Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Matúš Kepič

Webová aplikace pro výuku goniometrických funkcí, rovnic a nerovnic

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Robová Jarmila, CSc.

Studijní program: Geografie

Studijní obor: Geografie a matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2012

Rád by som poďakoval vedúcej práce, paní RNDr. Jarmile Robovej, CSc., za užitočné rady, podporu a za čas, ktorý mi venovala pri tvorbe diplomovej práce. Ďalej by som rád poďakoval pánom RNDr. Ing. Jaroslavovi Richterovi a Mgr. Ľubošovi Moravcovi za užitočné rady ohľadom tvorby webových stránok. Taktiež ďakujem celej svojej rodine a priateľom za podporu pri tvorbe diplomovej práce.

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.
Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahuju práva a povinnosi vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského záona v platnom znení, predovšetkým skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavrenie licenčnej zmluvy o užiti tejto práce ako školného diela podľa § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 29. júla 2012 Matúš Kepič

Abstrakt

Název práce: Webová aplikace pro výuku goniometrických funkcí, rovnic a nerovnic

Autor: Matúš Kepič

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jarmila Robová, CSc.

e-mail vedoucího: robova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Diplomová práca je venovaná goniometrickým funkciam, rovniciam a nerovniciam, pričom dôraz je kladený na goniometrické rovnice a nerovnice. Táto práca slúži ako výukový materiál pre žiakov a učiteľov stredných škôl. Práca obsahuje teoretickú časť, kde sú vysvetlené základné poznatky o goniometrických, cyklometrických, hyperbolických a hyperolometrických funkciach a tiež o goniometrických rovniciach a nerovniciach. Praktická časť obsahuje vzorové riešené príklady a úlohy určené k precvičovaniu. Práca má formu webovej stránky, obsahuje interaktívne prvky (napr. krokované riešenia, testy s výberom z viacerých možnosti, aplety vytvorené pomocou programu GeoGebra).

Kľúčové slova: goniometrické funkcie, goniometrické rovnice, goniometrické nerovnice

Abstract

Title: Web application for teaching of trigonometric functions, equations and inequalities

Author: Matúš Kepič

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Supervisor's e-mail address: robova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The thesis is devoted to trigonometric functions, equations and inequalities, the focus is on goniometrical equations and inequalities. This work serves as a teaching material for students and teachers of secondary schools. The work contains a theoretical part, which explains the basic knowledge of trigonometric, inverse trigonometric, hyperbolic and hyperbolometric functions and also of goniometrical equations and inequalities. The practical part contains the solved examples and tasks assigned to practicing. The work has a form of a web application, contains interactive elements (for example step-by-step solution, multiple choice tests, applets created by GeoGebra).

Keywords: trigonometric functions, goniometrical equations, inequalities goniometrical

Obsah

Úvod

Hlavným cieľom diplomovej práce je vytvorenie interaktívnej webovej stránky, ktorá sa bude zaoberať výukou goniometrických rovníc a nerovníc na strednej škole. Práca je taktiež z časti rozšírená o základné poznatky z goniometrických, cyklometrických, hyperbolických a hyperbolometrických funkcií.

Na internete môžeme nájsť veľké množstvo webových stránok, ktoré sa zaoberajú výukou goniometrických rovníc. Naopak goniometrickým nerovniciam sa venuje len veľmi málo internetových aplikácií, preto verím, že táto webová stránka bude mať svoje dostatočné využitie. Na strednej škole sa preberajú hlavne goniometrické rovnice a nerovnice, a taktiež goniometrické funkcie. Učivo zamerané na cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické funkcie je často rozširujucím učivom a môžme sa s nim stretnuť až v matematických seminároch vo vyšších ročníkoch.

Celá práca je rozdelená na dve hlavné časti: zhodnotenie existujúcich webových aplikacii zaoberajúcich sa výukou goniometrických rovníc a nerovníc a vlastné webové stránky. Samotná internetová stránka je členená na teoretickú a praktickú časť. V teoretickej časti sú zopakované hlavné poznatky z goniometrických funkcií, ako súhrn základných vlastností goniometrických funkcií, goniometrických vzorcov, ktoré používame pri riešení goniometrických rovníc a nerovníc. Tieto znalosti sú nutnou podmienkou k správnemu pochopeniu riešenia goniometrických rovníc a nerovníc. Súčasťou teoretickej časti sú aj rozširujúce informácie o cyklometrických, hyperbolických a hyperbolometrických funkciach. V teoretickej časti sa môžme stretnúť s veľkým množstvom apletov vytvorených pomocou programu GeoGebra.

Praktická časť je venovaná samotným príkladom a úloham určeným k precvičovaniu, ktoré sú obohatené o krokované riešenie. Z dôvodu rozsiahlejšej práce som v tomto texte rozobral vždy len prvú úlohu, ostatné úlohy sú dostupné na internete. Dôraz je kladený na riešené príklady, metódy riešenia príkladov v súvislosti s vlastnosťami goniometrických funkcií. Kapitola venovaná testom obsahuje úlohy, ktoré služia k precvičovaniu získaných vedomosti. Dôraz je kladený hlavne na základné vlastnosti goniometrických funkcií, funkčné hodnoty a grafy goniometrických a ďalších funkcií.

Ako študent učiteľstva matematiky mám veľmi blízko k tejto téme a aj to bol jeden z hlavných motívov prečo som si vybral túto tému. Dúfam, že táto práca bude pre žiakov prínosná a pomôže im k pochopeniu riešenia goniometrických rovníc a nerovníc.

Diplomová práca je priamo tlačená z webovej stránky. Samotný formát a výsledná tlačená podoba diplomovej práce odpovedá internetovej stránke.

Webová aplikácia je voľne dostupná na adrese:

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kepim6am/dp/gon_rovnice_nerovnice/

Hodnotenie existujúcich webových stránok

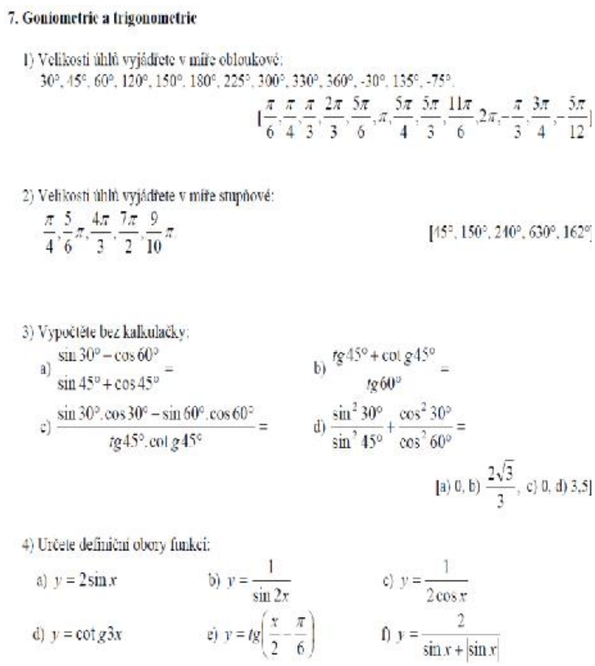
V tejto časti diplomovej práce som sa venoval nájdeniu rôznych internetových stránok, ktoré sa venuju výuke goniometrických rovníc a nerovníc. Hlavným cieľom pri skúmaní jednotlivých internetových stránok bolo ukázať, či ich môžeme začleniť do výuky, či sú vhodným výukovým materiálom pre študentov stredných škôl. Celkové hodnotenie existujúcich webových stránok pozostáva z dvoch časti. V prvej časti som sa pokúsil o slovné hodnotenie jednotlivých stránok. Zároveň okrem slovného hodnotenia obsahujú vždy náhľad na webovú stránku + adresu. V druhej časti je priehľadná tabuľka, v ktorej sú jednotlivé stránky číselne ohodnotené podľa niekoľkých hľadisiek. Dôraz bol kladený na odbornú správnosť, interaktivitu, priehľadnosť, funkčnosť a design.

Jednotlivé stránky

1. **http://maths.cz/clanky/goniometricke-rovnice.html**

Táto stránka obsahuje stručný prehľad riešenia goniometrických rovníc. Z môjho pohľadu mi prijde táto stránka ako nie veľmi vhodný výukový material pre študentov. Celkovo obsahuje 7 vyriešených príkladov, pričom jednotlivé riešenia príkladov sú veľmi stručné a bez predchádzajúcich znalosti o goniometrických rovniciach sa študent bude len veľmi ťažko orientovať. Taktiež po grafickej stránke mi prijde daná internetová stránka veľmi nepriehľadná. Na druhej strane kladne hodnotím možnosť otestovania si svojich znalostí z goniometrických rovníc. Čo sa týka goniometrických nerovníc, tak tie sa mi v rámci tejto internetovej stránky nepodarilo nájsť, a to nie len goniometrické nerovnice, ale obecne učivo týkajúce sa nerovníc.

