Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Karel Kadlec

Modifikace stochastických objektů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	PMSE

Praha 2012

Rád bych poděkoval vedoucímu práce panu prof. RNDr. Josefu Štěpánovi, DrSc. za cenné rady a připomínky, zajímavou doporučenou literaturu, vstřícný přístup a trpělivost při vedení diplomové práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Karel Kadlec

Název práce: Modifikace stochastických objektů

Autor: Karel Kadlec

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc., Oddělení teorie pravděpodobnosti a náhodných procesů

Abstrakt: V této diplomové práci se zabýváme modifikacemi stochastických polí, stochastických procesů a náhodných pravděpodobnostních měr. První kapitola je věnována modifikacím stochastického pole do prostoru spojitých funkcí, modifikacím submartingalu do množiny zprava spojitých funkcí s konečnými limitami zleva a separabilním modifikacím stochastického procesu. V druhé kapitole je pozornost zaměřena na regularizaci náhodné pravděpodobnostní míry na markovské jádro. Konkrétně pracujeme s náhodnými pravděpodobnostními měrami na borelovské podmnožině polského prostoru, případně na Radonově separabilním topologickém prostoru.

Klíčová slova: Stochastický proces, spojitá modifikace, separabilní modifikace, náhodná pravděpodobnostní míra, regularizace.

Title: The modifications of the stochastic objects

Author: Karel Kadlec

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc., Division of Probability and Random processes

Abstract: In this thesis, we are concerned with the modifications of the stochastic processes and the random probability measures. First chapter is devoted to modifications of the stochastic process to the space of continuous functions, modifications of submartingale to the set of right-continuous with finite left-hand limits functions and separable modifications of stochastic process. In the second chapter is the attention on the regularization of random probability measure in Markov kernel focused. In particular, we work with random probability measures on the Borel subset of the Polish space, or Radon separable topological space.

Keywords: The stochastic process, the continuous modification, the separable modification, the random probability measure, the regularization.

Obsah

Úvod

Nejprve objasníme název a přiblížíme obsah této diplomové práce.

Definice 1 (Stochastický objekt)**.** Mějme $T \neq \emptyset$, měřitelný prostor $(M, \mathcal{M})$ a pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. *Stochastický objekt* s indexovou množinou T a stavovým (nebo také cílovým) prostorem $(M, \mathcal{M})$ je definován jako system měřitelných zobrazení $\{X_t; t \in T\}$ takových, že

$$X_t : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \to (M, \mathcal{M}), t \in T.$$

Uvedeme některé známé příklady.

Příklad 1. Buď $n \in \mathbb{N}$ a nechť je S metrický prostor.

1. *n-rozměrný náhodný vektor* $(X_1, \ldots, X_n)$ s hodnotami v S je stochastický objekt s indexovou množinou $T = \{1, \ldots, n\}$ a stavovým prostorem $(M, \mathcal{M}) = (S, \mathcal{B}(S))$, kde $\mathcal{B}(S)$ značí borelovskou σ-algebru prostoru S neboli σ-obal topologie S.

2. *Náhodná posloupnost* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s hodnotami v S je stochastický objekt s indexovou množinou $T = \mathbb{N}$ a stavovým prostorem $(M, \mathcal{M}) = (S, \mathcal{B}(S))$.

3. Mějme nedegenerovaný interval $I \subset \mathbb{R}_+$. *Stochastický proces* s časem v I a s hodnotami v S je stochastický objekt s indexovou množinou $T = I$ a stavovým prostorem $(M, \mathcal{M}) = (S, \mathcal{B}(S))$.

4. *n-rozměrné stochastické pole* s hodnotami v S je stochastický objekt s indexovou množinou $T = \mathbb{R}^n$ a stavovým prostorem $(M, \mathcal{M}) = (S, \mathcal{B}(S))$.

5. Nechť je $(E, \mathcal{E})$ měřitelný prostor. *Náhodná pravděpodobnostní míra* na $(E, \mathcal{E})$ je stochastický objekt s indexovou množinou $T = \mathcal{E}$ a stavovým prostorem $(M, \mathcal{M}) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1])$ takový, že

$$X_\emptyset \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} 0, \tag{1}$$

$$X_E \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} 1, \tag{2}$$

$$X_{\cup_{k=1}^\infty A_k} \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \sum_{k=1}^\infty X_{A_k},\ A_k \in \mathcal{E},\ A_k \cap A_l = \emptyset,\ k, l \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Poznamenejme, že v příkladě 1 v případě, kdy $S = \mathbb{R}$, bývá $(X_1, \ldots, X_n)$ nazýván reálným náhodným vektorem. Analogická terminologie bývá používána i v případě příkladů 2, 3 a 4.

Stochastický objekt $\{X_t, t \in T\}$ generuje zobrazení

$$X : \Omega \to M^T : \omega \mapsto (X_t(\omega), t \in T),$$

kde $(X_t(\omega), t \in T)$, $\omega \in \Omega$, jsou takzvané trajektorie $\{X_t, t \in T\}$. Snadno ověříme, že X je $(\mathcal{A}, \mathcal{M}^T)$-měřitelné, kde $\mathcal{M}^T$ značí součinovou σ-algebru, protože $\mathcal{M}^T$ je generována projekcemi $p_t : M^T \to M$, $t \in T$, a $p_t \circ X = X_t$, $t \in T$.

Umluvíme se, že budeme dále používat značení $X \stackrel{\text{def}}{=} \{X_t, t \in T\}$. Budeme se zabývat modifikacemi stochastických objektů ve smyslu následující definice.

Definice 2 (Modifikace stochastického objektu)**.** Nechť jsou X, Y stochastické objekty s indexovou množinou T a stavovým prostorem $(M, \mathcal{M})$ a buď L neprázdná podmnožina M^T. Objekt Y se nazývá *modifikace* X *do množiny trajektorií* L, jestliže

$$X_t \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} Y_t,\ t \in T, \tag{4}$$

$$Y(\omega) \subset L,\ \omega \in \Omega.$$

V případě, kdy $L = M^T$, říkáme jednoduše, že Y je *modifikace* X.

Rozebereme některé důsledky tvrzení, že objekt Y je modifikace objektu X:

1. Nechť jsou X a Y stochastické objekty se spočetnou indexovou množinou T a nechť je Y modifikace X. Potom $X \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} Y$.

2. Buď X stochastický proces a buďte Y a Z jeho dvě modifikace do množiny (zprava) spojitých funkcí na $\mathbb{R}_+$ (takzvané (zprava) spojité modifikace). Pak $Y \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} Z$.

3. Nechť je X stochastický objekt a Y jeho modifikace. Pak jsou X a Y ekvivalentní neboli mají stejná rozdělení na σ-algebře $\mathcal{M}^T$ (značme $X \sim Y$).

4. Nechť je Y modifikace stochastického objektu X. Obecně rovnost $X \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} Y$ neplatí. Položme například

$$T = [0,1],\ (M, \mathcal{M}) = (\{0,1\}, \sigma\{\{0\}\}),\ (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda),$$

kde λ zde značí Lebesgueovu míru na intervalu $[0, 1]$. Nechť $X_t(\omega) = \mathbf{I}_t(\omega)$, kde $\mathbf{I}_t(\omega)$ značí indikátor rovnosti t a ω, a $Y_t(\omega) = 0$, $\omega, t \in [0, 1]$. Očividně je Y spojitá modifikace X a současně $\lambda[X = Y] = 0$.

Modifikace stochastických objektů do podmnožiny trajektorií existují již za slabých podmínek. Mějme stochastické objekty X, Y se stavovým prostorem $(M, \mathcal{M})$ a s indexovou množinou T. Potom $X \sim Y$ tehdy a jen tehdy, když

$$\mathbf{P}((X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A_n) = \mathbf{P}((Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}) \in A_n),$$

pro všechna $A_n \in \mathcal{M}^n$, $t_i \in T$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, neboli X a Y mají stejná konečněrozměrná rozdělení.

Lemma 1. *Mějme měřitelný prostor $(S, \mathcal{S})$, úplný separabilní mětrický prostor S^* a měřitelná zobrazení $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$ a $Y^* : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S^*, \mathcal{B}(S^*))$. Pokud je Y^* Y-měřitelné zobrazení, tak existuje $f : (S, \mathcal{S}) \to (S^*, \mathcal{B}(S^*))$ takové, že $f(Y) = Y^*$.*

Pro případ $S^* = \mathbb{R}$ je toto tvrzení dokázáno v [8], str. 7, lemma 1.13. Pro obecný úplný separabilní metrický prostor S^* plyne z tvrzení (které je možné nalézt zde v dodatcích i s důkazem) 40 o isomorfismu g prostoru S^* s některou podmnožinou C intervalu $[0, 1]$. Stačí vzít f pro $g(Y^*)$ (opět Y-měřitelné) a pro Y^* ho upravit na $g^{-1} \circ f$ (což je očividně správně měřitelné).

Věta 2 (O existenci modifikace stochastického objektu)**.** *Uvažujme separabilní metrický prostor E, stochastické objekty X, Y s indexovou množinou T a stavovým prostorem $(E, \mathcal{B}(E))$ (ale obecně definované na různých pravděpodobnostních prostorech) a úplný separabilní metrický prostor U takový, že $\mathcal{B}(U) = \mathcal{B}(E)^T \cap U$. Jestliže $Y(\omega) \subset U$, $\omega \in \Omega$, a $X \sim Y$, pak existuje modifikace X^* procesu X do množiny U.*

Důkaz. Na Y můžeme pohlížet i jako na náhodnou veličinu

$$Y^U : (\Omega, \mathcal{A}) \to (U, \mathcal{B}(E)^T \cap U) = (U, \mathcal{B}(U)).$$

Protože pro každé $B \in \mathcal{B}(E)^T$:

$$\left[Y^U \in B \cap U\right] = [Y \in B],$$

je Y^U Y-měřitelná. Díky separabilitě a úplnosti U nám lemma 1 dává měřitelné zobrazení $f : (E^T, \mathcal{B}(E)^T) \to (U, \mathcal{B}(U))$ takové, že $f(Y) = Y^U$. Označme $X^* \stackrel{\text{def}}{=} f(X)$. Protože $(X, f(X)) \sim (Y, f(Y))$, speciálně dostáváme $(X_t, X_t^*) \sim (Y_t, Y_t^U) = (Y_t, Y_t)$, $t \in T$. Poznamenejme, že $(X, f(X))$ a

$(Y, f(Y))$ uvažujeme jako měřitelná zobrazení do $(E^T \times U, \mathcal{B}(E)^T \otimes \mathcal{E}(U))$, zatímco (Y_t, Y_t), čímž i (X_t, X_t^*), jako měřitelná zobrazení do

$$(E^2, \mathcal{B}(E)^2) = (E^2, \mathcal{B}(E^2)) \tag{5}$$

(v rovnosti (5) jsme opět využili separabilitu E), speciálně $[X_t = X_t^*] \in \mathcal{A}$, $t \in T$. Celkem

$$\mathbf{P}(X_t = X_t^*) = \mathbf{P}(Y_t = Y_t) = 1,\ t \in T.$$

Q.E.D.

Tuto větu použijeme na konci odstavce 1.1.

K obsahu práce poznamenejme, že se v odstavci 1.1 budeme věnovat existenci spojité modifikace n-rozměrného náhodného pole. Dokážeme Kolmogorovovu-Chentsovovu větu o existenci modifikace s lokálně Holderovskými spojitými trajektoriemi a ukážeme některé její aplikace ve stochastické analýze.

V odstavci 1.2 se budeme zabývat ekvivalentní podmínkou pro existenci modifikace submartingalu do množiny zprava spojitých funkcí s konečnými limitami zleva (takzvaných rcll funkcí). Ukážeme, že každý submartingal X indexovaný $\mathbb{R}_+$ lze rekonstruovat na submartingal $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ s rcll trajektoriemi a nalezneme podmínku pro to, aby Y byl modifikací X. Tato tvrzení jsou důležitá pro konstrukci gaussovských procesů ve stochastické analýze a bodových procesů ve stochastické geometrii.

V odstavci 1.3 se k problému existence spojité a rcll modifikace vrátíme, ale tentokrát s použitím věty o existenci separabilní modifikace stochastického procesu. Uvažujme metrický prostor E. Stochastický proces X s časem v $\mathbb{R}_+$ a s hodnotami v E je *separabilní*, jestliže máme spočetnou množinu $S \subset \mathbb{R}_+$ (takzvaný *separant* procesu X) takovou, že pro každé $\omega \in \Omega$ je trajektorie $X(\omega)$ S-separabilní, což znamená, že

$$\overline{\{(s, X_s(\omega)); s \in S\}} = \{(t, X_t(\omega)), t \in \mathbb{R}_+\},$$

kde $\overline{A}$ značí uzávěr množiny $A \subset V \neq \emptyset$ v topologii V. Separabilní procesy X mají některé překvapivé vlastnosti. Například $[X_t, t \in G] \in \mathcal{A}$ a

$$\mathbf{P}(X_t \in F; t \in G) = \inf_{K \in \mathfrak{k}(G)} \mathbf{P}(X_t \in F; t \in K),$$

kde F je uzavřená podmnožina E, G je otevřená podmnožina $\mathbb{R}_+$ a $\mathfrak{k}(G)$ značí systém všech konečných podmnožin rodiny G.

Užitečný výsledek je, že pro každý reálný stochastický proces X indexovaný $\mathbb{R}_+$ na úplném pravděpodobnostním prostoru existuje separabilní modifikace Y. Y_t, $t \in \mathbb{R}_+$, jsou ale zobecněné reálné (někdy se také říká numerické) náhodné veličiny a obecně nemůžeme zaručit, aby trajektorie $Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$, byly reálné **P**-s.j.

Uvažujme měřitelný prostor $(E, \mathcal{E})$. V kapitole 2 se budeme věnovat problému existence modifikace náhodné pravděpodobnostní míry $X_A(\omega) = X(A, \omega)$, $A \in \mathcal{E}$, $\omega \in \Omega$, do množiny pravděpodobnostních měr. Mějme zobrazení $K : \mathcal{E} \times \Omega \to [0, 1]$. Připomeneme, že je K *markovké jádro*, jestliže

$$K(A, .) : (\Omega, \mathcal{A}) \to ([0, 1], \mathcal{B}[0, 1]),\ A \in \mathcal{E}, \tag{6}$$

a pro každé $\omega \in \Omega$ je $K(., \omega)$ pravděpodobnostní míra na $\mathcal{E}$. Budeme řešit otázku existence modifikace K náhodné pravděpodobnostní míry X takové, aby K bylo markovské jádro, neboli budeme hledat takzvanou regularizaci X. Poznamenejme, že je K *konečně aditivní markovské jádro*, jestliže splňuje (6) a přitom je $K(., \omega)$ pro každé $\omega \in \Omega$ konečně aditivní pravděpodobnost.

V souvisloti s tímto problémem zmíníme větu o existenci liftingu. Uvažujme prostor $\mathbb{L}_\infty = \mathbb{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A})$ (čímž značíme prostor omezených reálných náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A})$) a zobrazení $l : \mathbb{L}_\infty \to \mathbb{L}_\infty$. Řekneme, že je l *lifting*, jestliže

$$l(f) \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} f, \tag{7}$$

$$l(f) = l(g) \Leftrightarrow f \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} g, \tag{8}$$

$$l(af + bg) = al(f) + bl(g),\ a, b \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$$f \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{\geq} 0 \Rightarrow l(f) \geq 0, \tag{10}$$

$$l(c) = c,\ c \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Zobrazení l tedy z každé třídy ekvivalence $\left\{g \in \mathbb{L}_\infty; g \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} f\right\}$, $f \in \mathbb{L}_\infty$, vybere funkci $l(f)$ takovou, aby bylo navíc splněno (9), (10) a (11).

Věta 3 (D. Maharam)**.** *Pro úplný pravděpodobnostní prostor existuje lifting.*

Důkaz je možné nalézt v [13], kapitole 9 (str. 617, věta 3 a str. 603, tvrzení 3). Pro případ, kdy je **P** Radonova, je věta dokázána v [14], kapitole 2, odstavci 4.

Nechť je X náhodná pravděpodobnostní míra a l lifting. Položme $K(A) = l(X(A))$, $A \in \mathcal{E}$. K je konečně aditivní markovské jádro podle (9) (z čehož máme indukcí konečnou aditiviu $K(., \omega)$, $\omega \in \Omega$), (10) (z čehož máme nezápornost $K(., \omega)$, $\omega \in \Omega$), (8) a (11) (jejichž kombinací dostáváme stejnými postupy nulovost v prázdné množině a normalitu $K(., \omega)$, $\omega \in \Omega$) a je to modifikace X podle (7). Každou náhodnou pravděpodobnostní míru tedy můžeme bez dalších předpokladů modifikovat na konečně aditivní markovské jádro. Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že je X konečně aditivní markovské jádro. Regularizace X ale obecně existovat nemusí. Konkrétně budeme klást požadavky na měřitelný prostor $(E, \mathcal{E})$.

Předpokládejme, že $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E}_0)$, kde $\mathcal{E}_0$ je spočetná, a označme $\mathcal{E}_1$ nejmenší algebru obsahující $\mathcal{E}_0$. Potom má $\mathcal{E}_1$ spočetně mnoho prvků. Dále uvažujme dvě regularizace K, L náhodné míry X. Podle (4) existuje $\Omega_0 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$, tak, že

$$K(A, \omega) = L(A, \omega), \tag{12}$$

$A \in \mathcal{E}_1$, $\omega \in \Omega_0$, a podle věty o rozšíření míry dostáváme (12) pro každé $A \in \mathcal{E}$, $\omega \in \Omega_0$. Máme tedy v tomto případě rovnou zaručenu jednoznačnost ve smyslu $\mathbf{P}$-s.j.

Uvedeme často používaný příklad náhodné pravděpodobnostní míry. Mějme topologidký prostor V, měřitelné zobrazení $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (V, \mathcal{B}(V))$ a σ-algebru $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$. Definujme

$$X(B, \omega) = \mathbf{P}(f \in B|\mathcal{G})(\omega), \ \omega \in \Omega, B \in \mathcal{B}(V),$$

podmíněnou pravděpodobnost $[f \in (.)]$ za podmínky $\mathcal{G}$. Z vlastnosní podmíněné střední hodnoty dostáváme, že je X skutečně náhodná pravděpodobnostní míra na $(V, \mathcal{B}(V))$. Každá její regularizace se nazývá *podmíněné rozdělení* f za podmínky $\mathcal{G}$. Existence a jednoznačnost podmíněného rozdělení má význam v téměř celé teorii pravděpodobnosti i stochastických procesů.

1. Stochastické procesy

1.1 Spojité modifikace

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $S = (S, \rho_S)$ je metrický prostor. V tomto odstavci se budeme zabývat problémem existence spojité modifikace n-rozměrného stochastického pole X s hodnotami v S. Připomeneme, že borelovská σ-algebra $\mathcal{B}(S)$ je definována jako σ-obal topologie S. V případě separabilního S můžeme ekvivalentně psát

$$\mathcal{B}(S) = \sigma\left\{U_\epsilon^S(s); s \in S, \epsilon > 0\right\}, \tag{1.1}$$

kde $U_\epsilon^S(s)$ značí otevřenou kouli metrického prostoru S o poloměru ϵ a o středu s. Vysvětlíme důležitost našeho cíle na speciálním případě, kdy je X reálný stochastický proces s hodnotami v $S = \mathbb{R}$ a časem v $I = [0, 1]$. Uvažujme tedy reálný stochastický proces X s indexovou množinou $[0, 1]$ a jeho spojitou modifikaci Y. Již v úvodu jsme naznačili, že na X můžeme pohlížet jako na měřitelné zobrazení

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to \left(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,1]}\right).$$

Přitom na Y již můžeme pohlížet jako na náhodnou veličinu

$$Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})), \tag{1.2}$$

kde $\mathbb{C}$ značí (Banachův) prostor spojitých funkcí na (kompaktním) intevralu $[0, 1]$ s normou $||f|| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$, $f \in \mathbb{C}$. Pro zdůvodnění nám stačí dokázat $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$-měřitelnost Y a tedy dle (1.1) stačí ověřit

$$\left[\max_{t\in[0,1]} |Y_t - f(t)| < \epsilon\right] = \left[\sup_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} |Y_t - f(t)| < \epsilon\right]$$
$$= \bigcap_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \left[Y_t \in U_\epsilon^{\mathbb{R}}(f(t))\right] \in \mathcal{A},$$

kde $f \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$.

Oproti tomu se rovnají konečněrozměrná rozdělení procesů X a Y a tedy i jejich rozdělení na σ-algebře $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,1]}$, přičemž proces Y má jako náhodná veličina dle (1.2) hodnoty v metrickém prostoru $\mathbb{C}$, který je úplný a separabilní, což nám dává možnost pracovat navíc například s jevy typu

$$\left[\max_{t\in[0,1]} Y_t \in B\right], \ \left[\int_0^1 Y_t \in B\right] \in \mathcal{A}, \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

které by ale při náhradě procesu Y procesem X již do $\mathcal{A}$ nenáležely. Na náhodnou veličinu Y je navíc možné aplikovat výsledky principů invariance (viz [2], str. 87–91, 208–210).

Kolmogorovova-Chentsovova věta nám kromě spojitosti dává lokální Hölderovskost za daných požadavků na momenty $\rho_S(X_s, X_t)$, $s, t \in T$. Řekněme si nyní, co tento pojem znamená. V následujících definicích uvažujme $T = (T, \rho_T)$ jako obecný metrický prostor. Pro neprázdnou A a funkce $f, g : A \to \mathbb{R}$ používejme značení $f \underset{\frown}{<} g$, kdykoliv exituje $C \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $a \in A$: $f(a) \leq Cg(a)$.

