Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Lukáš Klouda

Semi-infinitní programování: teorie a aplikace na eficienci portfolia

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, PhD.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2012

Chtěl bych poděkovat RNDr. Ing. Miloši Kopovi, PhD., vedoucímu své práce, za vedení, poznámky, trpělivost a čas strávený nad touto prací.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne .... Podpis autora

Název práce: Semi-infinitní programování: teorie a aplikace na eficienci portfolia
Autor: Bc. Lukáš Klouda
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, PhD.
E-mail vedoucího: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá aplikací semi-infinitního programování na eficienci portfolia. Nejdříve jsou v práci prezentovány poznatky o semi-infinitním programování, především o podmínkách optimality prvního a druhého řádu a o dualitě v lineárním semi-infinitním programování. Dále je formulována optimalizační úloha pro nalezení eficientního portfolia ve smyslu stochastické dominance druhého řádu za předpokladu diskrétního, normálního, studentova a obecného eliptického rozdělení. Za míru rizika užíváme podmíněnou hodnotu v riziku (CVaR), neboť se jedná o konzistentní míru rizika se stochastickou dominancí druhého řádu. Tato úloha je dále využita k testování eficience indexu PX vzhledem ke stochastické dominanci druhého řádu. Úlohy testování eficience jsou naprogramovány v programu GAMS.

Klíčová slova: semi-infinitní programování, stochastická dominance druhého řádu, eficience portfolia, normální rozdělení, obecné eliptické rozdělení

Title: Semi-infinite programming: theory and portfolio efficiency application
Author: Bc. Lukáš Klouda
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa, PhD.
Supervisor's e-mail address: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstract:The thesis deals with application of semi-infinite programming to a portfolio efficiency testing. The summary of semi-infinite programming, first and second order optimality conditions and duality in linear semi-infinite programming is presented. The optimization problem for a portfolio efficiency testing with respect to the second order stochastic dominance under assumption of discrete, normal, Students and general elliptical distribution is formulated. Conditional value at risk(CVaR) is used as the risk measure, because of its consistency with the second order stochastic dominance relation. Efficiency of index PX with respect to the second order stochastic dominance is tested. The tests are performed using the program GAMS.

Keywords: semi-infinite programming, second order stochastic dominance, portfolio efficiency, normal distribution, general elliptical distribution

Obsah

Úvod

V této diplomové práci se budeme zabývat úlohou matematického programování, ve které budeme chtít maximalizovat funkci $F(z)$ vzhledem k podmínkám na proměnnou z vyjádřených jako $g(z,t) \leq 0$ pro všechna t z nějaké množiny B. Tímto matematickým modelem se zabývá mnoho teoretických i praktických prací, ve kterých nalezneme návrhy na různé matematické vlastnosti funkcí F a g a pro množinu B.

Pojem semi-infinitní programování představuje případ, kdy z je tvořeno konečně mnoha proměnnými, zatímco B je nekonečná množina - v mnoha aplikacích se může jednat například o omezenou a uzavřenou množinu. Dostáváme tak konečně mnoho proměnných a nekonečně mnoho podmínek. Přehled o teorii semi-infinitního programování lze nalézt například v těchto článcích [2], [5], [32], [35], [41]. Hettich a Kortanek [12] popsali dualitu v případě konvexního programování. Na konjugovanou dualitu je zaměřený článek [36]. Semi-infinitní programování má širokou škálu využití. Jednotlivé příklady lze najít v [6], [12], [26], [42].

V této práci se budeme věnovat finanční aplikaci, a to konkrétně výběru optimálního portfolia. Základy teorie portfolia pochází od H. Markowitze [27]. Ve svém modelu mimo jiné předpokládal, že se všichni investoři chovají stejně. Jestliže v takovém případě nalezneme optimální portfolio, potom je optimální pro všechny investory. Základními informacemi pro nalezení optimálního portfolia jsou v Markowitzově modelu očekávaný výnos a rozptyl. Předpoklad stejného chování investorů je ovšem hodně zjednodušující, proto se budeme věnovat modelům pracujícím se stochastickou dominancí, konkrétně se stochastickou dominancí druhého řádu. V takovémto modelu má každý investor vlastní užitkovou funkci, která vyjadřuje jeho preference. Optimální portfolio nemusí být určeno jednoznačně, proto se zavádí pojem eficientního portfolia. Modely stochastické dominance se zabývali například Hadar a Russel [8] nebo Hanoch a Levy [9]. V článcích [37] a [30] byl ukázán vztah mezi stochastickou dominancí druhého řádu a mírou rizika CVaR. Kritéria pro testování eficience portfolia představili Levy [25], Post [33], Kuosmanen [22] a Kopa [16].

V 1. kapitole budeme popisovat podmínky optimality prvního a druhého řádu pro semi-infinitní programování. Také zde předvedeme diskretizaci úlohy semi-infinitního programování a její lokální redukci na konečný problém.

Ve 2. kapitole se zaměříme na dualitu v lineárním semi-infinitním programování, neboť dualita se v praxi při řešení úloh lineárního semi-infinitního programování často využívá. V této kapitole dále vysvětlíme pojmy perfektní duality a neperfektní duality.

3. kapitola se bude věnovat aplikaci semi-infinitního programování na eficienci portfolia. Uvedeme zde nejprve úlohu pro diskrétní případ. V poslední podkapitole popíšeme také spojitý případ za předpokladu normálního, studentova a obecného eliptického rozdělení.

Poslední kapitolu věnujeme praktické úloze. Využijeme zde úlohy semi-infinitního programování odvozené ve 3. kapitole. Za aktiva jsme zvolili české akcie a index PX. Nejprve budeme předpokládat, že výnosy akcií mají diskrétní rozdělení. Poté budeme hledat eficientní portfolio za předpokladu libovolného eliptického rozdělení.

1. Podmínky optimality

V této kapitole se budeme zabývat především podmínkami optimality prvního a druhého řádu. V první části popíšeme podmínky optimality prvního řádu. Ve druhé části se budeme zabývat diskretizací úlohy semi-infinitního programování. Výsledky druhé části poté použijeme pro formulování podmínek optimality druhého řádu ve třetí části kapitoly.

1.1 Podmínky optimality prvního řádu

V této kapitole budeme náš problém značit následovně:

$$\begin{aligned} v(P) &= \max\{F(z) | z \in Z\} \\ Z &= \{z | g(z,t) \leq 0, t \in B\} \subset R^n, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde $B \in R^m$ je kompaktní množina parametrů a funkce F a g jsou spojitě diferencovatelné vzhledem k z po řadě na R^n a $R^n \times R^m$. Nechť $\bar{z} \in Z$, pak definujeme

$$E(\bar{z}) := \{t \in B | g(\bar{z}, t) = 0\} = \{\bar{t}^l | l \in L\}, \tag{1.2}$$

množinu parametrů t takových, pro které jsou omezení aktivní. Množina L je množina indexů, pro které $\bar{t}^l \in E(\bar{z})$. Jestliže z^* je optimální řešení (1.1), pak nemůže existovat ξ takové, že [12]

$$\xi^T F_z > 0, \quad \xi^T g_z^l < 0, \quad l \in L, \tag{1.3}$$

kde pro stručnost $F_z = \frac{\partial F(z^*)}{\partial z}$, $g_z^l = \frac{\partial g(z^*, \bar{t}^l)}{\partial z}$. Podmínka (1.3) může být interpretována jako postačující podmínka pro to, aby ξ bylo přípustný směr. Směr ξ budeme nazývat přípustný, jestliže existuje hladký oblouk mířící ze z^* s tečnou ξ. Podmínka (1.3) se dá následovně zesílit [12].

Lemma 1.1. *Nechť $z^* \in Z$ je optimální pro (1.1). Pak neexistuje ξ takové, že*

$$\xi^T F_z > 0, \quad \xi^T g_z^l \leq 0, \quad l \in L.$$

Důkaz: viz [12]

Definice 1.2. *Řekneme, že množina $A \subset R^n$ je*

(i) konvexní, jestliže pro každé dva body $x, y \in A$ a $0 < \lambda < 1$ platí

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in A,$$

(ii) kužel (s vrcholem v počátku), jestliže $0 \in A$ a pro každý bod $s \in A$ a $\alpha > 0$ je $\alpha s \in A$,

(iii) konvexní kužel, jestliže je kužel a zároveň konvexní množina.

K získání Kuhn-Tuckerovy podmínky použijeme následující verzi Farkasova lemmatu.

Lemma 1.3. *Nechť je množina $S \subset R^n$ libovolná a nechť $co(S)$ značí konvexní kužel generovaný množinou S. Pak pro každé $v \in R^n$ platí právě jedna z následujících možností:*

(i) $v \in cl(co(S))$,

(ii) existuje ξ takové, že $\xi^T v > 0$ a zároveň $\xi^T s \leq 0$ pro $s \in S$.

Důkaz: viz [12]

Věta (Kuhn-Tuckerova podmínka) 1.4. *Nechť $z^* \in Z$ je optimální pro (1.1) a nechť platí $\xi^T g_z^l < 0, \quad l \in L$. Potom existuje $M \subset L$, $|M| < \infty$ a $\mu_l > 0$, $l \in L$ takové, že*

$$F_z = \sum_{l \in M} \mu_l g_z^l. \tag{1.4}$$

Důkaz: viz [12]

1.2 Diskretizace a lokální redukce na konečný problém

V této kapitole se budeme zabývat problémem popisu nebo alespoň aproximace přípustné množiny

$$Z = \{z | g(z,t) \leq 0, t \in B\} \tag{1.5}$$

naší úlohy semi-infinitního programování (1.1) pomocí pouze konečně mnoha omezení. Zvolíme $\bar{B} \subset B$, $|\bar{B}| < \infty$ a nahradíme Z pomocí

$$Z(\bar{B}) = \{z | g(z,t) \leq 0, t \in \bar{B}\} \tag{1.6}$$

a budeme uvažovat aproximaci

$$P(\bar{B}) = \max\{F(z) | z \in Z(\bar{B})\}. \tag{1.7}$$

$\bar{B}$ je obvykle nazýváno mřížkou.

V tomto kontextu vyvstává otázka, zda existuje podmnožina $\bar{B}$ množiny B, pro kterou mají (1.7) a (1.1) stejnou množinu optimálních řešení. Obecně je odpověď záporná, což je vidět na následujícím příkladu:

Příklad 1.5. $\max\{-y \mid 0 \leq x \leq 1, -(x-t)^2 - y \leq 0, t \in [0,1]\}$.
Pokud na tento příklad budeme koukat z pohledu úlohy (1.1), pak nejvíce omezující podmínka nastane, když $x = t$. Protože x i t mají stejný obor hodnot, tak je maximum této úlohy rovno 0.
Pokud se ovšem na tento příklad podíváme z pohledu úlohy (1.7), pak $\bar{B}$ je konečná množina, tudíž existuje $\tilde{x} \in [0,1]$ takové, že $\tilde{x} \neq t$, $t \in \bar{B}$. Nyní upravme nerovnici $-(x-t)^2 - y \leq 0$ do tvaru $(x-t)^2 \geq -y$. Levá strana nerovnice je větší než 0, proto dostaneme vždy řešení větší než 0.

Věta 1.6. *V úloze (1.1) předpokládejme, že B je kompaktní, F je konkávní, $g(z,t)$ je konvexní vzhledem k z (F a $g(z,t)$ jsou konečné na R^n) a $v(P)$ je konečné. Nechť platí následující podmínka Slaterova typu: pro každou množinu $n+1$ bodů $t_0,\dots,t_n \in B$ existuje z takové, že $g(z,t_i) < 0$, $i = 0,\dots,n$. Potom existuje $T_n = \{\tilde{t}_1,\dots,\tilde{t}_n\} \subset B$ takové, že*

(i) $v(P) = v(P(T_n))$,

(ii) *existují multiplikátory $\mu_i \geq 0$, $i = 0,\dots,n$ takové, že*

$$v(P) = sup\left\{F(z) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i g(z,\tilde{t}_i) | z \in R^n\right\}.$$

Důkaz: viz [12]
Předešlá věta je okamžitým důsledkem obecnějšího výsledku, který prezentoval Borwein [4]. Poznamenejme, že (ii) je v podstatě výsledek konvexní duality v semi-infinitním programování. Množina T_n nebude nikdy explicitně známá, přestože budeme vědět, že existuje. Obvykle se jedná o výsledek numerického řešení úlohy.

Nechť

$$d(\bar{B}) = \max_{t\in B} \min_{\bar{t}\in\bar{B}} ||t-\bar{t}||$$

je obvyklá míra pro hustotu $\bar{B} \subset B$. Nechť $\bar{B}^{(n)}$ je posloupnost konečných podmnožin s $d(\bar{B}^{(n)}) \to 0$. Platí, že hromadné body řešení $\bar{z}^{(n)}$ úlohy $(P(\bar{B}^{(n)}))$ řeší úlohu (1.1)? Obecně musíme opět odpovědět, že ne. [12]. Avšak v lineárním případě už to platí.

Věta 1.7. *Uvažujme lineární úlohu (1.1), ve které $F(z) = c^T z$, $g(z,t) = a(t)^T z - b(t)$. Předpokládejme, že všechny množiny $\{z | a(t)^T z - b(t) \leq 0, t \in B, c^T z \geq 0\}$ jsou omezené. Potom pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta_\epsilon > 0$ takové, že pro každou množinu $\bar{B} \subset B$, $d(\bar{B}) < \delta_\epsilon$ máme případ $(P(\bar{B}))$, který je řešitelný a pro každé jeho řešení $z^*(\bar{B})$ existuje řešení $z^*(P)$ úlohy (P) takové, že $||z^*(\bar{B}) - z^*(P)|| < \epsilon$.*

Důkaz: viz [12]

Nyní se zaměříme na druhý přístup, ve kterém budeme potřebovat určité předpoklady pro okolí bodu $z \in Z$. Množinu Z chceme ekvivalentně popsat pomocí konečné množiny omezení. Dále budeme uvažovat následující parametrickou optimalizační úlohu:

$$O(z) = \max\{g(z,t), t \in B\}. \tag{1.8}$$

Je zřejmé, že $z \in Z$ je ekvivalentní s $O(z) \leq 0$. Navíc pro $z^* \in Z$ jsou body $\bar{t}^l \in E(\bar{z})$, $l \in L$ optimální řešení úlohy (1.8). Předpokládejme, že platí následující:

Předpoklad 1.8. *Nechť $E(\bar{z}) = \{\bar{t}^1,\dots,\bar{t}^r\}$ je konečná množina, pak existuje okolí U_{z^*} bodu z^*, okolí $U_{\bar{t}^l}$ bodu $\bar{t}^l$ a spojité zobrazení $u^l : U_{z^*} \to U_{\bar{t}^l} \bigcap B$ takové, že*

(i) $u^l(z^*) = \bar{t}^l$, $l = 1,\dots,r$,

(ii) pro každé $z \in U_{z^*}$ a $l = 1, \ldots, r$ je $u^l(z)$ jediné lokální řešení úlohy (1.8) v $U_{\bar{t}^l} \bigcap B$.