2. **http://matematika-issnp.xf.cz/otazky_pdf/7.Goniometrie%20a%20trigonometrie.pdf**



7. Goniometrie a trigonometrie

1) Velikosti úhlů vyjádřete v míře obloukové:
30°, 45°, 60°, 120°, 150°, 180°, 225°, 300°, 330°, 360°, -30°, 135°, -75°.

$$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\pi,\frac{5\pi}{4},\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{6},2\pi,-\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4},-\frac{5\pi}{12}]$$

2) Velikosti úhlů vyjádřete v míře stupňové:

$$\frac{\pi}{4},\frac{5}{6}\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{7\pi}{2},\frac{9}{10}\pi \qquad [45°, 150°, 240°, 630°, 162°]$$

3) Vypočtěte bez kalkulačky:

a) $\dfrac{\sin 30° - \cos 60°}{\sin 45° + \cos 45°} =$ b) $\dfrac{tg 45° + \cot g 45°}{tg 60°} =$

c) $\dfrac{\sin 30°.\cos 30° - \sin 60°.\cos 60°}{tg 45°.\cot g 45°} =$ d) $\dfrac{\sin^2 30°}{\sin^2 45°} + \dfrac{\cos^2 30°}{\cos^2 60°} =$

$$[a)\ 0,\ b)\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ c)\ 0,\ d)\ 3{,}5]$$

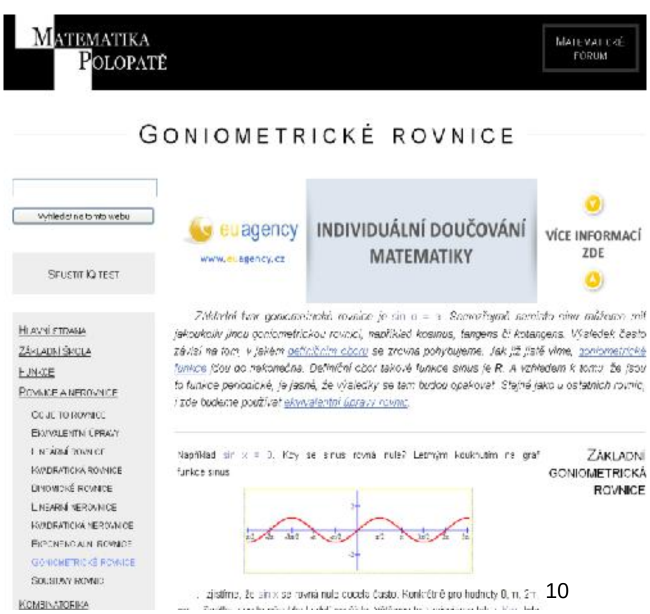
4) Určete definiční obory funkcí:

a) $y = 2\sin x$ b) $y = \dfrac{1}{\sin 2x}$ c) $y = \dfrac{1}{2\cos x}$

d) $y = \cot g 3x$ e) $y = tg\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)$ f) $y = \dfrac{2}{\sin x + |\sin x|}$

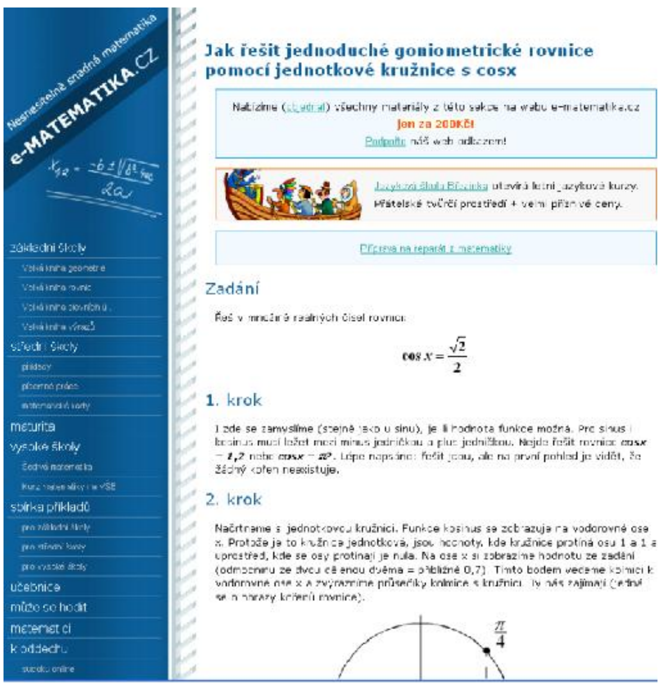
Tieto stránky boli vytvorené pre študentov maturitného ročníka oboru elektrotechnika a oboru mechanik elektronik. Môžeme tu nájsť veľké množstvo príkladov určených k opakovaniu, ktoré obsahuju riešenie. Súčasťou stránky avšak nie sú vzorové riešené príklady, preto je táto stránka vhodná pre študentov, ktorí už danú látku ovládajú a svoje vedomosti si chcú precvičiť na ďalších príkladoch. Bohužiaľ súčasťou tejto zbierky úloh nie sú goniometrické nerovnice, čo je zrejme spôsobené vzdelávacími osnovami danej školy. Po grafickej stránke sú príklady písané veľmi priehľadne. Záverom teda hodnotím danú stránku pozitívne. Určite ju ocenia nie len študenti, ale aj učitelia, keďže tu môžu nájsť ďalšie množstvo príkladov.

3. **http://www.matweb.cz/goniometricke-rovnice**



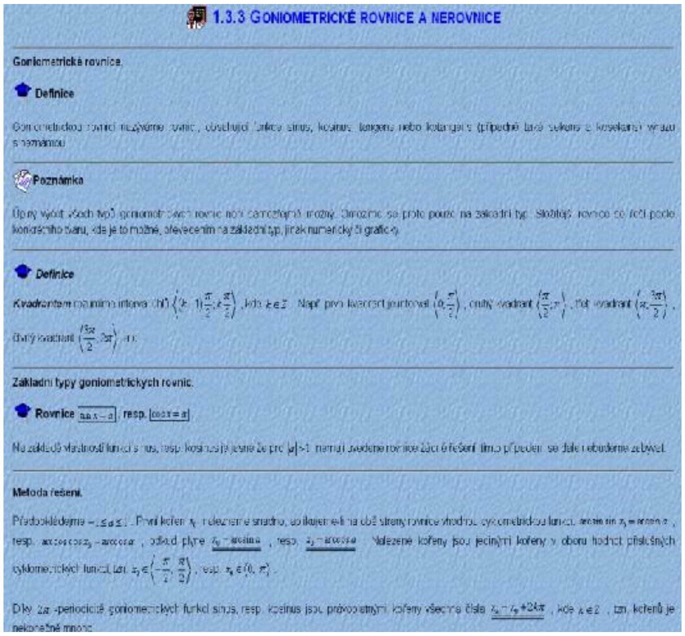
Podľa úvodného textu sa jedná o internetovú učebnicu matematiky pre základné, stredné a vysoké školy. Stránka obsahuje priehľadné menu v ľavej časti. Kapitola venovaná goniometrických rovniciam obsahuje vždy ukážkovo vyriešený príklad, ktorý je doprevadzaný zrozumiteľným komentárom, ktorý ocenia aj slabší žiaci. Súčasťou každého ukážkového príkladu je príklad určený k precvičovaniu, ktorého súčasťou je krokované riešenie, ktoré sa zobrazuje po kliknutí na príslušné tlačidlo. Príklady sú písané veľmi zrozumiteľným textom, grafický od seba oddelené, takže danú stránku hodnotím pozitívne, i keď by som určite ako žiak uvítal väčšie množstvo vzorovo vyriešených príkladov. Negatívne avšak hodnotím fakt, že ani na tejto stránke nenajdeme kapitolu venovanú goniometrickým nerovniciam, čím nemôžeme danú stránku považovať za online učebnicu matematiky určenú pre stredné, ba dokonca pre vysoké školy ako autor spomína v úvode webovej stránky.

4. **http://www.e-matematika.cz/stredni-skoly/**



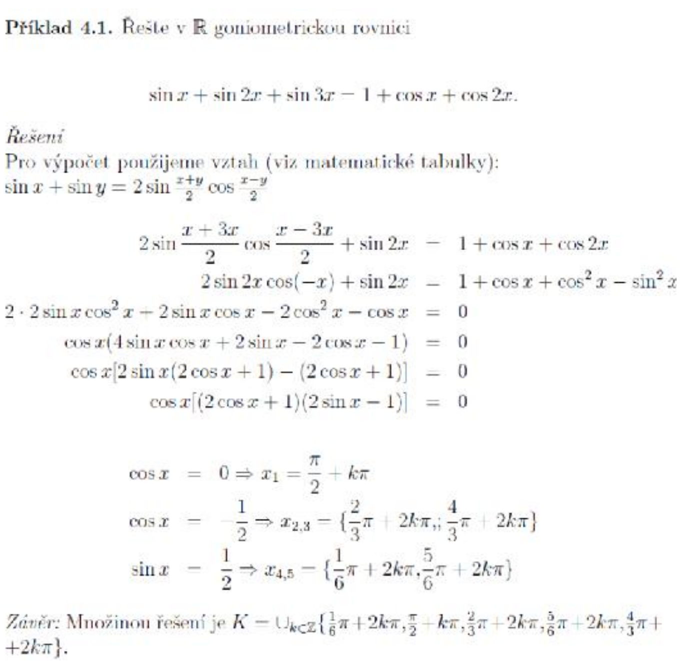
Jedná sa o matematický web, ktorý poskytuje široký sortiment matematických služieb a materiálov. V rámci kapitol venovaným goniometrickým rovniciam tu môžeme nájsť vzorovo vyriešené základné goniometrické rovnice. Bohužiaľ zložitejšie goniometrické rovnice tu nenájdeme, keďže tie sú poskytované len v rámci doučovania matematiky, ktoré je spoplatnené. Samotné riešenia základných goniometrických rovníc sú grafický veľmi názorné a v začiatkoch pomôžu každému záujemcovi o znalosť riešenia základných goniometrických rovníc. Súčasťou stránky je aj ukážka písomnej práce z goniometrických rovníc, ktorá obsahuje riešenia zadaných príkladov, ale bez slovného popisu. Ďalšie zadania písomných prác sú bez riešenia, riešenie je určené len pre predplatiteľov. Podkapitolu venovanú goniometrických nerovniciam sa mi nepodarilo nájsť.

