Karel Kadlec (2012): Modifikace stochastických objektů

Posudek vedoucího diplomové práce

Diplomant studuje problém existence modifikace stochastického procesu, respektive stochastického pole do procesů s predepsanou zajímavou množinou trajektorií (spojité, zprava spojité, separabilní) a náhodné pravděpodobnostní míry do Markovského jádra. Je pokryta velká část relevantní problematiky.

(1) Je uveden přesný a konsistentní důkaz Kolmogorov-Chenstovovy věty pro existenci spojité modifikace náhodného pole nad $T = \mathbb{R}^n$. Autor zpřesňuje velmi podstatně Bauerův, respektive Kallenbergův důkaz.

(2) Dalším tématem jsou submartingaly $(X_t, t \geq 0)$. Je dokázána věta o jejich rcll-rekonstrukci a určena nutná a postačující podmínka pro existenci jejich rcll-modifikace. V podstatě je aplikován Kallenbergův hrubý nástin uvedený ve Foundations of modern probability. Značný objem potřebných prostředků z matematické analýzy dokázal diplomant samostatně.

(3) Obtížné téma *téměř obecné* existence separabilní modifikace procesu $(X_t, t \geq 0)$ s hodnotami v kompaktním metrickém prostoru E a prostoru $E = \overline{\mathbb{R}}$ je presentováno pomocí jemného principu, který je uveden ve větě 25 na str. 33. Pro separabilní procesy je znovu studována otázka existence spojité modifikace.

(4) Klasický problém regularizace podmíněné pravděpodobnosti je řešen obecněji pro náhodne pravděpodobnostní míry s hodnotami v některém Polském prostoru. S porozuměním je vyuzita věty o isomorfismu a liftingu. Tato část práce je z větší části originální.

V souvislosti s větou o isomorfismu jest třeba zmínit Větu 2, která v obecné rovině poskytuje návod jak vyhledávat modifikace do nekteré zajímavé množiny trajektorií. Nedává tato věta návod jak podstatně zjednodušit studium existence separabilních modifikací?

V práci lze nalézt některé překlepy a některá unáhlená tvrzení. Na str. 5 je například chybná ekvivalentní definice S separability. Mělo by být

$$\overline{\{(s, X_s(\omega)), s \in S\}} \supset \{(t, X_t(\omega)), t \in \mathbb{R}^+\},$$

to jest, že graf funkce $s \to f(s)$ je hustý v grafu funkce $t \to f(t)$.

Diplomant pracoval samostatně, naučil se používat pokročilou teorii míry, funkcionální analýzy a zvládl základy topologie. Práce je velmi obtížná kompilace s originálními příspěvky autora. Doporučuji, aby předložený spis byl uznán jako diplomová práce na MFF UK.

7.5. 2012

Josef Štěpán, vedoucí práce