Lemma 1.9. *Nechť je dáno $z^* \in Z$ a nechť platí předpoklad 1.8, potom existuje okolí $\bar{U}$ bodu z^* takové, že pro každé $z \in \bar{U}$ máme $z \in Z$ tehdy a jen tehdy, když [12]*

$$G^l(z) = g(z, u^l(z)) \leq 0, \quad l = 1, \ldots, r.$$

Nyní definujeme lokálně redukovanou úlohu:

$$P_{red}(\bar{z}) = \max\{F(z) | G^l(z) \leq 0, l = 1, \ldots, r, z \in \bar{U}\}. \tag{1.9}$$

Věta 1.10. *Nechť $\bar{U}$ je okolí bodu $z^* \in Z$ jako v lemmatu 1.9, pak je bod $\tilde{z} \in \bar{U}$ lokálně optimální pro úlohu (1.1) tehdy a jen tehdy, pokud je optimální pro úlohu (1.9) [12].*

Lze dokázat, že pro lineární úlohu (1.1) jsou funkce $G^l(z)$, $l = 1, \ldots, r$, konvexní v $\bar{U}$ [13]. Avšak díky předpokladu 1.8 můžeme (alespoň lokálně) popsat přípustnou množinu konečným počtem konvexních omezení. Tato omezení jsou nicméně definovaná pouze implicitně jakožto řešení parametrické optimizační úlohy. Toto ukazuje obtížnost formulování dané lineární semi-infinitní úlohy jako obyčejnou úlohu konvexního programování. Věta 1.10 je však prostředek, jak přenést teorii a metody konečného programování na semi-infinitní programování [12].

Nyní budeme studovat případy, které nám poskytnou více informací o funkcích $u^l(z)$, $G^l(z)$.

Definice 1.11. *Nechť $G \subset R^m$ je otevřená množina, f je funkce z R^m do R, pak řekneme, že f je třídy C^p, $p \geq 1$, jestliže f má na G spojité parciální derivace řádu p. Dále budeme značit $f \in C^p(G)$.*

Předpoklad 1.12. *Předpokládejme, že množina $B \subset R^m$ je kompaktní a že*

$$B = \{t | h^j(t) \leq 0, j \in M\},$$

kde $|M| < \infty$, $h^j \in C^2(R^m)$ a $j \in M$. Nechť navíc v každém bodě množiny B platí omezující podmínka lineární nezávislosti: pro každé $t \in B$ jsou vektory

$$h^j_t(t), \quad j \in M_t = \{i | h^i(t) = 0\}$$

lineárně nezávislé.

Poznamenejme, že dále může být předpoklad 1.12 vynechán. Avšak v aplikacích je množina B často definována s ohledem na předpoklad 1.12 [12], proto jsme pro zjednodušení tento předpoklad zvolili. Díky tomuto popisu množiny B dostaneme okamžitě následující výsledek [12].

Lemma 1.13. *Nechť je dáno $z^* \in R^n$, předpokládejme, že platí předpoklad 1.12. Pro každé $\bar{t}^l \in E(\bar{z})$ z (1.2) definujeme*

$$M^l = \{j | h^j(\bar{t}^l) = 0\}$$

a Lagrangeovu funkci úlohy (1.8) vzhledem k $\bar{t}^l$:

$$\mathcal{L}^l(t, \alpha^l) = g(z^*, t) - \sum_{j \in M^l} \alpha^l_j h^j(t).$$

Potom existují jednoznačně určené multiplikátory $\bar{\alpha}^l_j \geq 0$ takové, že

$$\frac{\partial \mathcal{L}^l}{\partial t}(\bar{t}^l, \bar{\alpha}^l) = 0.$$

1.3 Podmínky optimality druhého řádu

Předpoklad 1.14. *Nechť $g \in C^2(R^n \times R^m)$, platí předpoklad 1.12 pro každé $\bar{t}^l \in E(\bar{z})$ a platí následující postačující podmínky druhého řádu pro $\bar{t}^l$, které je ostrým lokálním maximem úlohy (1.8):*

$\frac{\partial \mathcal{L}^l}{\partial t}(\bar{t}^l, \bar{\alpha}^l)$ je negativně definitní na tečném prostoru

$$T^l = \{\eta | \bar{\alpha}^l_j \eta^T h^j_t(\bar{t}^l) = 0, j \in M^l\}. \tag{1.10}$$

Definice 1.15. *Řekneme, že úloha (1.1) splňuje podmínky silné komplementarity, jestliže platí, že buď $g(z,t) = 0$ a $\mu > 0$, nebo $g(z,t) < 0$ a $\mu = 0$ pro $\forall t \in B$, kde μ je nezáporná míra na B.*

Předpoklad 1.16. *Nechť navíc k předpokladu 1.14 platí pro všechna $\bar{t} \in E(\bar{z})$ podmínky silné komplementarity (1.15).*

Nyní můžeme zformulovat následující větu:

Věta 1.17. *(a) Předpokládejme, že platí předpoklad 1.16, pak předpoklad 1.8 platí se spojitě diferencovatelnými funkcemi $T^l : U_{z^*} \to U_{\bar{t}^l} \bigcap B$. Navíc existuje spojitě diferencovatelná funkce $\alpha^l : U_{z^*} \to R$ taková, že předpoklad 1.16 platí pro všechny trojice z, $u^l(z)$, $\alpha^l(z)$, $z \in U_{z^*}$. Derivace funkcí $\frac{\partial T^l}{\partial z} = u^l(z)$ a $\frac{\partial \alpha^l}{\partial z} = \alpha^l(z)$ jsou jednoznačně určené vztahem*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^l}{\partial t^2}(t^l, \alpha^l) & H^l_t(t^l) \\ (H^l_t(t^l))^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^l}{\partial z} \\ \frac{\partial \alpha^l}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g^l}{\partial t \partial z}(z, u^l) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

kde

$$H^l_t(t^l) = (h^j_t(t^l))_{j \in M^l} \in R^{m \times |M^l|}. \tag{1.12}$$

(b) Omezení $G^l(z) = g(z, u^l(z))$ redukované úlohy jsou dvakrát spojitě diferencovatelné na U_{z^*} a jsou dány vztahy

$$\frac{\partial G^l}{\partial z}(z) = \frac{\partial g}{\partial z}(z, u^l(z)) \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial^2 G^l}{\partial z^2}(z) = \frac{\partial^2 g^l}{\partial z^2}(z, u^l(z)) - (\frac{\partial u^l}{\partial z}(z))^T \frac{\partial^2 \mathcal{L}^l}{\partial t^2}(u^l(z), \alpha^l(z)) \frac{\partial u^l}{\partial z}(z) \tag{1.14}$$

Důkaz části (a) užívá větu o implicitní funkci, rovnice (1.13) a (1.14) jsou odvozené ze vztahu (1.11) [12].

Nejlehčí cesta k získání podmínek optimality druhého řádu pro naši úlohu semi-infinitního programování (1.1) je předpokládání platnosti předpokladu 1.16 a aplikování známých podmínek optimality z konečného programování na redukovanou úlohu (1.9) s dvakrát spojitě diferencovatelnými omezeními $G^l(z)$.

Definice 1.18. *Nechť μ je funkce s definičním oborem D_μ. Nosičem funkce μ budeme nazývat podmnožinu definičního oboru D_μ, na které je funkce μ nenulová. Takovou množinu budeme nadále značit supp(μ).*

Definice 1.19. *Nechť B je podmnožina R^m. Nechť $M^+(B)$ značí prostor všech nezáporných borelovských měr na množině B. Pak $R^{(B)}_+ = \{\mu \in M^+(B) | supp(\mu)$ je konečná$\}$.*

Na základě podmínek pro konečné programování odvozených v [10] byla dokázána následující věta v [11].

Věta 1.20. *Nechť platí předpoklad 1.16 pro $z^* \in Z$. Potom platí následující*

(a) *(nutná podmínka) Jestliže z^* řeší úlohu (1.1), potom pro každé $\xi \in \mathcal{K}$,*

$$\mathcal{K} = \{\xi | \xi^T \frac{\partial F}{\partial z} \geq 0, \xi^T \frac{\partial g^l}{\partial z} \leq 0, l \in L\},$$

existují $\mu_0(\xi) \geq 0$, $\mu(\xi) \in R_+^{(B)}$, $\sup(\mu(\xi)) \in E(\bar{z})[(\mu_0(\xi), \mu(\xi)) \neq (0,0)]$ taková, že pro

$$L(z, \mu_0, \mu, t) = \mu_0 F(z) - \sum_{l \in L} \mu_l g(z, t^l) \tag{1.15}$$

platí

$$\frac{\partial L}{\partial z}(z^*, \mu_0(\xi), \mu(\xi), \bar{t}) = 0 \tag{1.16}$$

a

$$q(\xi) = \xi^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(z^*, \mu_0(\xi), \mu(\xi), \bar{t})\xi \tag{1.17}$$

$$+ \sum_{l \in L} \mu_l(\xi)(\bar{t}_z^l \xi)^T \frac{\partial^2 \mathcal{L}^l}{\partial t^2}(\bar{t}^l, \alpha(z^*))(\bar{t}_z^l \xi) \leq 0. \tag{1.18}$$

(b) *(postačující podmínka) Pokud pro každé $\xi \in \mathcal{K}$ existují $\mu_0(\xi)$ a $\mu(\xi)$ jako v (a) s (1.16) a pro $\xi \neq 0$ platí $q(\xi) < 0$, potom z^* je ostré lokální řešení úlohy (1.1) (t.j. existuje okolí $\bar{U}$ bodu z^* takové, že pro $z \in \bar{U} \bigcap Z$ platí $F(z) < F(z^*)$).*

(c) *(silná postačující podmínka) Část (b) je speciálně splněna, pokud*

- *jsou $\frac{\partial g^l}{\partial z}$, $l \in L$ lineárně nezávislé,*
- *existují (jednoznačně určené) $\mu_l \geq 0$ takové, že Kuhn-Tuckerova podmínka (1.16) platí pro $\mu_0(\xi) = 1$ a $\mu(\xi) = \mu$,*
- *$q(\xi) < 0$ platí (pro $\mu_0(\xi) = 1$ a $\mu(\xi) = \mu$) pro všechna $\xi \in \mathcal{T}$,*

$$\mathcal{T} = \{\xi | \mu_l (\frac{\partial g^l}{\partial z}^T \xi = 0, l \in L\}.$$

Výše zmíněné dva výrazy pro $q(\xi)$ si zaslouží interpretaci. První výraz, $\xi^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\xi$, je výraz pro podmínku druhého řádu, kterou bychom získali pro diskrétní úlohu $(P(\bar{E}))$ definovanou v (1.7) [12]. Druhý výraz,

$$s(\xi) = \sum_{l \in L} \mu_l(\xi)(\bar{t}_z^l \xi)^T \frac{\partial^2 \mathcal{L}^l}{\partial t^2}(\bar{t}_z^l \xi), \tag{1.19}$$

zohledňuje semi-infinitivní strukturu, neboť je generován posunem aktivních omezení $u^l(z)$ jakožto funkce z [12]. Proto budeme nadále $s(\xi)$ nazývat výraz posunu. Tento termín se poprvé objevil v [44]. Následující příklad ukazuje význam tohoto výrazu v podmínkách optimality.

Příklad 1.21. *Uvažujme úlohu maximalizace*

$$\begin{aligned} F(z) &= (z_2+5)^2 + z_1^2 \\ g(z,t) &= 2tz_1 + z_2 - t^2 \le 0, \quad t \in [-1,1]. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Přípustná množina Z je popsána jako $g(z,t) \le 0$. Je zřejmé, že $z^* = [0,0]$ je lokální řešení s

$$E(z^*) = \{0\}.$$

Získáme

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} | \xi_1 \in R \right\}.$$

Pro zjištění hodnot $\mu_0(\xi)$ a $\mu_1(\xi)$ spočítáme výraz (1.16):

$$\frac{\partial L}{\partial z_1} = 2z_1\mu_0(\xi) - 2t\mu_1(\xi) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_2} = 2\mu_0(\xi)z_2 + 10\mu_0(\xi) - \mu_1(\xi) = 0$$

Jestliže dosadíme za $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ a $t = 0$, vyjde nám, že $\mu_0(\xi) = 1$ a $\mu_1(\xi) = 10$. Tudíž pro $\xi \in \mathcal{K}$ dostáváme

$$\xi^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\xi = 2\xi_1^2, \quad s(\xi) = -20\xi_1^2, \quad q(\xi) = -18\xi_1^2,$$

což podle věty 1.20 znamená, že $z^* = 0$ je skutečné ostré lokální řešení [12].

Poznamenejme, že $\xi^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\xi = 2\xi_1^2$ je pozitivně definitní na $\mathcal{K}$. To znamená, že pokud by v podmínce druhého řádu byl použit pouze tento výraz, pak by

- postačující podmínka nemohla nikdy platit,
- nutná podmínka mohla být pouze triviální ($\xi^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\xi \le 0$ pro $\xi = 0$).

Nyní se podíváme na to, že ve výrazu $s(\xi)$ v (1.19) se využívá pouze derivace ve směru

$$Dt^l(z^*, \xi).$$

Existence této derivace je zajištěna předpokladem 1.14. Tudíž se zdá, že pro derivování podmínky druhého řádu by mohlo stačit nahradit předpoklad 1.16 předpokladem 1.14 a výraz $\overline{t}_z^l\xi$ pomocí $Dt^l(z^*, \xi)$. Potíží ovšem je, že pro omezující funkce $G^l(z) = g(z, u^l(z))$ v úloze (1.9) nebudeme mít spojité druhé derivace, ale jen existenci druhých derivací ve směru [45].

2. Dualita v semi-infinitivním programování

Nyní se zaměříme na problém duality. Neboť se velmi často v aplikacích využívá lineárního semi-infinitního programování, budeme se v této kapitole věnovat dualitě v lineární úloze semi-infinitního programování.

2.1 Základní duální úloha v prostoru konečných řad

Nejdříve je potřeba definovat primární úlohu. Nechť B je libovolná podmnožina R^m, nechť je dáno zobrazení $a : B \to R^n$, funkce $b : B \to R$ a vektor $c \in R^n$. Potom je primární úlohou nalézt $v(P) = \sup \{c^T z | z \in Z^P\}$, kde $Z^P = \{z \in R^n | a^T(t)z \leq b(t)$ pro všechna $t \in B\}$.

V obecném případě je nutné, aby buď B byla kompaktní množina, anebo a, b byly spojité [12].

V případě, že máme konečnou množinu $B = \{t_1, \ldots, t_r\}$, spočívá duální úloha (D) v určení infima ze $\sum_{i=1}^{r} b(t_i)\mu(t_i)$ na množině nezáporných multiplikátorů $\mu(t_i)$, kde $c = \sum_{i=1}^{r} a(t_i)\mu(t_i)$. [12]

Analogicky můžeme definovat duální úlohu na prostoru konečných řad následovně. Nalézt $v(D) = \inf \{\int_B b(t) d\mu(t) | \mu \in Z^D\}$, kde $Z^D = \{\mu \in R_+^{(B)} | \int_B a(t) d\mu(t) = c\}$. [12]

Po jednoduchém výpočtu zjistíme, že pro $\mu \in Z^D$ a $z \in Z^P$ platí

$$c^T z \leq \int_B b(t) d\mu(t).$$

V tomto případě je $\mu(t)$ diskrétní míra, proto lze předešlou rovnost zapsat ve tvaru

$$c^T z \leq \sum_{t \in B} b(t)\mu(t).$$

Z toho vyplývá, že $v(P) \leq v(D)$ a $v(P) \leq \sum_{t \in B} b(t)\mu(t)$ pro každé $\mu \in Z^D$. Duální úlohu D můžeme interpretovat následovně: minimizovat horní hranici $\sum_{t \in B} b(t)\mu(t)$ pro $v(P)$ na množině Z^D. [12] Hlavní otázkou v teorii duality je, zda může být tato horní hranice nalezena ostře, tedy zda $v(P) = v(D)$.