5. **http://artemis.osu.cz/mmmat/maintxt.htm**



Jedná sa o multimedialný kurz aplikovanej vyššej matematiky, súčasťou ktorého je aj kapitola venovaná repetitoriu stredoškolskej matematiky, v ktorej sa nachádza podkapitola venovaná goniometrickým rovniciam a nerovniciam. Jej súčasťou je avšak ukážka riešenia len základných goniometrických rovníc a nerovníc. Kladne hodnotím krátke zhrnutie základných definíc goniometrických rovníc, nerovníc v úvode kapitoly. Žiaci tu môžu nájsť zrozumiteľným spôsobom napísané metody riešenia goniometrických rovníc a nerovníc doprevadzané riešeným príkladom. Po grafickej stránke je daná internetová stránka priehľadná a ako pomôcka pre rýchle a efektívne zopakovanie nie len stredoškolských vedomosti veľmi vhodná.

6. **http://is.muni.cz/th/106509/prif_b/H.Kotulkova.pdf**



Příklad 4.1. Řešte v $\mathbb{R}$ goniometrickou rovnici

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

Řešení
Pro výpočet použijeme vztah (viz matematické tabulky):
$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

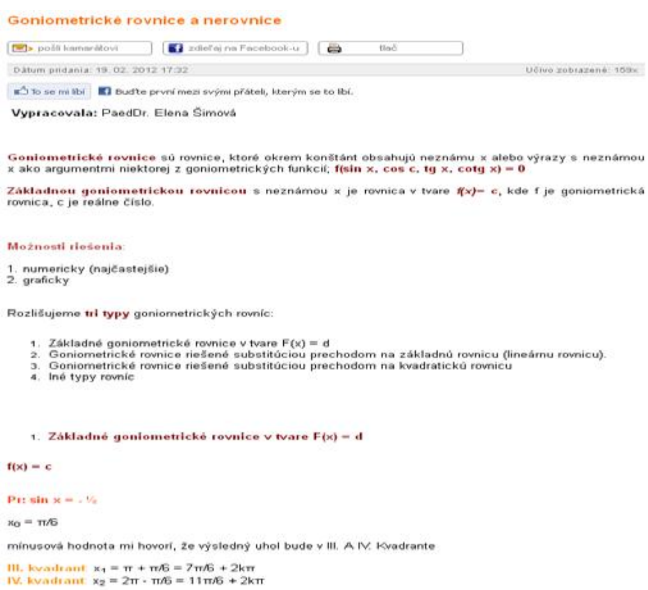
$$\begin{aligned} 2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} + \sin 2x &= 1 + \cos x + \cos 2x \\ 2\sin 2x\cos(-x) + \sin 2x &= 1 + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cdot 2\sin x\cos^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x - \cos x &= 0 \\ \cos x(4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1) &= 0 \\ \cos x[2\sin x(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1)] &= 0 \\ \cos x[(2\cos x + 1)(2\sin x - 1)] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x &= -\frac{1}{2} \Rightarrow x_{2,3} = \{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi,; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\} \\ \sin x &= \frac{1}{2} \Rightarrow x_{4,5} = \{\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\} \end{aligned}$$

Záver: Množinou řešení je $K = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$.

Jedná sa o bakalársku prácu venovanú sa tématike riešenia zložitejších rovníc a nerovníc. Svojím obsahom je vhodná hlavne pre študentov pripravujúcich sa na maturitu, poprípade ako príprava k prijímačkam na vysoké školy. Kapitola venovaná goniometrickým rovniciam a nerovniciam obsahuje prehľad základných definíc a zoznam základných vzťahov medzi goniometrickými funkciami. Stránka obsahuje jeden vzorovo vyriešený príklad na goniometrickú rovnicu a 6 príkladov určených k precvičeniu goniometrických rovníc a nerovníc. Vzorovo vyriešený príklad na goniometrickú nerovnicu tu, ale nenajdeme. Taktiež grafické znázornenie riešenia tu nenájdeme a to z dôvodu obmedzeného rozsahu bakalárskej práce.

7. **http://www.oskole.sk/?id_cat=50&clanok=18198**



Goniometrické rovnice a nerovnice

pošli kamarátovi | zdieľaj na Facebook-u | tlač

Dátum pridania: 19. 02. 2012 17:32 Učivo zobrazené: 159x

To se mi líbí Buďte první mezi svými přáteli, kterým se to líbí.

Vypracovala: PaedDr. Elena Šimová

Goniometrické rovnice sú rovnice, ktoré okrem konštánt obsahujú neznámu x alebo výrazy s neznámou x ako argumentmi niektorej z goniometrických funkcií; **f(sin x, cos c, tg x, cotg x) = 0**

Základnou goniometrickou rovnicou s neznámou x je rovnica v tvare ***f(x)= c***, kde f je goniometrická rovnica, c je reálne číslo.

Možnosti riešenia:

1. numericky (najčastejšie)
2. graficky

Rozlišujeme **tri typy** goniometrických rovníc:

1. Základné goniometrické rovnice v tvare F(x) = d
2. Goniometrické rovnice riešené substitúciou prechodom na základnú rovnicu (lineárnu rovnicu).
3. Goniometrické rovnice riešené substitúciou prechodom na kvadratickú rovnicu
4. Iné typy rovníc

1. **Základné goniometrické rovnice v tvare F(x) = d**

f(x) = c

Pr: sin x = - ½

$x_0 = \pi/6$

mínusová hodnota mi hovorí, že výsledný uhol bude v III. A IV. Kvadrante

III. kvadrant $x_1 = \pi + \pi/6 = 7\pi/6 + 2k\pi$
IV. kvadrant $x_2 = 2\pi - \pi/6 = 11\pi/6 + 2k\pi$

Táto internetová stránka je určená pre všetkých žiakov základných a stredných škôl. Jednotlivé materialy k daným kapitolám prispievaju samotní učitelia. Kapitola venovaná goniometrickým rovniciam a nerovniciam obsahuje v úvode základný teoretický prehľad, možnosti riešenia, typy jednotlivých goniometrických rovníc. Ku každému typu je uvedený jeden riešený príklad, avšak bez grafického vyznačenia. Taktiež tu nenájdeme úlohy určené k precvičovaniu, čo je určite škoda. Riešenie goniometrických nerovníc je veľmi pekne názorne vysvetlené pomocou jednotkovej kružnice a grafu príslušných goniometrických funkcií. Po grafickej stránke sú jednotlivé riešenia príkladov veľmi pekne vyznačené, takže človek sa v nich dobre orientuje.

8. **http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Zaklady_matematiky/Kapitola3.pdf**

Příklad 3.7.2. Řešte rovnici $\cos(2x+\frac{\pi}{6})=-1$.

Řešení: Zvolíme substituci $2x+\frac{\pi}{6}=\alpha$, pak rovnice bude ve tvaru $\cos\alpha=-1$, $\alpha-\pi$ je pak řešení v základním intervalu $<0,2\pi>$.

$$2x+\frac{\pi}{6}=\pi+2k\pi$$

$$2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

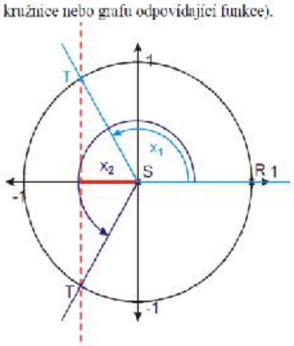
$$x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in Z,\ \text{jsou všechna řešení.}$$

Jedná sa o projekt spolufinancovaný štátnym rozpočtom ČR a Europským socialnym fondom. Jeho hlavným cieľom je spracovanie študijných materiálov z matematiky a iných prírodovedných predmetov. Tieto materiály by mali umožniť študentom samostatne študovať a minimalizovať tak kontakt s učiteľom. Kapitola venovaná goniometrickým rovniciam obsahuje z úvodu stručný výklad základných teoretických predpokladov, rôzne typy goniometrických rovníc, ktoré sú doprevadzané vzorovým riešením, avšak bez grafického podkladu. Jedná sa o čisto algebraické riešenie goniometrických rovníc. Jednotlivé riešenia sú grafický veľmi priehľadné, zrozumiteľné. Riešený príklad na goniometrické nerovnice nájdeme v časti venovanej sa nerovniciam. Samotnému riešeniu príkladu avšak chyba slovný popis. Na konci kapitoly sa nachádzajú príklady určené k precvičeniu s riešením.