Definice 3 (Modul spojitosti)**.** *Modul spojitosti* funkce $f : T \to S$ definujeme jako zobrazení

$$w_f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : r \mapsto \sup_{s,t \in T; \rho_T(s,t) \leq r} \rho_S(f(s), f(t)).$$

Poznamenejme, že podmínka $\lim_{r \to 0_+} w_f(r) = 0$ ekvivalentně vyjadřuje stejnoměrnou spojitost.

Definice 4 (Hölderovská spojitost)**.** Řekneme, že funkce $f : T \to S$ je *Hölderovsky spojitá* s exponentem $C \in \mathbb{R}$, jestliže $w_f(r) \underset{\frown}{<} r^C$, $r \in \mathbb{R}_+$.

Definice 5 (Lokální Hölderovská spojitost)**.** Funkce $f : T \to S$ je *lokálně Hölderovsky spojitá*, jestliže je Hölderovsky spojitá její restrikce na libovolnou omezenou podmnožinu T (což je s příslušnou restricí ρ_T opět metrický prostor).

Přirozeně definujeme (lokální) *Hölderovskou spojitost* procesu X jako (lokální) Hölderovskou spojitost jeho trajektorií $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Nyní dokážeme hlavní větu tohoto odstavce. X bude opět n-rozměrné stochastické pole s hodnotami v S. Symbolem $|.|$ značme Eukleidovu normu na $\mathbb{R}^n$. Uvedený důkaz můžeme nalézt v [8], str. 57, věta 3.23. Zde jsou však podrobněji vysvětleny některé jeho méně zřejmé části. Jiný důkaz je možné nalézt i v [1], kapitole 39, jednorozměrný případ této věty i s důkazem v [16], str. 232, III.5.8 nebo v [12], str. 97, tvrzení III.5.3.

Věta 4 (Kolmogorovova-Loeveho-Chentsovova)**.** *Nechť je S úplný a separabilní metrický prostor a nechť existují $a, b > 0$ taková, že pro každé $s, t \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnost*

$$\mathbf{E}(\rho_S(X_s, X_t))^a \underset{\frown}{<} |s - t|^{n+b}. \tag{1.3}$$

Potom existuje spojitá modifikace Y procesu X, která navíc splňuje lokální Hölderovskost s exponentem c pro libovolné $c \in \left(0, \frac{b}{a}\right)$.

Důkaz. Nejprve uvažujme restrikci X na $[0,1]^n$ (a značme ji v důkazu opět jednoduše X). Pro každé přirozené k vytvořme síť bodů

$$D_k \stackrel{\text{def}}{=} \{x2^{-k}; x \in \{1, \dots, 2^k\}^n\}.$$

Množina $D \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{k\in\mathbb{N}} D_k$ je hustá v $[0,1]^n$. Označme

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} \{(s,t) \in D_k^4; |s-t| = 2^{-k}\},$$

$$\xi_k \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(s,t)\in E_k} \rho_S(X_s, X_t).$$

Poznamenejme, že je ξ_k nezáporná náhodná veličina vzhledem k měřitelnosti metriky a funkce maxima. Snadno vypočteme, že D_k obsahuje právě $\left(2^k\right)^n$ bodů a každý z těchto bodů má maximálně $2d$ sousedů, proto E_k nemůže mít více než $2d2^{kn}$ prvků. Zvolme nyní pevné $c \in \left(0, \frac{b}{a}\right)$. S využitím (1.3) a předchozí úvahy odhadněme

$$\mathbf{E}\xi_k^a \underset{\frown}{<} \sum_{(s,t)\in E_k} \mathbf{E}(\rho_S(X_s, X_t))^a \underset{\frown}{<} 2^{kn}(2^{-k})^{n+b} = 2^{-kb}.$$

S pomocí Lévyho věty o monotonní konvergenci dostaneme

$$\mathbf{E}\sum_{k\in\mathbb{N}} (2^{ck}\xi_k)^a = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{ack}\mathbf{E}\xi_k^a \underset{\frown}{<} \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{(ac-b)k} < \infty,$$

což nám vzhledem k nezápornosti náhodných veličin (součet náhodných veličin) $\sigma_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k 2^{ci}\xi_i^a$, $k \in \mathbb{N}$, dává konvergenci některé podposloupnosti $\{\sigma_k(\omega)\}_k$ (zápis $\{x_k\}_k$ vždy bude značit posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ prvků některé $A \neq \emptyset$) pro každé ω z některé $A_c \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A_c) = 1$. Zvolme pevné $\omega \in A_c$. Protože je $\{X_k(\omega)\}_k$ monotonní, dostáváme konvergenci celé posloupnosti $\{X_k(\omega)\}_k$, neboli naše řada je konečná v ω. Díky tomu nalezneme konstantu $h(\omega)$ takovou, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $\xi_k(\omega) \leq h(\omega)2^{-ck}$.

Vezměme nyní $m \in \mathbb{N}$, $p - m - 1 \in \mathbb{N}$ a $s = s_p, t = t_p \in D_p$ taková, že $||s-t|| \leq 2^{-m}$ ($||.||$ zde značí maximovou normu $\mathbb{R}^n$). Podle předpokladu na s a t najdeme $s_m = t_m \in D_m$ takový, že

$$\max\{||s_m - s||, ||t_m - t||\} \leq 2^{-m}.$$

Dále najdeme $s_k, t_k \in D_k$ taková, že

$$\max\{||s_k - s_{k-1}||, ||t_k - t_{k-1}||, ||s_k - s||, ||t_k - t||\} \leq 2^{-k},$$

$k \in \{m+1, \dots, p-1\}$. Připomeňme, že pro $k < l$, $k, l \in \mathbb{N}$, je $D_k \subset D_l$, neboli každá další síť je zjemnění té předchozí. Tedy pro každé

$k \in \{m, \dots, p-1\}$ se můžeme z s_{k-1} do s_k dostat v síti D_k maximálně n posunutími. Když to shrneme (a uvážíme, že $||s|| \leq |s|$, $s \in \mathbb{R}^n$), dostaneme pro $r \in [2^{-m-1}, 2^{-m}]$ odhady

$$\sup_{s,t \in D; |s-t| \leq r} \rho_S(X_s(\omega), X_t(\omega)) \lesssim \sum_{k \geq m} \xi_k(\omega) \lesssim 2^{-cm} \lesssim r^c.$$

Protože m bylo libovolné, obdržíme Hölderovskou spojitost $X(\omega)$ na D s exponentem c.

Zvolíme-li posloupnost $\{c_n\}_n$ takovou, že $c_n \to \left(\frac{b}{a}\right)_-$, $n \to \infty$, tak

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{c_n}\right) = 1$$

a $X(\omega)$ je na D Hölderovská s exponentem c pro každé $c \in \left(0, \frac{b}{a}\right)$, $\omega \in A \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{n \in \mathbb{N}} A_{c_n}$. Definujme nyní proces Y tak, že pro $\omega \in A$, $t \in [0,1]^n$ máme

$$Y_t(\omega) = \lim_{d \to t, d \in D} X_d(\omega) \tag{1.4}$$

a pro $\omega \in A^\complement$ je $Y(\omega)$ definována jako konstantní funkce na $[0,1]^n$. Limita (1.4) skutečně existuje, protože vzhledem k Hölderovské spojitosti $X(\omega)$ na D pro každé dvě posloupnosti $\{s_k\}_k, \{t_k\}_k \subset D$ s limitou t při $k \to \infty$ mají $\{X_{t_k}(\omega)\}_k$ a $\{X_{s_k}(\omega)\}_k$ společnou limitu (pro $k \to \infty$). Stačí pro $\delta > 0$ klasickým způsobem nalézt k_0 takové, aby pro $k - k_0 \in \mathbb{N}$ bylo

$$|s_k - t_k| \leq |s_k - t| + |t_k - t| < 2\delta.$$

Snadno ověříme, že je Y opět Hölderovsky spojitá s exponentem c, kde $c \in \left(0, \frac{b}{a}\right)$. Zvolme libovolná $\omega \in A$, $r > 0$, $s, t \in [0,1]^n$, $|s - t| \leq r$, a posloupnosti $\{s_k\}_k, \{t_k\}_k \subset D$ takové, aby $s_k \to s$, $t_k \to t$ při $k \to \infty$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platilo $|s_k - t_k| \leq r$. V nerovnosti

$$\rho_S(Y_s(\omega), Y_t(\omega))$$

$$\leq \rho_S(Y_{s_k}(\omega), Y_s(\omega)) + \rho_S(Y_{t_k}(\omega), Y_t(\omega)) + \rho_S(Y_{s_k}(\omega), Y_{t_k}(\omega))$$

stačí provést limitní přechod pro $k \to \infty$ a to nám již dá požadovanou nerovnost pro Hölderovskou.

Nechť jsou opět $t \in [0,1]^n$ a $\{t_k\}_k \subset D$ takové, že $t_k \to t$, $k \to \infty$. Protože $X_{t_k} \to X_t$ podle pravděpodobnosti $\mathbf{P}$ (dle Čebyševovy nerovnosti a (1.3)) a pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme $\mathbf{P}(X_{t_k} = Y_{t_k}) = 1$, ze spojitosti Y a jednoznačnosti limity v pravděpodobnosti (ve smyslu $\mathbf{P}$-s.j.) dostáváme $\mathbf{P}(Y_t = X_t) = 1$.

Nyní si $\mathbb{R}^n$ vyjádříme jako sjednocení n-rozměrných krychlí tvaru $K_k \stackrel{\text{def}}{=} [-k, k]^n$, $k \in \mathbb{N}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ umíme zkonstruovat modifikaci Y^k restrikce X na K_k Hölderovsky spojitou s (libovolným) exponentem $c \in (0, \frac{b}{a})$. Pro každou dvojici $k < l$, $k, l \in \mathbb{N}$, dostáváme pro každé $t \in K_k$

$$Y_t^k \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} X_t \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} Y_t^l.$$

Označíme-li $Q_k \stackrel{\text{def}}{=} K_k \cap \mathbb{Q}^n$ a

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \left[Y_t^k = Y_t^l; k, l \in \mathbb{N}, k < l, t \in Q_k\right] \in \mathcal{A},$$

celkem dostáváme $\mathbf{P}(A) = 1$. Podobným způsobem jako v předchozí části důkazu tedy můžeme zkonstruovat Y tak, aby pro každé $k \in \mathbb{N}$ byla jeho restrikce na K_k modifikace Y^k a přitom aby Y byl lokálně Hölderovsky spojitý s (libovolnou) konstantou $c \in (0, \frac{b}{a})$ (a tedy spojitý) na celém $\mathbb{R}^n$. Například můžeme definovat pro $\omega \in A$, pro $k \in \mathbb{N}$, $t \in Q_k$: $Y_t(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} Y_t^k(\omega)$, a pro $t \in (\mathbb{Q}^n)^{\complement}$:

$$Y_t(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{q \to t, q \in \mathbb{Q}^n} Y_q(\omega)$$

(tato limita opět existuje vzhledem k Hölderovské spojitosti $Y(\omega)$ na Q_k, $k \in \mathbb{N}$). Pro $\omega \in A^{\complement}$ můžeme funkci $Y(\omega)$ dodefinovat jako konstantu na $\mathbb{R}^n$. Lokální Hölderovskou spojitost Y dostaneme podobným způsobem jako v předchozí části důkazu, stačí pro každou omezenou množinu $B \subset \mathbb{R}^n$ vzít $k \in \mathbb{N}$ takové, aby
$B \subset K_k$, a pro každé $s, t \in B$ nalézt posloupnosti $\{s_l\}_l, \{t_l\}_l \subset Q_k$ takové, aby opět $s_l \to s$ a $t_l \to t$ při $l \to \infty$ a $|s_l - t_l| \leq |s - t|$, $l \to \infty$. Pro $\omega \in A$ tak dostaneme Hölderovskou spojitost s libovolným exponentem $c \in \left(0, \frac{b}{a}\right)$ restrikce $Y(\omega)$ na B z definice Y a Hölderovské spojitosti Y^k s exponentem c speciálně na Q_k. Kromě toho pro $k \in \mathbb{N}$, $t \in K_k$ platí

$$Y_t \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} Y_t^k \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} X_t,$$

tedy Y je skutečně modifikace X.

Q.E.D.

Uvedeme některé příklady aplikující větu 4.

Příklad 2. Existuje Wienerův proces W:

Danielova-Kolmogorovova věta nám dává reálný Gaussovský proces X s konečněrozměrnými rozděleními

$$\begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} \sim \mathbf{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & \min\{t_1, t_n\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\{t_1, t_n\} & \cdots & t_n \end{pmatrix} \right),$$

kde $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{N}(\mu, V)$ značí normální rozdělení se střední hodnotou μ a varianční maticí V (speciálně $X_0 \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} 0$). Z věty 4 pak snadno dostaneme existenci spojité modifikace W procesu X, o které navíc okamžitě víme, že má Hölderovské trajektorie s libovolným koeficientem $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Stačí s využitím vlastností normálního rozdělení a znalostí jeho momentů spočítat

$$\mathbf{E}|X_t - X_s|^4 = C|t - s|^2,$$

čímž je podmínka (1.3) ověřena.

Poznamenejme, že je známo, že $\frac{1}{2}$-Hölderovské trajektorie Wienerův proces $\mathbf{P}$-s.j. nemá.

Příklad 3. Uvažujme funkci $f \in \mathbb{L}_2[0, t] = \mathbb{L}_2([0, t], \mathcal{B}[0, t], \lambda)$, čímž značíme prostor borelovsky měřitelných funkcí s konečnými druhými momenty vzhledem k Borelově míře λ na $[0, t]$, $t \in \mathbb{R}_+$. Opět dle Danielovy-Kolmogorovovy věty máme reálný proces X s konečněrozmernými rozděleními

$$\begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} \sim \mathbf{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} & \cdots & v_{n,n} \end{pmatrix} \right), \tag{1.5}$$

kde $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ a $v_{i,j} = \int_0^{\min\{t_i, t_j\}} f^2 d\lambda$, $i, j = 1, \ldots, n$. Ekvivalentně je X gaussovský centrovaný proces s nezávislými přírůstky

$$X_t - X_s \sim \mathbf{N}\left(0, \int_s^t f^2 d\lambda\right), \; s, t \in \mathbb{R}_+, s \leq t. \tag{1.6}$$

Dále nás zajímá existence spojité modifikace procesu X. Chtějme nejprve některou postačující podmínku pro ověření předpokladu (1.3). Pokud například požadujeme omezenost f hodnotou $K > 0$, tak z (1.6) a opět z vlastností normálního rozdělení a znalosti jeho momentů dostáváme

$$\mathbf{E}|X_t - X_s|^4 = C \left| \int_s^t f^2 d\lambda \right|^2 \leq CK^4 |t - s|^2.$$

Poznamenáme, že existenci spojité modifikace X dostaneme i bez použití věty 4 a bez předpokladu omezenosti f. Uvažujme pravděpodobnostní prostor s Wienerovým procesem W. Protože je f deterministická funkce, z teorie Itôova integrálu víme, že $Y = \int_0^{(.)} f(s)dW_s$ je spojitý centrovaný gaussovský proces s kovarianční funkcí $\int_0^{\min\{s,t\}} f^2 d\lambda$, $s, t \in \mathbb{R}_+$, neboli proces s konečněrozměrnými rozděleními (1.5).

Tedy $X \sim Y$, což speciálně platí i pro jejich restrikce na interval $[0, 1]$ (stochastický proces X s indexovou množinou T značme zkráceně (X, T)), přičemž je $\mathbb{R}$ separabilní metrický prostor a $\mathbb{C}$ úplný separabilní metrický prostor splňující $\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,1]} \cap \mathbb{C}$, protože

$$\{g \in \mathbb{C}; ||g - h|| < \epsilon\} = \bigcap_{t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \left\{g \in \mathbb{C}; g(t) \in U_\epsilon^{\mathbb{R}}(h(t))\right\},\ h \in \mathbb{C},\ \epsilon > 0$$

a naopak projekce

$$p_t : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : x \mapsto x_t,\ t \in [0, 1]$$

jsou borelovsky měřitelné, přičemž $p_t^{-1}(B) \cap \mathbb{C}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $t \in [0, 1]$, generují $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,1]} \cap \mathbb{C}$. Dle věty 2 má $(X, [0, 1])$ modifikaci do $\mathbb{C}$.

Klasickým postupem dostaneme existenci spojité modifikace X^* procesu $X = (X, \mathbb{R}_+)$. Stačí poslepovat $X^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, modifikace procesů $(X, [k - 1, k])$ na množině

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \left[X_k^{(k)} = X_k^{(k+1)}, k \in \mathbb{N}\right] \in \mathcal{A},$$

pro kterou platí $\mathbf{P}(A) = 1$, a pro $\omega \in A^{\complement}$ dodefinovat $X^*(\omega)$ jako konstantní funkci.

Předveďme ještě aplikaci věty 4 v plné obecnosti. Mějme na našem pravděpodobnostním prostoru úplnou filtraci

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \mathbb{R}_+) = \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$$

a $\mathcal{F}$-adaptovaný d-rozměrný Wienerův proces W. Nechť $d \in \mathbb{N}$ a označme $\mathbb{M}^d$ prostor čtvercových matic stupně d. Uvažujme homogenní SDR

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,\ X_0 = x, \tag{1.7}$$

kde $x \in \mathbb{R}^d$ a koeficienty

$$b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,\ \sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{M}^d$$

jsou Lipschitzovské a maximálně lineárního růstu (například speciálně omezené). Podle [15], str. 36, věty 2.1 pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existuje silně jednoznačné silné řešení X^x rovnice (1.7). Tento model by ale nebyl v praxi příliš použitelný, pokud by malé změny počáteční podmínky x měly výrazný vliv na trajektorie $X^x(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Zformulujeme větu 21.3. z [8], str. 415.

Věta 5 (Itôova)**.** *Stochastický objekt*

$$\left\{X_t^x, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\right\}$$

má spojitou modifikaci.

Pro usnadnění technických kroků dokážeme větu 5 jen pro

$$\left\{X_t^x, (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d\right\}.$$

Nejprve ukážeme silnější tvrzení. Protože je $X = \left\{X^x, x \in \mathbb{R}^d\right\}$ stochastické pole s množinou stavů v úplném separabilním metrickém prostoru $\mathbb{C}$, s použitím věty 4 dostaneme spojitou modifikaci Y pole X, tedy takové Y, že

$$Y_x \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} X^x,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.8}$$

$$Y(\omega) \in \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}\right),\ \omega \in \Omega \tag{1.9}$$

($\mathbb{C}(T;S)$ značí prostor spojitých funkcí z metrického prostoru T do metrického prostoru S). K tomu nám opět stačí ověřit podmínku (1.3), kterou nám okamžitě dává spojitá závislost řešení (1.7) na počáteční podmínce (viz [15], str. 46, poznámka 2.5).

Rovnost $X_t^x \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} (Y_x)_t$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, dostaneme okamžitě z (1.8) prohozením kvantifikátorů. Vezměme nyní pevné $\omega \in \Omega$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ a posloupnosti $\{t_n\}_n \subset [0,1]$, $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}^d$ takové, že $t_n \to t$, $|x_n - x| \to 0$, $n \to \infty$. Dle (1.9) najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n - n_0 \in \mathbb{N}$ je $||Y_{x_n}(\omega) - Y_x(\omega)|| < \epsilon$ (speciálně $|(Y_{x_n})_{t_n}(\omega) - (Y_x)_{t_n}(\omega)| < \epsilon$) a současně $|(Y_x)_{t_n}(\omega) - (Y_x)_t(\omega)| < \epsilon$. Z toho již vidíme, že

$$\left((Y_x)_t(\omega), (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d\right) \in \mathbb{C}\left([0,1] \times \mathbb{R}^d\right)$$

($\mathbb{C}(A)$ bude vždy značit prostor spojitých funkcí na množině $A \neq \emptyset$).

1.2 Modifikace martingalů

Umluvíme se, že funkci $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ budeme nazývat rcll, jestliže bude zprava spojitá na $\mathbb{R}_+$ a bude mít konečné limity zleva ve všech bodech intervalu $(0, \infty)$. Podobně jako v předchozí kapitole budeme proces $(X, \mathbb{R}_+)$ jednoduše nazývat rcll, jestliže budou rcll všechny jeho trajektorie $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ (někdy se také říká, že X má *regulované trajektorie*). V tomto odstavci budeme směřovat k Doobově větě o regularizaci, která dává poměrně slabé požadavky na martingal $(X, \mathbb{R}_+)$ tak, aby měl rcll modifikaci. Přesné znění této věty je ale mnohem jemnější a dopracujeme se k němu na konci tohoto odstavce.