V další části kapitoly budou hrát důležitou roli následující kužely:

$$\begin{aligned} M_n &= co(\{a(t) | t \in B\}) \qquad (2.1) \\ &= \{w = \sum_{t \in B} a(t)\mu(t) | \mu \in R_+^{(B)}\} \subset R \\ M_{n+1} &= co\left(\left\{\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} | t \in B\right\}\right) \subset R^{n+1}. \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Lemma 2.1.

(i) $Z^D \neq \varnothing$ *jen tehdy, když* $c \in M_n$,

(ii) $v(D) = v(D_G)$*, kde* (D_G) *je "geometrický duál", t.j.*

$$(D_G): \qquad v(D_G) = \ inf \left\{ d | \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in M_{n+1} \right\}.$$

Důkaz: viz [12]

Tato pozorování poukazují na blízký vztah semi-infinitního programování k teorii momentů a poskytují možnost k zacházení s důležitou třídou aplikací v semi-infinitním programování. Dále předpokládejme, že platí následující předpoklad.

Předpoklad 2.2. *Množina* B *je kompaktní,* a*,* b *jsou spojité na* B*.*

Jestliže platí předpoklad (2.2), pak dostaneme s pomocí Rogosinského věty [38] následující reprezentaci kuželů M_n a M_{n+1}.

Lemma 2.3. *Předpokládejme, že platí předpoklad (2.2). Pak platí*

$$\begin{aligned} M_n &= \left\{ w = \int_B a(t)\ d\mu(t) | \mu \in M^+(B) \right\}, \\ M_{n+1} &= \left\{ w = \int_B \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}\ d\mu(t) | \mu \in M^+(B) \right\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Důkaz: viz [12]

Nyní můžeme zformulovat duální úlohu na prostoru měr:

$$\begin{aligned} (D_M): \qquad v(D_M) &= \inf \left\{ \int_B b(t)\ d\mu(t) | \mu \in Z^{D_M} \right\} \\ Z^{D_M} &= \left\{ \mu \in M^+(B) | \int_B a(t)\ d\mu(t) = c \right\}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že zatímco v úloze (D) jsme uvažovali pouze diskrétní míry, v úloze (D_M) už toto omezení není. Lemma (2.1) a lemma (2.3) nám dávají následující lemma.

Lemma 2.4. *Předpokládejme, že platí předpoklad (2.2). Potom*

(i) $v(D_G) = v(D_M) = v(D)$,

(ii) každé řešení μ^* *úlohy* (D) *řeší úlohu* (D_M) *a jestliže je* (D_M) *řešitelná, pak existuje* $\mu^* \in R_+^{(B)} \subset M^+(B)$*, které řeší* (D) *i* (D_M)*.*

Na základě lemmatu (2.4) stačí ve většině aplikací uvažovat pouze duál (D) na prostoru konečných řad.

2.2 Superkonzistentní případ pro primární nebo duální úlohu

Tuto kapitolu začneme postačující podmínkou pro $v(P) = v(D)$.

Definice 2.5. *Nechť* $M \subset R^m$*. Řekneme, že* $int(M)$ *je vnitřek množiny* M*, jestliže* $int(M)$ *je největší otevřená množina, kterou množina* M *obsahuje.*

Věta 2.6.

(i) Předpokládejme, že $v(D)$ je konečné a $c \in int(M_n)$. Potom $v(D) = v(P)$.

(ii) Předpokládejme, že $v(P)$ je konečná a M_{n+1} je uzavřená množina. Potom $v(D) = v(P)$ a (D) je řešitelná.

Důkaz: viz [12]

Poznamenejme, že věta 2.6(ii) nám dává $v(\tilde{D}_G) = v(P)$ (pro konečnou $v(P)$), kde úloha $\tilde{D}_G$ je alternativní geometrický duál:

$$(\tilde{D}_G): \qquad \text{Nalézt } v(\tilde{D}_G) = \inf \left\{ d | \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in cl(M_{n+1}) \right\}$$

Podmínka $c \in \text{int}(M_n)$ zesiluje požadavek, aby (D) bylo konzistentní, tedy $c \in M_n$.

Definice 2.7. *(D) budeme nazývat superkonzistentní, jestliže $c \in int(M_n)$.*

Díky superkonzistenci získáváme určitou stabilitu: Jestliže předpoklad 2.2 platí, můžeme trochu změnit "data"a, b, c, aniž bychom ztratili superconzistenci nebo silnou dualitu $v(P) = v(D)$. Podobné zesílení konzistence platí také v případě, že M_{n+1} je uzavřený. [12]

Definice 2.8. *(P) budeme nazývat superkonzistentní, jestliže platí předpoklad 2.2 a jestliže existuje $z^* \in Z^P$ takové, že $a^T(t)z^* \leq b(t)$.*

Superkonzistence je opět stabilní v tom smyslu, že platí i v případě malých perturbací "dat"a, b, c.

Lemma 2.9. *Předpokládejme, že platí předpoklad 2.2. Jestliže je úloha (P) superkonzistentní, pak M_{n+1} je uzavřený.*

Důkaz: viz [12]

Z tohoto lemmatu vyplývá následující symetrický výsledek pro duální úlohy (P) a (D).

Věta 2.10. *Nechť platí předpoklad 2.2. Jestliže některá z úloh (P) nebo (D) je konečná a superkonzistentní, potom druhá je řešitelná a platí $v(P) = v(D)$.*

Následující věta 2.12 ukazuje, že implikace superkonzistence mezi úlohami (P) a (D) je naprosto symetrická.

Definice 2.11. *P-úrovňové množiny a D-úrovňové množiny (na úrovni κ) jsou po řadě definované*

$$\begin{aligned} L_{\geq}(Z^P, c, \kappa) &= \{z \in Z^P | c^T z \geq \kappa\}, \\ L_{\leq}(Z^D, b, \kappa) &= \left\{\mu \in Z^D | \sum b(t)\mu(t) \leq \kappa \right\}, \end{aligned}$$

Pro dané $Z \subset X$, kde X je normovaný prostor, definujeme kužel $O^+(Z)$ následovně

$$O^+(Z) = \{d \in X | z + \lambda d \in Z \text{ pro každé } \in Z, \lambda \geq 0\}.$$

Věta 2.12.

(a) Jestliže (P) je konzistentní, pak je ekvivalentní

(a_1) všechny P-úrovňové množiny jsou omezené,

(a_2) existuje $\epsilon > 0$ takové, že pro každé c_1, $||c - c_1|| < \epsilon$, máme $sup\{c_1^T z | z \in Z^P\} < \infty$,

(a_3) $O^+(L_{\geq}(Z^P, c, \kappa)) = \{0\}$ pro všechny úrovně κ,

(a_4) (D) je superkonzistentní.

(b) Jestliže (D) je konzistentní, pak je ekvivalentní

(b_1) všechny D-úrovňové množiny jsou omezené (tedy pro libovolné κ existuje ρ_κ takové, že $sup_t|\mu(t)| \leq \rho_\kappa < \infty$ pro všechna $\mu \in L_{\leq}(Z^D, c, \kappa)$),

(b_2) existuje $\epsilon > 0$ takové, že pro každé b_1, $||b - b_1||_\infty < \epsilon$ máme $inf\{\sum b_1(t)\mu(t) | \mu \in Z^D\} > -\infty$,

(b_3) $O^+(L_{\leq}(Z^D, b, \kappa)) = \{0\}$ pro všechny úrovně κ,

(b_4) (P) je superkonzistentní.

Důkaz: viz [12]
Poznamenejme, že (a_1) implikuje kompaktnost p-úrovňových množin. [12]

Příklad 2.13. *Pro množinu indexů B vybereme elipsu v R^2 následovně*

$$B = \{t | 2(t_1 - 0,5)^2 + t_2^2 = 0,5\}.$$

Pro

$$F(z) = z \qquad a \qquad Z^P = \{z | z(t_2 - t_1) \leq 1 - t_1, (t_1, t_2) \in B\} \subset R$$

máme úlohu

$$v(P) = \ sup\{z | z \in Z^P\}.$$

V tomto případě má duální úloha tvar

$$\begin{aligned} v(D) &= inf\left\{\sum_{t \in B}(1 - t_1)\mu(t) | \mu \in Z^D\right\} \\ Z^D &= \left\{\mu \in R_+^{(B)} | \sum_{t \in B}(t_2 - t_1)\mu(t) = 1\right\}. \end{aligned}$$

Lze ukázat, že $Z^P = [0, 2]$, přičemž $z^* = 2$ je primární řešení a $v(P) = 2$. $E(\bar{z})$ obsahuje pouze bod $\bar{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Pro $z \in (0, 2)$ dostáváme

$$z(t_2 - t_1) < 1 - t_1, \qquad t \in B,$$

což dokazuje primární superkonzistenci. Jestliže užijeme větu 2.10 pro (D) získáme $v(P) = v(D) = 2$. Nyní lze snadno dopočítat optimální míru $\bar{\mu}$ z podmínky komplementarity, podle níž musí platit

$$\sum_{t\in B}(t_2 - t_1)\mu(t) - 1 = 0,$$

a tudíž vychází

$$\mu(\bar{t}) = \begin{cases} 3, & \text{jestliže } t = \bar{t}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{2.4}$$

2.3 Perfektní dualita

Obecně jsou (P) a (D) v perfektní dualitě, právě když (i) $v(P) = v(D)$ (i v případě nekonečných hodnot) nebo (ii) $v(P) = -\infty$ a $v(D) = \infty$. V konečném lineárním programování jsou (P) i (D) řešitelné, jestliže je hodnota $v(P)$ nebo $v(D)$ konečná. V semi-infinitním programování toto neplatí. Nicméně podle věty 2.6(ii) je uzavřenost M_{n+1} dostatečná pro perfektní dualitu a řešitelnost pro (D).

Jestliže budeme místo M_{n+1} uvažovat kužel

$$MH_{n+1} = co(M_{n+1} \cup \{e_{n+1}\}),$$

kde $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)^T \in R^{n+1}$, je možná mnohem lepší analýza. Můžeme vypozorovat, že MH_{n+1} je uzavřený, jestliže je uzavřený M_{n+1}, ale opačná implikace už neplatí. Například pro $M_2 = co\{(-t^2, t)^T | t \in [0,1]\}$ není hraniční bod $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ v M_2, tedy M_2 není uzavřený. Ale s $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ v rozšířeném kuželu MH_2 vidíme, že MH_2 je uzavřený.

Definice 2.14. *Řekneme, že množiny vektorů $\{a^i | i \in I\}$ a $\{a^j | j \in J\}$ jsou pozitivně ekvivalentní, jestliže*

$$co(\{a^i | i \in I\}) = co(\{a^j | j \in J\}). \tag{2.5}$$

Poznamenejme, že výraz (2.5) nám říká, že libovolné a^i, respektive a^j je nezápornou kombinací $\{a^j | j \in J\}$, respektive $\{a^i | i \in I\}$.

Věta 2.15. *Jestliže je (P) konzistentní, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Pro libovolné $c \in R^n$ jsou (P) a (D) v perfektní dualitě a (D) je řešitelná, pokud $v(D)$ je konečné.

(ii) MH_{n+1} je uzavřený.

(iii) Množina koeficientů

$$\left\{ \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} | t \in B \right\}$$

má pozitivně ekvivalentní množinu.

Důkaz: viz [4]

Věta 2.16. *Předpokládejme, že množina vektorů $\{a^i, i \in I\}$ splňuje podmínku $a^i x_0 > 0$ pro každé $i \in I$ a vektor x_0. Potom je kužel $co(\{a^i, i \in I\})$ uzavřený, právě když má množina $\{a^i, i \in I\}$ pozitivně ekvivalentní množinu $\{a^j | j \in J\}$, pro kterou platí $a^j \neq 0$ pro každé $j \in J$ a která je kompaktní.*

V následujícím příkladu si ukážeme, že podmínka (i) ve větě 2.15 může být porušena, jestliže MH_{n+1} není uzavřený.

Příklad 2.17. *Nechť $B = [0,1]$ a $Z^P = \{z | (-t)z \leq t^2, t \in B\} = \{z | z \geq 0\}$. Pro $c \in R$, $c > 0$ dostáváme $v(P) = v(D) = \infty$, zatímco pro $c \leq 0$ máme $v(P) = v(D) = 0$. Tudíž máme perfektní dualitu, ale protože (D) není řešitelná pro $c > 0$, vidíme, že podmínka (i) není splněna.*

Jiná postačující podmínka pro perfektní dualitu, ale tentokrát zaručující primární (P) řešitelnost v případě, že $v(P)$ je konečné, je pro konvexní kužel

$$O^+(L_{\geq}(Z^P, c, 0)) = \{z | a(t)^T z \leq 0 \text{ pro } t \in B, c^T z \geq 0\}. \tag{2.6}$$

Tento kužel musí být přímkou nebo degenerovanou přímkou popsanou v bodě (a_3) ve větě 2.12.

2.4 Neperfektní dualita v lineárním semi-infinitním programování

V konečném lineárním programování představil Charnes rozšíření nearchimédovského komutativního tělesa do matematického programování. Získal tak "kompletní regularizaci"páru primární/duální úlohy, takže jsou oba problémy řešitelné se stejnou hodnotou účelové funkce [14], to jest případ perfektní duality s řešitelností. Konstrukce obsahuje pomocné proměnné a přidání dalších omezení. Vyšetřováním primárního a duálního řešení kompletně regularizované úlohy můžeme zjistit, která ze čtyř navzájem se vylučujících a zcela pokrývajících způsobů duality nastává pro původní pár úloh konečného lineárního programování (P) a (D):

(přípustná, přípustná)
(přípustná a neomezená, nepřípustná)
(nepřípustná, přípustná a neomezená)
(nepřípustná, nepřípustná)

Tyto čtyři možnosti lze vyjádřit také tak, že primární a duální úloha mají buď obě přípustné řešení, nebo má jedna z nich přípustné neomezené řešení a druhá nemá přípustné řešení nebo nemá přípustné řešení ani jedna z úloh.

V lineárním semi-infinitním programování musí být způsoby duality rozšířeny. Jak je uvedeno v [7] existuje nyní 11 navzájem se vylučujících a zcela pokrývajících způsobů, které mohou nastat z případně možných 121. Stále je otevřenou otázkou, zda existuje kompletní regularizace lineárního semi-infinitního programování, která by charakterizovala přípustné způsoby duality.

Teorie klasifikace byla rozšířena na konvexní úlohy na lineárních topologických prostorech majících vlastnosti Hahn-Banachova rozšíření, viz [15], [18], [19].

Potřeba více způsobů duality má příčinu v "duální mezeře", která vyvstává, když se liší hodnoty primární a duální úlohy. Případ duální mezery ilustrujeme na příkladě od W. W. E. Wetterlinga. Příklad obsahuje nekonvexní polynom čtvrtého řádu, jenž má infimum nula.