9. **http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika/04%20Goniometrie/03%20Goniometrick%C3%A9%20rovnice%20a%20vzorce/01%20Goniometrick%C3%A9%20rovnice%20I.pdf**

Př. 2: Vyřeš rovnici $\cos x=-\frac{1}{2}$.

Hledáme všechna $x\in R$, pro něž platí $\cos x=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ to už umíme (pomocí jednotkové kružnice nebo grafu odpovídající funkce).



Z obrázku je vidět, že řešením jsou třetinové úhly $\frac{2}{3}\pi$ a $\frac{4}{3}\pi$.

Základní řešení : $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$.

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{4}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

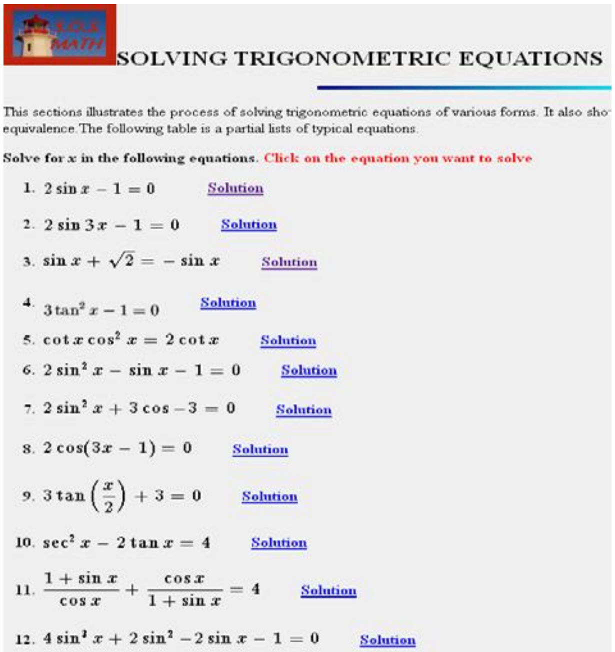
Dodatek: Příklad je samozřejmě možné řešit i pomocí grafu funkce. Nechávám studenty, aby používali libovolnou metodu, která jim vyhovuje.

Jedna sa o elektronickú učebnicu vytvorenú učiteľom matematiky a fyziky. Stránky sú písané veľmi priehľadne, ľahko sa človek v nich orientuje. V kapitole zaoberajúcej sa výukou goniometrických rovníc a nerovníc môžeme nájsť praktický všetko, čo sa týka výuky danej témy. Príklady sú vzorovo vyriešené, obsahuju slovný komentár, grafické znázornenia riešení pomocou grafu goniometrických funkcií a jednotkovej kružnice. Stránka je veľmi vhodná aj pre súčasných učiteľov, keďže jednotlivé príklady obsahujú pedagogické poznámky, v ktorých nájdeme postrehy pána učiteľa, ktoré zaznamenal pri výuke daného tématu. Súčasťou týchto stránok sú aj príklady určené k precvičeniu látky, avšak jedná sa len o príklady, ktoré sú riešené počas hodiny matematiky, takže ich riešenie je ukryté priamo v lekcií. Celkovo hodnotím danú stránku veľmi pozitivne a myslím si, že je to ideálna elektonická učebnica nie len pre žiakov, ale aj učiteľov.

10. http://www.priklady.eu/sk/Riesene-priklady-matematika/Goniometricke-rovnice/Linearne-rovnice.alej

Jedná sa o príklady pre študentov, ktoré im majú pomôcť pri precvičovaní nadobudnutých znalosti pri hodinách matematiky. Je to zbierka veľkého množstva príkladov, ktoré sú doprevadzané riešením. V kapitole venovanej goniometrickým rovniciam sa nachádzaju príklady na precvičenie lineárnych a kvadratických goniometrických rovníc. Príklady sú grafický veľmi pekne spracované, obsahujú riešenie, avšak bez bližšieho slovného popisu, či grafického znázornenia pomocou jednotkovej kružnice alebo grafu príslušných goniometrických funkcií. Bohužiaľ príklady na goniometrické nerovnice v tejto zbierke príkladov nenájdeme. Túto stránku teda doporočujem hlavne pre študentov s určitým matematickým základom, ktorí hľadajú ďalšie príklady pre zdokonalenie svojich znalosti.

11. http://www.sosmath.com/algebra/solve/solve0/solvtrig.html



Anglická stránka, na ktorej môžeme nájsť páru riešených príkladov týkajúcich sa goniometrických rovníc. Riešenia jednotlivých príkladov sú veľmi názorné a zrozumiteľné. Po grafickej stránke je táto stránka veľmi pekne upravená, v príkladoch sa človek veľmi ľahko orientuje. Riešenia goniometrických rovníc tu, ale nenájdeme, taktiež jednotlivé riešenia goniometrických rovníc nie sú doprevadzané grafickým znázornením. Každopadne je to ďalšia internetová strána, kde môžeme nájsť vzorovo riešené príklady týkajucich sa goniometrických rovníc.

Zrovnávacia tabuľka

V nasledujúcej tabuľke som sa pokúsil o subjektívne číselné zhodnotenie jednotlivých internetových stránok, ktoré boli prezentované vyššie. Stránky som hodnotil bodovou stupnicou od 1 do 5, pričom 1 znamená najlepšie hodnotenie a 5 najhoršie. V prípade, že dané kriteriálne hľadisko sa nedá posudiť, tak je v tabuľke uvedený znak - . V samotnom hodnotení stránok som sa zameral na tieto hľadiska: odborná správnosť, didaktická stránka, funkčnosť, design, interaktivita, prítomnosť príkladov na precvičovanie a prítomnosť príkladov venovaných k precvičeniu goniometrických nerovníc. V závere tabuľky je vždy uvedené celkové hodnotenie danej stránky z môjho subjektívneho pohľadu.

Odborná správnosť	Didaktická stránka	Funkčnosť	Design	Interaktivita	Príklady na precvičenie	Príklady na nerovnice	∑
http://maths.cz/clanky/goniometricke-rovnice.html							
1	3	1	3	-	-	-	4
http://matematika-issnp.xf.cz/otazky_pdf/7.Goniometrie%20a%20trigonometrie.pdf							
1	-	-	1	-	1	-	3
http://www.matweb.cz/goniometricke-rovnice							
1	3	2	2	2	2	-	2
http://www.e-matematika.cz/stredni-skoly/							
1	3	2	1	-	2	-	3
http://artemis.osu.cz/mmmat/maintxt.htm							
1	2	2	1	-	-	2	2
http://is.muni.cz/th/106509/prif_b/H.Kotulkova.pdf							
1	2	-	1	-	2	2	2
http://www.oskole.sk/?id_cat=50&clanok=18198							
1	1	-	1	-	-	2	2
http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Zaklady_matematiky/Kapitola3.pdf							
1	1	-	1	-	1	2	1-2
http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=47							
1	1	1	1	-	2	1	1
http://www.priklady.eu/sk/Riesene-priklady-matematika/Goniometricke-rovnice/Linearne-rovnice.alej							
1	3	1	1	1	1	-	2
http://www.sosmath.com/algebra/solve/solve0/solvtrig.html							
1	2	2	2	2	1	-	2

Vlastné webové stránky

Vlastné webové stránky sa zaoberajú tématom o goniometricých rovniciach a nerovniciach. Tématický sú rozdelené do niekoľkých základných kapitol:

- Úvod
- Teória
- Základné rovnice
- Zložitejšie rovnice
- Základné nerovnice
- Zložitejšie nerovnice
- Testy
- Literatúra
- Register

Súčasťou webovej aplikacie sú interaktívne prvky v rôznej podobe. Či už vo forme hypertextových odkazov, krokovaných riešeni alebo vo forme apletov, ktoré sú vytvorené v programe GeoGebra.

Samotná webová aplikacia je voľne dostupná na adrese:

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kepim6am/dp/gon_rovnice_nerovnice/

Použitie stránky

Táto webová stránka obsahuje obsah umiestnený v menu na ľavom okraji, ktorý je súčasťou každej časti. Práca je členená na teoretickú a praktickú časť. Súčasťou práce sú interaktívne prvky v rôznej podobe:

- formou odkazov, ktoré sú podčiarknuté, napríklad odkaz na goniometrické vzorce ,

- formou krokovaných riešeni, ktoré sa objavujú pri úlohach určených k precvičovaniu:

 kliknutím na dané tlačítko sa nám zobrazí prvý alebo ďalší krok riešenia úlohy,
 kliknutím na dané tlačítko zobrazíme celé riešenie úlohy,
 kliknutím na dané tlačítko skryjeme všetky odkryté kroky riešenia úlohy.

- a v testoch, ktoré sú určene k precvičovaniu získaných znalosti.

Súčasťou týchto webových stránok sú aplety, ktoré sú vytvorené programom GeoGebra. K ich správnemu zobrazeniu je nutné mať v počitači nainštalovanú Javu a v priehľadači povolený JavaScript. Pre zápis matematických výrazov je použitá technologia jsMath.

