Vyjádření vedoucího diplomové práce

F. Žák: Markov semigroups

Otázka existence stacionárních či periodických řešení patří mezi základní problémy kvalitativního výzkumu diferenciálních rovnic všeho druhu. V případě stochastických diferenciálních rovnic, v nichž náhodný člen je řízen bílým šumem (a tedy řešení je markovské), je přirozenou definicí stacionarity existence invariantní míry příslušného markovského procesu, respektive existence cyklu v dynamickém systému indukovanému rovnicí v prostoru pravděpodobnostních rozdělení (čili "periodického řešení" ve smyslu pravděpodobnostních rozdělení).

Kolega Žák se touto otázkou zabývá v případě stochastických parciálních diferenciálních rovnic, které jsou obecněji pojaty - jak je to obvyklé- jako "obyčejné" stochastické rovnice v nekonečně rozměrných stavových prostorech (Hilbertových prostorech), kterými jsou pak v aplikacích vhodné funkční prostory.

V případě stacionárních řešení je to velmi živý problém a v uplynulých asi 15 letech vzniklo na toto téma veliké množství výsledků. Důkazové metody, ač se dají redukovat do několika základních postupů, se často v podrobnostech velmi liší v závislosti na zkoumané rovnici. O pracích, které by se zabývaly periodickým řešením v nekonečné dimenzi, mi není nic známo.

Jednou z často užívaných metod je verze klasické Krylovovy-Bogoljubovovy průměrovací metody, spočívající v této úvaze: Kandidáta na invariantní míru najdeme jako slabou limitu postupných časových průměrů přechodové pravděpodobnostní funkce. Slabá limita (stačí relativní kompaktnost) se najde pomocí Prochorovovy věty a v konečně rozměrném stavovém prostoru k tomu stačí omezenost nějakého řešení podle pravděpodobnosti (v časovém průměru), protože uzavřené koule jsou kompaktní. Nakonec, k důkazu této omezenosti se využívá zpravidla nějaká ljapunovská věta, či ljapunovská nerovnost. Pokud jde o periodická řešení, je situace obdobná, úvahy se ale vztahují ke vhodnému skeletonu - markovskému řetězci, periodicky vybranému z původního procesu.

V nekonečné dimenzi tento postup naráží ze dvou důvodů: Předně, koule nejsou kompaktní a za druhé, problém je i s ljapunovskými větami, protože u nich bývá zapotřebí Itoova formule a řešení rovnic zpravidla nebývají "silná" tj. ve tvaru stochastického diferenciálu. První problém lze překonat využitím markovské vlastnosti řešení v případě kompaktní semigrupy generátoru v driftu rovnice (typicky pro parabolické stochastické rovnice na omezené oblasti), druhý pak vhodnou aproximační procedurou. Pro invariantní míry toto bylo poprvé provedeno v citovaných pracích [5] a [10] (pokaždé trochu jinak) a od té doby vícekrát.

Kolega Žák se inspiroval postupem zejména práce [5] a modifikoval ho pro případ periodických řešení. K tomu ještě nejprve potřeboval obecnou "periodickou" větu Krylovova-Bogoljubovova typu, která sice není původní, avšak její verze v Chasminského knize [11] je bez důkazu. Vlastní kompaktifikační procedura (Věta 3.2.1) je originálním výtvorem autora a k ověření potřebné omezenosti v pravděpodobnosti je použito Ichikawova lemmatu (Lemma 3.2.4 a Věta 3.2.5).

Výsledky jsou pak aplikovány na případ stochastické semilineární rovnice vedení tepla (příklad v paragrafu 3.3)

Práce je obdařena pěkným úvodem do teorie nekonečně rozměrného Wienerova procesu a stochastické integrace (Kapitola 1) a teorie stochastických evolučních rovnic (Kapitola 2), obsahuje rovněž čtyři dodatky týkající se různých funkcionálně-analytických aspektů teorie stochastických rovnic v Hilbertových prostorech. Je napsána velmi čitelně a se značným nadhledem. Je z ní zřejmý mimořádně dobrý přehled autora o relevantní matematické literatuře. Rovněž jazyk (angličtina) působí velmi vzdušně.

Výsledky práce jsou publikovatelné ve standardním mezinárodním matematickém časopise, pro publikaci v opravdu špičkovém časopise by práce potřebovala ještě možná jisté doplnění (stabilita periodického řešení, konvergence k němu, apod.)

Kolega Žák při zpracovávání tématu vystupoval iniciativně a samostatně a podle mého názoru jsou dosažené výsledky zajímavé. Práci doporučuji uznat jako diplomovou.

V Praze, dne 7.5.2012

Bohdan Maslowski