Příklad 2.18. *Pro reálný parametr y definujeme následující funkci:*

$$f(t_1, t_2, y) = (t_1t_2 - 1)^2 + (1 - y)t_2^2 \quad \text{pro } t = (t_1, t_2) \in R^2. \tag{2.7}$$

Pak $inf\{f(t_1, t_2, y)|t \in R^2\} = 0$ *kdykoliv* $y \leq 1$. *Polynom o dvou proměných (2.7) nás vede k problému sedlové hodnoty, kde vnitřní minimalizace je globální minimalizací funkce* $f(t_1, t_2, y)$:

$$\begin{aligned} & sup\{G(y)|y \in R\}, \ kde \\ G(y) = \ & inf\{f(t_1, t_2, y)|t \in R^2\} \end{aligned}$$

definuje konkávní funkci na R danou předpisem

$$G(y) = \{0 \text{ pokud } y \leq 1 \text{ nebo } -\infty \text{ jinak}\}.$$

Ekvivalentní úloha semi-infinitního programování je

$$\begin{aligned} v(P) &= sup\ z_1, \quad z_1, z_2 \in R \text{ za podmínek} \\ z_1 + z_2t_2^2 &\leq (t_1t_2 - 1)^2 + t_2^2 \text{ pro } t \in R^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Poznamenejme, že v obou případech (P) *ve své podstatě zahrnuje dvou-dimenzionální vnitřní minimalizaci, pokud* $z_2 < 1$. *Z toho okamžitě vyplývá, že* $v(P) = 0$. (P) *má duál*

$$\begin{aligned} v(D) = \ inf \sum\{(t_1t_2 - 1)^2 + t_2^2\}\mu(t_1, t_2) \text{ pro } \mu \in R_+^{(R^2)} \text{ za podmínek} \\ \sum t_2^2\mu(t_1, t_2) = 0 \quad a \quad \sum \mu(t_1, t_2) = 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Vidíme, že duální úloha omezila minimalizaci funkce $f(t_1, t_2, 0)$ *na jedno-dimenzionální podprostor* $t_2 = 0$ *s následným nárůstem hodnoty funkce na 1, konkrétně* $v(D) = 1$.

Tento příklad ukazuje, že duální mezera může nastat v případě, že duální úloha omezí více-dimenzionální problém na méně-dimenzionální.

Jedna z možností, jak vyloučit duální mezeru, je rozšířit rozsah proměnných v lineární úloze s nerovnostmi. Místo abychom vyžadovali (z_1, z_2) jakožto reálná čísla, připustíme (z_1, z_2) na uspořádaném rozšíření reálných čísel, například polynomy v neurčitých proměnných. V tomto rozšíření nebude potřeba zavádět dělení. Jako příklad může posloužit následující definice:

Definice 2.19. *Nechť* $R[\Theta]$ *označuje polynomický okruh sestávající z polynomů s neznámou* Θ *konečného stupně s reálnými koeficienty. Nearchimédovské uspořádání vychází z požadavku* $r < \Theta$ *pro všechna* $r \in R$. *Polynom* $p(\Theta) = \sum_{i=0}^{l} r_i\Theta^i$ *je kladný (záporný), jestliže koeficient nejvyšší mocniny* Θ *s nenulovým koeficientem je kladný (záporný).*

Nyní můžeme ukázat použití $R[\Theta]$ na odstranění duální mezery ve Wetterlingově příkladě. Nejdříve přepíšeme (P) vzhledem k rozšířeným proměnným:

$$\begin{aligned} v(P_\Theta) &= \sup \tau, \quad \tau \in R, \quad z_1(\Theta), z_2(\Theta) \in R[\Theta] \text{ za podmínek} \\ \tau - z_1(\Theta) &\le 0 \\ z_1(\Theta) + z_2(\Theta)t_2^2 &\le (t_1t_2 - 1)^2 + t_2^2 \text{ pro všechna } t \in R^2. \end{aligned}$$

Při výpočtu (P_Θ) zjistíme, že je řešitelná a $v(P_\Theta) = 1$, například pro $\tau^* = 1$ je $z_1^*(\Theta) = 1$ a $z_2^*(\Theta) = -\Theta$.

Je zajímavé, že řešení pomocí Θ-polynomů (viz výše) poskytuje algebraické prostředky pro vyjádření omezených přípustných řešení původních lineárních nerovností v reálných proměnných. Toto důležité propojení provedeme po představení myšlenky asymptotické konzistence pro primární i duální úlohu. [12]

Definice 2.20. *Řekneme, že úloha (P) je asymptoticky přípustná, když každý konečný subsystém z $a(t)^Tz \le b(t)$, pro každé $t \in B$, je přípustný. Posloupnost konečných řad $\{\mu^{(n)}\}_n$ nazýváme asymptoticky přípustnou pro úlohu (D), když každé $\mu^{(n)} \ge 0$ a*

$$\lim_n \sum a(t)\mu^{(n)}(t) = c.$$

Úloha (D) je asymptoticky konzistentní, jestliže má asymptoticky přípustné řešení.

V následující větě ukážeme vztah mezi asymptotickou konzistencí (P) a Θ-polynomiálním řešením.

Věta 2.21. *Předpokládejme, že (P) je asymptoticky konzistentní. Potom (P) má přípustný bod $z(\Theta) \in (R[\Theta])^n$, kde každá složka $z_i(\Theta)$, $i = 1, \dots, n$ je polynom stupně nejvýše n s neznámou Θ.*

Důkaz: viz [12]

Konečný systém $z \in R^n$, $z_1 \ge k$, $-kz_1 + z_2 \ge 0, \dots, -kz_{n-1} + z_n \ge 0$ pro $k = 1, 2, \dots$, ukazuje, že budou nutné polynomy plného stupně n. [12]

Hlavní aplikací věty 2.21 je konstrukce asymptotického rozšíření (P_Θ) úlohy (P), jak již bylo znázorněno v příkladě výše:

$$\begin{gathered} v(P_\Theta) = \sup \tau, \qquad \tau \in R, z(\Theta) \in (R[\Theta])^n, \qquad \text{za podmínek} \\ \tau - c^Tz(\Theta) \le 0 \quad \text{a} \quad a(t)^Tz(\Theta) \le b(t) \quad \text{pro } t \in B. \end{gathered}$$

Poznamenejme, že τ musí být reálné, takže supremum počítáme pouze na reálných číslech. Přípustným řešením jsou dvojice $(\tau, z(\Theta)) \in R \times (R[\Theta])^n$.

Věta 2.22. *Úlohy (P_Θ) a (D) jsou v perfektní dualitě.*

Důkaz: viz [12]

Ve větě 2.12 jsme viděli, že za podmínky $O^+(L_\ge(Z^P, c, \kappa)) = \{0\}$ dostáváme dobrou stabilitu. Jestliže tuto podmínku značně zesílíme na $O^+(Z^P) = \{0\}$, tedy $z = 0$ kdykoliv $a(t)^Tz \le 0$ pro každé $t \in B$, pak lze ukázat, že (P_Θ) je konzistentní, právě když je konzistentní (P), a v tomto případě $v(P_\Theta) = v(P)$. Předpoklad, že (P) je konzistentní, nezávisí na vektoru c. [12]

Nyní si ukážeme důležitý výsledek o nekonzistetntním systému lineárních nerovností. který je však asymptoticky konzistentní.

Věta 2.23. *Nechť je $z \in R^n$, $a(t)^T z \leq b(t)$ pro $t \in B$ nekonzistentní, ale je asymptoticky konzistentní. Pak existuje $c \in R^n$ takové, že pro libovolné kladné celé číslo n existuje konečná podmnožina B_n množiny B taková, že pro $a(t)^T z \leq b(t)$, $t \in B_n$ platí $c^T z \leq -n$.*

Důkaz: viz [1]
Vektory c ve větě 2.23 se nazývají vektory sestupu (díky minimalizaci spojené s duální úlohou (D)). Obecně je množina vektorů sestupu konvexní kužel neobsahující nulu, který je obsažen v kuželu M_n a který obsahuje relativní vnitřek kuželu M_n. [12]

Příklad 2.24. *Pro představu množiny vektorů sestupu zde uvedeme následující příklad systému lineárních nerovností. Tento systém představuje hypograf konkávní funkce $log(z_1)$ pro $z_1 > 0$:*

$$-z_1 \frac{1}{t} + z_2 \leq \ log(t) - 1 \qquad pro\ všechna\ t > 0.$$

Přidejme k tomuto systému ještě nerovnost $z_1 \leq 0$. Výsledný systém je nyní nekonzistentní, ale libovolný subsystém je konzistentní. V tomto případě vypadá kužel M_n pro $n = 2$ následovně

$$co\left(\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix} | t > 0\right\} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

tedy $M_2 = \{(x_1, x_2)|x_2 \geq 0\} \backslash \{(x_1, 0)|x_1 < 0\}$. Nyní toto ověříme pro libovolné $c_1 \in R$ a $c_2 > 0$, (c_1, c_2) je vektor sestupu.

Nechť je dáno libovolné přirozené číslo n, pak existuje $\epsilon > 0$ takové, že (i) $c_2(log(\epsilon) - 1) < -n$ a (ii) $c_1 + \frac{1}{\epsilon} c_2 > 0$. Uvažujme subsystém dvou nerovností pro $t = \epsilon$:

$$\begin{aligned} -\frac{z_1}{\epsilon} + z_2 &\leq \ log(\epsilon) - 1, \\ z_1 &\leq \ 0. \end{aligned}$$

Vynásobením první rovnice hodnotou c_2, druhé rovnice výrazem $c_1 + \frac{c_2}{\epsilon}$ a jejich sečtením dostaneme nerovnosti

$$c_1 z_1 + c_2 z_2 \leq c_2(\ log(\epsilon) - 1) \leq -n.$$

Toto ukazuje, že množina vektorů sestupu má tvar $\{(x_1, x_2)|x_2 > 0\}$.

Dříve jsme zmiňovali perturbovanou úlohu $(\tilde{D_G})$ úlohy (D), konkrétně

$$\begin{aligned} v(\tilde{D}_G) &= \ inf\, w, \quad w \in R \quad za\ podmínek \\ \begin{pmatrix} c \\ w \end{pmatrix} &\in \ cl(M_{n+1}) \end{aligned}$$

Než abychom však uvažovali náhodné cesty v M_{n+1} konvergující k $\begin{pmatrix} c \\ w \end{pmatrix}$, stačí následovat směr určený vektory sestupu pro částečně homogenizovaný systém, jako je následující:

$$
\begin{aligned}
a(t)^T z + z_{n+1} b(t) &\leq 0 \quad \text{pro všechna } t \in B, \\
z_{n+1} &\leq 0, \\
c^T z + z_{n+1} w &\leq 1,
\end{aligned}
$$

kde $w \in R$ je pevně daný parametr. [12] Úlohu $(\tilde{D_G})$ můžeme nyní přepsat pomocí směru sestupu následujícím způsobem:

$$
\begin{aligned}
&v(\tilde{D}) = \ \mathit{inf}\, w \quad \text{za podmínek } w \in R \quad a \\
&\begin{pmatrix} v \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \in R^n \times R, \quad \text{které splňují} \\
&\text{pro libovolné } \epsilon > 0 \text{ existuje } \mu \in R_+^{(B)} \text{ takové, že} \\
&\sum a(t)\mu(t) = c + \epsilon v \quad a \quad \sum b(t)\mu(t) \leq w + \epsilon v_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Přípustné body jsou nyní trojice

$$
\begin{pmatrix} w \\ v \\ v_{n+1} \end{pmatrix}
$$

ležící v $R \times R^n \times R$. Vzhledem k našemu zkoumání vektorů sestupu výše je podvektor

$$
V = \begin{pmatrix} v \\ v_{n+1} \end{pmatrix}
$$

přípustného bodu vektorem sestupu. Úlohy (P) a (D) jsou tedy v perfektní dualitě. [12]

3. Aplikace semi-infinitního programování na eficienci portfolia

V této kapitole se zaměříme na praktickou aplikaci semi-infinitního programování. Každý investor má k dispozici určitou množinu investičních příležitostí, přičemž výnosy jednotlivých investic jsou náhodné veličiny. K porovnání jednotlivých investic je vhodná metoda maximalizace očekávaného užitku představená v J. von Neumann a O. Morgenstern [29]. Dle této metody lze preference investorů reprezentovat užitkovou funkcí.

Definice 3.1. *Řekneme, že u je užitková funkce, jestliže je neklesající, spojitá a je definována na nějakém intervalu $I \subset R$. [34]*

Užitkovou funkci obvykle neznáme, proto nelze spočítat očekávaný užitek a investice podle očekávaného užitku seřadit. Máme však částečnou informaci o užitkové funkci a je možné tedy alespoň částečně uspořádat investice. Proto budeme pracovat se stochastickou dominancí, která vychází z částečné znalosti užitkové funkce a dává nám částečné uspořádání.

3.1 Stochastická dominance

Definice 3.2. *[34] Nechť u je užitková funkce definovaná na intervalu $I \subset R$ a W je současný majetek investora. Uvažujme přípustnou investiční příležitost reprezentovanou náhodnou veličinou X s rozdělením P, t. j. střední hodnoty $Eu(W + X)$ a EX jsou konečné. Jestliže pro každou hodnotu investorova majetku W a každou přípustnou náhodnou investici X platí:*

$$\begin{aligned} Eu(W+X) &< u(W+EX) \text{ řekneme, že je investor averzní k riziku,} \\ Eu(W+X) &= u(W+EX) \text{ řekneme, že je investor neutrální k riziku,} \\ Eu(W+X) &> u(W+EX) \text{ řekneme, že investor vyhledává riziko.} \end{aligned}$$

V této práci se zaměříme na investory, kteří jsou buď averzní k riziku nebo rizikově neutrální. Charakterizovat je budeme pomocí neklesající konkávní užitkové funkce $u \in U$. Nyní si zavedeme pojem stochastické dominance druhého řádu a eficienci náhodné veličiny. [24]

Definice 3.3. *Nechť X_1 a X_2 jsou dvě náhodné veličiny s distribučními funkcemi $F_1(x)$, a $F_2(x)$. Řekneme, že X_1 dominuje X_2 vzhledem k stochastické dominanci druhého řádu, neboli $X_1 \succ_{SSD} X_2$, pokud platí*

$$E_{F_1} u(X) - E_{F_2} u(X) \geq 0$$

pro každou užitkovou funkci $u \in U$, pro kterou střední hodnoty $E_{F_1} u(X)$ a $E_{F_2} u(X)$ existují, a pokud pro alespoň jednu užitkovou funkci $u \in U$ je nerovnost splněna ostře.

Definice 3.4. *Nechť Λ je uvažovaná množina náhodných veličin. Řekneme že, náhodná veličina $X_2 \in \Lambda$ je SSD neeficientní, jestliže existuje náhodná veličina $X_1 \in \Lambda$ taková, že $X_1 \succ_{SSD} X_2$. V opačném případě řekneme, že X_2 je SSD eficientní.*

Pokud si vezmeme jako příklad náhodné veličiny výnos investice, pak investici zahrneme do eficientní množiny, pokud neexistuje jiná investice, která by ji dominovala. Eficientní množinu tedy tvoří takové investice, které nejsou dominovány žádnou jinou investicí. Naopak neeficientní množina zahrnuje investice, pro které existuje alespoň jedna další investice z eficientní množiny, která je dominuje. Dochází tak k rozdělení množiny všech investic na dvě navzájem disjunktní množiny, přičemž platí, že každá investice je buď eficientní nebo neeficientní. [28]

3.2 Diskrétní případ

V této podkapitole se zaměříme na případ, kdy mají výnosy všech aktiv v portfoliu diskrétní rozdělení. Existuje několik různých způsobů testování eficience portfolia při stochastické dominanci. Post [33] popsal algoritmus, který pracuje s primární úlohou a vede na úlohu lineárního programování. Jiný přístup představili Ruszczynski a Vanderbei v článku [39], v tomto případě se jedná o parametrickou lineární úlohu.