V prípade problémov s načítaním apletov alebo matematických výrazov doporučujem obnovenie stránky (reload).

Pre návrat na začiatok kapitoly doporučujem používať klávesu **Home**.

Zoznam použitých symbolov a značiek

Označenie	Popis označenia
$\mathbf{Z}$	množina všetkých celých čísel
$\mathbf{R}$	množina všetkých reálnych čísel
$a < b$	číslo a je menšie ako číslo b
$a \leq b$	číslo a je menšie alebo rovné ako číslo b
$a > b$	číslo a je väčšie ako číslo b
$a \geq b$	číslo a je väčšie alebo rovné ako číslo b
$a \in \mathrm{A}$, $a \notin \mathrm{A}$	*a* je prvkom množiny A, *a* nie je prvkom množiny A
$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$	prienik množín A, B
$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$	zjednotenie množín A, B
$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} A_k$	zjednotenie všetkých množín A_k, kde $k \in \mathbf{Z}$
$\emptyset$	prázdna množina
$p \wedge q$	konjunkcia, *p* a zároveň *q*
$p \vee q$	disjunkcia, *p* alebo *q*
$p \Rightarrow q$	*p* implikuje *q*, z *p* plynie *q*
$p \Leftrightarrow q$	*p* je ekvivalentné s *q*, *p* práve keď *q*
$\lvert x \rvert$	absolutná hodnota čísla *x*

Teória

V tejto kapitole si uvedieme prehľad základných vlastností goniometrických funkcií a vzťahov medzi nimi, taktiež sa môžme dozvedieť základné tabuľkové hodnoty goniometrických funkcií a uvedieme si základné definície goniometrických rovníc a goniometrických nerovníc.

Súčasťou teoretickej časti sú aj základné informacie o cyklometrických, hyperbolických a hyperbolometrických funkciach.

Goniometrické funkcie

Základné vlastnosti goniometrických funkcií

V tabuľke je uvedený prehľad základných vlastnosti goniometrických funkcií, ktoré využívame pri riešeni príkladov. Hodnoty argumentov uvádzame väčšinou v oblúkovej miere.

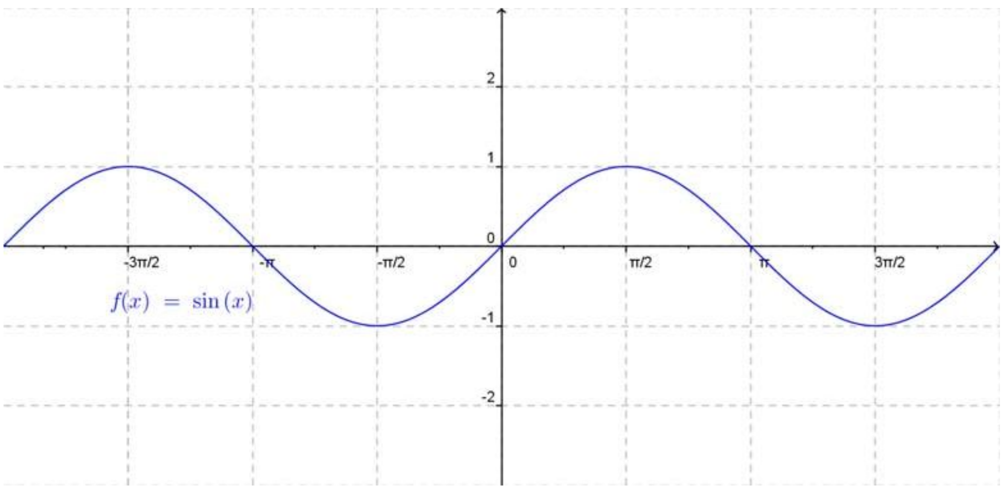
Goniometrická funkcia	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
Definičný obor	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ _{2}+k\right.$	$\bigcup_{k\ \mathbf{Z}} (k\ ;(k+1)\pi)$
Obor funkčných hodnôt	$\langle -1; 1\rangle$	$\langle -1; 1$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
Najmenšia perióda	2π	2π	π	π

Grafy goniometrických a ďalších funkcií

> **Poznámka**
>
> Grafy funkcií sú zobrazené na intervale $< -2\pi; 2\pi >$.

Sínus

V nasledujúcom obrázku sa môžme pozrieť na obecný graf funkcie sínus.

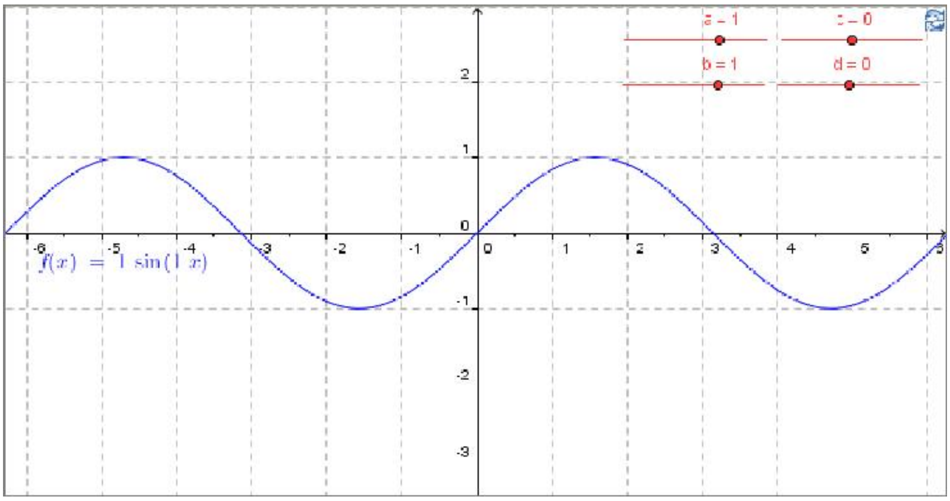


Graf funkcie $y = \sin x$ nazývame **sínusoida.**

Zo sínusoidy môžme prečítať jej základné vlastnosti a porovnať ich tak s tabuľkou uvedenou na začiatku tejto kapitoly.

Funkcia $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$.

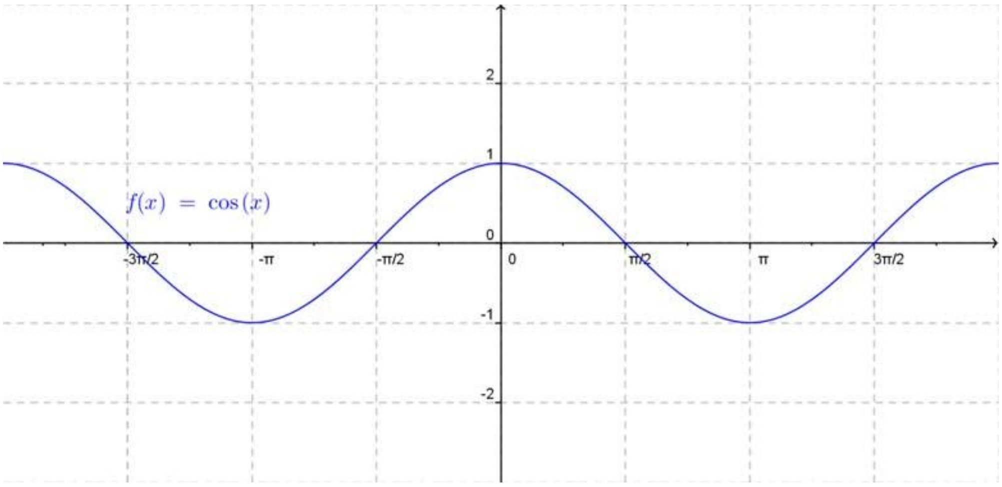
Takáto funkcia sa nazýva **harmonická.** V tomto aplete pomocou posuvníkov môžme meniť základné hodnoty parametrov $a; b; c; d$.



Je dôležité si všimnuť ako sa mení samotný graf pri rôznych zmenach parametrov.

Kosínus

V nasledujúcom obrázku sa môžme pozrieť na obecný graf funkcie kosínus.

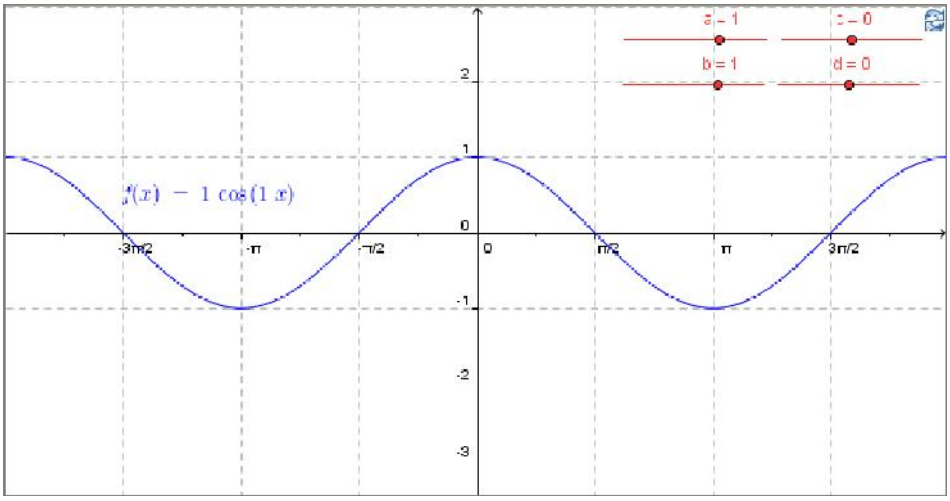


Graf funkcie $y = \cos x$ nazývame **kosínusoida.**

Z kosínusoidy môžme prečítať základné vlastnosti funkcie kosínus a porovnať ich tak s tabuľkou uvedenou na začiatku tejto kapitoly.