Začněme tím, že poznamenáme důležitost této věty. Prostor rcll funkcí (na $\mathbb{R}_+$) označíme $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbb{R}_+)$ a na tomto prostoru definujeme konvergenci posloupnosti $\{f_n\}_n \subset \mathbb{D}$ k prvku $f \in \mathbb{D}$ ve smyslu existence posloupnosti homeomorfismů $\{\lambda_n\}_n$ množiny $\mathbb{R}_+$ na $\mathbb{R}_+$ takových, že $\lambda_n(0) = 0$, $\lambda_n(\infty) = \infty$, $n \in \mathbb{N}$, a

$$\sup_{s \le t} |\lambda_n(s) - s| + \sup_{s \le t} |f_n(\lambda_n(s) - f(s))| \to 0,\ n \to \infty,\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.10}$$

takzvanou *Skorochodovovu konvergenci*. Prostor $\mathbb{D}$ s topologií danou konvergencí (1.10) je polský, neboli existuje metrika $\rho_{\mathbb{D}}$ metrizující tuto topologii taková, že $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$ je úplný a separabilní metrický prostor. Uvažujme martingal $(X, \mathbb{R}_+)$ a jeho modifikaci $(Y, \mathbb{R}_+)$ do množiny $\mathbb{D}$. X je opět měřitelné zobrazení ve smyslu

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}_+})$$

a podobně jako v předchozí kapitole můžeme dokázat, že je Y náhodná veličina ve smyslu

$$Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{D}, \mathcal{B}(\mathbb{D})).$$

Má tedy zpravidla smysl uvažuvat konvergenci martingalů jako konvergenci v distribuci náhodných veličin s hodnotami v úplném separabilním metrickém prostoru. Pokud uvažujeme posloupnost náhodných veličin $\{Y^n\}_n$ s hodnotami v $\mathbb{D}$ takovou, že $Y_n \to Y$ v distribuci (značme $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$), tak

$$(Y^n_{t_1}, \dots, Y^n_{t_k}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}),\ t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}.$$

Pro konvergenci $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ jsou známé nutné a postačující podmínky, některé je možné nalézt v [8], str. 313–316, Appendixu A.2 (věta 2).

Dále v tomto odstavci budeme používat velmi známé výsledky z teorie martingalů. O teorii martingalů je možné se dočíst například v [8] (kapitola 7), [16], [6] (str. 241–242) nebo [10] (kapitoly 1, 3 a 4).

Nechť je $(\mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ filtrace. Řekneme, že je $(\mathcal{F}^a, \mathbb{R}_+)$ *augmentace* $(\mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$, jestliže je to nejmenší filtrace nad $(\mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ splňující UC (běžné podmínky). Pokud pro $(\mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ označíme $(\mathcal{F}^+, \mathbb{R}_+)$ nejmenší zprava spojitou filtraci nad $(\mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ a $(\overline{\mathcal{F}}, \mathbb{R}_+)$ nejmenší úplnou filtraci nad $(\mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$, tak $\left(\overline{\mathcal{F}}\right)^+ = \overline{(\mathcal{F}^+)}$ podle [8], str. 124, věta 7.8 a navíc $\mathcal{F}^a = \left(\overline{\mathcal{F}}\right)^+$.

Mějme $T \subset \mathbb{R}_+$, funkci $f : T \to \mathbb{R}$ a reálná $a < b$. Definujeme $N^b_a(f)$ jako počet překročení intervalu $[a, b]$ funkcí f nahoru, neboli jako

$$\sup \left\{ n \in \mathbb{N}_0;\ \exists_{s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n \in T, s_1 < t_1 < \dots < s_n < t_n}\ \forall_{k=1,\dots,n}\ f(s_k) < a, f(t_k) > b \right\}.$$

Pokud předpokládáme T spočetnou, tak pro stochastický proces (X,T) je $N_a^b(X)$ náhodná veličina, protože

$$\left[N_a^b \geq k\right] = \bigcup_{s_1<t_1<\ldots<s_k<t_k, s_l, t_l \in T, l \in \{1,\ldots,k\}} \bigcap_{l=1}^{k} ([X_{s_l} < a] \cap [X_{t_l} > b]),\ k \in \mathbb{N}_0$$

Počet přechodů intervalu $[a,b]$ dolů $D_a^b(f)$ funkcí f definujeme jako $N_{-b}^{-a}(-f)$.

V důkazu budeme potřebovat vylepšení známe Doobovy-Snellovy nerovnosti ([16], str. 350, věta 6.2.8, [10], str. 32, věta 3.12).

Definice 6 (Doprava orientovaná množina)**.** Uvažujme částečně uspořádanou množinu $A = (A, \preccurlyeq)$. Řekneme, že je A *doprava orientovaná*, jestliže

$$\forall_{a_1,a_2 \in A} \ \exists_{a_3 \in A} \ a_3 \succcurlyeq \max\{a_1, a_2\}.$$

Definice 7 (Neklesající filtr)**.** Mějme system zobecněných reálných (numerických) funkcí $F_A = \{f_a, a \in A\}$ na Ω. Řekneme, že je F_A *neklesající filtr*, jestliže

$$(a \preccurlyeq b) \Rightarrow (f_a(\omega) \leq f_b(\omega), \omega \in \Omega),\ a, b \in A.$$

Pro doprava orientovanou A a neklesající filtr F_A nyní zformulujeme následující zobecnění věty o monotonní konvergenci.

Lemma 6. *Nechť je A spočetná a pro každé $f \in F_A$*

$$f : (\Omega, \mathcal{A}) \to ([0,\infty], \mathcal{B}[0,\infty])$$

měřitelné zobrazení. Pak

$$\mathbf{E} \sup_{a \in A} f_a = \sup_{a \in A} \mathbf{E} f_a. \tag{1.11}$$

Speciálně pro volbu $F_A = \{\mathbf{I}_{B_a}, a \in A\}$ ($\mathbf{I}_A(\omega)$ značí indikátor $\omega \in \Omega$, $A \subset \Omega$) tak, že

$$B_a \in \mathcal{A},\ (a \preccurlyeq b \Rightarrow B_a \subset B_b),\ a, b \in A,$$

dostaneme

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{a \in A} B_a\right) = \sup_{a \in A} \mathbf{P}(B_a). \tag{1.12}$$

Důkaz. Díky spočetnosti A můžeme její prvky očíslovat přirozenými čísly. Tedy $F_A = \{f_1, f_2, \ldots\}$. Vytvoříme systém $F^* = \{f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots\}$, kde $f_{k_n} \in F_A$ a $f_{k_{n+1}} \geq \max\{f_{k_n}, f_n\}$. Posloupnost $\{f_{k_n}\}_n$ je neklesající a

$$\lim_{n\to\infty} f_{k_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{k_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \tag{1.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} f_{k_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E} f_{k_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E} f_n \tag{1.14}$$

(jednu nerovnost v obou případech máme z toho, že $F^* \subset F_A$, a druhou z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_{k_n} \geq f_n$). Tvrzení lemmatu již plyne z (1.13), věty o monotonní konvergenci a (1.14).

Q.E.D.

Měly bychom zmínit, že (1.12) a tedy ani (1.11) obecně neplatí v případě, kdy je A (doprava orientovaná) nespočetná:

Příklad 4. Nechť $A = \mathfrak{k}[0,1]$, $B_a = a$ pro $a \in A$ a $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$. Pak $\mathbf{P}\left(\bigcup_{a\in A} B_a\right) = 1$ a $\sup_{a\in A} \mathbf{P}(B_a) = 0$.

Poznamenejme, že (1.11), případně (1.12), platí pro obecnou (doprava orientovanou) A v případě, že f_a, $a \in A$, jsou zdola polospojité ([14], str. 42, tvrzení 5), případně B_a, $a \in A$, otevřené vzhledem k tomu, že λ je jako borelovská pravděpodobnost τ-aditivní ([16], str. 63,I.7.4).

V následujících lemmatech bude uvažována $T \subset \mathbb{R}_+$ jako spočetná indexová množina, $(\mathcal{F}, T)$ jako filtrace a (X, T) jako $(\mathcal{F}, T)$-submartingal (pro stručnost můžeme psát $(X, \mathcal{F}, T)$ je submartingal, případně $(X, \mathcal{F})$ je submartingal).

Lemma 7. *Nechť je (X, T) $\mathbb{L}_1$-omezený. Potom*

$$\mathbf{E} N_a^b X < \infty,\ a < b.$$

Důkaz. Položme $A = \mathfrak{k}(T)$. Potom je A s množinovým uspořádáním spočetná doprava orientovaná (pro $K_1, K_2 \in \mathfrak{k}(T)$ volíme $K_3 = K_1 \cup K_2$) a $\{N_a^b(X,K), K \in A\}$ neklesající filtr. Platí rovnost

$$N_a^b(X,T) = \sup_{K\in A} N_a^b(X,K)$$

a proto dle lemmatu 6, již zmíněné Doobovy-Snellovy nerovnosti pro konečné martingaly a předpokladu věty obdržíme hledanou nerovnost

$$\mathbf{E} N_a^b(X,T) = \sup_{K\in A} \mathbf{E} N_a^b(X,K) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbf{E}(X_n - a)^+}{b-a} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbf{E}|X_n| + |a|}{b-a} < \infty.$$

Q.E.D.

Dále potřebujeme vylepšit tvrzení známé submartingalové maximální nerovnosti ([16], VI.2.7. nebo [10], str. 28, věta 3.5).

Lemma 8. *Platí*

$$r\mathbf{P}\left(\sup_{t\in T}|X_t| > r\right) \leq 3\sup_{t\in T}\mathbf{E}|X_t|,\ r \geq 0. \tag{1.15}$$

Je-li speciálně (X,T) $\mathbb{L}_1$*-omezený, tak*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in T}|X_t| < \infty\right) = 1. \tag{1.16}$$

Důkaz. Opět budeme uvažovat $A = \mathfrak{k}(T)$ s množinovým uspořádáním. Zvolme zatím pevné $r \geq 0$. System indikátorů množin

$$B_K = \left[\sup_{t\in K}|X_t| > r\right],\ K \in A,$$

je neklesající filtr, přičemž

$$\bigcup_{K\in A} B_K = \left[\sup_{t\in T}|X_t| > r\right].$$

Podle lemmatu 6 a klasické submartingalové maximální nerovnosti máme:

$$r\mathbf{P}\left[\sup_{t\in T}|X_t| > r\right] \leq \sup_{K\in A}\left(2\mathbf{E}(X_{\max K})^+ - \mathbf{E}X_{\min K}\right)$$
$$\leq 3\sup_{K\in A}\sup_{t\in K}\mathbf{E}|X_t| = 3\sup_{t\in T}\mathbf{E}|X_t|.$$

Pro druhou část tvrzení stačí s použitím (1.15) (a předpokládané konečnosti pravé strany této rovnosti) spočítat pravděpodobnost

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left[\sup_{t\in T}|X_t| > n\right]\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{3\sup_{t\in T}\mathbf{E}|X_t|}{n} = 0.$$

Q.E.D.

Lemma 9. *Pro* (X,T) $\mathbb{L}_1$*-omezený existuje* $\Omega_0 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$, *taková, že pro každou monotonní posloupnost* $\{t_n\}_n \subset T$ *a* $\omega \in \Omega_0$ *existuje konečná* $\lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$.

Důkaz. Označme

$$\Omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left[\sup_{t\in T} |X_t| < \infty\right] \cap \bigcap_{a<b, a,b\in\mathbb{Q}} \left[N_a^b X < \infty\right].$$

Z lemmat 8 a 7 dostáváme $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$. Zvolme pevné $\omega \in \Omega_0$ a monotonní $\{t_n\}_n \subset T$. Nejprve se přesvědčíme, že $\lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$ existuje. Pokud by neexistovala, tak bychom nalezli $a < b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, takové, že

$$\liminf_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega) < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$$

a nutně $N_a^b(X(\omega)) = \infty$, což je spor. Kromě toho víme, že je $X(\omega)$ omezená, což nám dává konečnost $\lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$.

Q.E.D.

Poznamenejme, že z lemmatu 9 speciálně plyne klasická věta o konvergenci submartingalu, která říká, že pro $(X, \mathcal{F}, \mathbb{N})$ $\mathbb{L}_1$-omezený existuje integrovatelná náhodná veličina X_∞ taková, že $X_n \to X_\infty$, $n \to \infty$, $\mathbf{P}$-s.j. Lemma 9 nám totiž dává množinu $\Omega_0 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$, takovou, že $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ existuje konečná, $\omega \in \Omega_0$. $X_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} X_n \mathbf{I}_{\Omega_0}$ je pak reálná náhodná veličina taková, že

$$\mathbf{E}|X_\infty| = \mathbf{E} \lim_{n\to\infty} |X_n| \le \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}|X_n| < \infty.$$

Lemma 10. *Existuje (opět pro obecný submartingal $(X, \mathcal{F}, T)$) množina $\Omega^* \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(\Omega^*) = 1$, taková, že pro každou monotonní omezenou posloupnost $\{t_n\}_n \subset T$ a $\omega \in \Omega^*$ existuje konečná $\lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$.*

Důkaz. Zvolme posloupnost $\{d_n\}_n \subset T$ takovou, že $d_n \to \sup T$, $n \to \infty$, a definujme $X^n \stackrel{\text{def}}{=} (X, T \cap [0, d_n])$, $n \in \mathbb{N}$. Martingal X^n má shora omezenou indexovou množinu, tedy je $\mathbb{L}_1$-omezený (Jensenova nerovnost).

Pro pevné $n \in \mathbb{N}$ proto podle lemmatu 9 existuje množina $\Omega_n \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(\Omega_n) = 1$, taková, že pro každou posloupnost $\{t_k\}_k \subset T \cap [0, d_n]$ a $\omega \in \Omega_n$ existuje konečná $\lim_{k\to\infty} X_{t_k}^n(\omega) = \lim_{k\to\infty} X_{t_k}(\omega)$.

Pokud tedy nyní označíme

$$\Omega^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n,$$

tak $\mathbf{P}(\Omega^*) = 1$ a vidíme, že je Ω^* hledaná množina (stačí pro každou monotonní omezenou posloupnost $\{t_k\}_k \subset T$ a $\omega \in \Omega^*$ nalézt $n, k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $t_k \le d_n$, $k - k_0 \in \mathbb{N}$, a uvědomit si, že $\omega \in \Omega_n$).

Q.E.D.

Označme ještě $\mathbb{D}[0,\infty]$ jako množinu funkcí $f \in \mathbb{D}$ takových, že existuje $\lim_{t\to\infty} f(t) \in \mathbb{R}$.

Lemma 11. *Nechť je T spočetná hustá podmnožina $\mathbb{R}_+$ a $g : T \to \mathbb{R}$ funkce taková, že pro každou monotonní omezenou posloupnost $\{t_n\}_n \subset T$ existuje konečná $\lim_{n\to\infty} g(t_n)$. Potom dostaneme jedinou rekonstrukci g^* funkce g patřící do $\mathbb{D}$.*

Důkaz. Pro $x \in \mathbb{R}_+$ definujeme

$$g^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} g(t_n),\ \{t_n\}_n \subset T,\ t_n \stackrel{n\to\infty}{\to} x_+. \tag{1.17}$$

Definice je korektní, protože pro každé dvě posloupnosti $\{t_n\}_n \subset T$ a $\{s_n\}_n \subset T$, $t_n \to x_+$, $s_n \to x_+$, $n \to \infty$, a klesající posloupnost $\{r_n\}_n \subset T$ s podposloupnostmi $\{s_n\}_n$ a $\{t_n\}$ existuje

$$\lim_{n\to\infty} g(r_n) = \lim_{n\to\infty} g(t_n) = \lim_{n\to\infty} g(s_n).$$

Ověříme, že je g^* skutečně zprava spojitá na $\mathbb{R}_+$. Uvažujme bod pravé nespojitosti $x \in \mathbb{R}_+$ funkce g^* a $\epsilon > 0$, $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}_+$ takové, že

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ x_n \in \left(x, \min\{x_{n-1}, x + \frac{1}{n}\}\right), |g^*(x) - g^*(x_n)| \geq \epsilon$$

(x_0 dodefinováno jako $x + 1$). Podle (1.17):

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{t_n\in(x_{n+1},x_n)}{\exists}\ |g^*(x_n) - g(t_n)| < \frac{\epsilon}{4}, \tag{1.18}$$

tedy obdržíme posloupnost bodů $\{t_n\}_n \subset T$, $t_n \to x_+$, $n \to \infty$, takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $|g(t_n) - g^*(x)| \geq \frac{3\epsilon}{4}$, což je spor s (1.17).

Podobně ověříme, že má g^* konečné limity zleva na $(0,\infty)$. Nechť to pro $x \in (0,\infty)$ není splněno. Potom existuje posloupnost $\{x_n\}_n \subset T$, $x_n \to x_-$, $n \to \infty$, a kladné ϵ takové, že

$$|g^*(x_n) - g^*(x_m)| \geq \epsilon,\ m, n \in \mathbb{N}.$$

(1.18) nám opět dává monotonní omezenou posloupnost $\{t_n\}_n \subset T$ takovou, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ je $|g(t_m) - g(t_n)| \geq \frac{\epsilon}{2}$, což je spor s předpokladem kladeným na g. Pokud BÚNO předpokládáme, že $g^*(x_n) \to \infty$, $n \to \infty$, tak i $g(t_n) \to \infty$, $n \to \infty$, což je opět spor.

Q.E.D.

Lemma 12. *Nechť je T spočetná hustá podmnožina $\mathbb{R}_+$ a (g, T) reálná funkce taková, že pro každou monotonní posloupnost $\{t_n\}_n \subset T$ existuje konečná $\lim_{n\to\infty} g(t_n)$. Potom dostaneme jedinou rekonstrukci g^* funkce g patřící do $\mathbb{D}[0, \infty]$.*

Důkaz. Důkaz je z velké části stejný jako důkaz lemmatu 11, navíc je potřeba ověřit jen podmínku existence konečné $\lim_{x\to\infty} g^*(x)$. Nechť je $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}_+$ taková, že $x_n \to \infty$, $n \to \infty$. Pokud uvažujeme necauchiovskost $\{g^*(x_n)\}_n$ nebo nekonečnost $\lim_{x\to\infty} g^*(x)$, tak dojdeme ke sporu analogicky jako v druhé části důkazu lemmatu 11.

Q.E.D.

Ještě potřebujeme:

Lemma 13. *Uvažujme inverzní supermartingal $(X, \mathcal{F}, \mathbb{N})$ takový, že $s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}X_n < \infty$. Pak je $(X, \mathbb{N})$ stejnoměrně integrovatelná.*

Důkaz. Z definice inverzního supermartingalu plyne, že $\mathbf{E}X_n \to s_-$, $n \to \infty$. Zvolme zatím pevná kladná ϵ a c. Existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathbf{E}X_n - \mathbf{E}X_k < \epsilon$, $n - k \in \mathbb{N}$. Pro $n - k \in \mathbb{N}$ počítejme

$$\mathbf{E}\left[|X_n|\mathbf{I}_{[|X_n|\geq c]}\right] = 2\mathbf{E}\left[X_n^-\mathbf{I}_{[|X_n|\geq c]}\right] + \mathbf{E}X_n - \mathbf{E}\left[X_n\mathbf{I}_{[|X_n|<c]}\right]$$

$$\leq 2\mathbf{E}\left[X_k^-\mathbf{I}_{[|X_n|\geq c]}\right] + \mathbf{E}X_k + \epsilon - \mathbf{E}\left[X_k\mathbf{I}_{[|X_n|<c]}\right] = \mathbf{E}\left[|X_k|\mathbf{I}_{[|X_n|\geq c]}\right] + \epsilon,$$

$$\mathbf{P}(|X_n| \geq c) \leq \frac{\mathbf{E}|X_n|}{c} = \frac{\mathbf{E}X_n + 2\mathbf{E}X_n^-}{c} \leq \frac{s + 2\mathbf{E}X_1^-}{c},$$

protože $(.)^-$ je nerostoucí konvexní funkce na $\mathbb{R}$. Celkem tedy

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\left[|X_n|\mathbf{I}_{[|X_n|\geq c]}\right]$$

$$\leq \max_{n\in\{1,\ldots,k\}} \lim_{c\to\infty} \sup_{\left\{A\in\mathcal{A};\mathbf{P}(A)\leq\frac{s+2\mathbf{E}X_1^-}{c}\right\}} (\mathbf{E}\left[|X_n|\mathbf{I}_A\right] + \epsilon) = \epsilon$$

(ze stejnoměrné spojitosti integrálu) a stačí provést limitní přechod $\epsilon \to 0_+$.

Q.E.D.

Nyní již máme vše připravené pro důkaz hlavní věty tohoto odstavce. Uvažujme submartingal $(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ a jeho restrikci $(Y, \mathbb{Q}_+)$. Kombinací lemmat 10 a 11 (konkrétně uvažujeme $T = \mathbb{Q}_+$) dostaneme množinu $\Omega_0 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$, takovou, že pro všechny její prvky ω je $(Y^*(\omega), \mathbb{R}_+) \in \mathbb{D}$ ($(.)^*$ v tomto odstavci používáme ve stejném smyslu jako v lemmatu 11).

Pokud navíc předpokládáme $\mathbb{L}_1$-omezenost $(X, \mathbb{R}_+)$, podobně s pomocí lemmat 9 a 12 pro $\Omega_0 = [(Y^*, \mathbb{R}_+) \in \mathbb{D}[0, \infty]]$ je $\Omega_0 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$.

Položme $X_t^* = X_t \mathbf{I}_{\Omega_0}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Věta 14 (O rcll-rekonstrukci submartingalu)**.** *$(X^*, \mathcal{F}^a, \mathbb{R}_+)$ je rcll submartingal.*

Pro $(X, \mathbb{R}_+)$ $\mathbb{L}_1$-omezený navíc existují $\lim_{t\to\infty} X_t^*(\omega) \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$.