Avšak zde se budeme věnovat testu využívajícímu vztah mezi stochastickou dominancí druhého řádu a podmíněnou hodnotou v riziku (CVaR) [30]. Tento test byl představen v Kopa a Chovanec [17]. Výsledkem testu je dominující portfolio, které je zároveň eficientní ve smyslu stochastické dominance druhého řádu.

Nechť X je náhodná veličina popisující výnos aktiva. Potom Y představuje náhodnou ztrátu, jestliže $Y = -X$. Dále budeme předpokládat, že $EY < \infty$.

Definice 3.5. *Nechť Y je náhodná veličina s distribuční funkcí $F_Y(y)$ a $\alpha \in (0,1)$. Potom hodnotu v riziku (VaR) definujeme jako α-kvantil distribuční funkce $F_Y(y)$:*

$$VaR_\alpha(Y) = F_Y^{(-1)}(\alpha)$$

Definice 3.6. *Nechť Y je náhodná veličina s distribuční funkcí $F_Y(y)$ a $\alpha \in (0,1)$. Potom podmíněnou hodnotu v riziku (CVaR) definujeme jako řešení optimizační úlohy:*

$$CVaR_\alpha(Y) = \min_{a \in R} \left\{ a + \frac{1}{1-\alpha} E[Y-a]^+ \right\}, \tag{3.1}$$

kde $[x]^+ = \max(x, 0)$.

Definici CVaR jsme převzali z [31]. Řešení úlohy (3.1) vždy existuje a jedním z řešení je $VaR_\alpha(Y)$. [31] Uryasev a Rockafellar [43] ukázali, že CVaR lze také definovat jako podmíněnou střední hodnotu:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) = E(Y | Y > VaR_\alpha(Y)).$$

Lze ukázat, že platí následující ekvivalence [17]:

$$X_1 \succeq_{SSD} X_2 \Leftrightarrow \mathrm{CVaR}_\alpha(Y_1) \leq \mathrm{CVaR}_\alpha(Y_2)$$

Nadále budeme předpokládat, že náhodná veličina Y je diskrétní náhodná veličina a může nabývat hodnot $y^t, t = 1, \ldots, T$ se stejnými pravděpodobnostmi. Nyní můžeme psát [17]

$$\begin{aligned}\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) &= \min_{a,w_t} a + \frac{1}{(1-\alpha)T}\sum_{t=1}^{T} w_t \\ s.t. \quad w_t &\geq y_t - a \\ w_t &\geq 0.\end{aligned}$$

Věta 3.7. *Nechť $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_N)^T$ značí výnosy N aktiv a nechť T značí stejně pravděpodobné scénáře. Výnos aktiv pro různé scénáře budeme značit*

$$X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x^1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x^T} \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{x^t} = (x_1^t, \ldots, x_N^t)$ je t-tý řádek matice X. Nechť $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)^T$ je vektor vah. Potom je množina přípustných portfolií $\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \in R^N | \boldsymbol{1^T\lambda}, \lambda_n \geq 0, n = 1, \ldots, N\}$. Testované portfolio je $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_N)^T$. Nechť $\Gamma = \{0, \frac{1}{T}, \ldots, \frac{T-1}{T}\}$ a $\alpha_k \in \Gamma$. Potom uvažujme úlohu

$$D^*(\boldsymbol{\tau}) = \max_{D_k, \lambda_n, b_k} \sum_{k=0}^{T-1} D_k \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} & s.\ t. \\ CVaR_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r^T\tau}) - b_k - \frac{1}{1-\alpha_k} E\max(-\boldsymbol{r^T\lambda} - b_k, 0) &\geq D_k, k = 0, \ldots, T-1 \\ D_k &\geq 0, k = 0, \ldots, T-1 \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda.\end{aligned}$$

Jestliže je $D^*(\boldsymbol{\tau}) > 0$, potom $\boldsymbol{\tau}$ je SSD neeficientní a $\boldsymbol{r^T\lambda^*} \succ_{SSD} \boldsymbol{r^T\tau}$. Jestliže $D^*(\boldsymbol{\tau}) = 0$, potom $\boldsymbol{\tau}$ je SSD eficientní.

Důkaz: viz [17]

Úloha 3.2 se dá přepsat na úlohu lineárního programování následujícím způsobem [17]:

$$D^*(\boldsymbol{\tau}) = \max_{D_k, \lambda_n, b_k, w_k^t} \sum_{k=1}^{T} D_k \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} & \text{s. t.} \\ \mathrm{CVaR}_{\frac{k-1}{T}}(-\boldsymbol{r^T\tau}) - b_k - \frac{1}{(1-\frac{k-1}{T})T}\sum_{t=1}^{T} w_k^t &\geq D_k, k = 1, \ldots, T \\ w_k^t &\geq -\boldsymbol{x^T\lambda} - b_k, t, k = 1, \ldots, T \\ w_k^t &\geq 0, t, k = 1, \ldots, T \\ D_k &\geq 0, k = 1, \ldots, T \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda.\end{aligned}$$

3.3 Spojitý případ

V této podkapitole budeme předpokládat, že výnosy mají spojité rozdělení. Budeme vycházet z úlohy ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
\xi(\boldsymbol{\tau}) = \max d(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau}) \qquad & \\
s.t.\ \mathrm{CVaR}_\alpha(-\boldsymbol{r^T\lambda}) \ \ \leq & \ \ \mathrm{CVaR}_\alpha(-\boldsymbol{r^T\tau}), \quad \forall\alpha\in[0,1] \\
\boldsymbol{\lambda} \ \ \in & \ \ \Lambda.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

3.3.1 Dualita

Nejdříve si ukážeme, jak vypadá duální úloha k primární úloze (3.4). K tomu budeme potřebovat Lagrangeovu funkci, která má následující tvar:

$$L(\boldsymbol{\lambda},\mu) = d(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau}) + \int_0^1 \big(\ \mathrm{CVaR}_\alpha(-\boldsymbol{r^T\lambda}) - \ \mathrm{CVaR}_\alpha(-\boldsymbol{r^T\tau})\big)\, d\mu(\alpha), \tag{3.5}$$

kde μ jsou nezáporné míry na intervalu $[0,1]$. Jestliže si nyní úlohu (3.4) přepíšeme pomocí Lagrangeovy funkce (3.5), získáme úlohu ve tvaru [40]:

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} \inf_{\mu\geq 0} L(\boldsymbol{\lambda},\mu) \tag{3.6}$$

K úloze v tomto tvaru již lze najít duální úlohu:

$$\min_{\mu\geq 0} \sup_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} L(\boldsymbol{\lambda},\mu) \tag{3.7}$$

3.3.2 Normální rozdělení

V případě, že sdružené rozdělení výnosů jednotlivých aktiv je vícerozměrné normální rozdělení $N(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$, je rozdělení celého portfolia s vahami $\boldsymbol{\lambda}$ jednorozměrné normální $N(\boldsymbol{\lambda^T\mu}, \boldsymbol{\lambda^T\Sigma\lambda})$. Navíc pro varianční matici platí: $V=\Sigma$. CVaR má za předpokladu $X\sim N(0,1)$ tvar [21]

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}, \tag{3.8}$$

kde $q_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ přičemž $\Phi(x)$ značí distribuční funkci rozdělení $N(0,1)$. Dále si vyjádříme ztrátu $Y\sim N(-\boldsymbol{\lambda^T\mu}, \boldsymbol{\lambda^T\Sigma\lambda})$ za pomoci $X\sim N(0,1)$:

$$Y = -\boldsymbol{\lambda^T\mu} + \sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T V\boldsymbol{\lambda}}\ X. \tag{3.9}$$

Nyní již můžeme za pomoci (3.8) a (3.9) vyjádřit

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) = -\boldsymbol{\lambda^T\mu} + \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T V\boldsymbol{\lambda}}. \tag{3.10}$$

Po dosazení výrazu (3.10) do naší úlohy (3.4) získáme úlohu

$$
\begin{aligned}
\xi(\boldsymbol{\tau}) = \max d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \qquad\qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.11)\\
\text{s. t.} \qquad\qquad & \\
-\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} + \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T V \boldsymbol{\lambda}} \;\; & \leq \;\; -\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} + \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}}\\
\forall\alpha \;\; & \in \;\; [0,1],\\
\boldsymbol{\lambda} \;\; & \in \;\; \Lambda.
\end{aligned}
$$

Lemma 3.8. *Úloha (3.11) je ekvivalnetní s úlohou*

$$
\begin{aligned}
\xi(\boldsymbol{\tau}) \;\; & = \;\; \max d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \qquad\qquad (3.12)\\
s.t. \quad \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} \;\; & \geq \;\; \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu}\\
\boldsymbol{\lambda}^T V \boldsymbol{\lambda} \;\; & \leq \;\; \boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}\\
\boldsymbol{\lambda} \;\; & \in \;\; \Lambda.
\end{aligned}
$$

Důkaz. *Nechť platí*

$$
-\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} + \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T V \boldsymbol{\lambda}} \leq -\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} + \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}}, \forall\alpha \in [0,1].
$$

Potom pro $\alpha \to 0_+$ *platí, že* $q_\alpha \to -\infty$, *a tedy* $\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\} \to 0$. *Tudíž máme* $-\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} \leq -\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu}$, *neboli* $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu}$. *Nyní si upravíme nerovnici do tvaru:*

$$
-\frac{\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu}(1-\alpha)}{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}} + \frac{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T V \boldsymbol{\lambda}}}{\sqrt{2\pi}} \leq -\frac{\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu}(1-\alpha)}{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}} + \frac{\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}}}{\sqrt{2\pi}}, \forall\alpha \in [0,1].
$$

Pro $\alpha \to 1_-$ *chceme ukázat, že platí*

$$
\frac{1-\alpha}{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}} \to 0. \tag{3.13}
$$

Vidíme, že čitatel i jmenovatel zlomku v (3.13) jde k nule, pokud $\alpha \to 1_-$. *Použijeme tedy L'Hopitalovo pravidlo:*

$$
\frac{-1}{-\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\} q_\alpha q'_\alpha}. \tag{3.14}
$$

K vyjádření q'_α *použijeme větu o derivaci inverzní funkce, neboť* $q_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$. *Po krátkém výpočtu vyjde*

$$
q'_\alpha = \frac{1}{\phi(q_\alpha)},
$$

kde $\phi(x)$ *značí hustotu rozdělení* $N(0,1)$. *Po dosazení do (3.14) a rozepsání* $\phi(q_\alpha)$ *vyjde*

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi} q_\alpha}.
$$

Tento výraz již zřejmě jde k nule pro $\alpha \to 1_-$. Nyní tedy dostáváme nerovnost $\boldsymbol{\lambda}^T V \boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}$.

Druhou implikaci dokážeme sporem. Nechť platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\mu} &\geq \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda}^T V \boldsymbol{\lambda} &\leq \boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}. \end{aligned}$$

Pak nemůže platit

$$-\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\mu} + \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}} \sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T V \boldsymbol{\lambda}} > -\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\mu} + \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}} \sqrt{\boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}}, \forall \alpha \in [0,1],$$

neboť si můžeme tuto nerovnost upravit do tvaru

$$-\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\mu} + \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}} \sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T V \boldsymbol{\lambda}} - \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}} \sqrt{\boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}} > 0, \forall \alpha \in [0,1],$$

$$(\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\mu}) + \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T V \boldsymbol{\lambda}} - \sqrt{\boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}}\right) > 0, \forall \alpha \in [0,1].$$

Došli jsme ke sporu, neboť podle předpokladů jsou obě závorky nekladné a výraz

$$\frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}$$

nabývá pro $\alpha \in [0,1]$ hodnoty v intervalu $[0,\infty]$.

Poznamenejme, že z tvaru podmínek v úloze (3.12) je vidět, že vhodná volba funkce $d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})$ je

$$d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \;=\; [\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\mu}] + [\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}} V \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} V \boldsymbol{\lambda}],$$

neboť řešení úlohy λ^* je potom SSD eficientní portfolio.

3.3.3 Studentovo rozdělení

Studentovo rozdělení náleží do třídy eliptických rozdělení a je definováno následujícím způsobem [20]

Definice 3.9. *Řekneme, že vektor $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_p\}^T$ má p-rozměrné studentovo rozdělení s ν stupni volnosti, vektorem středních hodnot $\boldsymbol{\mu}$ a korelační maticí R (a odpovídající kovarianční maticí Σ), jestliže má hustotu*

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+p}{2})}{(\pi\nu)^{\frac{p}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2}) |R|^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{1}{\nu} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T R^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right]^{-\frac{\nu+p}{2}}. \tag{3.15}$$

Jestliže je sdružené rozdělení výnosů jednotlivých aktiv vícerozměrné studentovo rozdělení s parametry $\boldsymbol{\mu}$, ν, Σ, potom má celé portfolio s vahami $\boldsymbol{\lambda}$ jednorozměrné studentovo rozdělení s parametry $\boldsymbol{\lambda^T\mu}$, ν, $\boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda}$. Za předpokladu studentova rozdělení s alespoň třemi stupni volnosti má CVaR následující tvar [21]

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) = -\boldsymbol{\lambda^T\mu} + \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}\left(1+\frac{t^2_{\alpha,\nu}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(1-\alpha)(\nu-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda}}, \tag{3.16}$$

kde $t^2_{\alpha,\nu}$ značí α-kvantil studentova rozdělení s ν stupni volnosti.

Po dosazení výrazu (3.16) do úlohy (3.4) získáme úlohu ve tvaru

$$\begin{aligned} &\xi(\boldsymbol{\tau}) = \max d(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau}) \qquad (3.17)\\ \text{s. t.} \quad & -\boldsymbol{\lambda^T\mu} + \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}\left(1+\frac{t^2_{\alpha,\nu}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(1-\alpha)(\nu-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda}} \leq \\ & \leq -\boldsymbol{\tau^T\mu} + \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}\left(1+\frac{t^2_{\alpha,\nu}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(1-\alpha)(\nu-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T\Sigma\boldsymbol{\tau}} \quad \forall\alpha\in[0,1],\\ & \boldsymbol{\lambda}\in\Lambda. \end{aligned}$$

Lemma 3.10. *Úloha (3.17) je ekvivalentní s úlohou*

$$\begin{aligned} \xi(\boldsymbol{\tau}) &= \max d(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau}) \\ s.t.\ \boldsymbol{\lambda^T\mu} &\geq \boldsymbol{\tau^T\mu} \\ \boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda} &\leq \boldsymbol{\tau}^T\Sigma\boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Důkaz. *Nechť platí*

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\lambda^T\mu} + \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}\left(1+\frac{t^2_{\alpha,\nu}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(1-\alpha)(\nu-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda}} \leq \\ \leq -\boldsymbol{\tau^T\mu} + \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}\left(1+\frac{t^2_{\alpha,\nu}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(1-\alpha)(\nu-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T\Sigma\boldsymbol{\tau}} \quad \forall\alpha\in[0,1]. \end{aligned}$$

Potom pro $\alpha \to 0_+$ platí, že $t_{\alpha,\nu} \to -\infty$, a tudíž $\left(1+\frac{t^2_{\alpha,\nu}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} \to 0$. Získali jsme tak podmínku $-\boldsymbol{\lambda^T\mu} \leq -\boldsymbol{\tau^T\mu}$, neboli $\boldsymbol{\lambda^T\mu} \geq \boldsymbol{\tau^T\mu}$. Nyní si přepíšeme nerovnici do tvaru:

$$\begin{aligned} -\frac{\boldsymbol{\lambda^T\mu}(1-\alpha)}{\left(1+\frac{t^2_{\alpha,\nu}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}} + \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(\nu-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda}} \leq \\ \leq -\frac{\boldsymbol{\tau^T\mu}(1-\alpha)}{\left(1+\frac{t^2_{\alpha,\nu}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}} + \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(\nu-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T\Sigma\boldsymbol{\tau}} \quad \forall\alpha\in[0,1]. \end{aligned}$$

Potřebujeme ukázat, že pro $\alpha \to 1_-$ platí:

$$\frac{(1-\alpha)}{\left(1+\frac{t_{\alpha,\nu}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}} \to 0. \tag{3.19}$$

Vidíme, že čitatel i jmenovatel zlomku v (3.19) jde k nule, pokud $\alpha \to 1_-$. Použijeme tedy L'Hopitalovo pravidlo:

$$\frac{-1}{\frac{\nu-1}{\nu}\left(1+\frac{t_{\alpha,\nu}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} t_{\alpha,\nu}\; t'_{\alpha,\nu}}. \tag{3.20}$$

K vyjádření $t'_{\alpha,\nu}$ použijeme větu o derivaci inverzní funkce, neboť $t_{\alpha,\nu} = \Psi^{-1}(\alpha)$, přičemž $\Psi(x)$ značí distribuční funkci studentova rozdělení s ν stupni volnosti. Po krátkém výpočtu vyjde

$$t'_{\alpha,\nu} = \frac{1}{\psi(t_{\alpha,\nu})},$$

kde

$$\psi(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\nu\pi}}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

značí hustotu studentova rozdělení s ν stupni volnosti. Po dosazení do (3.20) a rozepsání $\psi(t_{\alpha,\nu})$ vyjde

$$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\frac{\nu-1}{\nu}\sqrt{\nu\pi}t_{\alpha,\nu}}.$$

Tento výraz již zřejmě jde k nule pro $\alpha \to 1_-$. Nyní tedy dostáváme nerovnost $\boldsymbol{\lambda}^T V\boldsymbol{\lambda} \le \boldsymbol{\tau}^T V\boldsymbol{\tau}$.