Funkcia $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$.

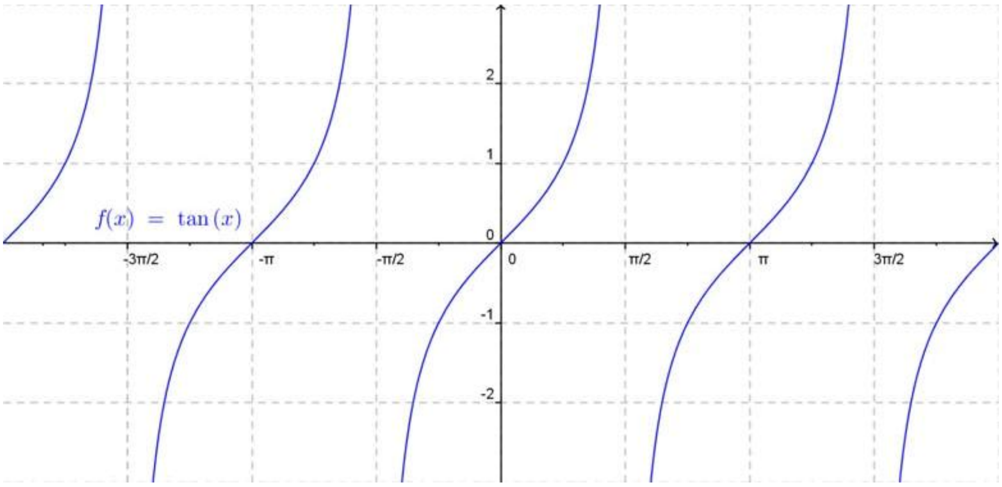
Takáto funkcia sa nazýva **harmonická.** V tomto aplete pomocou posuvníkov môžme meniť základné hodnoty parametrov a, b, c, d.



Opäť je dôležité si všimnuť správanie grafu funkcie pri rôznych zmenach parametrov.

Tangens

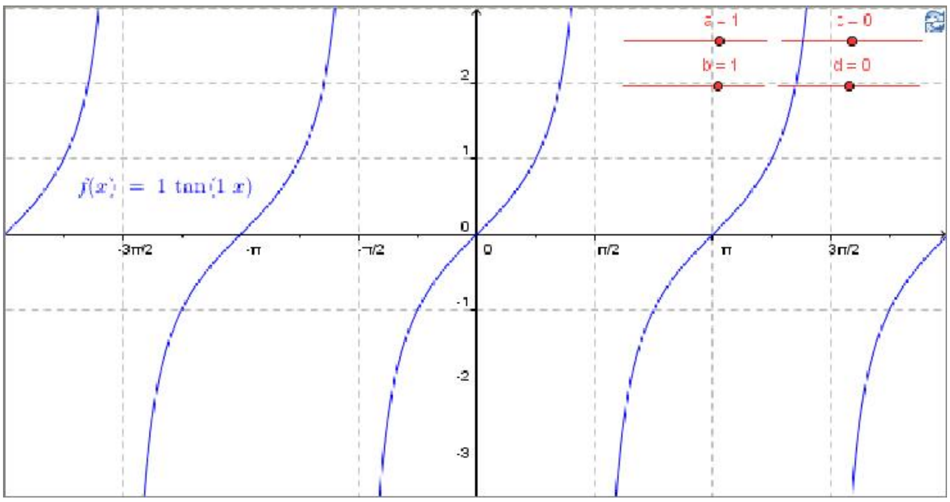
V nasledujúcom obrázku sa môžme pozrieť na obecný graf funkcie tangens.



Funkcia $f(x) = a \cdot \mathrm{tg}\,(b \cdot x + c) + d$.

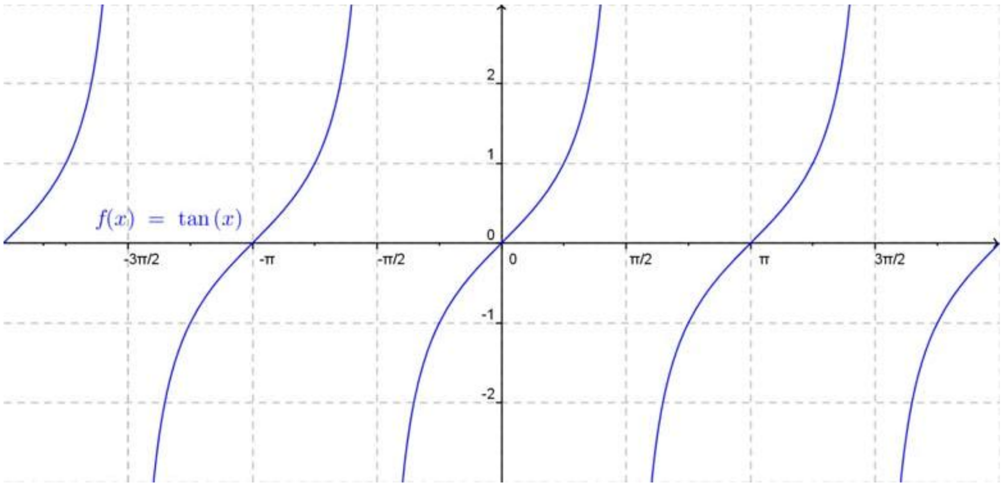
V tomto aplete pomocou posuvníkov môžme meniť základné hodnoty parametrov a, b, c, d.

V prípade, že parametre $a = 1, b = 1, c = 0, d = 0$ dostávame obecný graf funkcie tangens. Pri týchto apletoch je dôležité si všimnuť chovanie funkcie pri zmenách jednotlivých parametrov. Napríklad v špecialnom prípade, kde koeficient pri parametre b je nulový, dostávame konštantnú funkciu.



Kotangens

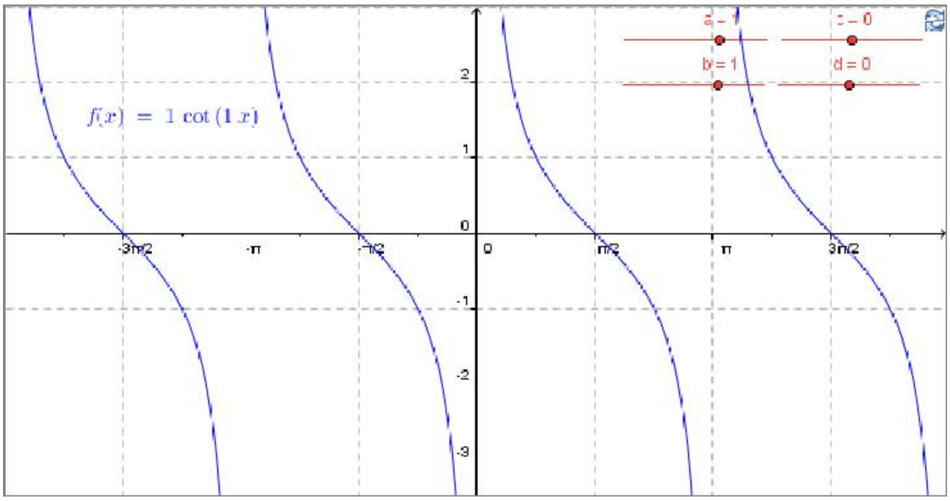
Obecný graf funkcie kotangens je znázornený na nasledujúcom obrázku.



Funkcia $f(x) = a \cdot \text{cotg}\,(b \cdot x + c) + d$.

V tomto aplete pomocou posuvníkov môžme meniť základné hodnoty parametrov a, b, c, d.

V prípade, že parametre $a = 1, b = 1, c = 0, d = 0$ dostávame obecný graf funkcie kotangens. Pri týchto apletoch je dôležité si všimnuť chovanie funkcie pri zmenách jednotlivých parametrov. Napríklad v špecialnom prípade, kde koeficient pri parametre b je nulový, dostávame konštantnú funkciu.



Prehľad základných tabuľkových hodnôt

	0	6	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	2	π	$\frac{3}{2}$	2
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\text{tg}\, x$	0	$\frac{3}{3}$	1	3	*	0	*	0
$\text{cotg}\, x$	*	3	1	$\frac{3}{3}$	0	*	0	*

Poznámka

Symbol * znamená, že pre dané x nie je funkcia definovaná.

