výpočet kulové plochy je $\frac{\pi v}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2)$.

Příklad 3:

Odvoďte vzorec pro výpočet objemu komolého kužele. (Řídká, 2006, s. 280 – 281)

Řešení:

Základem takovýchto příkladů je náčrtek.(viz obr. 30) Zvolme přímku, která prochází počátkem soustavy souřadnic a má rovnici $y = \frac{r_2 - r_1}{v} x$, kde r_1, r_2 jsou poloměry podstav komolého kužele a v je jeho výška. Meze vypočteme dosazením r_1, r_2 za y do rovnice přímky.



Obr. 30

$$V = \pi \int_{\frac{vr_1}{r_2 - r_1}}^{\frac{vr_2}{r_2 - r_1}} \frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2} x^2 dx = \pi \frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{vr_1}{r_2 - r_1}}^{\frac{vr_2}{r_2 - r_1}} =$$

$$= \pi \frac{(r_2 - r_1)^2}{3v^2} \left(\frac{v^3 r_2^3}{(r_2 - r_1)^3} - \frac{v^3 r_1^3}{(r_2 - r_1)^3}\right) = \pi \frac{1}{3v^2} \times \frac{v^3 r_2^3 - v^3 r_1^3}{r_2 - r_1} =$$

$$= \frac{\pi v}{3} \times \frac{(r_2 - r_1)(r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2)}{r_2 - r_1} = \frac{\pi v}{3} (r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2)$$

Vzorec pro výpočet komolého jehlanu je $\frac{\pi v}{3} (r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2)$.

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo uceleně roztřídit a přehledně rozdělit slovní úlohy na objem a povrch tak, aby toto rozdělení mohlo sloužit řešitelům i pedagogům. Takovéto rozdělení jsem v žádné literatuře nenašla. Rozdělení úloh se ukázalo být poměrně náročné, neboť úloh na objem a povrch existuje překvapivě mnoho. Cíl práce, který jsem si vytyčila, jsem splnila.

V budoucnu bych chtěla práci rozšířit i o další jiná tělesa. Dále bych chtěla provést výzkum na základních a středních školách, abych zjistila, jaký typ zadání dělá žákům největší problém, a který typ je pro ně jednoduchý. Toto zjištění by bylo jistě zajímavé porovnat u žáků ve třídách s rozšířenou výukou matematiky s žáky běžných tříd.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Hranolová plocha (převzeto z Polák, 1972, s. 490) 10
Obr. 2: Krychle 11
Obr. 3: Kvádr 12
Obr. 4: Hranol 13
Obr. 5: Jehlanová plocha (převzato z Pomykalová, 2006, s. 125) 13
Obr. 6: Jehlan 14
Obr. 7: Pravidelný čtyřstěn 16
Obr. 8: Pravidelný čtyřboký jehlan 16
Obr. 9: Komolý jehlan (převzato z Mikulčák, 2004, s. 39) 16
Obr. 10: Kruhová válcová plocha (převzeto z Polák, 1972, s. 490) 17
Obr. 11: Válec (převzato z Halouzka, 2002, s. 144) 18
Obr. 12: Kruhová kuželová plocha (převzeto z Polák, 1972, s. 492) 19
Obr. 13: Rotační kužel (převzato z Mikulčák, 2004, s. 39) 20
Obr. 14: Komolý rotační kužel (převzato z Mikulčák, 2004, s. 39) 21
Obr. 15: Koule (převzato z wikipedie, Koule) 22
Obr. 16: Kulová úseč (převzato z Mikulčák, 2004, s. 39) 22
Obr. 17: Kulový vrchlík 22
Obr. 18 (převzato z Kočí, s. 60) 25
Obr. 19 25
Obr. 20 25
Obr. 21 26
Obr. 22 (převzato z Kočí, s. 63) 26
Obr. 23 27
Obr. 24 (převzato z Trejbal, 2004, s. 89) 38
Obr. 25 (převzato z Trejbal, 2004, s. 186) 49
Obr. 26 (převzato z Trejbal, 2004, s.186) 51
Obr. 27 (převzato z Polák, 1972, s. 505) 52
Obr. 28 (převzato z Polák, 1972, s. 505) 52
Obr. 29 (převzato z Řídká, 2006, s. 278) 53
Obr. 30 (převzato z Řídká, 2006, s. 281) 54