Druhou implikaci dokážeme sporem. Nechť platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} &\ge \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda} &\le \boldsymbol{\tau}^T\Sigma\boldsymbol{\tau}. \end{aligned}$$

Pak nemůže platit

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} + \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}\left(1+\frac{t_{\alpha,\nu}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(1-\alpha)(\nu-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda}} > \\ > -\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} + \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}\left(1+\frac{t_{\alpha,\nu}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(1-\alpha)(\nu-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T\Sigma\boldsymbol{\tau}} \quad \forall\alpha \in [0,1], \end{aligned}$$

neboť si můžeme tuto nerovnost upravit do tvaru

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} + \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}\left(1+\frac{t_{\alpha,\nu}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(1-\alpha)(\nu-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda}} - \\ -\frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}\left(1+\frac{t_{\alpha,\nu}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(1-\alpha)(\nu-2)\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T\Sigma\boldsymbol{\tau}} > 0 \quad \forall\alpha \in [0,1], \end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu}) + \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}\left(1+\frac{t_{\alpha,\nu}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(1-\alpha)(\nu-2)\sqrt{\pi}}(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda}} - \sqrt{\boldsymbol{\tau}^T\Sigma\boldsymbol{\tau}}) > 0 \quad \forall\alpha \in [0,1].$$

Došli jsme ke sporu, neboť podle předpokladů jsou obě závorky nekladné a výraz

$$\frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu}\left(1+\frac{t_{\alpha,\nu}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-2}{2})(1-\alpha)(\nu-2)\sqrt{\pi}}$$

nabývá pro $\alpha \in [0,1]$ a $\nu > 2$ hodnoty v intervalu $[0,\infty]$.

Poznamenejme, že z tvaru podmínek v úloze (3.18) je vidět, že vhodná volba funkce $d(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau})$ je stejně jako v případě normálního rozdělení

$$d(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau}) \;=\; [\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu}] + [\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\Sigma\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\Sigma\boldsymbol{\lambda}],$$

neboť řešení úlohy λ^* je potom SSD eficientní portfolio.

3.3.4 Obecné eliptické rozdělení

Normální i studentovo rozdělení patří do třídy eliptických rozdělení. V této podkapitole se proto pokusíme odvodit tvar úlohy (3.4) pro obecné eliptické rozdělení. K tomu budeme potřebovat nejprve definici a některé vlastnosti eliptických rozdělení, které lze nalézt v článku [23].

Definice 3.11. *Řekneme, že vektor $\boldsymbol{X}$ má mnohorozměrné eliptické rozdělení, $\boldsymbol{X} \sim E_p(\boldsymbol{\mu},\Sigma,\psi)$, pokud lze jeho charakteristickou funkci vyjádřit jako:*

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \exp\left\{i\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\mu}\right\}\psi\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T\Sigma\boldsymbol{t}\right),$$

pro nějaký vektor $\boldsymbol{\mu} \in R^p$, pozitivně definitní matici $\Sigma \in R^{p\times p}$ a funkci ψ: $R \to R$. Funkce ψ musí být volena tak, aby funkce $\varphi_{\boldsymbol{X}}$ splňovala požadavky kladené na charakteristickou funkci.

V následující větě si uvedeme důležitou vlastnost eliptických rozdělení.

Věta 3.12. *Nechť $\boldsymbol{X}$ má mnohorozměrné eliptické rozdělení $E_p(\boldsymbol{\mu},\Sigma,\psi)$, $A \in R^{s\times p}$, $\boldsymbol{b} \in R^s$. Potom platí:*

$$A\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b} \sim E_1(A\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}, A\Sigma A^T, \psi).$$

Jestliže má portfolio aktiv mnohorozměrné eliptické rozdělení $E_p(\boldsymbol{\mu},\Sigma,\psi)$, potom podle předchozí věty má portfolio s vahami $\boldsymbol{\lambda}$ jednorozměrné eliptické rozdělení $E_1(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda}, \psi)$. Proto se budeme nadále zabývat pouze jednorozměrným eliptickým rozdělením.

Věta 3.13. *Nechť $X \sim E_1(\mu, \sigma^2, \psi)$ a nechť $g(x)$ je nezáporná funkce na intervalu $[0, \infty)$ splňující*

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} g(x)dx < \infty.$$

Pak hustota náhodné veličiny X má tvar

$$f_X(x) = \frac{c}{\sigma} g\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right),$$

kde c je normalizační konstanta ve tvaru

$$c = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} g(x)dx},$$

a funkce $g(x)$ se nazývá generátor hustoty. Jestliže navíc budeme předpokládat, že

$$\int_0^\infty g(x)dx < \infty, \tag{3.21}$$

potom existuje střední hodnota EX a platí $EX = \mu$.

Protože je pro nás nadále důležitý generátor hustoty $g(x)$, budeme dále používat následující značení pro X mající jednorozměrné eliptické rozdělení: $X \sim E_1(\mu, \sigma^2, g)$.

Věta 3.14. *Nechť $X \sim E_1(\mu, \sigma^2, g)$ a $g(x)$ splňuje podmínky z předešlé věty, potom funkci*

$$G(x) = c \int_0^\infty g(u)du$$

nazveme generátor distribuční funkce.

Jestliže platí podmínka (3.21), potom je $G(\infty) < \infty$ a označíme si $\bar{G}(x) = G(\infty) - G(x)$.

Nyní již můžeme zformulovat větu, ve které uvedeme tvar CVaRu pro jednorozměrné eliptické rozdělení.

Věta 3.15. *Nechť $X \sim E_1(\mu, \sigma^2, g)$, $g(x)$ splňuje podmínky z věty (3.13), včetně podmínky (3.21), $G(x)$ je generátor distribuční funkce, $\alpha \in [0, 1]$. Potom platí*

$$CVaR_\alpha(X) = \mu + \zeta\sigma^2,$$

kde ζ lze vyjádřit následujícím výrazem

$$\zeta = \frac{\frac{1}{\sigma}\bar{G}\left(\frac{1}{2}z_\alpha^2\right)}{1-\alpha},$$

kde

$$z_\alpha = \frac{q_\alpha - \mu}{\sigma}.$$

Zbývá už jen odvodit tvar úlohy (3.4) pro ztrátovou náhodnou veličinu Y.

Lemma 3.16. *Nechť* $X \sim E_1(\boldsymbol{\lambda^T \mu}, \boldsymbol{\lambda}^T \Sigma \boldsymbol{\lambda}, g)$ *a* $Y = -X$. *Nechť dále* $g(x)$ *splňuje podmínky z věty (3.13), včetně podmínky (3.21),* $G(x)$ *je generátor distribuční funkce,* $\alpha \in [0, 1]$. *Potom je úloha*

$$\begin{aligned} \xi(\boldsymbol{\tau}) &= \max d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \\ s.\ t. \quad -\boldsymbol{\lambda^T \mu} + \zeta\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T \Sigma \boldsymbol{\lambda}} &\leq -\boldsymbol{\tau^T \mu} + \zeta\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}} \quad \forall \alpha \in [0, 1], \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda \end{aligned} \tag{3.22}$$

ekvivalentní s úlohou

$$\begin{aligned} \xi(\boldsymbol{\tau}) &= \max d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \\ s.t. \quad \boldsymbol{\lambda^T \mu} &\geq \boldsymbol{\tau^T \mu} \\ \boldsymbol{\lambda}^T \Sigma \boldsymbol{\lambda} &\leq \boldsymbol{\tau}^T \Sigma \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Důkaz. *Nechť platí*

$$-\boldsymbol{\lambda^T \mu} + \zeta\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T \Sigma \boldsymbol{\lambda}} \leq -\boldsymbol{\tau^T \mu} + \zeta\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}} \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Potom pro $\alpha \to 0_+$ *platí, že* $q_\alpha \to -\infty$, *a tudíž*

$$\zeta = \frac{\frac{1}{\sigma}\bar{G}\left(\frac{1}{2}q_\alpha^2\right)}{1-\alpha} = \frac{1}{\sigma}\left(G(\infty) - G\left(\frac{1}{2}q_\alpha^2\right)\right) = 0,$$

kde σ *je rozptyl standardního eliptického rozdělení (často nazývaného sférické rozdělení). Získali jsme tak podmínku* $-\boldsymbol{\lambda^T \mu} \leq -\boldsymbol{\tau^T \mu}$, *neboli* $\boldsymbol{\lambda^T \mu} \geq \boldsymbol{\tau^T \mu}$. *Nyní si přepíšeme nerovnici do tvaru:*

$$\frac{-\boldsymbol{\lambda^T \mu}}{\zeta} + \sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T \Sigma \boldsymbol{\lambda}} \leq \frac{-\boldsymbol{\tau^T \mu}}{\zeta} + \sqrt{\boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}}.$$

Potřebujeme ukázat, že pro $\alpha \to 1_-$ *platí:*

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{(1-\alpha)}{\frac{1}{\sigma}\bar{G}\left(\frac{1}{2}q_\alpha^2\right)} \to 0. \tag{3.24}$$

Vidíme, že čitatel i jmenovatel zlomku v (3.24) jde k nule, pokud $\alpha \to 1_-$, *neboť* $q_\alpha \to \infty$ *a* $\bar{G}\left(\frac{1}{2}q_\alpha^2\right) = G(\infty) - G\left(\frac{1}{2}q_\alpha^2\right) \to 0$. *Použijeme tedy L'Hopitalovo pravidlo:*

$$\frac{-1}{\frac{1}{\sigma}c\ g\left(\frac{1}{2}q_\alpha^2\right) q_\alpha\ q'_\alpha}. \tag{3.25}$$

K vyjádření q'_α *použijeme větu o derivaci inverzní funkce, neboť* $q_\alpha = F^{-1}(\alpha)$, *přičemž* $F(x)$ *značí distribuční funkci eliptického rozdělení. Po krátkém výpočtu vyjde*

$$q'_\alpha = \frac{1}{f(q_\alpha)},$$

kde

$$f(q_\alpha) = \frac{c}{\sigma} g\left(\frac{1}{2}q_\alpha^2\right)$$

značí hustotu eliptického rozdělení. Po dosazení do (3.25) a rozepsání $f(q_\alpha)$ vyjde

$$\frac{\frac{c}{\sigma}g\left(\frac{1}{2}q_\alpha^2\right)}{\frac{c}{\sigma}g\left(\frac{1}{2}q_\alpha^2\right)q_\alpha} = \frac{1}{q_\alpha}.$$

Tento výraz již zřejmě jde k nule pro $\alpha \to 1_-$. Nyní tedy dostáváme nerovnost $\boldsymbol{\lambda}^T V \boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{\tau}^T V \boldsymbol{\tau}$.

Druhou implikaci dokážeme sporem. Nechť platí

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\lambda^T\mu} & \geq & \boldsymbol{\tau^T\mu} \\ \boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda} & \leq & \boldsymbol{\tau}^T\Sigma\boldsymbol{\tau}. \end{array}$$

Pak nemůže platit

$$-\boldsymbol{\lambda^T\mu} + \zeta\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda}} > -\boldsymbol{\tau^T\mu} + \zeta\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T V\boldsymbol{\tau}}, \tag{3.26}$$

neboť si můžeme tuto nerovnost upravit do tvaru

$$-\boldsymbol{\lambda^T\mu} + \boldsymbol{\tau^T\mu} + \zeta\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda}} - \zeta\sqrt{\boldsymbol{\tau}^T V\boldsymbol{\tau}} > 0 \tag{3.27}$$

$$(\boldsymbol{\tau^T\mu} - \boldsymbol{\lambda^T\mu}) + \zeta(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\lambda}} - \sqrt{\boldsymbol{\tau}^T V\boldsymbol{\tau}}) > 0 \tag{3.28}$$

Došli jsme ke sporu, neboť podle předpokladů jsou obě závorky nekladné a výraz

$$\zeta = \frac{\frac{1}{\sigma}\bar{G}\left(\frac{1}{2}z_\alpha^2\right)}{1-\alpha},$$

nabývá pro $\alpha \in [0,1]$ hodnoty v intervalu $[0,\infty]$, neboť platí podmínka nezápornosti funkce $g(x)$.

Poznamenejme, že z tvaru podmínek v úloze (3.23) je vidět, že vhodná volba funkce $d(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau})$ je, stejně jako v případě normálního a studentova rozdělení,

$$d(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau}) \;=\; [\boldsymbol{\lambda^T\mu} - \boldsymbol{\tau^T\mu}] + [\boldsymbol{\tau^T}\Sigma\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\lambda^T}\Sigma\boldsymbol{\lambda}],$$

neboť řešení úlohy λ^* je potom SSD eficientní portfolio.

4. Aplikace na portfolio českých akcií

V této kapitole předvedeme aplikaci semi-infinitního programování na portfolio českých akcií. Vybírali jsme akcie, které se nacházejí ve SPADu (Systém pro podporu trhu akcií a dluhopisů) na Burze cenných papírů Praha. V současnosti SPAD představuje 15 společností. Z těchto společností jsme vybrali 9 společností, pro které jsou dostupná data ve sledovaném období od 1.4.2007 do 31.3.2012.

Vybrané společnosti jsou:

- CETV
- ČEZ
- Erste Bank
- Komerční banka
- ORCO
- Pegas Nonwovens
- Philip Morris ČR
- Telefónica O2 CR
- Unipetrol

Počítali jsme s týdenními a měsíčními relativními výnosy:

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t},$$

kde R_{t+1} je relativní výnos v čase $t+1$, P_t je cena akcie v čase t. U společností ČEZ, Erste Bank, Komerční banka, ORCO, Pegas Nonwovens, Philip Morris ČR, Telefónica O2 CR a Unipetrol jsme data dále upravili o vyplacené dividendy D_t:

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1} - P_t + D_{t+1}}{P_t}.$$

Pomocí scénářového a spojitého přístupu ověříme, zda je portfolio složené pouze z indexu PX eficientní ve smyslu SSD dominance. Pokud není, získáme jako vedlejší produkt portfolio, které index PX dominuje ve smyslu SSD.