Vzorce pre goniometrické funkcie

Základné vzťahy medzi goniometrickými funkciami rovnakého argumentu

Veta

Pre každé $x \in \mathbf{R}$ platí: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Pre každé reálne $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}$, platí: $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, x = 1$

Goniometrické funkcie dvojnásobného argumentu

Veta

Pre každé $x \in \mathbf{R}$ platí: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Pre každé $x \in \mathbf{R}$ platí: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Pre každé reálne $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}; k \in \mathbf{Z}$ platí: $\mathrm{tg}\, 2x = \frac{2\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$

Goniometrické funkcie súčtu a rozdielu argumentov

Veta

Pre každé dve reálne čísla x a y platí:

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

Pre každé dve reálne čísla, kde

$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, x+y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, y \neq 1, k \in \mathbf{Z}$

platí: $\mathrm{tg}\,(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y}{1 - \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, y}$

Pre každé dve reálne čísla, kde $x - y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, y \neq -1, k \in \mathbf{Z}$, platí:

$\mathrm{tg}\,(x-y) = \frac{\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, y}{1 + \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, y}$

Vzorce pre súčet a rozdiel hodnôt funkcií sínus a kosínus

Veta

Pre každé dve reálne čísla *x* a *y* platí:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Goniometrické funkcie poloviny argumentu

Veta

Pre každé $x \in \mathbf{R}$ platí: $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

Pre každé $x \in \mathbf{R}$ platí: $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

Pre každé reálne číslo $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, platí: $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Poznámka

Všetky dôkazy týchto základných vzorcov môžme nájsť v diplomovej práci [Goniometrie a trigonometrie].

Goniometrické rovnice

Definice

Goniometrickými rovnicami nazývame rovnice, ktoré okrem konštant obsahujú neznámu *x* alebo výrazy s neznámou *x* ako argumenty jednej alebo niekoľkých goniometrických funkcií.

Príklad

$$\sin 2x + \cos^2 x - \operatorname{tg} x = 1$$

Definice

Základnú goniometrickú rovnicu s neznámou *x* nazývame rovnicou typu *g(x)=k*, kde *g* je goniometrická funkcia a *k* je reálne číslo.

Príklad

$$\cos x = -1$$

Poznámka

Vzhľadom ku periodičnosti goniometrických funkcií má každá základná goniometrická rovnica buď nekonečne mnoho riešení (v prípade, že $x \in \mathbf{R}$), alebo riešením je prázdna množina. Na obmedzenom intervale má každá základná goniometrická rovnica konečný počet riešeni, alebo riešením je prázdna množina.

Goniometrické nerovnice

Definice

Goniometrickými nerovnicami nazývame nerovnice, ktoré okrem konštant obsahujú neznámu *x* alebo výrazy s neznámou *x* ako argumenty jednej alebo niekoľkých goniometrických funkcií.

Príklad

$\cos^2 x - \sin^2 x \leq \operatorname{tg} x + 1$

Cyklometrické funkcie

Jedná sa o funkcie $\arcsin x$ (čítame arkussínus), $\arccos x$ (čítame arkuskosínus), $\operatorname{arctg} x$ (čítame arkustangens), $\operatorname{arccotg} x$ (čítame arkuskotangens), ktoré sú inverzné k funkciam goniometrickým.

> **Poznámka**
>
> Bližšie informácie o inverznej funkcií môžme nájsť v diplomovej práci Funkce.

Funkcie arkussínus a arkuskosínus

> **Definice**
>
> Inverzná funkcia k funkcií sínus, ktorá je definovaná na intervale $< -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} >$ sa nazýva arkussínus, zapisujeme $y = \arcsin x$. Pričom platí $x = \sin y$, kde $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

> **Poznámka**
>
> Na iných intervalov, kde je x prostá, sa funkcia arkussínus nedefinuje.

> **Definice**
>
> Inverzná funkcia k funkcií kosínus, ktorá je definovaná na intervale $< 0; \pi >$ sa nazýva arkuskosínus, zapisujeme $y = \arccos x$. Pričom platí $x = \cos y$, kde $0 \leq y \leq \pi$.

> **Poznámka**
>
> Na iných intervalov, kde je x prostá, sa funkcia arkuskosínus nedefinuje.

Základné vlastnosti cyklometrických funkcií arkussínus a arkuskosínus

V nasledujúcej tabuľke si môžme všimnuť vlastnosti goniometrických funkcií (s ohraničeným definičným oborom) a k nim inverzným cyklometrickým funkciam.

Funkcia	$\sin x$	$\arcsin x$	$\cos x$	$\arccos x$
Definičný obor	$< -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} >$	$< -1;\ 1 >$	$< 0;\ \pi >$	$< -1;\ 1 >$
Obor funkčných hodnôt	$< -1;\ 1 >$	$< -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} >$	$< -1;\ 1 >$	$< 0;\ \pi >$
Monotónnosť	funkcia je rastúca	funkcia je rastúca	funkcia je klesajúca	funkcia je klesajúca

Funkcie arkustangens a arkuskotangens

> **Definice**

Inverzná funkcia k funkcií tangens, ktorá je definovaná pre každé $x \in \mathbf{R}$ sa nazýva arkustangens, zapisujeme $y = \operatorname{arctg} x$. Pričom platí $x = \operatorname{tg} y$, kde $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Poznámka

Na iných intervalov, kde je x prostá, sa funkcia arkustangens nedefinuje.

Definice

Inverzná funkcia k funkcií kotangens, ktorá je definovaná pre každé $x \in \mathbf{R}$ sa nazýva arkuskotangens, zapisujeme $y = \operatorname{arccotg} x$. Pričom platí $x = \operatorname{cotg} y$, kde $0 < y < \pi$.

Poznámka

Na iných intervalov, kde je x prostá, sa funkcia arkuskotangens nedefinuje.

Základné vlastnosti cyklometrických funkcií arkustangens a arkuskotangens

V nasledujúcej tabuľke si môžme všimnuť vlastnosti goniometrických funkcií (s ohraničeným definičným oborom) a k nim inverzným cyklometrickým funkciam.

Funkcia	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{cotg} x$	$\operatorname{arccotg} x$
Definičný obor	$(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$	$\mathbf{R}$	$(0;\ \pi)$	$\mathbf{R}$
Obor funkčných hodnôt	$\mathbf{R}$	$(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$	$\mathbf{R}$	$(0;\ \pi)$
Monotónnosť	funkcia je rastúca	funkcia je rastúca	funkcia je klesajúca	funkcia je klesajúca

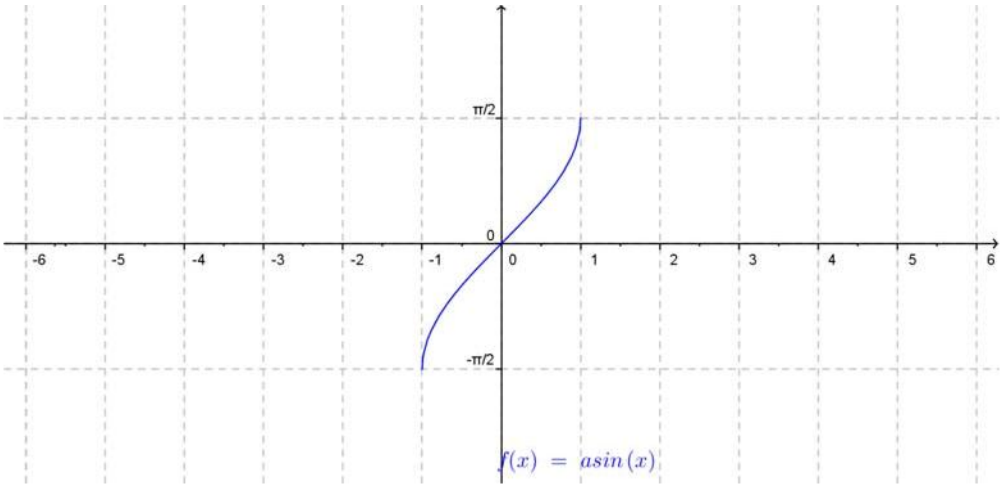
Grafy cyklometrických a ďalších funkcií

Poznámka

Grafy cyklometrických funkcií sú vytvorené pomocou programu GeoGebra, kde sa používa iné značenie cyklometrických funkcií. Preto napríklad funkcia $\arcsin x$ sa v GeoGebre značí ako $\operatorname{asin} x$.

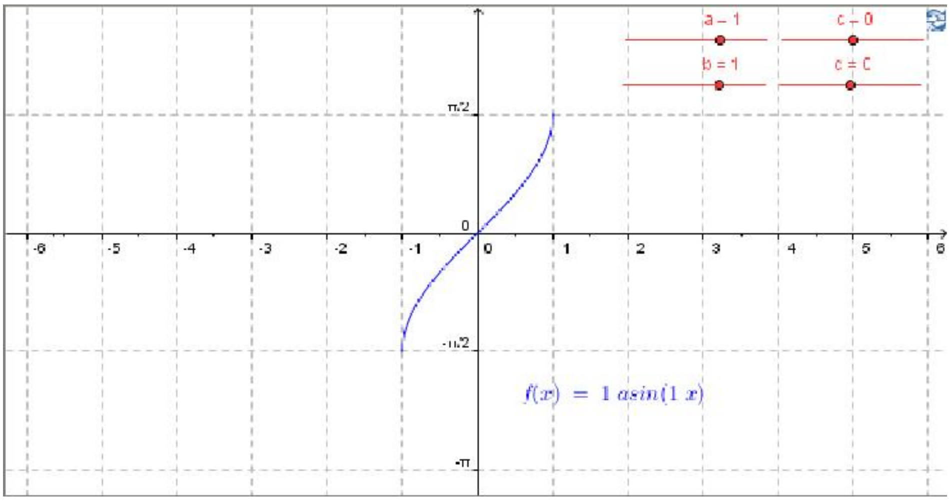
Arkussínus

V nasledujúcom obrázku sa môžme pozrieť na obecný graf funkcie arkus sínus.