Důkaz. Dokážeme první část věty, druhou je možné dokázat analogicky. Pro každé $t \in \mathbb{R}_+$ je X_t^* jako součin $\mathcal{F}_t^+$-měřitelné a $\overline{\mathcal{F}_t}$-měřitelné náhodné veličiny $\mathcal{F}_t^a$-měřitelná. Integrovatelnost X_t^* máme z toho, že pro každou posloupnost $\{t_n\}_n$ klesající k t pro $n \to \infty$ je náhodná posloupnost $\{Y_{t_n}\}_n$ inverzní supermartingal se

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E} Y_{t_n} \le \mathbf{E} X_t < \infty,$$

a z lemmatu 13.

Ověřme martingalovou vlastnost X^*. Volme $s, t \in \mathbb{R}_+$ a posloupnosti $\{s_n\}_n \subset [s, t)$, případně $\{t_n\}_n \subset [t, \infty)$, klesající k s, případně k t. Víme, že

$$Y_{s_m} \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{\le} \mathbf{E}[Y_{t_n} | \mathcal{F}_{s_m}], \; n, m \in \mathbb{N}.$$

Poznamenejme, že:

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{s_m} = \mathcal{F}_s^+,$$

$$Y_{s_m} = Y_{s_m}^* \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{\to} X_s^*, \; m \to \infty,$$

$$\mathbf{E} |Y_{t_n} - X_t^*| \to 0, \; n \to \infty$$

(již víme, že $\{Y_{t_n}\}_n$ je stejnoměrně integrovatelná) a tedy i

$$\mathbf{E}\left[\left|\mathbf{E}\left[Y_{t_n}|\mathcal{F}_s^+\right] - \mathbf{E}\left[X_t^*|\mathcal{F}_s^+\right]\right|\right] \to 0, \; n \to \infty.$$

Navíc víme, že i $\{\mathbf{E}[Y_{t_n}|\mathcal{F}_s^+]\}_n$ je stejnoměrně integrovatelná, existuje $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[Y_{t_n}|\mathcal{F}_s^+]$ **P**-s.j. a je ta z jednoznačnosti **P**-s.j. limity v $\mathbb{L}_1$ rovna $\mathbf{E}[X_t^*|\mathcal{F}_s^+]$ **P**-s.j. Provedeme-li tedy po řadě limitní přechody $m \to \infty$ a $n \to \infty$, z [10], str. 39, tvrzení 4.10 dostaneme

$$X_s^* \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{\le} \mathbf{E}\left[X_t^*|\mathcal{F}_t^+\right] \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \mathbf{E}\left[X_t^*|\mathcal{F}_t^a\right].$$

Q.E.D.

Poznamenejme, že:

1. Věta 14 nám zatím neříká, že je $(X^*, \mathbb{R}_+)$ modifikace $(X, \mathbb{R}_+)$.

2. Věta 14 zatím neříká, že je $(X^*, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ submartingal.

Věta 15 (O existenci rcll modifikace submartingalu)**.** *Jestliže jsou filtrace $(\mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ a funkce $(\mathbf{E}X, \mathbb{R}_+)$ zprava spojité, tak je $(X^*, \mathbb{R}_+)$ modifikace $(X, \mathbb{R}_+)$.*

Za předpokladu spojitosti zprava filtrace $(\mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ má $(X, \mathbb{R}_+)$ zprava spojitou modifikaci tehdy a jen tehdy, když je $(\mathbf{E}X, \mathbb{R}_+)$ zprava spojitá.

Důkaz. Nejprve dokážeme první část tvrzení. Zvolme posloupnost $\{t_n\}_n \subset \mathbb{Q}_+$ klesající k t pro $n \to \infty$. Potom

$$X_t \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{\leq} \mathbf{E}\left[X_{t_n}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}\left[Y_{t_n}|\mathcal{F}_t\right], \ n \in \mathbb{N}.$$

Vzpomeňme si, že $\{Y_{t_n}\}_n$ konverguje k X_t^* $\mathbf{P}$-s.j. a $\{Y_{t_n}\}_n$ je inverzní supermartingal. Podobně jako ve věte 14 obdržíme

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[Y_{t_n}|\mathcal{F}_t\right] \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \mathbf{E}\left[X_t^*|\mathcal{F}_t\right].$$

Provedeme-li tedy limitní přechod $n \to \infty$, dostaneme

$$X_t \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{\leq} \mathbf{E}\left[X_t^*|\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}\left[X_t^*|\mathcal{F}_t^+\right] \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \mathbf{E}\left[X_t^*|\mathcal{F}_t^a\right] \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} X_t^*.$$

Protože navíc ze stejnoměrné integrovatelnosti a spojitosti zprava $\{X_{t_n}^*\}$ platí

$$\mathbf{E}X_t = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_{t_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_{t_n}^* = \mathbf{E} \lim_{n\to\infty} X_{t_n}^* = \mathbf{E}X_t^*,$$

dostaneme

$$\mathbf{E}|X_t^* - X_t| = \mathbf{E}(X_t^* - X_t) = 0.$$

V důkazu druhé části tvrzení nám zbývá za předpokladu spojitosti zprava $(\mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ dokázat, že existence rcll modifikace $(Z, \mathbb{R}_+)$ procesu $(X, \mathbb{R}_+)$ implikuje spojitost zprava $(\mathbf{E}X_t, \mathbb{R}_+)$:

Pro $t \in \mathbb{R}_+$ platí

$$\lim_{s\to t_+, s\in\mathbb{Q}_+} Z_t \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \lim_{s\to t_+, s\in\mathbb{Q}_+} X_t \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \lim_{s\to t_+, s\in\mathbb{Q}_+} X_t^*,$$

ze spojitosti zprava Z a X^* dostáváme $X_t^* \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} Z_t \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} X_t$, z čehož dále

$$\lim_{s\to t_+} \mathbf{E}X_s = \lim_{s\to t_+} \mathbf{E}X_s^* = \mathbf{E} \lim_{s\to t_+} X_s^* = \mathbf{E}X_t^* = \mathbf{E}X_t.$$

Q.E.D.

Příklad 5. Položíme-li $(\Omega, \mathcal{A}) = (\{\omega_1, \omega_2\}, \sigma\{\{\omega_1\}\})$, $X_t(\omega_i) = (-1)^i t$, $t \in \mathbb{R}_+$, $i \in \{1, 2\}$, tak máme spojitý proces $(X, \mathbb{R}_+)$ takový, že

$$\mathcal{F}_0^X = \{\emptyset, \Omega\} \underset{\neq}{\subset} (\mathcal{F}_0^X)^+.$$

Příklad 6. Pro náhodnou veličinu τ a $(\mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ zprava spojitou filtraci položíme $X_t = \mathbf{P}\left(\tau \leq t | \mathcal{F}_t\right)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Snadno ověříme, že je $(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ submartingal takový, že je $(\mathbf{E}X, \mathbb{R}_+)$ zprava spojitá. Podle věty 15 máme jeho rcll modifikaci X^* pro kterou navíc existuje $\lim_{t\to\infty} X_t^*$.

Z příslušně třídy ekvivalence tedy vybereme $\mathbf{P}(\tau \leq t|\mathcal{F}_t) = X_t^*$. Konkrétně dostáváme

$$\lim_{s \to t_+} \mathbf{P}(\tau \leq s|\mathcal{F}_s) = \mathbf{P}(\tau \leq t|\mathcal{F}_t),\ t \in \mathbb{R}_+$$

a existenci

$$\lim_{s \to t_-} \mathbf{P}(\tau \leq s|\mathcal{F}_s) \in \mathbb{R},\ t \in (0, \infty),$$

$$X_\infty \overset{\text{def}}{=} \lim_{s \to \infty} \mathbf{P}(\tau \leq s|\mathcal{F}_s) \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme, že $\{\mathbf{P}(\tau \leq s|\mathcal{F}_s), s \in \mathbb{R}_+\}$ jsou stejnoměrně integrovatelné a podle Lebesgueovy věty konverguje $\mathbf{P}(\tau \leq s|\mathcal{F}_s)$ k X_∞ v $\mathbb{L}_1$ (pro $s \to \infty$), přičemž

$$\mathbf{E}|\mathbf{P}(\tau \leq s|\mathcal{F}_s)| = \mathbf{E}\mathbf{P}(\tau \leq s|\mathcal{F}_s) = \mathbf{P}(\tau \leq s) \to 1,\ s \to \infty.$$

Tedy podle věty o jednoznačnosti $\mathbb{L}_1$-limity (ve smyslu $\mathbf{P}$-s.j.) je $X_\infty \overset{\mathbf{P}\text{-s.j.}}{=} 1$.

1.3 Separabilní modifikace

V tomto odstavci budeme pracovat se stochastickým procesem $X = (X, T)$ s hodnotami v E, kde T bude vždy interval v $\mathbb{R}_+$ s otevřenými množinami $\mathcal{G}$ a E bude vždy metrický prostor s uzavřenými množinami $\mathcal{F}$. $\mathcal{G}$ má zřejmě spočetnou bázi $\mathcal{G}_0$ uzavřenou na konečná sjednocení.

Symbolem $\mathfrak{c}(A)$ značme systém spočetných podmnožin $A \subset T$ a symbolem $\mathcal{N}$ systém $N \in \mathcal{A}$ takových, že $\mathbf{P}(N) = 0$. Zformulujeme klíčovou definici tohoto odstavce zmíněnou již v Úvodu.

Definice 8 (Separabilita stochastického procesu)**.** Stochastický proces X se nazývá *separabilní*, jestliže existuje $N \in \mathcal{N}$ a spočetná hustá podmnožina S jeho indexové množiny T takové, že

$$X_t(\omega) \in \bigcap_{t \in G \in \mathcal{G}} \overline{X(G \cap S, \omega)},\ \omega \notin N,\ t \in T. \tag{1.19}$$

Přitom množina S je takzvaný *separant* procesu X.

1. Poznamenejme, že je (1.19) ekvivalentní

$$\overline{\{(s, X_s(\omega)); s \in S\}} = \{(t, X_t(\omega)); t \in \mathbb{R}_+\},\ \omega \notin N.$$

   Z toho speciálně dostáváme, že S musí být hustá v T.

2. Funkce $f : T \to E$ se nazývá S-separabilní, jestliže

$$f(t) \in \bigcap_{t \in G \in \mathcal{G}} \overline{f(G \cap S)}, t \in T,$$

   nebo ekvivalentně

$$\overline{\{(s, f(s)); s \in S\}} = \{(t, f(t)), t \in \mathbb{R}_+\}.$$

   Vidíme, že separabilitu X můžeme ekvivalentně vyjádřit jako S-separabilitu $X(\omega)$ pro $\mathbf{P}$-s.v. $\omega \in \Omega$.

Ukážeme si některé užitečné vlastnosti separabilních procesů, které nám dávají důvod hledat podmínky pro existenci separabilní modifikace procesu X.

Věta 16. *Nechť je X proces na úplném pravděpodobnostním prostoru separabilní se separantem S. Potom existuje $N \in \mathcal{N}$ taková, že pro $G \in \mathcal{G}$, $F \in \mathcal{F}$ máme*

$$[X_t \in F, t \in G] \Delta [X_s \in F, s \in G \cap S] \subset N. \tag{1.20}$$

Speciálně z úplnosti $\mathbf{P}$ platí

$$[X_t \in F, t \in G] \in \mathcal{A}. \tag{1.21}$$

Dále

$$\mathbf{P}(X_t \in F, t \in G) = \inf_{C \in \mathfrak{c}(G)} \mathbf{P}(X_s \in F, s \in C) \tag{1.22}$$

$$= \inf_{K \in \mathfrak{k}(G)} \mathbf{P}(X_s \in F, s \in K),\ G \in \mathcal{G},\ F \in \mathcal{F}. \tag{1.23}$$

Pro speciální případ $E = \overline{\mathbb{R}}$ jsou dokonce

$$\sup_{t \in G} X_t,\ \limsup_{t \to u} X_t,\ u \in T,\ G \in \mathcal{G},\ F \in \mathcal{F}, \tag{1.24}$$

numerické (zobecněné reálné) náhodné veličiny.

Důkaz. Použijme N z definice 8 a uvažujme pevná $G \in \mathcal{G}$, $F \in \mathcal{F}$. Pro $\omega \notin N$ a $u \in G$ takové, že $X_u(\omega) \in F^{\complement}$, dostáváme z otevřenosti $F^{\complement}$ a hustoty S v T existenci $s \in S \cap G$ takového, že $X_s(\omega) \in F^{\complement}$. Proto

$$[X_s \in F, s \in G \cap S] \subset [X_t \in F, t \in G] \cup N, \tag{1.25}$$

přičemž zřejmě

$$[X_t \in F, t \in G] \subset [X_s \in F, s \in G \cap S], \tag{1.26}$$

z čehož celkem obdržíme (1.20), speciálne (1.21) a navíc

$$\mathbf{P}(X_s \in F, s \in G \cap S) = \mathbf{P}(X_t \in F, t \in G)$$

$$\leq \inf_{C \in \mathfrak{c}(G)} \mathbf{P}(X_t \in F, t \in C) \leq \mathbf{P}(X_s \in F, s \in G \cap S),$$

což nám dává (1.22). Dle lemmatu 6 dostáváme rovnost (1.23):

$$\inf_{C \in \mathfrak{c}(G)} \mathbf{P}(X_s \in F, s \in C) = \inf_{C \in \mathfrak{c}(G), K \in \mathfrak{k}(C)} \mathbf{P}(X_s \in F, s \in K)$$

$$= \inf_{K \in \mathfrak{k}(G)} \mathbf{P}(X_s \in F, s \in K).$$

Mějme $G \in \mathcal{G}$. Z (1.19) plyne, že

$$\sup_{t \in G} X_t(\omega) \leq \sup_{s \in G \cap S} X_s(\omega) \leq \sup_{t \in G} X_t(\omega),\ \omega \notin N.$$

Z úplnosti $\mathbf{P}$ a měřitelnosti $\sup_{s \in G \cap S} X_s$ již dostáváme měřitelnost $\sup_{t \in G} X_t$.

Na závěr pro $u \in T$:

$$\limsup_{t \to u} X_t(\omega) = \inf_{u \in G \in \mathcal{G}} \sup_{t \in G} X_t(\omega) = \inf_{u \in G \in \mathcal{G}_0} \sup_{t \in G} X_t(\omega)$$

$$= \inf_{u \in G \in \mathcal{G}_0} \sup_{t \in G \cap S} X_t(\omega),\ \omega \notin N$$

což nám díky úplnosti $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ již dává měřitelnost $\limsup_{s \to u} X_t$.

Q.E.D.

Toto dává význam větě o existenci separabilní modifikace stochastického procesu s hodnotami v kompaktním metrickém prostoru E. K jejímu důkazu použijeme následující dvě lemmata. Uvědomme si, že v E (separabilním díky jeho kompaktnosti) existuje spočetná báze $\mathcal{F}_0$ uzavřených množin $\mathcal{F}$ (system doplňků prvků spočetné topologické báze E).

Lemma 17. *Pro stochastický proces* (X,T) *s hodnotami v kompaktním metrickém prostoru* E *existují* $S \in \mathfrak{c}(T)$ *a* $\mathcal{N}_0 = \{N_u; u \in T\} \subset \mathcal{N}$ *tak, že*

$$[X_s \in F, s \in G \cap S] \subset [X_u \in F] \cup N_u,\ F \in \mathcal{F},\ u \in G \in \mathcal{G}. \tag{1.27}$$

Důkaz. Vezměme $G \in \mathcal{G}$ a $F \in \mathcal{F}$. Zkonstruujme (jako spočetné sjednocení vhodně zvolených prvků $\mathfrak{c}(G)$) $C(F,G) \in \mathfrak{c}(G)$ takovou, že

$$\mathbf{P}(X_s \in F, s \in C(F,G)) = \inf_{C \in \mathfrak{c}(G)} \mathbf{P}(X_s \in F, s \in C), \tag{1.28}$$

a množiny

$$N_u(F,G) \stackrel{\text{def.}}{=} [X_s \in F, s \in C(F,G)] \cap [X_u \notin F]$$
$$= [X_s \in F, s \in C(F,G)] \setminus [X_s \in F, s \in (C(F,G) \cup \{u\})] \in \mathcal{N},\ u \in G,$$

takové, že

$$[X_s \in F, s \in C(F,G)] \subset [X_u \in F] \cup N_u(F,G),\ u \in G. \tag{1.29}$$

Stačí tedy definovat

$$S \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{F \in \mathcal{F}_0, G \in \mathcal{F}_0} C(F,G),$$

$$N_u \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{F \in \mathcal{F}_0, u \in G \in \mathcal{G}_0} N_u(F,G) \in \mathcal{N},\ u \in T$$

a ověřit, že S a $\mathcal{N}_0$ mají skutečně požadované vlastnosti:

Mějme $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$, $u \in G$. Pro $u \in G_0 \subset G$, $G_0 \in \mathcal{G}_0$ je dle (1.29)

$$[X_s \in F, s \in G \cap S] \subset \bigcap_{F \subset F_0 \in \mathcal{F}_0} [X_s \in \mathcal{F}_0, s \in G_0 \cap S]$$

$$\subset \bigcap_{F \subset F_0 \in \mathcal{F}_0} [X_s \in F_0, s \in C(F_0,G_0)] \subset \bigcap_{F \subset F_0 \in \mathcal{F}_0} ([X_u \in F_0] \cup N_u(F_0,G_0))$$

$$\subset \bigcap_{F \subset F_0 \in \mathcal{F}_0} [X_u \in F_0] \cup N_u = [X_u \in F] \cup N_u.$$

Q.E.D.

Lemma 18. *Pro stochastický proces* (X,T) *s hodnotami v kompaktním metrickém prostoru* E *existují* $S \in \mathfrak{c}(T)$ *a* $\{N_u; u \in T\} \subset \mathcal{N}$ *tak, že*

$$X_u(\omega) \in \overline{X(G \cap S, \omega)},\ u \in G \in \mathcal{G},\ \omega \notin N_u \tag{1.30}$$

neboli

$$X_u(\omega) \in \bigcap_{u \in G \in \mathcal{G}} \overline{X(G \cap S, \omega)},\ \omega \notin N_u,\ u \in T. \tag{1.31}$$

Dokážeme dokonce ekvivalenci (1.27) a (1.30):

(1.30) $\Rightarrow$ (1.27): Nechť $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$, $u \in G$ a buď $\omega \notin N_u$ takové, že $X_u(\omega) \notin F$. Obdržíme $s \in G \cap S$ takové, že $X_s(\omega) \notin F$ neboli

$$[X_u \notin F] \cap N_u^{\complement} \subset \bigcup_{s \in G \cap S} [X_s \notin F].$$

(1.27) $\Rightarrow$ (1.30): Uvažujme $u \in G \in \mathcal{G}$ a $\omega \notin N_u$ a označme $F = \overline{X(G \cap S, \omega)}$. Protože zřejmě $X_s(\omega) \in F$, $s \in G \cap S$, tak $X_u(\omega) \in F$.

Povšimněme si, že jsme v předchozích dvou lemmatech zatím nepotřebovali úplnost $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Věta 19. *Pro stochastický proces (X, T) na úplném pravděpodobnostním prostoru s hodnotami v kompaktním metrickém prostoru E existuje separabilní modifikace.*

Důkaz. Množina S ve smyslu lemmatu 17 je BÚNO hustá v T. Uvažujme $u \in S^{\complement}$, $\omega \in N_u$. Protože mají

$$\overline{X(G \cap S, \omega)},\ u \in G \in \mathcal{G}$$

(jako centrovaný systém kompaktních množin) neprázdný průnik, můžeme dle axiomu výběru volit

$$Y_u(\omega) \in \bigcap_{u \in G} \overline{X(G \cap S, \omega)}. \tag{1.32}$$

Dále konstruujme náhodnou funkci Y takto:

$$Y_u(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} X_u(\omega),\ u \in S^{\complement},\ \omega \notin N_u, \tag{1.33}$$

$$Y_u \stackrel{\text{def}}{=} X_u,\ u \in S \tag{1.34}$$

(N_u, $u \in T$, jsou opět vzaty z lemmatu 17). Protože dle (1.33) a (1.34) speciálně $X_u(\omega) = Y_u(\omega)$, $u \in T$, $\omega \notin N_u$, z úplnosti $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ je Y stochastický proces s hodnotami v E a navíc modifikace X.

Ověřme ještě separabilitu Y (se separantem S). Podle (1.34) se procesy (X, S) a (Y, S) rovnají, proto

$$\overline{Y(G \cap S, \omega)} = \overline{X(G \cap S, \omega)},\ G \in \mathcal{G},\ \omega \in \Omega$$

a stačí ověřit

$$Y_u(\omega) \in \overline{X(G \cap S, \omega)},\ u \in G \in \mathcal{G},\ \omega \in \Omega, \tag{1.35}$$

což dostáváme pro $\omega \in N_u$ z (1.32) a pro $\omega \notin N_u$ z (1.33) a (1.30), $u \in S^{\complement} \cap G$, $G \in \mathcal{G}$.

Q.E.D.

Poznamenejme:

1. Tato věta i její důkaz jsou vzaty z [12], str. 89, tvrzení III.4.3, kde speciálně $E = \overline{\mathbb{R}}$.

2. Všimněme si, že jsme dokonce zkonstruovali modifikaci Y, jejíž všechny trajektorie jsou S-separabilní.

3. Povšimněme si, že úplnost $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ jsme potřebovali jen k tomu, aby nám rovnost $Y_u \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} X_u$ spolu s měřitelností X_u stačily k měřitelnosti Y_u, $u \in T$. Použitím axiomu výběru v (1.32) totiž ztrácíme možnost mít informaci o chování Y_u na N_u pro případné jiné zaručení měřitelnosti Y_u, $u \in T$.