4.1 Testování dat

V tabulce 4.1 uvádíme některé vlastnosti týdenních dat, se kterými budeme dále pracovat. V tabulce 4.2 uvádíme stejné údaje i pro měsíční výnosy.

Týdenní data výnosů mohou vykazovat časovou korelovanost. Proto jsme provedli testování časové nekorelovanosti. K testování jsme použili skupinu následujících testů [3]:

Aktivum	**Průměr**	**Sm. odch.**	**Max**	**Min**	**Šikmost**	**Špičatost**
CETV	-0.0056	0.0945	0.4123	-0.3913	-0.0816	7.5640
ČEZ	0.0010	0.0393	0.2144	-0.2290	-0.2864	12.1100
Erste Bank	-0.0018	0.0754	0.2854	-0.3270	-0.0232	6.9030
Komerční banka	0.0024	0.0525	0.1834	-0.2033	-0.1888	6.2190
ORCO	-0.0096	0.0890	0.3499	-0.4388	-0.1471	8.0090
Pegas Nonwovens	-0.0001	0.0389	0.1224	-0.3054	-1.6150	17.6100
Philip Morris ČR	0.0034	0.0358	0.1219	-0.1248	0.0744	4.6910
Telefónica O2 CR	0.0010	0.0266	0.0996	-0.1800	-0.6708	12.4800
Unipetrol	0.0002	0.0491	0.2250	-0.2668	-0.2538	9.3240
PX	-0.0013	0.0407	0.1685	-0.2625	-0.6920	10.9900

Tabulka 4.1: Tabulka ukazující hodnoty deskriptivních dat pro týdenní výnosy

Aktivum	**Průměr**	**Sm. odch.**	**Max**	**Min**	**Šikmost**	**Špičatost**
CETV	-0.0170	0.2327	0.9058	-0.5771	0.8199	6.2470
ČEZ	0.0023	0.0695	0.1530	-0.2453	-0.6369	4.9140
Erste Bank	-0.0084	0.1535	0.5491	-0.4166	0.5109	5.2230
Komerční banka	0.0089	0.0994	0.3034	-0.3267	-0.3804	6.2490
ORCO	-0.0391	0.1938	0.6828	-0.5579	0.5794	5.7420
Pegas Nonwovens	-0.0006	0.1019	0.3680	-0.3178	0.2016	6.7870
Philip Morris ČR	0.0135	0.0832	0.3006	-0.2052	0.5014	4.7130
Telefónica O2 CR	0.0018	0.0437	0.1502	-0.1262	0.3459	4.7830
Unipetrol	-0.0007	0.0863	0.2531	-0.2460	0.1195	4.1020
PX	-0.0070	0.0817	0.1866	-0.2713	-0.4769	4.6470

Tabulka 4.2: Tabulka ukazující hodnoty deskriptivních dat pro měsíční výnosy

Aktivum	T. zal.na znam. dif.	T. zal.na b. zvratu	T. zal.na Ken. koef.	T. zal.na Sp. koef.	Med. test
CETV	0.66863	0.49178	0.33961	0.37829	0.80371
ČEZ	0.23827	0.23767	0.39423	0.38463	0.38434
Erste Bank	0.83054	0.43205	0.83921	0.67848	0.70928
Komerční banka	0.28459	0.04408	0.95813	0.88186	0.53435
ORCO	0.39197	0.21958	0.27897	0.20488	0.26337
Pegas Nonwovens	0.16339	0.88266	0.37320	0.33791	0.38434
Philip Morris ČR	1.00000	0.73104	0.30029	0.21759	0.21396
Telefónica O2 CR	0.19912	0.00596	0.81930	0.77765	0.21040
Unipetrol	0.83054	0.09500	0.72918	0.64635	0.17162
PX	0.16339	0.13994	0.80169	0.99220	0.70928

Tabulka 4.3: Tabulka p-hodnot jednotlivých testů nekorelovanosti pro týdenní výnosy jednotlivých akcií a indexu PX

- test založený na znaménkách diferencí,
- test založený na bodech zvratu,
- test založený na Kendalově koeficientu,
- test založený na Spearmanově koeficientu,
- mediánový test.

K výpočtu jsme použili program TestRand, jehož autorem je Mgr. Tomáš Hanzák. Použitá testová hladina je 95% a v tabulce vždy uvádíme výsledné p-hodnoty. Nulová hypotéza časové nekorelovanosti se zamítá na hladině 0.05. Výsledky těchto testů pro týdenní výnosy jsou v tabulce 4.3. Pro měsíční výnosy jsou výsledky testů v tabulce 4.4. Z výsledků je vidět, že v případě týdenních výnosů neprošel test založený na bodu zvratu u dvou akcií. To znamená, že tyto akcie mohou vykazovat nějakou periodickou složku, avšak pro jednoduchost to v této práci zanedbáme. V případě měsíčních výnosů je menší než 0.05 jedna p-hodnota u mediánového testu, což znamená, že u výnosů této akcie může nastávat autoregresní závislost. Pro jednoduchost ovšem toto zjištění opět zanedbáme.

Dále jsme testovali, zda mají výnosy normální rozdělení, nebo studentovo rozdělení s jedním až čtyřmi stupni volnosti. Pro testování jsme využili program Mathematica a v něm zabudovaný Kolmogorův - Smirnovův test. Program Mathematica z dat automaticky odstraňuje duplicitní hodnoty. Výnosy nemají testované rozdělení, pokud je p-hodnota nižší něž 0.05, neboť testování jsme prováděli na hladině 95%. Pro všechny akcie vyšly ve všech případech p-hodnoty menší než 10^{-4}. Z toho vyplývá, že výnosy nemají ani normální, ani studentovo rozdělení.

4.2 Scénářový přístup pro týdenní výnosy

Nejdříve budeme předpokládat, že výnosy mají diskrétní rozdělení. V tomto případě máme celkem 260 scénářů v období od 1.4.2007 do 31.3.2012. V kapitole 3 jsme představili vhodnou optimalizační úlohu (3.3). Data vstupující do úlohy

Aktivum	T. zal.na znam. dif.	T. zal.na b. zvratu	T. zal.na Ken. koef.	T. zal.na Sp. koef.	Med. test
CETV	0.65472	0.34677	0.66128	0.72444	0.79105
ČEZ	0.37109	1.00000	0.51737	0.54821	0.28924
Erste Bank	0.07364	0.75381	0.91148	0.82804	0.18526
Komerční banka	0.37109	0.53050	0.49230	0.67403	0.79105
ORCO	0.65472	0.53050	0.28645	0.17644	1.00000
Pegas Nonwovens	0.65472	0.75381	0.35649	1.00000	0.42670
Philip Morris ČR	1.00000	0.20966	0.12435	0.08692	0.03404
Telefónica O2 CR	0.37109	1.00000	0.47597	0.45836	0.42670
Unipetrol	0.65472	0.11685	0.89077	0.97230	0.79105
PX	0.82160	0.09151	0.98394	0.95944	0.42670

Tabulka 4.4: Tabulka p-hodnot jednotlivých testů nekorelovanosti pro měsíční výnosy jednotlivých akcií a indexu PX

(3.3) představuje matice relativních výnosů akcií a indexu PX, které je tak vlastně desátým aktivem, a CVaR výnosů indexu PX. Matice výnosů má rozměry 260×10. Hodnoty CVaRu se napočítávají podle následujícího lemma.[17]

Lemma 4.1. *Nechť Y je náhodná veličina s diskrétním rozdělením, která nabývá scénáře y^t, $t = 1, \ldots, T$. Označme $y^{[k]}$ k-tou nejmenší hodnotu scénářů $y^1, \ldots, y^T$, tudíž platí $y^{[1]} \leq \ldots \leq y^{[T]}$. Pak pro $\alpha \in \left[\frac{k}{T}, \frac{k+1}{T}\right]$, $\alpha \neq 1$ platí*

$$CVaR_\alpha(Y) = y^{[k+1]} + \frac{1}{(1-\alpha)T} \sum_{i=k+1}^{T} (y^{[i]} - y^{[k+1]}),$$

kde , $k = 1, \ldots, T-1$ a $CVaR_1(Y) = y^{[T]}$.

V našem případě je $T = 260$, neboť musí být shodné s počtem scénářů. Úloha (3.3) je úlohou lineárního programování. K jejímu výpočtu jsme využili program GAMS. Zjistili jsme, že portfolio složené pouze z indexu PX je neeficientní. Portfolio dominující index PX ve smyslu SSD má následující složení (společnost; váha v portfoliu):

- CETV; 0
- ČEZ; 0.119
- Erste Bank; 0
- Komerční banka; 0
- ORCO; 0
- Pegas Nonwovens; 0.002
- Philip Morris ČR; 0.256
- Telefónica O2 CR; 0.622
- Unipetrol; 0

Hodnota	PX	DP
Průměrný výnos	-0.0013	0.0016
Průměrný CVaR	0.0376	0.0195
1. CVaR	0.0013	-0.0016
2. CVaR	0.0020	-0.0012
3. CVaR	0.0026	-0.0009
4. CVaR	0.0031	-0.0006
5. CVaR	0.0035	-0.0004
6. CVaR	0.0038	-0.0002
7. CVaR	0.0042	0.0000
8. CVaR	0.0045	0.0002
9. CVaR	0.0048	0.0004
10. CVaR	0.0051	0.0006
11. CVaR	0.0054	0.0008
12. CVaR	0.0057	0.0009
13. CVaR	0.0059	0.0011

Tabulka 4.5: Tabulka porovnává vybrané hodnoty týdenních výnosů indexu PX a výnosů dominujícího portfolia (DP) ve smyslu SSD za předpokladu diskrétního rozdělení; k-tý CVaR je napočítaný pro $\alpha = \frac{k}{T}$ podle lemmatu 4.1

V tabulce 4.5 uvádíme porovnání průměrných výnosů, průměrného CVaRu a prvních 13 hodnot CVaRu napočítávaného podle lemmatu 4.1. Vybrali jsme prvních 13 hodnot CVaRu, neboť se jedná o hodnoty CVaRu pro $\alpha \leq 0.05$. Z tabulky je patrné, že dominující portfolio má vyšší výnos a zároveň nižší riziko ve smyslu CVaRu.

Dále jsme výnosy upravili o výnos bezrizikového aktiva. Za bezrizikové aktivum jsme vybrali sazbu PRIBOR. Protože jsme nalezli data pouze k měsíčním výnosům, upravili jsme je na týdenní pomocí vztahu (i když v některých případech není tento vztah zcela přesný)

$$i_t = 4\left((1+i_m)^{\frac{1}{4}} - 1\right),$$

kde i_t představuje týdenní sazbu PRIBORu a i_m měsíční sazbu PRIBORu. Vypočítali jsme nadvýnosy akcií a nadvýnos indexu PX. Matici nadvýnosů jsme rozšířili o sloupeček nul představující nadvýnos PRIBORu. CVaR referenčního portfolia (indexu PX) jsme počítali opět podle lemmatu 4.1. I v tomto případě je portfolio složené pouze z indexu PX neeficientní. Lepší strategie ve smyslu SSD dominance je investovat do PRIBORu, neboť nadvýnosy indexu PX mají zápornou střední hodnotu.

4.3 Scénářový přístup pro měsíční výnosy

V této kapitole budeme opět předpokládat, že výnosy mají diskrétní rozdělení, ale zaměříme se na měsíční výnosy. V tomto případě máme celkem 59 scénářů v období od 1.4.2007 do 31.3.2012. I nyní budeme zkoumat eficienci výnosů indexu PX. Výpočet je analogický jako v předešlé kapitole. Matice výnosů má rozměr 59×10 a $T = 59$. Po výpočtu v programu GAMS jsme zjistili, že portfolio složené

Hodnota	**PX**	**DP**
Průměrný výnos	-0.0070	0.0038
Průměrný CVaR	0.0797	0.0074
1. CVaR	0.0070	-0.0038
2. CVaR	0.0103	-0.0014
3. CVaR	0.0136	0.0004
4. CVaR	0.0168	0.0019
5. CVaR	0.0191	0.0032
6. CVaR	0.0211	0.0043
7. CVaR	0.0228	0.0054
8. CVaR	0.0245	0.0064
9. CVaR	0.0262	0.0074
10. CVaR	0.0278	0.0083
11. CVaR	0.0294	0.0092
12. CVaR	0.0311	0.0101
13. CVaR	0.0327	0.0110

Tabulka 4.6: Tabulka porovnává vybrané hodnoty měsíčních výnosů indexu PX a výnosů dominujícího portfolia (DP) ve smyslu SSD za předpokladu diskrétního rozdělení; k-tý CVaR je napočítaný pro $\alpha = \frac{k}{T}$ podle lemmatu 4.1

pouze z indexu PX je neeficientní. Portfolio dominující index PX ve smyslu SSD má následující složení (společnost; váha v portfoliu):

- CETV; 0
- ČEZ; 0
- Erste Bank; 0
- Komerční banka; 0
- ORCO; 0
- Pegas Nonwovens; 0
- Philip Morris ČR; 0.192
- Telefónica O2 CR; 0.721
- Unipetrol; 0.087

V tabulce 4.6 uvádíme porovnání průměrných výnosů, průměrného CVaRu a prvních 13 hodnot CVaRu napočítávaného podle lemmatu 4.1. Z tabulky je patrné, že dominující portfolio má vyšší výnos a zároveň nižší riziko ve smyslu CVaRu i pro měsíční výnosy.

Dále jsme výnosy upravili o výnos bezrizikového aktiva. Za bezrizikové aktivum jsme vybrali i pro měsíční výnosy sazbu PRIBOR. Nadvýnosy indexu PX mají opět zápornou střední hodnotu, proto také v tomto případě je portfolio složené pouze z indexu PX neeficientní a lepší strategie ve smyslu SSD dominance je investovat do PRIBORu.

4.4 Spojitý přístup pro týdenní výnosy

Nyní budeme předpokládat, že výnosy mají spojité rozdělení. Podle zjištění v kapitole 3 vede předpoklad normálního, studentova i obecného eliptického rozdělení vždy na úlohu nelineární optimalizace (3.12), která se ovšem liší v matici V. Pro různá eliptická rozdělení se příslušná matice získá z odhadnuté matice přenásobením konstantou [21]. Neboť je úloha (3.12) invariantní vůči vynásobení konstantou, vyjde shodné řešení pro předpoklad libovolného eliptického rozdělení.

V případě předpokladu libovolného eliptického rozdělení výnosů odhadneme z dat střední hodnotu μ průměrem hodnot a varianční matici V výběrovým rozptylem. Výslednou nelineární optimalizační úlohu řešíme opět v programu GAMS. V tomto případě vychází, že portfolio složené pouze z indexu PX je neeficientní. Portfolio dominující index PX ve smyslu SSD má následující složení (společnost; váha v portfoliu):

- CETV; 0
- ČEZ; 0
- Erste Bank; 0
- Komerční banka; 0.068
- ORCO; 0
- Pegas Nonwovens; 0
- Philip Morris ČR; 0.932
- Telefónica O2 CR; 0
- Unipetrol; 0

V tabulce 4.7 uvádíme porovnání průměrných výnosů, průměrného CVaRu a prvních 13 hodnot CVaRu napočítávaného podle lemmatu 4.1. Z tabulky je patrné, že dominující portfolio má pro týdenní výnosy i za předpokladu jakéhokoliv eliptického rozdělení vyšší výnos a zároveň nižší riziko ve smyslu CVaRu.

