Oponentský posudek na diplomovou práci Kryštofa Toušky "Matematické modelování viskoplastických materiálů"

Předkládaná práce se zabývá analýzou a numerickým řešením modelů nestlačitelných viskoplastických materiálů. V první kapitole je uveden stručný úvod do viskoplasticity následovaný přehledem řešených problémů (Poiseuilleovo proudění, proudění v kavitě, okolo válce, tažení drátu, lití pásky).

Druhá kapitola se věnuje nejprve odvození rovnic pro Binghamovu tekutinu. Následně je uveden důkaz existence řešení klasickou variační metodou pro úlohu s netriviálními okrajovými podmínkami zahrnujícími tření. Je také zmíněna metoda regularizace konstitutivního vztahu, která je později použita při numerickém řešení, a vztah regularizovaného a původního problému. Jako alternativní metoda důkazu je použita implicitní konstitutivní teorie. Je ověřeno, že Binghamova tekutina splňuje předpoklady tzv. maximálního monotónního grafu, a dále je uvedeno, že při vhodné volbě konečně dimenzionálních prostorů konverguje Galerkinova metoda. V této sekci je v momentové rovnici (2.50) použita podle mého názoru chybně deviatorická část $\mathbf{T}'$ namísto celého tenzoru napětí $\mathbf{T}$ (srov. (3.1) nebo (3.30)), nicméně výsledek tím není dotčen.

Těžiště práce leží v poslední kapitole, kde jsou nejprve popsány 3 slabé formulace úlohy za předpokladu, že konstitutivní vztah má explicitní podobu $\mathbf{T}' = \mathcal{A}(\mathbf{D})$, a jejich diskretizace metodou konečných prvků. Pro 2D úlohy se čtyřúhelníkovou sítí jsou navrženy konečněprvkové prostory pro rychlost $\mathbf{u}$, tlak p, smykové napětí $\mathbf{S}(= \mathbf{T}')$ a symetrický gradient rychlosti $\mathbf{D}$. Zde bych očekával vysvětlení, proč byly zvoleny právě tyto prostory, zejména v případě $\mathbf{S}$ a $\mathbf{D}$: Lze volbu prvků teoreticky zdůvodnit?

Zvolená numerická metoda je založena na regularizaci implicitního konstitutivního vztahu, přičemž regularizovaný vztah je již explicitní. Přibližné řešení Binghamova modelu je pak dosaženo postupným zmenšováním regularizačního parametru. Jsou navrženy a testovány dva způsoby regularizace. V druhém případě ovšem ze vztahu (3.33) není jasné, zda jej lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{T}' = \mathcal{A}(\mathbf{D})$ a jakým způsobem byl tedy naimplementován.

Nakonec jsou prezentovány výsledky numerického řešení 5 problémů zmíněných v úvodní části, přičemž proudění v rovném kanálu je spočteno také pro model Herschel-Bulkley. Jsou zde porovnány jednotlivé formulace, varianty konečných prvků a konstitutivních vztahů zejména z hlediska vlivu na konvergenci, paměťovou a časovou náročnost výpočtu. Výsledky jsou verifikovány buď na analytických řešeních nebo porovnáním s referenčními hodnotami z odborných článků. V části 3.7 by bylo vhodné zmínit, jakým způsobem byla aproximována okrajová podmínka se třením.

Práce se zabývá klasickým problémem z hlediska moderní implicitní konstitutivní teorie a obsahuje dle mého názoru řadu originálních výsledků zejména v oblasti numerického řešení úloh nelineární mechaniky kontinua. Z formálního hlediska je práce napsána na vysoké úrovni s minimem chyb, které nesnižují její kvalitu. Doporučuji tedy komisi, aby práci uznala jako diplomovou práci v oboru Matematické a počítačové modelování ve fyzice a technice.

Mgr. Jan Stebel, Ph.D.