4. Předpoklad úplnosti $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ můžeme vypustit, jak je možné se přesvědčit v [3]. Speciálně pro $E = \overline{\mathbb{R}}$ to můžeme dokázat nahrazením (1.32) konkrétní volbou

$$Y_u(\omega) \overset{\text{def.}}{=} \limsup_{s \to u, s \in S} X_s(\omega), \; u \in S^{\complement}, \; \omega \in N_u,$$

   čímž se použití axiomu výběru vyhneme.

5. Důkaz věty by fungoval pro obecný separabilní metrický prostor T.

Důsledek 20. *Nechť je (X, T) reálný stochastický proces na úplném pravděpodobnostním prostoru. Pak existuje jeho separabilní modifikace Y s hodnotami v $\overline{\mathbb{R}}$.*

Očividně $Y_t \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{\in} \mathbb{R}$, $t \in T$, nemůžeme však zaručit, aby $Y(\omega)$ byly pro $\mathbf{P}$-s.v. $\omega \in \Omega$ reálné funkce.

Zajímavá je následující věta. Dále značme $\mathcal{Z}(S) = \mathcal{Z}_{T,E}(S)$ množinu S-separabilních funkcí $f : T \to E$.

Věta 21. *Pro spočetnou hustou $S \subset T$, kompaktní E a Borelovskou pravděpodobnost P na E^T je $\mathcal{Z}_{T,E}(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Množinu S můžeme volit tak, aby $P(\mathcal{Z}(S)) = 1$.*

Důkaz. Uvažujme proces projekcí (X, T), konkrétně

$$X_t : E^T \to E : \omega \mapsto \omega_t, \; t \in T,$$

a pro něj S zaručenou lemmatem 17. Definujme

$$V(F,L) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\omega \in E^T; \omega_t \in F, t \in L\},\ F \in \mathcal{F},\ L \subset T.$$

Z τ-aditivity Borelovské pravděpodobnosti dostáváme

$$P(V(F,G)) = \inf_{C \in \mathfrak{c}(G)} P(V(F,C))$$

($V(F,C)$, $C \in \mathfrak{c}(G)$ jsou uzavřené), z čehož dále z konstrukce množiny S máme $P(V(F,S\cap G)\setminus V(F,G)) = 0$, $F \in \mathcal{F}_0$, $G \in \mathcal{G}_0$. Množinu $\mathcal{Z}(S)$ můžeme vyjádřit jako

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \bigcap_{G\in\mathcal{G}} (V(F,S\cap G)\setminus V(F,G))^{\complement} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}_0} \bigcap_{G\in\mathcal{G}_0} (V(F,S\cap G)\setminus V(F,G))^{\complement} \in \mathcal{B}(E^T),$$

tedy můžeme spočítat $P(\mathcal{Z}(S)) = 1$.

Q.E.D.

S využitím možnosti vytvářet separabilní modifikace se vraťme k problému existence spojité modifikace procesu (X,T) s hodnotami v separabilním metrickém prostoru $E = (E,\rho_E)$. Separant procesu X značme S. Pro S-separabilní funkci $f : T \to E$ je

$$w_f(r) = \sup_{s,t\in S, |s-t|\le r} \rho_E(f(s), f(t)),\ r > 0,$$

kde w_f opět značí modul spojitosti f, tedy $w_X(r)$ jsou reálné náhodné veličiny, $r > 0$.

Věta 22. *Uvažujme T i E kompaktní a nechť je X separabilní proces. Potom má X $\mathbf{P}$-s.j. spojité trajektorie právě tehdy když*

$$\lim_{r\to 0_+} \mathbf{P}\left(w_X(r) > \epsilon\right) = 0,\ \epsilon > 0. \tag{1.36}$$

Důkaz. Množinu $D \subset \Omega$ takovou, že $X(\omega)$ není spojitá (ekvivalentně není stejnoměrně spojitá na kompaktním T), $\omega \in D$, můžeme vyjádřit takto:

$$D = \bigcup_{\epsilon>0} \bigcap_{r>0} \bigcup_{s,t\in T, |s-t|<r} [\rho_E(X_s, X_t) > \epsilon] = \bigcup_{\epsilon>0} \bigcap_{r>0} [w_X(r) > \epsilon],$$

přičemž

$$\mathbf{P}(D) = 0 \iff \forall_{\epsilon>0}\, \mathbf{P}\left(\bigcap_{r>0} [w_X(r) > \epsilon]\right) = 0 \iff (1.36).$$

Q.E.D.

Věta 23. *Nechť jsou opět T i E kompaktní a buď X separabilní proces takový, že*

$$\sup_{u \in T} \mathbf{P}\left(\sup_{v \in T, |u-v|<r} \rho_E(X_u, X_v) > \epsilon \right) = o(r),\ r \to 0_+,\ \epsilon > 0. \tag{1.37}$$

Potom má X spojité trajektorie $\mathbf{P}$-s.j.

Důkaz. Pracujme BÚNO s $T = [0,1]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $u, v \in T$ takové, že $|u - v| < \frac{1}{n}$, existuje $k \in \{0, \ldots, n-2\}$ takové, že $u, v \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+2}{n}\right)$. Značme

$$M_k^n \stackrel{\text{def.}}{=} 2 \max_{s \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+2}{n}\right]} \rho_E\left(X_s, X_{\frac{k}{n}}\right)$$

a počítejme

$$\mathbf{P}\left(w_X\left(\frac{1}{n}\right) > \epsilon\right) \leq \mathbf{P}\left(\max_{k \in \{0,\ldots,n-2\}} M_k^n > \epsilon\right) \leq \sum_{k=0}^{n-2} \mathbf{P}(M_k^n)$$
$$\leq (n-1) \max_{k \in \{0,\ldots,n-2\}} \mathbf{P}(M_k^n > \epsilon) \to 0_+,\ n \to \infty,$$

což nám stačí pro podmínku (1.36) věty 22.

Q.E.D.

Na závěr se podívejme na separabilní martingaly $(X, \mathbb{R}_+)$ se separantem S. Značme symbolem $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_1(\mathbb{R}_+)$ systém všech reálných funkcí f na $\mathbb{R}_+$ pro které existují konečné

$$\lim_{s \to t_-} f(s),\ t \in (0, \infty),\ \ \lim_{s \to t_+} f(s),\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.38}$$

Pokud po funkci f požadujeme pouze existenci limit (1.38), tato funkce nemá nespojitost druhého druhu. Symbolem $\mathbb{D}_1[0, \infty]$ bude myšlen systém všech prvků $\mathbb{D}_1$, pro které navíc existuje konečná $\lim_{t \to \infty} f(t)$.

Věta 24. *Nechť je $(X, \mathbb{R}_+)$ separabilní submartingal na úplném pravděpodobnostním prostoru. Potom pro $\mathbf{P}$-s.v. $\omega \in \Omega$ platí $X(\omega) \in \mathbb{D}_1$, speciálně $X(\omega)$ nemá nespojitost druhého druhu.*

Nechť je navíc X $\mathbb{L}_1$-omezený. Potom pro $\mathbf{P}$-s.v. $\omega \in \Omega$ náleží $X(\omega)$ do $\mathbb{D}_1[0, \infty]$.

Důkaz. S pomocí lemmatu 10 vezměme $N \in \mathcal{N}$ takovou, že pro každé $\omega \notin N$ a pro každou omezenou $\{t_n\}_n \subset S$ existuje konečná $\lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$. Podobně jako v důkazu lemmatu 11 zjistíme, že pro $\omega \notin N$ a pro omezené $\{s_n\}_n, \{t_n\}_n \subset S$ takové, že $s_n \to t_+$ (případně t_-), $t_n \to t_+$ (případně t_-), $n \to \infty$, platí

$$\lim_{n\to\infty} X_{s_n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$$

pro libovolné $t \in \mathbb{R}_+$ (případně pro $t \in (0,\infty)$), což nás ujistí v existenci konečných $\lim_{s\to t_-, s\in S} X_s(\omega)$, $t \in (0,\infty)$, $\lim_{s\to t_+, s\in S} X_s(\omega)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Věta 16 (bod (1.24)) nám dává množinu $N_0 \in \mathcal{N}$ takovou, že

$$\lim_{s\to t_-, s\in S} X_s(\omega) = \lim_{u\to t_-} X_u(\omega),\ t \in (0,\infty),\ \omega \notin N_0,$$

$$\lim_{s\to t_+, s\in S} X_s(\omega) = \lim_{u\to t_+} X_u(\omega),\ t \in \mathbb{R}_+\ \omega \notin N_0.$$

Celkem pro $\omega \notin N \cup N_0$ náleží $X(\omega)$ do $\mathbb{D}_1$.

Druhou část věty můžeme dokázat analogicky. Stačí při volbě množiny N místo lemmatu 10 použít lemma 9.

Q.E.D.

Ukažme si ještě ideu stojící za důkazy vět 15 a 24.

Věta 25. *Uvažujme kompaktní T (může být $T = \overline{\mathbb{R}_+}$). Reálná funkce (f,T) nemá bod nespojitosti druhého druhu právě tehdy, když $N_a^b(f) < \infty$, $a < b$.*

Důkaz. Nechť je $t \in T$ BÚNO vnitřní bod nespojitosti druhého druhu takový, že neexistuje $\lim_{s\to t_-} f(s)$. Existují tedy $a < b$, pro které

$$\liminf_{s\to t_-} f(s) < a < b < \limsup_{s\to t_-} f(s),$$

z čehož $N_a^b(f) = \infty$.

Nechť naopak f nemá nespojitost druhého druhu. Mějme pevné $a < b$. Potom pro každé $t \in T$ existuje otevřený interval $t \in I_t \subset \overline{\mathbb{R}_+}$ takový, že

$$\sup_{u,v\in I_t\cap(-\infty,t)} |f(u) - f(v)| < \frac{b-a}{2},\quad \sup_{u,v\in I_t\cap(t,\infty)} |f(u) - f(v)| < \frac{b-a}{2}.$$

Protože I_t, $t \in T$, pokrývají kompaktní interval T, můžeme z nich vybrat konečné podpokrytí I_{t_i}, $i \in \{1,\ldots,n\}$ (kde n je přirozené a BÚNO $t_1 < \ldots < t_n$). Vytvořme systém $J_1 \overset{\text{def}}{=} [\min T, t_1)$, $J_i \overset{\text{def}}{=} (t_{i-1}, t_i)$, $i = 2,\ldots,n$, $J_{n+1} \overset{\text{def}}{=} (t_n, \max T]$. Očividně

$$\sup_{u,v\in J_i} |f(u) - f(v)| < b - a,\ i = 1,\ldots,n+1,$$

z čehož $N_a^b(f) \leq n$. Pokud totiž přepokládáme, že $N_a^b(f) > n$, musí z definice $N_a^b(f)$ existovat $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ a body $s, t \in J_i$ takové, že $f(s) < a$ a $f(t) > a$, což není možné.

Q.E.D.

2. Náhodné pravděpodobnostní míry

V této kapitole se budeme zabývat náhodnými pravděpodobnostními měrami q a markovskými jádry Q na měřitelném prostoru $(E, \mathcal{E})$. Zaměříme se zejména opět na modifikace, tentokrát ve smyslu regularizace q na markovské jádro Q. V odstavci 2.1 budeme pracovat s $(E, \mathcal{E}) = (S, \mathcal{B}(S))$, kde S je borelovská podmnožina polského prostoru P, v odstavci 2.3 pak s $(E, \mathcal{E}) = (\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, kde $\mathcal{X}$ je Radonův separabilní topologický prostor. V důkazech budeme při použití věty 3 o existenci liftingu předpokládat úplnost $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pokaždé si ale ukážeme, jak se větě 3 vyhnout, tedy předpoklad úplnosti $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ není potřebný a ve formulacích vět ho neuvedeme.

Nejprve si ukážeme význam našeho cíle na případě $(E, \mathcal{E}) = (S, \mathcal{B}(S))$, kde S je metrický prostor. Množinu všech pravděpodobnostních měr na $\mathcal{B}(S)$ (takzvaných borelovských pravděpodobnostních měr na S) budeme značit $\mathcal{P}(S)$. Na $\mathcal{P}(S)$ je možné zavést slabou topologii neboli topologii definovanou slabou konvergencí. σ-obal této topologie značme opět $\mathcal{B}(\mathcal{P}(S))$ (pro slabou konvergenci posloupnosti měr $\{\mu_n\}_n \subset \mathcal{P}(S)$ k $\mu \in \mathcal{P}(S)$ používejme značení $\lim_{n\to\infty} \mu_n \overset{\mathfrak{w}}{=} \mu$).

Připomeneme, že symbolem $\mathbb{C}(S)$ je myšlen prostor všech spojitých (tím i borelovských) funkcí $h : S \to \mathbb{R}$, což je vektorový protor nad $\mathbb{R}$. Jeho podprostor funkcí, které jsou navíc omezené, budeme značit $\mathbb{C}_b(S)$. Prostor $\mathbb{C}_b(S)$ bude vždy opatřen supremální metrikou. Pro lineární prostor $\mathcal{X}$ budeme $\mathcal{X}^*$ značit prostor spojitých lineárních funkcionálů na $\mathcal{X}$. Pokud máme $\mu \in \mathcal{P}(S)$ a funkci $g : (S, \mathcal{B}(S)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, definujme

$$\mu(g) \overset{\text{def}}{=} \int_S g(s)\mu(ds) = \int_S g(s)d\mu(s), \tag{2.1}$$

kdykoliv $g \in \mathbb{L}_1(\mu)$. V opačném případě dodefinujeme $\mu(g) = 0$.

1. Toto značení má své opodstatnění. Uvažujme nyní S kompaktní. Protože je S metrický prostor a tedy speciálně Hausdorffův topologický prostor, podle Rieszovy věty o reprezentaci ([5], str. 265, kapitola IV.6., důsledek 3) existuje izometrický (tj. zachovávající normy) izomorfismus mezi $\mathfrak{rca}(S)$ prostorem regulárních znaménkových měr na S a prostorem $\mathbb{C}^*(S)$. Protože borelovské pravděpodobnostní míry na metrickém prostoru jsou regulární ([16], str. 60, I.7.1), prvky $\mathcal{P}(S)$ můžeme ztotožňovat s prvky $\mathbb{C}^*(S)$.

2. Námi zavedená definice slabé konvergence je specifická pro teorii pravděpodobnosti. Nechť je $\mathcal{X}$ lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Obvykle se slabá konvergence $\{x_n^*\}_n$ posloupnosti prvků lineárního prostoru $\mathcal{X}^*$ k $x^* \in \mathcal{X}^*$ zavádí jako konvergence $\{x^{**}(x_n^*)\}_n$ k $x^{**}(x^*)$ v $\mathbb{R}$ pro každé x^{**} z adjungovaného prostoru $\mathcal{X}^{**}$. Tato slabá konvergence je také značena jako $\mathcal{X}^{**}$-konvergence, zatímco naše slabá konvergence může být ztotožněna s takzvanou $\mathcal{X}$-konvergencí, která je definována jako konvergence posloupnosti $\{x_n^*(x)\}_n$ k $x^*(x)$ v $\mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathcal{X}$, kde v našem případě $\mathcal{X} = \mathbb{C}(S)$ a x^* jsou reprezentace pravděpodobnostních měr v Rieszově smyslu. Sice obecně existuje vnoření $\kappa : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{**}$ definované tak, že pro každé $x \in \mathcal{X}$:

$$(\kappa(x))(x^*) = x^*(x), \ x^* \in \mathcal{X}^*,$$

obecně ale není na celý prostor $\mathcal{X}^{**}$, neboli $\mathcal{X}$ obecně není takzvaně reflexivní. Následkem toho nejsou obecně $\mathcal{X}$ a $\mathcal{X}^{**}$-konvergence ekvivalentní. Náš prostor $\mathbb{C}(S)$ skutečně obecně reflexivní není. $\mathbb{C}^{**}(S)$ dokonce nemůžeme reprezentovat rozumným způsobem (viz. [5]), takže se $\mathbb{C}^{**}(S)$-konvergence na $\mathbb{C}^*(S)$ nezavádí a nehrozí k záměně naší slabé konvergence s obvyklou slabou konvergencí. $\mathbb{C}(S)$-konvergence na $\mathbb{C}^*(S)$ definuje $\mathbb{C}(S)$-topologii prostoru $\mathbb{C}^*(S)$ a tuto topologii můžeme již zmíněným izomorfismem přenést na $\mathfrak{rca}(S)$. Restrikce takto vzniklé topologie $\mathfrak{rca}(S)$ na $\mathcal{P}(S)$ pak odpovídá naší slabé topologii. Poznamenáme, že $\mathbb{C}(S)$-topologie lze na $\mathbb{C}^*(S)$ zavést i přes bázi tvořenou množinami typu

$$\{\mu \in \mathcal{P}(S); |\mu(f) - \eta(f)| < \epsilon; f \in A\},$$

kde $\eta \in \mathbb{C}^*(S)$, $K \in \mathfrak{k}(\mathbb{C}(S))$, $\epsilon > 0$. Více o zavedení slabé konvergence je možné se dozvědět v [5] například na stranách 67-68, 419.

Dále uvažujme S opět jako obecný metrický prostor. Nechť je q náhodná pravděpodobnostní míra na $(S, \mathcal{B}(S))$ a Q její regularizace. Na X můžeme opět pohlížet jako na měřitelné zobrazení

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \to \left([0,1]^{\mathcal{E}}, \mathcal{B}[0,1]^{\mathcal{E}}\right),$$

zatímco na Q v případě separability S jako na náhodnou veličinu

$$Q : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \to (\mathcal{P}(E), \mathcal{B}(\mathcal{P}(E))),$$

což ukážeme v následujících dvou lemmatech.

Lemma 26. *Nechť je Q markovské jádro na měřitelném prostoru $(E, \mathcal{E})$. Potom je pro každou borelovskou $g : S \to \mathbb{R}$ zobrazení $Q(g)$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-měřitelné.*

Důkaz. Pro $\mathcal{A}$-měřitelnost $\int_S g^+(s)Q(ds,.)$ (kde g^+ případně g^- značí kladnou případně zápornou část g) stačí si vzpomenout, že pro libovolné $A \in \mathcal{B}(S)$ je $Q(A,.)$ $\mathcal{A}$-měřitelné, tedy stačí g klasickým způsobem aproximovat (ve smyslu bodové limity na S) jednoduchými $\mathcal{B}(S)$-měřitelnými funkcemi J_k, $k \in \mathbb{N}$, a tím $\int_S g^+(s)Q(ds,.)$ aproximovat jednoduchými $\mathcal{A}$-měřitelnými náhodnými veličinami

$$\int_S J_k(s)Q(ds,.), k \in \mathbb{N},$$

(ve smyslu bodové limity na Ω) vzhledem k tomu, že díky podobě těchto aproximací můžeme zaměnit integrál se sumou a limitou.

Poté stačí si uvědomit, že

$$A_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left[\int_S g^+(s)Q(ds,.) < \infty\right]$$

je měřitelná množina, a stejnou úvahu můžeme provést i na g^- a

$$A_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left[\int_S g^-(s)Q(ds,.) < \infty\right].$$

Z toho již dostáváme $\mathcal{A}$-měřitelnost

$$Q(g) = (\int_S g^+(s)Q(ds,.) - \int_S g^-(s)Q(ds,.))\mathbf{I}_{A_1 \cap A_2}(.).$$

Q.E.D.

Lemma 27. *Uvažujme markovské jádro Q na $(S, \mathcal{B}(S))$, kde S je separabilní metrický prostor. Potom je Q $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{P}(S)))$-měřitelná náhodná veličina.*

Důkaz. Separabilitu a existenci metriky splňuje i $\mathcal{P}(S)$, jak tvrdí například [16], str. 212, věta III.3.13. Výsledek [16], str. 38, I.2.1 nám tedy dává rovnost $\mathcal{B}(\mathcal{P}(S)) = \sigma(\mathcal{V})$, kde $\mathcal{V}$ značí libovolnou topologickou bázi slabé topologie $\mathcal{P}(S)$. Pokud je $\mathcal{W}$ subbáze této topologie, platí dokonce $\mathcal{B}(\mathcal{P}(S)) = \sigma(\mathcal{W})$. Přitom $\mathcal{V}$ může být tvořena množinami typu

$$\{\mu \in \mathcal{P}(S); \underset{f \in A}{\forall} |\mu(f) - \eta(f)| < \epsilon\},$$

kde $\eta \in \mathcal{P}(S)$, $K \in \mathfrak{k}(\mathbb{C}_b(S))$ a $\epsilon > 0$, a $\mathcal{W}$ množinami typu

$$B_{f,\epsilon,\eta} = \{\mu \in \mathcal{P}(S); |\mu(f) - \eta(f)| < \epsilon\},$$

kde $\eta \in \mathcal{P}(S)$, $f \in \mathbb{C}_b(S)$, $\epsilon > 0$.

Podle [8], str. 4, lemmatu 1.4, případně [16], str. 42, I.3.2 stačí ukázat, že $Q^{-1}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{A}$. Pro libovolné $\eta \in \mathcal{P}(S)$, $f \in \mathbb{C}_b(S)$, $\epsilon > 0$ ale platí

$$Q^{-1}(B_{f,\epsilon,\eta}) = [Q(f) \in U_\epsilon(\eta(f))]$$

a z měřitelnosti $Q(f)$ (lemma 26) již dostáváme naše tvrzení.