Nyní budeme opět uvažovat možnost investování do bezrizikového aktiva, které bude opět představovat sazba PRIBOR. Stejně jako v případě diskrétního rozdělení si nejdříve napočítáme nadvýnosy akcií i indexu PX. Portfolio složené pouze z indexu PX je i v tomto případě neeficientní. Lepší strategie ve smyslu SSD dominance je investovat do PRIBORu, neboť výnosy indexu PX mají zápornou střední hodnotu.

4.5 Spojitý přístup pro měsíční výnosy

Budeme předpokládat, že měsíční výnosy mají libovolné eliptické rozdělení. Postup je analogický jako v kapitole pro týdenní výnosy. Portfolio složené pouze z indexu PX je i tentokrát neeficientní. Portfolio dominující index PX ve smyslu SSD má následující složení (společnost; váha v portfoliu):

Hodnota	**PX**	**DP**
Průměrný výnos	-0.0013	0.0033
Průměrný CVaR	0.0376	0.0274
1. CVaR	0.0013	-0.0033
2. CVaR	0.0020	-0.0028
3. CVaR	0.0026	-0.0024
4. CVaR	0.0031	-0.0020
5. CVaR	0.0035	-0.0017
6. CVaR	0.0038	-0.0013
7. CVaR	0.0042	-0.0010
8. CVaR	0.0045	-0.0006
9. CVaR	0.0048	-0.0003
10. CVaR	0.0051	0.0000
11. CVaR	0.0054	0.0003
12. CVaR	0.0057	0.0006
13. CVaR	0.0059	0.0008

Tabulka 4.7: Tabulka porovnává vybrané hodnoty týdenních výnosů indexu PX a výnosů dominujícího portfolia (DP) ve smyslu SSD za předpokladu normálního rozdělení; k-tý CVaR je napočítaný pro $\alpha = \frac{k}{T}$ podle lemmatu 4.1

- CETV; 0
- ČEZ; 0
- Erste Bank; 0
- Komerční banka; 0.201
- ORCO; 0
- Pegas Nonwovens; 0
- Philip Morris ČR; 0.799
- Telefónica O2 CR; 0
- Unipetrol; 0

Je vidět, že dominující portfolio se skládá ze stejných akcií jako v případě týdenních výnosů. Rozdíl je pouze v zastoupení jednotlivých akcií v portfoliu. V tabulce 4.8 uvádíme porovnání průměrných výnosů, průměrného CVaRu a prvních 13 hodnot CVaRu napočítávaného podle lemmatu 4.1. Z tabulky je patrné, že stejně jako v předešlých případech má dominující portfolio vyšší výnos a zároveň nižší riziko ve smyslu CVaRu.

Nyní budeme opět uvažovat možnost investování do bezrizikového aktiva, které bude opět představovat sazba PRIBOR. Portfolio složené pouze z indexu PX je i v tomto případě neeficientní, neboť má zápornou střední hodnotu nadvýnosů. Lepší strategií ve smyslu SSD dominance je investovat do PRIBORu.

Hodnota	PX	DP
Průměrný výnos	-0.0070	0.0126
Průměrný CVaR	0.0797	0.0112
1. CVaR	0.0070	-0.0126
2. CVaR	0.0103	-0.0085
3. CVaR	0.0136	-0.0058
4. CVaR	0.0168	-0.0033
5. CVaR	0.0191	-0.0007
6. CVaR	0.0211	0.0018
7. CVaR	0.0228	0.0041
8. CVaR	0.0245	0.0060
9. CVaR	0.0262	0.0081
10. CVaR	0.0278	0.0097
11. CVaR	0.0294	0.0113
12. CVaR	0.0311	0.0129
13. CVaR	0.0327	0.0143

Tabulka 4.8: Tabulka porovnává vybrané hodnoty měsíčních výnosů indexu PX a výnosů dominujícího portfolia (DP) ve smyslu SSD za předpokladu normálního rozdělení; k-tý CVaR je napočítaný pro $\alpha = \frac{k}{T}$ podle lemmatu 4.1

4.6 Porovnání přístupů

Z výsledků je patrné, že volba diskrétního rozdělení vede na úlohu lineárního programování. Velikost úlohy je závislá především na počtu scénářů. S rostoucím počtem scénářů ovšem roste počet omezení řádově druhou mocninou počtu scénářů. V případě předpokladu spojitého rozdělení je výsledná úloha nelineární. Avšak velikost úlohy závisí pouze na počtu akcií v portfoliu, proto je výsledná úloha daleko menšího rozsahu. Z výsledků je vidět, že index PX je za předpokladu diskrétního i jakéhokoliv eliptického rozdělení neefiecientní. Avšak v případě, že neuvažujeme možnost investování do bezrizikového aktiva, liší se výsledné dominující portfolio. Tudíž zde již závisí, zda zvolíme předpoklad jakéhokoliv eliptického nebo diskrétního rozdělení. V případě, že máme možnost investování do bezrizikového aktiva, je toto bezrizikové aktivum dominujícím za obou předpokladů.

Závěr

V této práci jsme se věnovali semi-infinitnímu programování. V prvních dvou kapitolách jsme prezentovali některé teoretické poznatky o podmínkách optimality prvního a druhého řádu a dualitě v lineárním semi-infinitním programování.

Ve třetí kapitole nejdříve zavádíme pojem stochastické dominance druhého řádu a eficience portfolia. Poté uvádíme aplikaci semi-infinitního programování na eficienci portfolia ve smyslu stochastické dominance druhého řádu. Za míru rizika jsme zvolili CVaR, neboť je konzistentní se stochastickou dominancí druhého řádu. Úlohu jsme odvodili pro předpoklad diskrétního, normálního, studentova a obecného eliptického rozdělení. V diskrétním případě je výsledkem lineární úloha. Za předpokladu normálního, studentova a obecného eliptického rozdělení vychází vždy nelineární úlohy semi-infinitního programování. Tyto úlohy se liší pouze ve varianční matici. Avšak tento rozdíl nemá vliv na výsledné řešení, neboť se matice liší jen přenásobením konstantou.

Pro velký počet scénářů je lineární úloha v případě diskrétního rozdělení velmi rozsáhlá, konkrétně roste s druhou mocninou scénářů, proto je k jejímu řešení potřeba speciální program. V této diplomové práci jsme zvolili program GAMS. V případě předpokladu eliptického rozdělení je výsledná úloha nelineární, ale její velikost závisí pouze na počtu akcií v portfoliu.

V poslední kapitole jsme ukázali aplikaci odvozených úloh na testování eficience indexu PX vzhledem k SSD kritériu. Nejdříve jsme testovali eficienci indexu PX pro týdenní a měsíční výnosy. Vždy vyšlo, že index PX je neeficientní ve smyslu stochastické dominance druhého řádu a při řešení úlohy jsme dostali jako vedlejší produkt dominující portfolio složené z českých akcií. Dále jsme testovali eficienci indexu PX za předpokladu eliptického rozdělení. I za tohoto předpokladu je výsledkem neeficience indexu PX, ale nalezené dominující portfolio se liší od dominujícího portfolia za předpokladu diskrétního rozdělení. Ještě je třeba poznamenat, že test na normalitu a studentovo rozdělení s jedním až čtyřmi stupni volnosti výnosů indexu PX a českých akcií nulovou hypotézu zamítl. Výběr předpokladu libovolného eliptického nebo diskrétního rozdělení výnosů má tedy vliv na výsledek. Také se ukázalo, že portfolio dominující za předpokladu diskrétního rozdělení výnosů není eficientní za předpokladu jakéhokoliv eliptického rozdělení výnosů a naopak.

Provedli jsme také testování eficience indexu PX za předpokladu, že je možné investovat do bezrizikového aktiva, v našem případě byla za bezrizikové aktivum zvolena sazba PRIBOR. Neboť měl index PX zápornou střední hodnotu nadvýnosů, a to jak pro týdenní tak i pro měsíční nadvýnosy, vyšlo shodně pro diskrétní i eliptické rozdělení nadvýnosů podle očekávání, že je neeficientní a že lepší strategií ve smyslu stochastické dominance druhého řádu je investice pouze do bezrizikového aktiva.

Literatura

[1] Blair Ch. E.: *A note on infinite systems of linear inequalities.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 48: 150–154, 1974.

[2] Bonnans J. F., Shapiro A.: *Perturbation Analysis of Optimization Problems.* Springer-Verlag, 2000.

[3] Cipra T.: *Finanční ekonometrie.* Ekopress, 2008.

[4] Fiacco A. V., Kortanek K. O.: *Semi-Infinite Programming and Applications.* Springer-Verlag, 1983.

[5] Glashoff K., Gustafson S. A.: *Linear Optimization and Approximation.* Springer-Verlag, 1983.

[6] Goberna M. A., López M. A.: *Linear semi-infinite programming theory: An updated survey.* Eur. J. Oper. Res., 143: 390–405, 2002.

[7] Gustafson S. A., Kortanek K. O., Rom W.: *Non-chebyshevian moment problems.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 7: 335–342, 1970.

[8] Hadar J., Russell W. R.: *Rules for ordering uncertain prospects.* American Economic Review, 59: 25–34, 1969.

[9] Hanoch G., Levy H.: *The effciency analysis of choices involving risk.* Review of Economic Studies, 36: 335–346, 1969.

[10] Hettich R., Jongen H. T.: *On first and second order conditions for local optima for optiomization problems in finite dimensions.* Methods Oper. Res., 23: 82–97, 1977.

[11] Hettich R., Jongen H. T.: *Semi-infinite programming: conditions of optimality and aplications.* Lecture Notes Control and Inform. Sci., 7: 262–280, 1978.

[12] Hettich R., Kortanek O.: *Semi-infinite programming: theory, methods and applications.* SIAM Review, 35(3): 380–429, 1993.

[13] Hettich R., Zencke P.: *Numerische Methoden der Approximation und semi-infiniten Optimierung.* Teubner Studienbücher Mathematik, 1982.

[14] Charnes A., Cooper W. W.: *The strong minkowski - farkas - weyl theorem for vector spaces over ordered fields.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, 44: 914–916, 1958.

[15] Kallinda C., Williams A. C.: *Linear programming in reflexive spaces.* SIAM review,, 13: 350–376, 1971.

[16] Kopa M.: *Utility functions in portfolio optimization.* Dizertační práce,KPMS MFF UK, 2006.

[17] Kopa M., Chovanec P.: *A second-order stochastic dominance portfolio efficiency measure.* Kybernetika, 44: 243–258, 2008.

[18] Kortanek K. O.: *Classifying convex extremum problems over linear topologies having separation properties.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 46: 725–755, 1974.

[19] Kortanek K. O.: *Extended abstract of classifying convex extremum problems.* Zentralblatt f. Math., 283: 491–496, 1975.

[20] Kotz S., Nadarajah S.: *Multivariate t Distributions and Their Applications.* Cambridge University Press,, 2004.

[21] Kozmík V.: *Eficience portfolií při spojitém rozdělení výnosů.* Diplomová práce, KPMS MFF UK, 2010.

[22] Kuosmanen T.: *Effcient diversification according to stochastic dominance criteria.* Management Science, 50: 1390–1406, 2004.

[23] Landsman Z., Valdes E.: *Tail conditional expectations for elliptical distributions.* North American Actuarial Journal, 7: 55–71, 2003.

[24] Levy H.: *Stochastic dominance: Investment decision making under uncertainty.* Springer Science, 2006.

[25] Levy H., Hanoch G.: *Relative effectiveness of effciency criteria for portfolio selection.* Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1: 63–76, 1970.

[26] López M. A., Still G.: *Semi-infinite programming.* Eur. J. Oper. Res., 180: 491–518, 2007.

[27] Markowitz H. M.: *Portfolio selection.* Journal of Finance, 7: 77–91, 1952.

[28] Mikulka J.: *Stochastická dominance vyšších řádů.* Diplomová práce, KPMS MFF UK, 2011.

[29] Neumann J., Morgenstern O.: *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1953.

[30] Ogryczak W., Ruszczynski A.: *Dual stochastic dominance and related mean-risk models.* SIAM J. Optim., 13: 60–78, 2002.

[31] Pflug Ch. G.: *Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In: Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications.* Kluwer Academic Publishers, 2000.

[32] Polak E.: *Optimization, Algorithms and Consistent Approximations.* Springer, 1997.

[33] Post T.: *Empirical tests for stochastic dominance efficiency.* J. Finance, 58: 1905–1932, 2003.

[34] Pratt J. W.: *Risk aversion in the small and in the large.* Econometrica, 32: 122–136, 1964.

[35] Reemtsen R., Rückmann J. J.: *Semi-Infinite Programming.* Kluwer, 1998.

[36] Rockafellar R. T.: *Conjugate Duality and Optimization; Regional Conference Series in Applied Mathematics.* Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, 1974.

[37] Rockafellar R. T., Uryasev S. *Optimization of conditional value-at-risk.* Journal of Risk, 2: 21–41, 2000.

[38] Rogosinski W. W.: *Moments of non-negative mass.* Proceedings of the Royal Society of London A, 245: 1–27, 1958.

[39] Ruszczynski A., Vanderbei R. J.: *Frontiers of stochastically nondominated portfolios.* Econometrica, 71: 1287–1297, 2003.

[40] Shapiro A.: *Semi-infinite programming, duality, discretization and optimality conditions.* Optimization, 58: 133–161, 2009.

[41] Stein O.: *Bi-level Strategies in Semi-infinite Programming.* Kluwer, 2003.

[42] Vázqueza G. F., Rückmann J. J., Stein O., Still G.: *Generalized semi-infinite programming: A tutorial.* J. Comput. Appl. Math., 217: 394–419, 2008.

[43] Uryasev S., Rockafellar R. T.: *Conditional value-at-risk for general loss distributions.* J. Banking Finance, 26: 1443–1471, 2002.

[44] Wetterling W.: *Definitheitsbedingungen für relative extrema bei optimierungs- und aproximationsaufgaben.* Numer. Math., 15: 122–136, 1970.

[45] Jongen H. T., Zwier G., Wetterling W.: *On sufficient condition for local optimality in semi-infinite programming.* Math. Operationsforch. Statist., 18: 165–178, 1987.

Seznam použitých zkratek a označení

SIP značí semi-infinitní programování
LP značí lineární programování
NLP značí nelineární programování
$cl(A)$ uzávěr množiny A
$co(A)$ konvexní kužel generovaný množinou A
$f \in C^n(R^m)$ znamená, že f je funkce na R^m a je n-krát spojitě diferencovatelná
$\text{int}(A)$ vnitřek množiny A
$\text{VaR}_\alpha(X)$ značí hodnotu v riziku náhodné veličiny X na hladině $1 - \alpha$
$\text{CVaR}_\alpha(X)$ značí podmíněnou hodnotu v riziku náhodné veličiny X na hladině $1 - \alpha$
SSD značí stochastickou dominanci druhého řádu

Příloha A - Obsah přiloženého CD

Na přiloženém disku lze najít následující obsah:

- Text diplomové práce ve formátu PDF.
- Použitá data obsahující týdenní a měsíční výnosy indexu PX, vybraných českých akcií a měsíční výnosy sazby PRIBOR.
- Skripty k výpočtům v programu Mathematica a GAMS.