Posudek oponenta k diplomové práci ***K.Kadlece*** s názvem

Modifikace stochastických objektů

Práce je v souladu se zadáním zaměřena na konstrukce modifikací stochastických procesů a na konstrukce regulárních verzí podmíněné pravděpodobnosti. Práce vzhledem ke své rozsahu a náročnosti obsahuje i odpovídající počet nepřesností a nedopatření. V jednom případě mi vyplatilo zavést intuitivnější značení pro vstřebání (jednoduchého) důkazu ve složitých souvislostech.

V práci jsem našel následující nedopatření, která je možné v rámci obhajoby ve vybraných případech objasnit.

- Nezdá se mi definice symbolu $\lesssim$ na str. 9 s tím, že pomocná konstanta $C \in \mathbb{R}$ se připouští reálná, tedy i záporná, a připouští se i porovnávání záporných funkcí tímto způsobem, což působí rušivě. Předpokládám, že záměrem mělo být předpokládat, že konstanta C je kladná popř. nezáporná, popř. se omezit i při porovnávání pouze na nezáporné funkce, aby se čtenář zbytečně předčasně nemusel děsit toho, co může následovat.
- Na str. 9 se předpokládá, že T je obecná množina vybavená metrikou ρ_T a v následné definici 5 se operuje s omezenou podmnožinou množiny T. Předpokládám, že jde o omyl a že místo každé restrikce na omezenou množinu má být restrikce na nějaké okolí kteréhokoli bodu z T.
- Lemma 10 tak, jak je formulované, neplatí. Stačí uvažovat deterministický rostoucí proces $X_t = \frac{t}{1-t}$ na intervalu $T = [0, 1)$. Posloupnost $t_n = 1 - \frac{1}{n}$ je rostoucí omezená, přičemž $X_{t_n} = n - 1 \to \infty$. Tvrzení i s důkazem může platit v případě, že se vhodně upřesní pojem omezené posloupnosti časových indexů.
- Úvaha odpovídající poslední odsazené formuli na str. 21 není v pořádku. Z neexistence limity neplyne existence předepsané posloupnosti. Pro jednoduchost je možné si představovat, že by funkce g nabývala pouze hodnot 0,1. Závěr důkazu lemmatu 11 vyžaduje opravu.
- Formule důkaz lemmatu 13 na str. 22 mohly být doprovozeny komentářem ve smyslu nezáporná část (inverzního) supermartingalu je (inverzní) submartingal, pro $n \geq k$ je $[|X_n| \geq c] \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ tak, aby čtenář mohl lépe sledovat myšlenkové pochody směřující k verifikaci výpočtu.
- Důkaz lemmatu 18 není šťastně navržen jak po taktické i po grafické stránce. Po grafické stránce není konec důkazu oddělen od následujícího textu. Po taktické stránce je pro čtenáře zajímavější druhá z dokazovaných implikací. Proto by jí čtenář upřednostnil jako první dokazovanou a také by přivítal, pokud by důkaz nepodstatné části byl doveden do konce, který bude patrně zohledňovat definici uzávěru jako průniku uzavřených nadmnožin.
- V důkazu věty 21 se osvědčil následující zápis $[X_L \in F]$[1] místo
$$V(F, L) \triangleq \{\omega \in E^T : \omega_t \in F, t \in L\} = [X_t \in F, t \in L], \qquad \text{kde} \qquad X_t(\omega) = \omega_t.$$
Pak lze množinu S-seprabilních trajektorií vyjádřit intuitivnějším zápisem
$$\mathcal{Z}(S) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bigcap_{G \in \mathcal{G}} [X_{S \cap G} \in F \ \Rightarrow\ X_G \in F] = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_0} \bigcap_{G \in \mathcal{G}_0} [X_{S \cap G} \in F \ \Rightarrow\ X_G \in F]$$
S množinou S by se v interakci mezi zněním z důkazem věty 21 hodilo zacházet o něco lépe. Ať je nejprve libovolná. Navrhuji ukázat měřitelnost a pak uvažovat speciální případ a dokazovat plnost míry. Vzhledem k mírně nedůslednému znění je o to více na místě být důslednější v jednotlivých krocích důkazu.
- Při používání modulu spojitosti separabilní funkce se nejspíše využívá nezávislosti této definice na volbě separantu bez poznámky o této nezávislosti.
- Na začátku druhého odstavce na str. 33 dle mého názoru má být místo bodu (1.24) odkaz na (1.20).
- Na straně 36 v odstavci nad lemmatem 26 se bez varování vyskytuje symbol X, který dle mého názoru má významově odpovídat předchozímu symbolu q.

[1] $[X_L \in F]$ čteme: náhodný jev spočívající v tom, že proces X na množině L nabývá hodnot z množiny F. Protože X_L samo o sobě není definováno jinak, nehrozí nebezpečí chybné interpretace.

- V Předposlední odsazené formuli na str. 37 je ve formuli použit symbol A bez uvedení a místo něj je uveden symbol K, který dle mě má být nahrazen symbolem A či naopak.
- Těsně nad lemmatem 32 je vynechána nutná podmínka měřitelnosti funkce g spolu s dalšímu omezeními, aby $Q(g)$ bylo dobře definováno.
- Na straně 45 v dvouřádkové odsazené formuli uprostřed stránky na pravé straně má být místo maxima uvažováno supremum z absolutní hodnoty.
- Na str. 47 nahoře ve dvouřádkové odsazené formuli předpokládám, že má být nejdříve posláno $n \to \infty$ a pak teprve $k \to \infty$ s tím, že

  $$\Phi_n(g) - \Phi_n(h_k) = \Phi_n(g - h_k), \quad E|\Phi_n(g - h_k)| \leq \Phi_0(|g - h_k|) \to 0$$

  pro $k \to \infty$ nezávisle na $n \in \mathbb{N}$.
- Vztah (2.19) mi nepřijde dokázaný ve smyslu: $1 = P(\Phi_n \xrightarrow{\mathfrak{w}} \Phi_\infty)$. Nejspíš vyžaduje další komentář se smyslu spočetné testovací množiny pro konvergenci.
- Na str. 48 úplně dole postrádám podmínku $K_{A,k} \subseteq A$.
- Na str. 49, třetí odsazená formule jsou použity absolutní hodnoty bez významu. Předpokládám, že jde o nevydařený záměr ukázat konvergenci v $\mathbb{L}_1$.

Na závěr lze konstatovat, že práce splňuje předpoklady pro uznání za diplomovou práci na MFF UK.