Q.E.D.

Za předpokladu separability S má tedy smysl uvažovat (bodovou na Ω) slabou konvergenci posloupnosti markovských jader jako náhodných veličin s hodnotami v $\mathcal{P}(S)$. Použití na zavedení pojmu martingalu pro posloupnosti náhodných pravděpodobnostních měr si ukážeme v části 2.2.

2.1 Polský prostor

Cílem tohoto odstavce je důkaz existence regularizace náhodné pravděpodobnostní míry na borelovské podmnožině polského prostoru s borelovskou σ-algebrou. Předtím ale zmíníme větu o izomorfismu, jejíž spěciální případ v důkazu použijeme.

Začneme proto definicí borelovského izomorfismu.

Definice 9 (Borelovský izomorfismus)**.** Mějme metrické prostory S, T a zobrazení $f : S \to T$. Zobrazení f se nazývá *borelovský izomorfismus*, jestliže je to borelovská bijekce a i jeho inverze f^{-1} (víme, že existuje) je borelovská. O prostorech S a T pak říkáme, že jsou *borelovsky izomorfní* (přes f). Můžeme psát $S \sim T$ nebo upřesnit $S \overset{\mathrm{f}}{\sim} T$).

Nyní zformulujeme obecnější podobu věty o izomorfismu, jejíž důkaz je možné nalézt například v [4] na str. 275 jako větu 8.3.6.

Věta 28 (Věta o izomorfismu)**.** *Polské prostory P_1 a P_2 jsou borelovsky izomorfní právě když mají stejnou kardinalitu (mohutnost).*

Speciálně:

1. Každý polský prostor s kardinalitou kontinua (mohutností reálných čísel) je borelovsky izomorfní intervalu $[0, 1]$.

2. Každá borelovská podmnožina libovolného polského prostoru je borelovsky izomorfní některé borelovské podmnožině $[0, 1]$.

Právě důsledek 2 věty 28 budeme potřebovat a proto ho zde zformulujeme jako samostatné tvrzení. Jeho důkaz (nezávislý na větě 2) je možné nalézt v dodatcích. Dále v této kapitole mějme polský prostor P pevně daný.

Tvrzení 29. *Pro každé $B \in \mathcal{B}(P)$ existuje $C \in \mathcal{B}[0,1]$ borelovsky izomorfní B.*

Mějme měřitelný prostor $(E, \mathcal{E})$ a uvažujme q náhodnou pravděpodobnostní míru na $(E, \mathcal{E})$. Již jsme poznamenali, že příkladem náhodné pravděpodobnostní míry je podmíněná pravděpodobnost. Dalším příkladem je již zavedné markovské jádro, pro které rovnosti v (1), (2) a (3) platí jistě, a speciálně podmíněné rozdělení.

V úvodu jsme již zmínili, že můžeme BÚNO předpokládat, že je q konečně aditivní markovské jádro. Využijeme některé vlastnosti q plynoucí z jeho definice:

1. Pokud zvolíme posloupnost $\{A_n\}_n \subset \mathcal{E}$ takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ $A_n \subset A_{n+1}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$, a označíme $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ množinu takovou, aby pro libovolné $\omega \in \Omega_0$ platilo (dodefinujeme A_0 jako $\emptyset$)

$$q\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n-1}), \omega\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q(A_n \setminus A_{n-1}, \omega),$$

$$\underset{k\in\mathbb{N}}{\forall}\, q\left(\bigcup_{n=1}^{k} (A_n \setminus A_{n-1}), \omega\right) = \sum_{n=1}^{k} q(A_n \setminus A_{n-1}, \omega),$$

   z vlastnosti (3) a ze spočetnosti množiny těchto podmínek víme, že $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$. Analogicky jako v [16] na str. 56 v důkazu věty I.6.2 lze dokázat, že

$$\lim_{n\to\infty} q(A_n, \omega) = q(A, \omega),\ \omega \in \Omega_0. \tag{2.2}$$

2. Postupem z důkazu věty I.6.2 na str. 56 v [16] můžeme dokázat rovnost (2.2) **P**-s.j. pro posloupnost $\{A_n\}_n \subset \mathcal{E}$ takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ $A_n \subset A_{n+1}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$. Stačí použít bod 1.

Nyní se již věnujme problemu regularizace a důkazu hlavní věty tohoto odstavce.

Věta 30 (O regularizaci)**.** *Vezměme $S \in \mathcal{B}(P)$ a předpokládejme, že je q náhodná pravděpodobnostní míra na $(S, \mathcal{B}(S))$. Potom existuje Q regularizace q.*

Důkaz. Předokládejme nejprve, že $S = \mathbb{R}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$ definujme

$$F(x, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} q((-\infty, x], \omega). \tag{2.3}$$

Protože předpokládáme, že je q konečně aditivní markovské jádro, dostáváme:

$$F(a,\omega) \leq F(b,\omega),\ \omega \in \Omega,\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

Pokud aproximujeme množinu $\mathbb{R}$ množinami $(-\infty, n]$, $n \in \mathbb{N}$, pro nějakou množinu $\Omega_\infty \in \mathcal{N}$, máme s použitím vlastnosti 2 náhodné pravděpodobnostní míry q:

$$\lim_{n\to\infty} F(n,\omega) = q(\mathbb{R},\omega) = 1,\ \omega \notin \Omega_\infty.$$

Podobně s použitím vlastnosti 2 náhodné pravděpodobnostní míry q existuje množina $\Omega_{-\infty} \in \mathcal{N}$, taková, že

$$\lim_{n\to\infty} F(-n,\omega) = q(\emptyset,\omega) = 0,\ \omega \notin \Omega_{-\infty},$$

a pro každé $x \in \mathbb{Q}$ máme množinu $\Omega_x \in \mathcal{N}$ takovou, že

$$\lim_{n\to\infty} F\left(x + \frac{1}{n}, \omega\right) = F(x,\omega),\ \omega \notin \Omega_x.$$

Označme

$$\Omega^* \overset{\text{def.}}{=} \Omega_\infty \cup \Omega_{-\infty} \cup \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \Omega_x.$$

Protože uvažovaných množin je spočetně mnoho, $\Omega^* \in \mathcal{N}$.

Vidíme tedy, že pro libovolné $\omega \notin \Omega^*$ má $F|_{\mathbb{Q}}(.,\omega)$ (čímž značíme restrikci $F(.,\omega)$ na $\mathbb{Q}$) právě všechny vlastnosti distribuční funkce. Nyní $F|_{\mathbb{Q}\times\Omega^*}$ vhodně rozšíříme zpět na $\mathbb{R} \times \Omega$:

$$F^*(x,\omega) \overset{\text{def.}}{=} \inf_{x\leq y\in\mathbb{Q}} F(y,\omega),\ x \in \mathbb{R},\ \omega \notin \Omega^*. \tag{2.4}$$

$$F^*(.,\omega) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{\pi}\arctan(.) + \frac{1}{2},\ \omega \in \Omega^*.$$

Zajímá nás, jestli je toto rozšíření distribuční funkce pro každé $\omega \in \Omega$. Zvolme tedy pevné $\omega \notin \Omega^*$. Z vlastností infima vidíme, že

$$\inf_{x\leq z\in\mathbb{Q}} F(z,\omega) \leq \inf_{y\leq z\in\mathbb{Q}} F(z,\omega),\ x,y \in \mathbb{R},\ x < y,$$

což nám zaručí monotonii na $\mathbb{R}$. Volme $x \in \mathbb{R}$ a $\epsilon > 0$. Hledáme pravé prstencové okolí P_+ bodu x tak aby se přes $F^*(.,\omega)$ zobrazilo do okolí U bodu $(F^*(x,\omega))$ o poloměru ϵ. Z druhé vlastnosti infima ale existuje $x < y \in \mathbb{Q}$ takové, že $|F(x,\omega) - F(y,\omega)| < \epsilon$, tedy díky monotonii stačí položit $P_+ \overset{\text{def.}}{=} (x,y)$ a proto je $F^*(.,\omega)$ v x spojitá zprava. $F^*(.,\omega)$ tedy skutečně má všechny vlastnosti distribuční funkce.

Nyní pro každé pevné $\omega \in \Omega$ definujme

$$Q((-\infty, .], \omega) \stackrel{\text{def.}}{=} F^*(., \omega) \tag{2.5}$$

a protože je $\{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$ uzavřený na konečné průniky, přičemž generuje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, rozšiřme míru $Q(., \omega)$ na tuto borelovskou σ-algebru. Ověříme, že takto definované Q je regularizací q. Pokud označíme $\mathcal{H}$ množinu všech B borelovských takových, že $Q(B, .)$ je $\mathcal{A}$-měřitelná, víme, že $\mathcal{H}$ obsahuje $\{(-\infty, x], x \in \mathbb{Q}\}$. Navíc je to Dynkynův system z vlastností pravděpodobnostní míry a faktu, že řada a rozdíl $\mathcal{A}$-měřitelných jsou $\mathcal{A}$-měřitelné. Z Dynkynova lemmatu vidíme, že pro libovolnou borelovskou B je $Q(B, .)$ $\mathcal{A}$-měřitelná náhodná veličina a Q markovské jádro.

Zbývá nám ověřit (4). Tentokrát označíme

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); Q(B) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} q(B)\}$$

Pro všechna $q \in \mathbb{Q}$ s pomocí (2.5), (2.4), (2.3) hned víme, že $\mathcal{H}$ obsahuje $\{(-\infty, q]; q \in \mathbb{Q}\}$, což je system generující $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ uzavřený na konečné průniky. Stačí tedy opět ověřit, že je $\mathcal{H}$ Dynkynův system a použít Dynkynovo lemma. Vezměmě libovolný spočený system disjunktních množin $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ a libovolnou množinu $H \in \mathcal{H}$.

$$Q(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D) = \sum_{D \in \mathcal{D}} Q(D) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \sum_{D \in \mathcal{D}} q(D) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} q(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D),$$

$$Q\left(H^{\complement}\right) = 1 - Q(H) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} q(\mathbb{R}) - q(H) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} q\left(H^{\complement}\right),$$

$$Q(\mathbb{R}) = 1 \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} q(\mathbb{R}).$$

Pokud uvažujeme obecné S, z tvrzení 29 víme, že $S \stackrel{\text{f}}{\sim} C$, kde $C \in \mathcal{B}([0, 1])$. Protože je f $\mathcal{B}(S)$-měřitelná náhodná veličina, můžeme definovat

$$q^*(B^*, \omega) \stackrel{\text{def.}}{=} q(f^{-1}(B^* \cap C), \omega), \ B^* \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \omega \in \Omega.$$

Pro q^* již umíme zkonstruovat regularizaci Q^* a tu vhodně upravme na množině $[Q^*(C) \neq 1]$, což je množina nulové míry, jak plyne z její konstrukce.

Potom stačí položit

$$Q(B, \omega) \stackrel{\text{def.}}{=} Q^*(f(B), \omega), \ B \in \mathcal{B}(S), \ \omega \in \Omega,$$

a (4) i (6) máme okamžitě splněné. Volme nyní $\omega \in \Omega$. Ověříme, že je $Q(., \omega)$ pravděpodobnostní míra. Uvažujme spočetný system po dvou disjunktních množin $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}(S)$.

$$Q(S, \omega) = Q^*(f(S), \omega) = 1,$$

$$\begin{aligned} Q(\emptyset, \omega) &= Q^*(f(\emptyset), \omega) = Q^*(\emptyset, \omega) = 0 \\ Q\left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D, \omega\right) &= Q^*\left(f\left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D\right), \omega\right) \\ &= Q^*\left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} f(D), \omega\right) = \sum_{D \in \mathcal{D}} Q(D, \omega), \end{aligned}$$

vzhledem k tomu, že je f borelovský izomorfismus. Zkonstruovali jsme tedy Q regularizaci q.

Q.E.D.

Použití věty 3 se můžeme snadno vyhnout. Nechť je q opět nejprve obecná náhodná pravděpodobnostní míra na $(E, \mathcal{E})$. Pro $A \in \mathcal{E}$ vezměme množinu

$$\Omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left[q(E) = q(A) + q\left(A^{\complement}\right), q(E) = 1\right]^{\complement}.$$

Z (3) a (2) $\Omega_0 \in \mathcal{N}$, neboli

$$q\left(A^{\complement}\right) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} 1 - q(A), \tag{2.6}$$

což nám opět spolu s vlastností 1 náhodné pravděpodobnostní míry q dává vlastnost 2 náhodné míry q. Pokud máme $A, B \in \mathcal{E}$, $B \subset A$, a vezmeme množinu

$$\Omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} [q(A) = q(B) + q(A \setminus B)]^{\complement},$$

z (3) opět $\Omega_0 \in \mathcal{N}$ a vidíme, že

$$q(B) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{\leq} q(A), \tag{2.7}$$

z čehož v důkazu věty 30 pro libovolné $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, existuje množina $\Omega_{a,b} \in \mathcal{N}$, pro jejíž libovolný prvek ω platí $F(a, \omega) \leq F(b, \omega)$. V důkazu tedy 30 stačí již jen nahradit Ω^* množinou $\Omega^* \cup \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}, a<b} \Omega_{a,b}$.

2.2 Abstraktní martingaly

Pracujme opět s polským prostorem P a $S \in \mathcal{B}(P)$. V odstavci 2.1 jsme dokázali, že pro každou náhodnou míru q na $(S, \mathcal{B}(S))$ existuje její regularizace na markovské jádro. Nyní se chvíli zabývejme posloupnostmi náhodných pravděpodobnostních měr na $(S, \mathcal{B}(S))$. V tomto odstavci s pomocí věty 30 rozšíříme pojem martingalu pro tyto posloupnosti. Dále se budeme zabývat některými vlastnostmi těchto takzvaných abstraktních martingalů.

Opět budeme pracovat s filtrací $(\mathcal{F}, \mathbb{N}_0)$. Zde ale budeme navíc požadovat, aby $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, což je očividně nejmenší možná σ-algebra. Pokud navíc uvažujeme náhodnou veličinu

$$X : (\Omega, \mathcal{F}_0) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

vidíme, že vzor libovolné borelovské množiny je Ω nebo $\emptyset$ a tedy X může na celém $\omega \in \Omega$ nabývat jediné hodnoty neboli X na ω nezávisí. Tvrzení pro obecný separabilní metrický prostor hodnot je formulováno a dokázáno v [8], str. 51, lemma 3.9.

Definice 10 (Abstraktní martingal)**.** Mějme dány náhodné pravděpodobnostní míry Φ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, na $\mathcal{B}(S)$ a uvažujme (libovolné) jejich regularizace Φ_n^*, $n \in \mathbb{N}_0$. Řekneme, že $(\Phi, \mathbb{N}_0) = \{\Phi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je *abstraktní martingal*, jestliže pro libovolnou deterministickou $h \in \mathbb{C}_b(S)$ je $(\Phi^*(h), \mathbb{N}_0)$ reálný martingal.

Díky větě 30 má tato definice smysl. Můžeme BÚNO rovnou předpokládat, že Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou markovská jádra. Budeme nyní zkoumat vlastnosti abstraktního martingalu $(\Phi, \mathbb{N}_0)$. K tomu nám pomůže následující lemma.

Lemma 31. *Nechť je $Q : \Omega \to \mathcal{P}(S)$ takové, že pro každou $h \in \mathbb{C}_b(S)$ funkce $Q(h)$ $\mathcal{A}$-měřitelná. Potom je Q markovské jádro.*

Důkaz. Pro každé $\omega \in \Omega$ je $Q(., \omega)$ pravděpodobnostní míra na $\mathcal{B}(S)$. Pokud vezmeme F uzavřenou podmnožinu S, nalezneme vzhledem k množinové relaci klesající posloupnost otevřených množin $\{B_n\}_n$, jejichž průnik je F, přičemž

$$\lim_{n\to\infty} Q(G_n, \omega) = Q(F, \omega),\ \omega \in \Omega.$$

S pomocí Urysohnovy věty ([8], str. 115, věta 4.4 nebo [5], str. 15, věta VI.5.2) pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme spojitou funkci $f_n : S \to [0, 1]$ nulovou na $G_n^\complement$ a rovnou číslu 1 na F. Z nerovnosti

$$Q(F, \omega) \leq Q(\omega)(f_n) \leq Q(G_n, \omega),\ \omega \in \Omega,$$

věty o vztahu limit a nerovností a měřitelnosti bodové limity měřitelných funkcí již dostáváme $\mathcal{A}$-měřitelnost $Q(F)$ pro každou F uzavřenou podmnožinu S (pro množinu $A \in \mathcal{B}(S)$ je $Q(A)$ myšleno v klasickém smyslu, tedy ve značení této kapitoly ve smyslu $Q(\mathbf{I}_A)$). Protože uzavřené podmnožiny S tvoří systém generující $\mathcal{B}(S)$ a uzavřený na konečné průniky, přičemž rozdíl i spočetný součet měřitelných funkcí, stejně jako konstantní funkce, jsou měřitelné, z Dynkynova lemmatu dostáváme $\mathcal{A}$-měřitelnost $Q(B)$ pro každou B borelovskou podmnožinu S.

Q.E.D.

1. Ukázali jsme, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $\Phi_k(B)$ $\mathcal{F}_k$-měřitelné pro každou $B \in \mathcal{B}(S)$, a že speciálně pro každé $B \in \mathcal{B}(S)$ je $\Phi_0(B)$ $\mathcal{F}_0$-měřitelná a proto deterministická, neboli Φ_0 je deterministická pravděpodobostní míra na $\mathcal{B}(S)$.

2. Vezměme $n \in \mathbb{N}_0$. Na Φ_n můžeme pohlížet jako na zobrazení z Ω do $\mathcal{P}(S)$. Dle lemmatu 27 platí dokonce měřitelnost ve smyslu

$$\Phi_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{P}(S), \mathcal{B}(\mathcal{P}(S))). \tag{2.8}$$

Opět speciálně obdržíme, že je Φ_0 deterministická.

3. Poznamenejme ještě, že kombinací s lemmatem 26 dostáváme ekvivalenci

$$Q \text{ je markovské jádro} \Leftrightarrow Q(h) \text{ je } \mathcal{A}\text{−měřitelné}, \ h \in \mathbb{C}_b(S).$$

4. Kombinací s lemmatem 26 dostáváme i ekvivalenci

$$Q(h) \text{ je } \mathcal{A}\text{−měřitelné}, \ h \in \mathbb{C}_b(S) \Leftrightarrow Q(g) \text{ je } \mathcal{A}\text{−měřitelné}, \ g : S \to \mathbb{R}.$$

Lemma 32. *Pro náhodnou pravděpodobnostní míru q na měřitelném prostoru $(E, \mathcal{E})$ je $\mathbf{E}q(.)$ pravděpodobnostní míra na $(E, \mathcal{E})$.*

Důkaz. Stačí využít definici náhodné pravděpodobnostní míry a vlastnosti střední hodnoty. Například pro libovolný spočetný system po dvou disjunktních množin $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}(S)$ platí

$$\mathbf{E}q\left(\bigcup_{D\in\mathcal{D}} D\right) = \mathbf{E}\sum_{D\in\mathcal{D}} q(D) = \sum_{D\in\mathcal{D}} \mathbf{E}q(D).$$

Podobně můžeme ověřit i nulovost v prázdné množině, normalitu a nezápornost.

Q.E.D.

1. Speciálně pro pevné $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathbf{E}\Phi_n(.)$ míra na $(S, \mathcal{B}(S))$. Navíc se tato míra rovná míře Φ_0, protože pro libovolné $h \in \mathbb{C}_b(S)$ z přechozích úvah plyne $\mathbf{E}\Phi_n(h) = \Phi_0(h)$. Tedy pro každou Φ_0-integrovatelnou (čímž i $\mathbf{E}\Phi_n$-integrovatelnou a $\mathbf{P}$-s.j. Φ_n-integrovatelnou) funkci g platí

$$\mathbf{E}\Phi_n(g) = \Phi_0(g). \tag{2.9}$$

2. Pracujme nyní dále s $g \in \mathbb{L}_1(\Phi_0)$. Z bodu 1 pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ plyne

$$\mathbf{E}|\Phi_n(g)| \leq \Phi_0(|g|). \tag{2.10}$$

Poznamenejme, že levá strana (2.10) má smysl dle lemmatu 26.

Platí následující:

Věta 33. $(\Phi(g), \mathbb{N}_0)$ *je stejnoměrně integrovatelný martingal.*

Důkaz. Nejprve se zajímejme, zda je $(\Phi(g), \mathbb{N}_0)$ martingal. $(\mathcal{F}, \mathbb{N}_0)$-adaptovanost obdržíme z důsledku číslo 1 lemmatu 31. Integrovatelnost nám dává okamžitě (2.10). Funkci g můžeme v $\mathbb{L}_1(\Phi_0)$ aproximovat omezenými spojitými funkcemi h_k, $k \in \mathbb{N}$. Podle toho a (2.10) $\Phi_n(h_k)$, $k \in \mathbb{N}$, aproximují $\Phi_n(g)$ v $\mathbb{L}_1(P)$ a s využitím vlastností podmíněné střední hodnoty vidíme, že $\{\mathbf{E}[\Phi_{n+1}(h_k)|\mathcal{F}_n]\}_k$ aproximuje $\mathbf{E}[\Phi_{n+1}(g)|\mathcal{F}_n]$ v $\mathbb{L}_1(P)$. K ověření martingalové vlastnosti $(\Phi(g), \mathbb{N}_0)$ tedy použijeme martingalovou vlastnost procesů $(\Phi(h_k), \mathbb{N}_0)$, $k \in \mathbb{N}$, a jednoznačnost $\mathbf{P}$-s.j. limity v $\mathbb{L}_1(\mathbf{P})$.