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1 (převzato z Žůrek,1994, s. 151) ... 29
Tabulka 2 ... 29
Tabulka 3 (převzato z Žůrek, 1994, s. 250) ... 30
Tabulka 4 ... 31

POUŽITÁ LITERATURA

BUŠEK, I.: *Sbírka úloh z matematiky pro osmý ročník základní školy*: *Pomocná kniha*. 1. vyd. Praha: SPN, 1992, 203 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-042-6090-X.

DIVÍŠEK, J.: *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989, 269 s. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-0433-3.

HALOUZKA, A.: *Přehled učiva k maturitní zkoušce z matematiky*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 2002, 240 s. ISBN 80-716-8808-8.

KOČÍ, S. – KOČÍ, L.: *Matematika: Pracovní sešit B, C pro 6. ročník základní a občanské školy*. Šumperk: TV Graphics. (není uvedený rok vydání)

KNÍŽE, G.: *Vztah celku a části při řešení slovních úloh*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966. Zprávy Výzkumného ústavu pedagogického v Praze.

KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-042-3753-3.

MIKULČÁK, J. a kol.: *Matematické fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. 3. vyd., dotisk. Praha: Prometheus, 2004, 206 s. Pomocné knihy pro žáky. ISBN 80-858-4984-4.

MÜLLEROVÁ, J.: *Matematika pro 9. ročník základní školy*: *geometrie*. 1. vyd. Praha: Kvarta, 2000, 152 s. ISBN 80-863-2611-X.

POLÁK, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1978, 628 s. Knižnice všeobecného vzdělávání - KOSTKA. ISBN 14-192-78.

POMYKALOVÁ, E.: *Matematika pro gymnázia*: *stereometrie*. 3.,dotisk. Praha: Prometheus, 2006, 223 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6178-7.

ROSECKÁ, Z.: *Geometrie*: *učebnice pro 7. ročník*. Brno: Nová škola, 1998, 86 s. ISBN 80-856-0775-1.

ŘÍDKÁ, E. – BLAHUNKOVÁ, D. – CHÁRA, P.: *Maturitní otázky z matematiky*. 1. vyd. Praha: Tutor, 2006, 283 s. Maturita (Tutor). ISBN 80-867-0014-3.

TREJBAL, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992, 184 s. Učebnice pro základní školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-5671-6.

TREJBAL, J. – KUČINOVÁ, E. – VINTERA, F.: *Sbírka úloh z matematiky II*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2004, 255 s. ISBN 80-723-5111-7.

VYŠÍN, J.: *Metodika řešení matematických úloh*. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972. Odborná literatura pro učitele. ISBN 14-578-71.

ŽŮREK, M.: *Sbírka příkladů z matematiky pro 5. - 9. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Ilustrace Antonín Šplíchal. Olomouc: Fin, 1994, 331 s. ISBN 80-855-7269-9.

INTERNETOVÉ ZDROJE

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Koule [online]. c2012 [cit. 27. 03. 2012]. Dostupný z WWW: <http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Koule&oldid=8542238>

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Objem [online]. c2012 [cit. 18. 05. 2012]. Dostupný z WWW: <http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Objem&oldid=8620675>

HAVRLANT, L.: *Matematika polopatě: Objemy a obsahy*. HAVRLANT, Lukáš. *Matweb* [online]. 2006 - 2011. [cit. 18. 05. 20012]. Dostupné z www: <http://www.matweb.cz/objemy-obsahy>