Nyní se zajímejme o stejnoměrnou integrovatelnost. Použitím (2.10) pro každé $n \in \mathbb{N}$ a předpokládané (Φ_0)-integrovatelnosti g máme $\mathbb{L}_1(\mathbf{P})$-omezenost $(\Phi(g), \mathbb{N})$. Ověřme, zda má $(\Phi(g), \mathbb{N})$ stejnoměrně spojité integrály. Pro libovolné $\delta > 0, n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$ s použitím omezenosti h_k a opět (2.10) platí

$$\sup_{A \in \mathcal{A}; \mathbf{P}(A) \leq \delta} \mathbf{E}[|\Phi_n(g)|\mathbf{I}_A] \leq \sup_{A \in \mathcal{A}; \mathbf{P}(A) \leq \delta} \mathbf{E}[|\Phi_n(g) - \Phi_n(h_k)|\mathbf{I}_A]$$
$$+ \sup_{A \in \mathcal{A}; \mathbf{P}(A) \leq \delta} \mathbf{E}[|\Phi_n(h_k)|\mathbf{I}_A] \leq \Phi_0(|g - h_k|) + \max_{s \in S} h_k(s)\delta.$$

Pravá strana již nezávisí na n a tedy stačí provést limitní přechody pro $\delta \to 0_+$ a $k \to \infty$, při kterých pravá strana jde k 0, což nám završuje důkaz stejnoměrné integrovatelnosti a tím i celého tvrzení.

Q.E.D.

Vlastnosti reálných martingalů ([10], str. 38, věta 4.8 a věta 4.6) nám dávají následující:

Důsledek 34. *Existuje* $\mathbb{L}_1(\mathbf{P})$*-integrovatelná náhodná veličina* $\Phi^\infty(g)$ *taková, že*

$$\mathbf{E}[\Phi^\infty(g)|\mathcal{F}_n] \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \Phi_n(g), \; n \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(g) \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \Phi^\infty(g), \tag{2.12}$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}[|\Phi_n(g) - \Phi^\infty(g)|] = 0. \tag{2.13}$$

Takto máme „martingalovou“ limitu posloupnosti integrálů pevně zvolené deterministické Φ_0-integrovatelné funkce podle Φ_n, $n \in \mathbb{N}$. Bude nás zajímat, jestli má limitu v nějakém smyslu i tento samotný abstraktní martingal a to tak, aby integrál libovolné Φ_0-integrovatelné funkce g podle této limity byl roven $\Phi^\infty(g)$ (vše ve smyslu $\mathbf{P}$-s.j.) neboli jestli je možné tyto limity „svázat“ nějakým markovským jádrem. Odpověď nalezneme v následující větě. Odteď ale předpokládejme kompaktnost S, tedy s restrikcí příslušné ekvivalentní metriky prostoru P na S je to úplný separabilní metrický prostor.

Věta 35. *Existuje Φ_∞ markovské jádro na $(S, \mathcal{B}(S))$ takové, že pro libovolné $g \in \mathbb{L}_1(\Phi_0)$ platí*

$$\Phi^\infty(g) \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \Phi_\infty(g). \tag{2.14}$$

Důkaz. Opět zvolíme nejprve $S = [0,1]$. Očividně $\mathbb{C}_b[0,1] = \mathbb{C}$. Separabilita $[0,1]$ nám dává separabilitu $\mathbb{C}$ a můžeme proto zvolit spočetou hustou podmnožinu tohoto prostoru. Označme ji $\mathcal{H}$. Pro $\Phi_n(.,\omega)$, $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$ značme $\Phi^n(\omega)$ odpovídající prvky $\mathbb{C}^*$ ve smyslu Rieszovy věty o reprezentaci. Dle (2.12) víme, že existuje $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ taková, že $P(\Omega_0) = 1$ a pro všechny $H \in \mathcal{H}, \omega \in \Omega_0$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(\omega)(h) = \Phi^\infty(h)(\omega). \tag{2.15}$$

Protože je $\mathcal{H}$ hustá v $\mathbb{C}$ a pro každé $h \in \mathbb{C}$, $\omega \in \Omega_0$ je $\{\Phi_n(\omega)(h)\}_n$ omezená, pro pevnou $\omega \in \Omega_0$ náleží $\Phi^\infty(.)(\omega)$ do $\mathbb{C}^*$ podle [5], kapitoly II.1., str. 55, věty 18. Použitím Rieszovy věty máme regulární míru $\Phi_\infty(\omega) = \Phi_\infty(.,\omega)$ na $\mathcal{B}[0,1]$ takovou, že pro každé $h \in \mathbb{C}$ platí

$$\Phi^\infty(h)(\omega) = \Phi_\infty(\omega)(h). \tag{2.16}$$

Položením $h = 1|_{[0,1]}$ vidíme, že je to dokonce pravděpodobnostní míra. Dále navíc s použitím (2.11) (opět pro obecnou spojitou h)

$$\mathbf{E}\Phi_\infty(h) = \mathbf{E}\Phi^\infty(h) = \Phi_0(h).$$

Z lemmatu 31, jeho důsledku 4 a již známé měřitelnosti $\Phi_\infty(h)$ pro každé $h \in \mathbb{C}$ dostaneme měřitelnost $\Phi_\infty(A)$ pro $A \in \mathcal{B}[0,1]$, následně i měřitelnost $\Phi_\infty(g)$ pro každé $g \in \mathbb{L}_1(\Phi_0)$, což opět dává smysl $\mathbf{E}f(\Phi_\infty(g))$, $g \in \mathbb{L}_1(\Phi_0)$, f $\mathcal{B}[0,1]$-měřitelná, $f(\Phi_\infty(g))$ $\mathbf{P}$-s.j. nezáporná. Poté dle lemmatu 32 dostáváme, že je $\mathbf{E}\Phi_\infty(.)$ jako funkce na $\mathcal{B}[0,1]$ míra. Tato míra se opět rovná Φ_0 a proto pro libovolnou Φ_0-integrovatelnou (čímž i $\mathbf{E}\Phi_\infty(.)$-integrovatelnou a $\mathbf{P}$-s.j. $\Phi_\infty(.)$-integrovatelnou) funkci g platí

$$\mathbf{E}\Phi_\infty(g) = \Phi_0(g)$$

a tedy

$$\mathbf{E}|\Phi_\infty(g)| \leq \Phi_0(|g|), \tag{2.17}$$

díky čemuž při aproximaci g posloupností $\{h_k\}_k$ v $\mathbb{L}_1(\Phi_0)$ aproximuje $\{\Phi_\infty(h_k)\}_k$ veličinu $\Phi_\infty(g)$ v $\mathbb{L}_1(\mathbf{P})$. Protože navíc pro každé $n, k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E}|\Phi^\infty(g) - \Phi^\infty(h_k)| \leq \mathbf{E}|\Phi^\infty(g) - \Phi_n(g)| + \mathbf{E}|\Phi^\infty(h_k) - \Phi_n(h_k)|$$
$$+\mathbf{E}|\Phi_n(g) - \Phi_n(h_k)|,$$

což limitními přechody pro $k \to \infty$ a $n \to \infty$ ukazuje, že $\Phi_\infty(h_k) = \Phi^\infty(h_k)$ aproximuje i $\Phi^\infty(g)$ v $\mathbb{L}_1(\mathbf{P})$, z jednoznačnosti limity v $\mathbb{L}_1(\mathbf{P})$ $\mathbf{P}$-s.j. můžeme rovnost (2.16) rozšířit na celý $\mathbb{L}_1(\Phi_0)$.

Uvažujme nyní obecnou kompaktní S. S použitím tvrzení 29 volme $C \in \mathcal{B}[0,1]$, $S \overset{\mathrm{f}}{\sim} C$ (speciálně je C také kompaktní), a zaveďme pro každé $B \in \mathcal{B}[0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\omega \in \Omega : \Phi_n^*(B, \omega) \overset{\text{def}}{=} \Phi_n(f^{-1}(B \cap C), \omega)$. Pro $h \in \mathbb{C}$ vidíme, že $h \circ f \in \mathbb{C}_b(S) = \mathbb{C}(S)$. Podle věty o přenosu integrace je $(\Phi^*, \mathbb{N}_0)$ opět abstraktní $(\mathcal{F}, \mathbb{N}_0)$-martingal. Z konstrukce měr Φ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, totiž pro každé $h \in \mathbb{C}(S)$ vidíme:

$$\int_{[0,1]} h(s)\Phi_n^*(ds, .) = \int_C (h \circ f \circ f^{-1})(s)\Phi_n^*(ds, .)$$
$$= \int_S (h \circ f)(s)\Phi_n(ds, .),$$

což je reálný $(\mathcal{F}, \mathbb{N})$-martingal.

Pro $(\Phi^*, \mathbb{N}_0)$ již umíme nalézt Φ_∞^* z tvrzení věty a proto stačí pro každé $A \in \mathcal{B}(S)$ přiřadit $\Phi_\infty(A, \omega) \overset{\text{def}}{=} \Phi_\infty^*(f(A), \omega)$, což je dle konstrukce pro pevné $A \in \mathcal{B}(S)$ $\mathcal{A}$-měřitelné, splňuje to požadovanou rovnost a je to pro pevné $\omega \in \Omega$ pravděpodobnostní míra na $\mathcal{B}(S)$, jak se snadno přesvědčíme analogicky jako ve větě 30.

Q.E.D.

Celkem dostáváme (ve značení věty 35):

Důsledek 36. *Pro libovolné $g \in \mathbb{L}_1(\Phi_0)$ máme*

$$\mathbf{E}[\Phi_\infty(g)|\mathcal{F}_n] \overset{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \Phi_n(g), \; n \in \mathbb{N} \tag{2.18}$$

speciálně

$$\lim_{n \to \mathbb{N}} \Phi_n \overset{\mathbf{P}-s.j.}{\overset{\mathfrak{w}}{=}} \Phi_\infty. \tag{2.19}$$

2.3 Radonův prostor

Nyní uvažujme obecně topologický prostor $(\mathcal{X}, \mathfrak{J})$, kde $\mathcal{X}$ je neprázdná množina a $\mathfrak{J}$ její topologie. Někdy budeme používat zkrácené značení $\mathcal{X}$ a pokud budeme chtít zdůraznit, že mluvíme o topologii prostoru $\mathcal{X}$, použijeme značení $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$.

Označme $\mathfrak{K}(\mathcal{X})$ množinu kompaktů topologického prostoru $\mathcal{X}$. Upozorněme, že v obecném topologickém prostoru jsou kompaktní množiny $K \in \mathfrak{K}(\mathcal{X})$ myšleny ve smyslu, že z libobolného pokrytí K prvky $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ lze vybrat konečné podpokrytí K, což obecně nesplývá s pojmem takzvané sekvenční kompaktnosti ve smyslu, že libovolné posloupnosti prvků K lze vybrat $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$-konvergentní podposloupnost. Speciálně v případě metrického prostoru M je zpravidla $\mathfrak{J}(M)$ myšlena jeho metrická topologie a vzhledem k této topologii jsou již významy pojmů kompaktnosti a sekvenční kompaktnosti ekvivalentní. Více o vztazích kompaktnosti a sekvenční kompaktnosti je možné nalézt například v [9], [5]. Hluboká teorie obecné topologie je zpracována opet v [9].

Po prostoru $\mathcal{X}$ budeme požadovat, aby byl Radonův. Vzhledem k tomu, že polský prostor $(P, \mathfrak{J}(P))$ jako topologický prostor můžeme metrizovat metrikou ρ_P, vzhledem k níž je úplný a separabilní, můžeme na prostor (P, ρ_P) použít větu I.7.3 v [16], podle níž je každá pravděpodobnost na $(P, \mathcal{B}(P))$ Radonova. Vidíme tedy, že speciálním případem prostorů $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X})))$ uvažovaných v této kapitole jsou právě polské prostory zkoumané v odstavci 2.1 a speciálně úplné separabilní metrické prostory.

Upozorněme ještě, že v obecném topologickém prostoru $\mathcal{X}$ je separabilita zavedena ve smyslu existence spočetné topologické báze $\mathfrak{U}$ topologie $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Nyní přejdeme k formulaci a důkazu věty dávající postačující podmínku pro existenci regularizace náhodné pravděpodobnostní míry na těchto prostorech.

Věta 37. *Uvažujme Radonův separabilní topologický prostor $\mathcal{X}$. Potom pro každou náhodnou pravděpodobnostní míru q na $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ existuje regularizace Q.*

Důkaz. Označme $\mathfrak{U}$ spočetnou topologickou bázi $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$. Potom $\sigma(\mathfrak{U}) = \mathcal{B}(\mathcal{X})$:

$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{J}(\mathcal{X})$, tedy inkluze $\sigma(\mathfrak{U}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ je zřejmá. Opačnou inkluzi dostaneme z toho, že pro každé $J \in \mathfrak{J}(\mathcal{X})$ existuje $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$ taková, že $J = \cup_{V \in \mathfrak{V}} V$, přičemž je $\mathfrak{V}$ jako podmnožina spočetné množiny sama spočetná.

Navíc $\mathfrak{U}$ generuje spočtnou algebru $\mathfrak{A}$. Dle lemmatu 32 je $\mathbf{E}q(.)$ pravděpodobnostní míra na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Podle předpokladu je to dokonce Radonova míra, tedy z druhé vlastnosti suprema pro každou množinu $A \in \mathfrak{A}$ a každé $k \in \mathbb{N}$ najdeme $K_{A,k} \in \mathfrak{K}(\mathcal{X})$ takový, že

$$\mathbf{E}q(A) - \mathbf{E}q(K_{A,k}) < \frac{1}{k}.$$

Zvolme nyní $A \in \mathfrak{A}$ pevné. Vidíme, že

$$\mathbf{E}q(A) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}q(K_{A,k}).$$

Protože je $\{q(K_{A,k})\}_k$ neklesající $\mathbf{P}$-s.j., z Lévyho věty o záměně limity a integrálu dostaneme

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{E}q(K_{A,k}) = \mathbf{E} \lim_{k\to\infty} q(K_{A,k}).$$

Celkem

$$\mathbf{E}|q(A)| = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}|q(K_{A,k})| = \mathbf{E}| \lim_{k\to\infty} q(K_{A,k})|.$$

Z věty o jednoznačnosti $\mathbf{P}$-s.j. limity v $\mathbb{L}_1(\mathbf{P})$:

$$q(A) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \lim_{k\to\infty} q(K_{A,k}).$$

Označme $\mathfrak{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{K_{A,k}; A \in \mathfrak{A}, k \in \mathbb{N}\}$ a $\mathfrak{C}$ nejmenší algebru obsahující $\mathfrak{K}$ a $\mathfrak{A}$. Tato algebra je opět spočetně generovaná a tedy sama spočetná.

Dále definujme pro každé $A \in \mathfrak{A}$

$$\Omega_{A,K} \stackrel{\text{def}}{=} \left[q(A) = \lim_{k\to\infty} q(K_{A,k})\right]^{\complement}$$

a pro každou konečnou $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{C}$

$$\Omega_{\mathfrak{V}} \stackrel{\text{def}}{=} \left[q\left(\bigcup_{V\in\mathfrak{V}} V\right) = \sum_{V\in\mathfrak{V}} q(V)\right]^{\complement}.$$

Každá z těchto množin náleží do $\mathcal{N}$ a protože je jich spočetně, totéž platí i pro jejich sjednocení, které označíme Ω^*.

Opět můžeme použít větu 3 a BÚNO předpokládat, že je q konečně aditivní markovské jádro. Speciálně pro pevné $\omega \notin \Omega^*$ je tedy $q(.,\omega)|_{\mathfrak{A}}$ konečně aditivní pravděpodobnost. Nyní dokážeme, že je $q(.,\omega)$ σ-aditivní na $\mathfrak{A}$. Zvolme proto vzhledem k množinové relaci klesající posloupnost $\{A_n\}_n \subset \mathfrak{A}$ takovou, že $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, a kladné ϵ. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme $K_n \in \mathfrak{K}$, $K_n \subset A_n$, takový, že

$$q(A_n,\omega) - q(K_n,\omega) < \frac{\epsilon}{2^n},$$

přičemž očividně

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset.$$

Podle [9], kapitola 5, str. 136, věty 1 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\cap_{n=1}^{n_0} K_n = \emptyset$, a tedy pro každé $n > n_0$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i^{\complement}\right) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i^{\complement}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \cap K_i^{\complement}\right),$$

čímž

$$q\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \omega\right) \leq \sum_{i=1}^{n} (q(A_i, \omega) - q(K_i, \omega)) < \epsilon.$$

Máme tedy spojitost shora v prázdné množině a to již podle [16] strany 56 věty I.6.2. stačí k tomu, aby $q(.,\omega)$ byla skutečně σ-aditivní na $\mathfrak{A}$.

Podle [5], kapitoly III.5, str. 136, věty 8 (nebo [7], kapitoly 13, str. 54, věty A, případně [16], str. 69, věty I.8.3) existuje (právě jedno) rozšíření $Q(.,\omega)$ míry $q(.,\omega)|_{\mathfrak{A}}$ na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Pro $\omega \in \Omega^*$ můžeme zvolit $Q(.,\omega)$ jako libovolnou pevnou borelovskou pravděpodobnostní míru. Ověřme podmínku (6) z definice markovského jádra. Označíme $\mathcal{D}$ množinu všech $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, pro které je $Q(B)$ $\mathcal{A}$-měřitelná. Protože spočetná suma a rozdíl $\mathcal{A}$-měřitelných náhodných veličin jsou $\mathcal{A}$-měřitelné, tvoří $\mathcal{D}$ Dynkynův systém. Navíc z konstrukce Q vidíme, že $\mathcal{D}$ obsahuje $\mathfrak{A}$, která je uzavřená na konečné průniky. Z Dynkynova lemmatu $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Zbývá ověřit podmínku (4) pro to, aby Q byla regularizace q, konkrétně

$$Q(B) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} q(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Tentokrát označíme

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}); Q(B) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} q(B)\}.$$

Opět $\mathcal{D}$ obsahuje $\mathfrak{A}$, která je uzavřená na konečné průniky, a stačí dokázat, že je $\mathcal{D}$ Dynkynův system, tedy stačí zvolit libovolnou posloupnost po dvou disjunktních množin $\{D_n\}_n \subset \mathcal{D}$, libovolný $D \in \mathcal{D}$ a spočítat

$$Q\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} Q(D_n) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} q(D_n) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} q\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\right),$$

$$Q\left(D^{\complement}\right) = 1 - Q(D) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} q(\mathcal{X}) - q(D) \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} q\left(D^{\complement}\right)$$

(poznamenejme, že poslední rovnost díky použití věty 3 platí jistě, kvůli poznámce 1 za touto větou ale ponecháme v zápise rovnost **P**-s.j.),

$$Q(\mathcal{X}) = 1 \stackrel{\mathbf{P}-\text{s.j.}}{=} q(\mathcal{X}),$$

tedy $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, $D^{\complement}$ a $\mathcal{X}$ patří do $\mathcal{D}$.

Q.E.D.

Poznamenejme:

1. Použití věty 3 se můžeme opět snadno vyhnout. Stačí definovat pro každou $E \in \mathfrak{E}$
$$\Omega_{E,c} \stackrel{\text{def}}{=} \left[q\left(A^{\complement}\right) = q(\mathcal{X}) - q(A)\right]^{\complement},$$
$$\Omega_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} [q(\mathcal{X}) = 1]^{\complement},$$
$$\Omega_{-\infty} \stackrel{\text{def}}{=} [q(\emptyset) = 0]^{\complement}.$$
Každá z těchto množin opět náleží do $\mathcal{N}$ a proto stačí množinu Ω^* nahradit sjednocením
$$\Omega^* \cup \bigcup_{E \in \mathfrak{E}} \Omega_{E,\complement} \cup \Omega_{\infty} \cup \Omega_{-\infty}.$$
Pro každé ω náležící do této množiny bude $q(.,\omega)|_{\mathfrak{E}}$ a speciálně i $q(.,\omega)|_{\mathfrak{A}}$ konečně aditivní pravděpodobnost.

2. Místo existence spočetné topologické báze $\mathfrak{J}(\mathcal{X})$ můžeme přímo předpokládat existenci spočetné množiny $\mathfrak{V}$ takové, že $\sigma(\mathfrak{V}) = \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

3. Pokud speciálně požadujeme, aby $\mathcal{X}$ byl metrický prostor, je známý fakt, že pojem separability $\mathcal{X}$ v topologickém smyslu a metrickém smyslu splývají. Již jsme zmínili, že existence metriky $\rho_{\mathcal{X}}$, vzhledem k níž je prostor $\mathcal{X}$ úplný a separabilní, zaručí, aby byl $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ Radonův. Pro polský prostor tedy máme předpoklady věty 37 splněny, čímž získáváme další důkaz věty 30 z odstavce 2.1 ale jen pro speciální volbu $S = P$ (ve značení věty 37).

4. Speciálně máme předpoklady věty splněny pro úplný a separabilní metrický prostor. Právě pro úplný separabilní metrický prostor je možné nalézt formulaci věty o existenci regularizace a stejný postup důkazu, jaký jsme použili v důkazu věty 37, v [16], str. 339, věta VI.1.23.

3. Dodatky

3.1 Věta o izomorfismu

Vraťme se k důkazu tvrzení 29 z odstavce 2.1. Předtím ale předložíme dvě věty, které v tomto důkazu použijeme. Obě je možné nalézt v [4], znění první věty v kapitole 8.1, na str. 260, ve cvičení 12 (její důkaz předvedeme v tomto odstavci), druhou větu po částech i s důkazy jako věty 8.3.5 na str. 274 a 8.3.7 na str. 276. I v tomto odstavci pracujme s pevně daným polským prostorem P.

Poznamenejme, že spojitost zobrazení implikuje jeho borelovskost ([16], str. 43, tvrzení I.3.5 nebo obecněji [8], str. 4, lemma 1.5), tedy jako speciální případ borelovského izomorfismu máme homeomorfismus, což bude dále pro nás užitečné. Proto bude užitečná i poznámka, že spojitá bijekce z kompaktního prostoru do metrického prostoru je již homeomorfismus (obecněji formulováno a dokázáno například v [5] na str. 18 v kapitole I.B.8 jako lemma 8 nebo v [9] na str. 141 v kapitole 5 jako věta 8).

Budeme vždy předpokládat, že na kartézském součinu $M = \times_{i\in\mathbb{N}} M_i$ spočetně mnoha neprázdných množin M_i, $i \in \mathbb{N}$, s metrikami ρ_{M_i}, $i \in \mathbb{N}$, je metrika definována vždy tak, aby topologie (M, ρ_M) byla totožná se součinovou topologií kartézského součinu M. Například můžeme definovat

$$\rho_M(x, y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\rho_{M_i}(x_i, y_i)}{2^i},$$

kde $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$, $x_i, y_i \in M_i$, $i \in \mathbb{N}$. O součinové topologii je možné se dočíst v [9], kapitole 3.

Věta 38 (Urysohnova věta)**.** *Existuje množina B typu $\mathcal{G}_\delta$ v $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ taková, že P a B jsou homeomorfní (čímž i borelovsky izomorfní).*

Důkaz. Uvažujme na P metriku ρ_P takovou, aby (P, ρ_P) byl úplný a separabilní. Zvolme $H = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ hustou podmnožinu P a definujme zobrazení

$$h : P \to [0, 1]^{\mathbb{N}} : x \mapsto (\min\{1, \rho_P(x_1, x)\}, \min\{1, \rho_P(x_2, x)\}, \ldots).$$

Nejprve dokážeme, že je h homeomorfismus P na nějakou podmnožinu $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Pokud pro $x, y \in P$ předpokládáme rovnost $h(x) = h(y)$, ekvivalentně to znamená, že pro každé pevné $n \in \mathbb{N}$ jsou vzdálenosti x_n od x a od y v ρ_P obě větší než 1 nebo se tyto vzdálenosti navzájem rovnají. Pro $1 > \epsilon > 0$ tedy z hustoty H v (P, ρ_P) najdeme $z \in H$ takové, že $\rho_P(x, z) = \rho_P(y, z) < \frac{\epsilon}{2}$

a z trojúhelníkové nerovnosti $\rho_P(x, y) < \epsilon$. Limitním přechodem pro $\epsilon \searrow 0$ se přesvědčíme, že $x = y$. Zobrazení h je proto bijekce mezi P a $h(P)$.

Nyní pro důkaz spojitosti h vezměme posloupnost $\{y_k\}_k$ prvků P konvergující k y v (P, ρ_P). Vzhledem k podobě topologie $[0,1]^{\mathbb{N}}$ stačí dokázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ konverguje $\{\min\{1, \rho_P(y_k, x_n)\}\}_k$ k $\min\{1, \rho_P(y, x_n)\}$ v $[0, 1]$. Využijeme známého faktu, že $\min\{1, \rho_P\}$ je opět metrika (ekvivalentní ρ_P), a rozborem možností snadno ověříme

$$|\min\{1, \rho_P(y_k, x_n)\} - \min\{1, \rho_P(y, x_n)\}| \leq \min\{1, \rho_P(y_k, y)\},$$

přičemž pravá strana konverguje k 0 podle předpokladu.

Pro spojitost h^{-1} pro $y, y_k \in P$, $k \in \mathbb{N}$, naopak předpokládejme konvergenci $\{\min\{1, \rho_P(y_k, x_n)\}\}_k$ k $\min\{1, \rho_P(y, x_n)\}$ v $|. - .|$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Speciálně pro $z \in H \cap U^P(y)$, kde $U^P(y)$ značí otevřenou kouli v P o poloměru 1 a o středu v y, konverguje $\{\rho_P(y_k, z)\}_k$ k $\rho_P(y, z)$. Mějme $\epsilon \in (0, 3)$. Vybereme $z \in H$ takové, aby $\rho_P(z, y) < \frac{\epsilon}{3}$, a $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé $k \geq k_0$

$$|\rho_P(y_k, z) - \rho_P(z, y)| < \frac{\epsilon}{3},$$

čímž $\rho_P(y_k, z) < \frac{2}{3}\epsilon$ a z trojúhelníkové nerovnosti celkem $\rho_P(y_k, y) < \epsilon$.

Již víme, že je h homeomorfismus P na $h(P)$. Označme $P^* \stackrel{\text{def}}{=} h(P)$. Pokud dokážeme polskost $(P^*, \rho_{[0,1]^{\mathbb{N}}})$, bude P^* $\mathcal{G}_\delta$ v $([0, 1]^{\mathbb{N}}, \rho_{[0,1]^{\mathbb{N}}})$, což završí náš důkaz dle [4], str. 254, tvrzení 8.1.4. Na P^* zaveďme další metriku takto:

$$\rho_{P^*}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \rho_P(h^{-1}(x), h^{-1}(y)),\ x, y \in P^*.$$

Protože je h bijekce, rozepsáním axiomů metriky pro ρ_{P^*} v řeči metriky ρ_P se snadno přesvědčíme, že je ρ_{P^*} skutečně metrika. Podobně dostaneme, že každá posloupnost $\{x_n\}_n$ prvků P^* konveguje k x v (P^*, ρ_{P^*}) právě tehdy, když $\{h^{-1}(x_n)\}_n$ konverguje k $h^{-1}(x)$ v (P, ρ_P), a to tehdy a jen tehdy, když $\{x_n\}_n$ konverguje k x v $(P^*, \rho_{[0,1]^{\mathbb{N}}})$, protože je h navíc homeomorfismus, neboli ρ_{P^*} je na P^* ekvivalentní s $\rho_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$. Podobně snadno ověříme spočetnost a hustotu $\{h(x_n)\}_n$ v (P^*, ρ_{P^*}). Libovolná cauchyovská posloupnost $\{x_n\}_n$ v (P^*, ρ_{P^*}) má přes h vzor cauchyovský a tedy konvergentní k nějakému x v (P, ρ_P) a proto $\{x_n\}_n$ konverguje k $h(x)$ v (P^*, ρ_{P^*}). P^* je tedy polský.

Q.E.D.

Speciálně existuje množina $B \in \mathcal{B}([0, 1]^{\mathbb{N}})$ homeomorfní s P, což konkrétně použijeme.

Věta 39 (O borelovském prostém zobrazení). *Jsou-li P_1, P_2 polské prostory, $B \in \mathcal{B}(P_1)$ a*

$$f : (P_1, \mathcal{B}(P_1)) \to (P_2, \mathcal{B}(P_2))$$

prosté zobrazení, pak $f(B) \in \mathcal{B}(T)$ a navíc jsou B a $f(B)$ borelovsky izomorfní.

Tvrzení 40. *Pro každé $B \in \mathcal{B}(P)$ existuje $C \in \mathcal{B}[0,1]$ borelovsky izomorfní B.*

Důkaz. S použitím věty 38 vidíme, že $B \overset{\text{u}}{\sim} G$, kde $G \in \mathcal{B}([0,1]^{\mathbb{N}})$.

Pokud označíme

$$D \overset{\text{def}}{=} \{(0,0,\ldots)\} \cup \left\{ (x_1, x_2, \ldots); \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \infty \right\} \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

a definujeme zobrazení $f : [0,1] \to D$ takové, že $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{2^n}$, kde $x_n \in \{0,1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \infty$, přiřadí $(x_1, x_2, \ldots)$ (definice je korektní, protože pro každé $x \in [0,1]$ existuje takové vyjádření a protože vždy jeden ze dvou různých vektorů $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ má všechny složky od určitého indexu nulové nebo jsou x, y daným předpisem přiřazeny různým prvkům $[0,1]$), můžeme ukázat, že je jako zobrazení do $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ borelovské prosté na D:

Každý vektor $(x_1, x_2, \ldots)$ z D má přes f vzor $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{2^n} \in [0,1]$. Pokud uvažujeme $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots\} \in D$ takové, že $x = y$ tak $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{2^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{y_n}{2^n}$, neboli každý vektor z D určuje svůj vzor přes f jednoznačně a f je bijekce mezi $[0,1]$ a D. Nyní budeme k f přistupovat jako k funkci do $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Prostor $\{0,1\}$ je separabilní, proto

$$\mathcal{B}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = (\mathcal{B}\{0,1\})^{\mathbb{N}} = \sigma\{A(k,i); i \in \{0,1\}, k \in \mathbb{N}\},$$

kde $A(k,i) = \{0,1\}^{k-1} \times \{i\} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $i \in \{0,1\}, k \in \mathbb{N}$. Pro borelovskost nám tedy stačí, že pro každé $i \in \{0,1\}, k \in \mathbb{N}$:

$$f^{-1}(A(k,i)) = \bigcup_{j=0}^{2^{k-1}-1} \left(\frac{2j+i}{2^k}, \frac{2j+i+1}{2^k} \right] \in \mathcal{B}[0,1].$$

Tím je i $f^{\mathbb{N}}$ jako zobrazení do $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ borelovské prosté. Prostory $[0,1]^{\mathbb{N}}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ jsou s jejich metrikami úplné, separabilní a tím polské, proto použitím věty 39 vidíme, že

$$[0,1]^{\mathbb{N}} \overset{f^{\mathbb{N}}}{\sim} D^{\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}).$$

Nyní definujeme zobrazení

$$g : \{0,1\}^{\mathbb{N}^2} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots \\ x_{2,1} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \mapsto (x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, \dots)$$

a dokažme, že to je homeomorfismus. Pokud předpokládáme, že se vektory $(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, \dots), (y_{1,1}, y_{1,2}, y_{2,1}, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ rovnají, dostaneme $x_{i,j} = y_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}$, a tím se rovnají i matice

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots \\ x_{2,1} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \dots \\ y_{2,1} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}.$$

Přitom každý vektor $(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ má vzor

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots \\ x_{2,1} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$$

a celkem je g bijekce. Pro spojitost g volme posloupnost matic

$$\{x^{(n)}\}_n = \left\{ \begin{pmatrix} x_{1,1}^{(n)} & x_{1,2}^{(n)} & \dots \\ x_{2,1}^{(n)} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \right\}_n \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$$

konvergující k matici

$$x = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots \\ x_{2,1} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$$

v metrice $\rho_{\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}}$. Z uvažovaného tvaru této metriky plyne, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ konverguje posloupnost vektorů $\left\{ \left(x_{i,1}^{(n)}, x_{i,2}^{(n)}, \dots \right) \right\}_n$ k vektoru $(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots)$ v $\rho_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ a tím pro každé $i, j \in \mathbb{N}$ konverguje $\left\{ x_{i,j}^{(n)} \right\}_n$ k $x_{i,j}$ v $\rho_{\{0,1\}}$. Konvergence $\left\{ g(x^{(n)}) \right\}_n$ ke $g(x)$ v $\rho_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ je již očividná. Nyní stačí poznamenat kompaktnost $\{0,1\}$ a tím i $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$. Tedy $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2} \overset{g}{\sim} \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Již jsme poměrně blízko intervalu $[0,1]$. Zaveďme zobrazení

$$h : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{C} : (x_1, x_2, \dots) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2x_n}{3^n},$$

kde

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2x_n}{3^n};\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \in \{0,1\} \right\} \subset [0,1]$$

(je takzvané Kantorovo diskontinuum). Zobrazení h je opět homeomorfismus a tím jako zobrazení do $[0,1]$ borelovské prosté na $\mathcal{C}$:

Zvolme nejprve vektory $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a předpokládejme, že $h(x) = h(y)$. Z jednoznačnosti trojkového rozvoje neobsahujícího číslo 1 dostáváme $x = y$. Dále vidíme, že každé $x \in \mathcal{C}$ tvaru $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2x_n}{2^n}$, kde $x_n \in \{0,1\}$, $n \in \mathbb{N}$, má přes h vzor $(x_1, x_2, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Protože je $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ kompaktní, opět stačí dokázat spojitost h. Zvolíme posloupnost $\left\{\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots\right)\right\}_n$ prvků $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ konvergující k $(x_1, x_2, \ldots)$ v metrice $\rho_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ bude $\left\{x_k^{(n)}\right\}_n$ konvergovat k x_k v $\rho_{\{0,1\}}$ a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2\left(x_k^{(n)} - x_k\right)}{3^k} \right| \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2 \lim_{n\to\infty} \left|x_k^{(n)} - x_k\right|}{3^k} = 0,$$

protože uvažovaná řada je pro každé $n \in \mathbb{N}$ omezená shora číslem 2. Zobrazení h je tedy (prostý) homeomorfismus a protože jsou prostory $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $[0,1]$ polské, podle věty 39 vidíme, že $\mathcal{C} \in \mathcal{B}[0,1]$, a několikanásobným použitím téže věty postupně celkem dostáváme $C \in \mathcal{B}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}[0,1]$ takovou, že $B \overset{\mathrm{hogof}^{\mathbb{N}}\mathrm{ou}}{\sim} C$.

Q.E.D.

Seznam použité literatury

[1] Bauer, Heinz. *Probability Theory.* Berlin: de Gruyter, 1996. ISBN 3-11-013935-9.

[2] Billingsley, Patrick. *Convergence of Probability Measures.* 2. vydání. New York: a Willey-Interscience Publication, 1999. ISBN 0-471-19745-9.

[3] Borges, R. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete.* Berlin: Springer, 1966, roč. 6, s. 125–128. ISSN 0044-3719.

[4] Cohn, Donald L. *Measure Theory.* Boston: Birkhäuser, 1980. ISBN 0-8176-3003-1.

[5] Dunford, Nelson a Jacob T. Schwartz, Jacob T. *Linear operators. Part I, General theory.* 2. vydání. New York: Interscience Publishers, 1964.

[6] Dupáčová, Jitka, Josef Štěpán, a Jan Hurt,. *Stochastic modeling in economics and finance.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. ISBN 1-4020-0840-6.

[7] Halmos, Paul Richard. *Measure Theory.* New York: Springer, 1974. ISBN 0-387-90088-8.

[8] Kallenberg, Olav. *Foundations of Modern Probability.* 2. vydání. Berlín: Springer, 1997. ISBN 0-387-95313-2.

[9] Kelley, John L. *General Topology.* New York: Springer, 1975.

[10] Lachout, Petr. *Diskrétní martingaly* [online]. Praha, 23.10.2007 [cit. 2012-03-12]. Dostupné z: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~lachout/Vyuka/tp2/TP2.html`

[11] Lachout, Petr. *Teorie pravděpodobnosti.* 2. vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-246-0872-3.

[12] Neveu, Jacques. *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability.* San Francisco: Holden-Day, 1965.

[13] Rao, Malempati M. *Measure Theory and Integration.* New York: Marcel Dekker, Inc., 2004. ISBN 0-8247-5401-8.

[14] Schwartz, Laurent. *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.* London: Oxford University Press, 1973.

[15] Seidler, Jan. *Vybrané kapitoly ze stochastické analýzy.* 1. vydání. Praha: Matfyzpress, 2011. ISBN 978-80-7378-145-3.

[16] Štěpán, Josef. *Teorie pravděpodobnosti.* 1. vydání. Praha: Academia, 1987. ISBN 80-7184-730-5.

Seznam použitých zkratek a symbolů

$\mathcal{B}(S)$	Borelovská σ-algebra prostoru S	2
$(.)^{\complement}$	komplement dané podmnožiny	11
$\mathcal{C}$	Kantorovo diskontinuum	55
$\mathfrak{c}(A)$	systém spočetných podmnožin množiny A	25
$\mathbb{C}$	prostor spojitých funkcí na $[0,1]$	8
$\mathbb{C}(A)$	prostor spojitých funkcí na (neprázdné) množině A	15
$\mathbb{C}_b(S)$	prostor spojitých omezených funkcí na S	35
$\mathbb{C}(T;S)$	prostor spojitých funkcí z metrického prostoru T do metrického prostoru S	15
$\mathbb{D}$	prostor rcll funkcí na $\mathbb{R}_+$	16
$\mathbb{D}[0,\infty]$	prostor prvků $\mathbb{D}$, pro které existuje konečná limita v nekonečnu	21
$\mathbb{D}_1$	systém funkcí s konečnými jednostrannými limitami na $\mathbb{R}_+$	32
$\mathbb{D}_1[0,\infty]$	systém prvků $\mathbb{D}_1$, pro které existuje konečná limita v nekonečnu	32
$D_a^b(f)$	počet překročení dolů intervalu $[a,b]$ funkcí f	17
$\mathbf{E}X$	střední hodnota náhodné veličiny X	9
$\mathbf{E}[X\|\mathcal{G}]$	podmíněná střední hodnota náhodné veličiny X za podmínky $\mathcal{G}$	23
$f\|_A$	restrikce funkce f na podmnožinu A definičního oboru f	40
$\overline{\mathcal{F}}$	nejmenší úplná filtrace nad filtrací $\mathcal{F}$	16
$\mathcal{F}^+$	nejmenší zprava spojitá filtrace nad filtrací $\mathcal{F}$	16
$\mathcal{F}^a$	augmentace filtrace $\mathcal{F}$	16
$\mathcal{F}^X$	kanonická filtrace procesu X	25
$\mathcal{G}_\delta$	spočetný průnik otevřených množin	52
$\mathbf{I}_A(\omega)$	indikátor $\omega \in A$	17
$\mathbf{I}_t(\omega)$	indikátor rovnosti $t=\omega$	4
$\mathfrak{I}(\mathcal{X})$	topologie topologického prostoru $\mathcal{X}$	48
$\mathfrak{K}(\mathcal{X})$	systém kompaktních množin topologického prostoru $\mathcal{X}$	48
$\mathfrak{k}(G)$	systém všech konečných podmnožin rodiny G	5
$\mathbb{L}_1$	prostor integrovatelných náhodných veličin	18
$\mathbb{L}_1(\mu)$	prostor integrovatelných funkcí vzhledem k míře μ	35
$\mathbb{L}_2[0,t]$	prostor měřitelných funkcí s konečnými druhými momenty vzhledem k Borelovské míře na $[0,t]$, $t\in\mathbb{R}_+$,	13
$\mathbb{L}_\infty$	prostor omezených reálných náhodných veličin	6
$\mathcal{M}^T$	součinová σ-algebra	3
$\mathbb{M}^d$	prostor všech čtvercových matic stupně d	14
$\mu(g)$	integrál funkce g podle míry μ, pokud $g \in \mathbb{L}_1(\mu)$, číslo 0 v opačném případě	35

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel 2
$\mathbb{N}_0$	množina nezáporných celých čísel 16
$\mathcal{N}$	systém $N \in \mathcal{A}$ takových, že $\mathbf{P}(N) = 0$ 25
$\mathbf{N}(\mu, V)$	normální rozdělení se střední hodnotou μ varianční maticí V 13
$N_a^b(f)$	počet překročení nahoru intervalu $[a, b]$ funkcí f 16
$\mathcal{P}(S)$	množina borelovských pravděpodobnostních měr na S 35
$\mathbf{P}(A\|\mathcal{G})$	podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky $\mathcal{G}$ 7
$\mathbf{P}$-s.j.	$\mathbf{P}$-skoro jistě 3
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel 8
$\mathbb{Q}_+$	množina nezáporných racionálních čísel 23
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel 2
$\mathbb{R}_+$	množina nezáporných reálných čísel 2
$\mathfrak{rca}(S)$	prostor regulárních znaménkových měr na S 35
rcll	zprava spojitá s konečnými limitami zleva 5
ρ_S	metrika metrického prostoru S 8
SDR	stochastická diferenciální rovnice 14
$S \overset{\mathrm{f}}{\sim} T$	S a T jsou borelovsky izomorfní přes f 38
$U_\epsilon^S(s)$	otevřená koule metrického prostoru S o poloměru ϵ a o středu v s 8
UC	běžné podmínky 16
$\mu_n \overset{\mathfrak{w}}{\to} \mu$	posloupnost měr $\{\mu_n\}_n$ konverguje slabě k míře μ 35
w_f	modul spojitosti funkce f 9
$\mathcal{X}^*$	prostor spojitých lineárních funkcionálů na $\mathcal{X}$ 35
$\mathcal{X}^{**}$	adjungovaný prostor k prostoru $\mathcal{X}$ 36
$\{x_k\}_k$	posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 10
$Y_n \overset{\mathcal{D}}{\to} Y$	posloupnost náhodných veličin $\{Y_n\}_n$ konverguje v distribuci k náhodné veličině Y 16
$\mathcal{Z}_{T,E}(S)$	systém S-separabilních funkcí $T \to E$ (také jednodušeji $\mathcal{Z}(S)$) 30
$(.)^+$	kladná část dané hodnoty 18
$(.)^-$	záporná část dané hodnoty 22