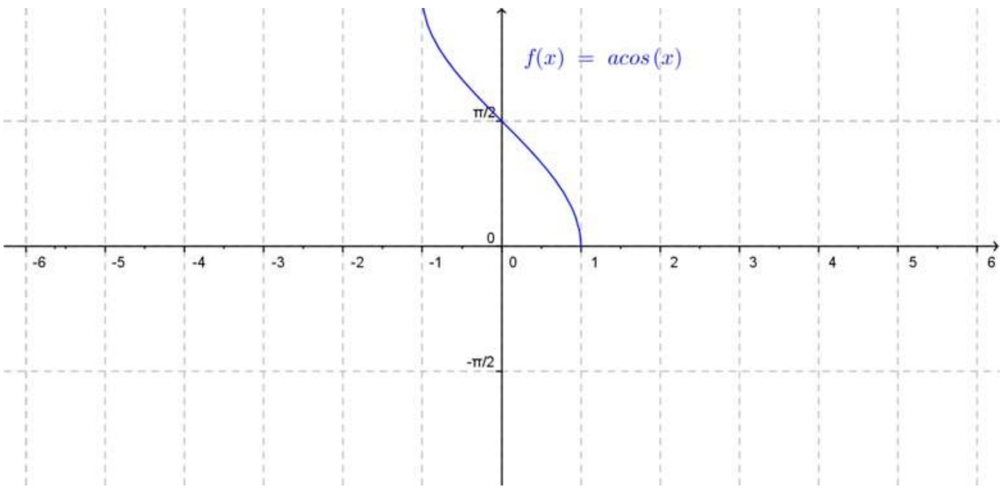
Funkcia $f(x) = a \cdot \arcsin(b \cdot x + c) + d$.

> **Poznámka**
>
> Grafy cyklometrických funkcií sú zobrazované pomocou apletu. V jednotlivých apletoch je možné pomocou posuvníkov meniť základné hodnoty parametrov a, b, c, d. Je dôležité si všímať práve tieto zmeny a uvedomiť si, ako vplýva každý parameter na danú funkciu.

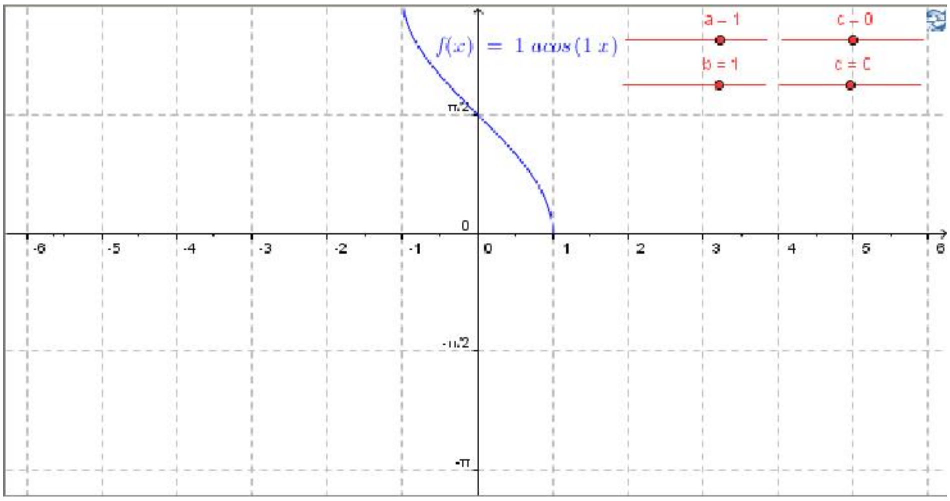


Arkuskosínus

V nasledujúcom obrázku sa môžme pozrieť na obecný graf funkcie arkuskosínus.

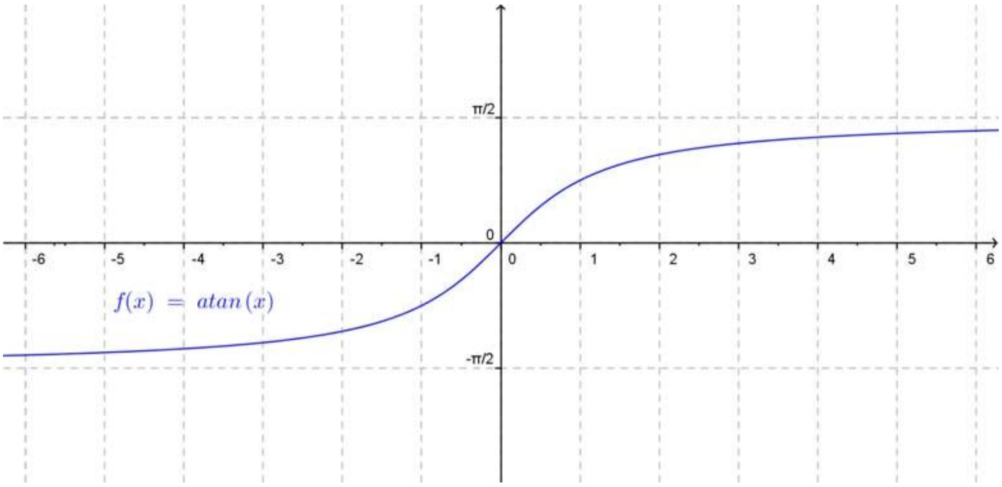


Funkcia $f(x) = a \cdot \arccos(b \cdot x + c) + d$.

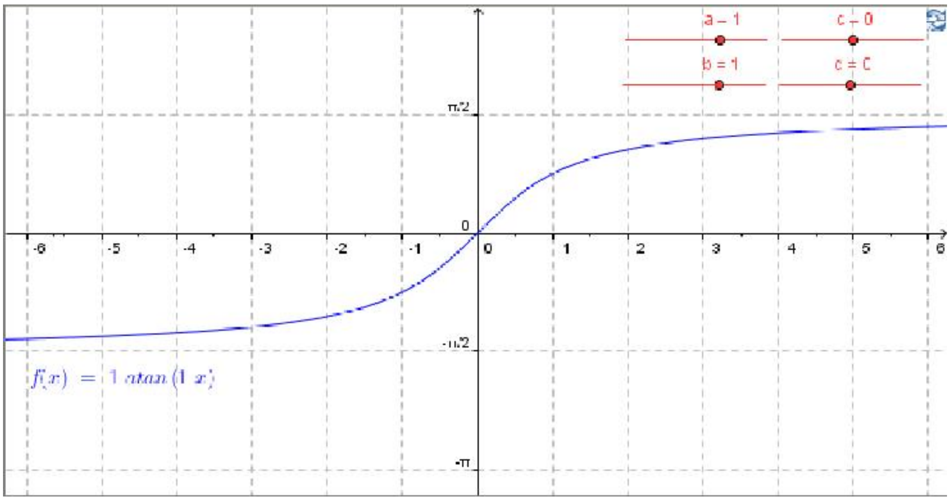


Arkustangens

Obecný graf funkcie arkustangens je znázornený na nasledujúcom obrázku.

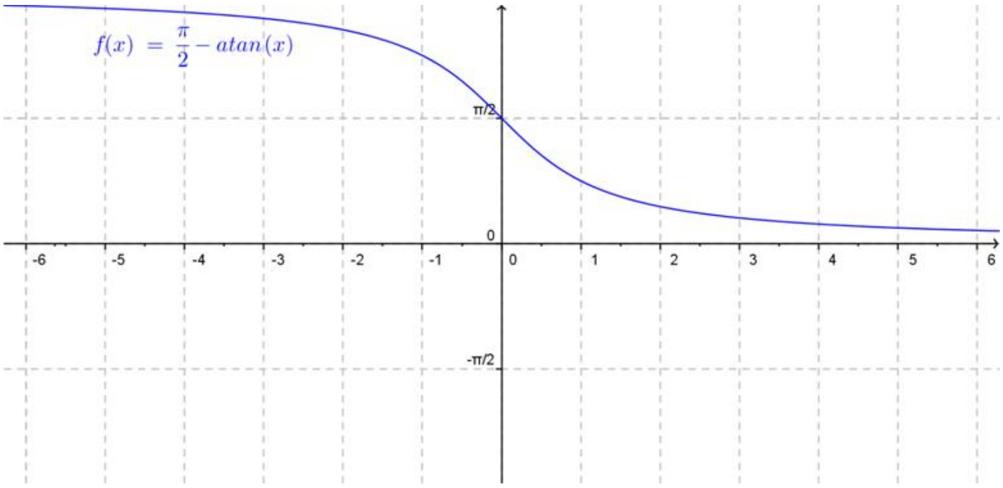


Funkcia $f(x) = a \cdot \mathrm{arctg}(b \cdot x + c) + d$.

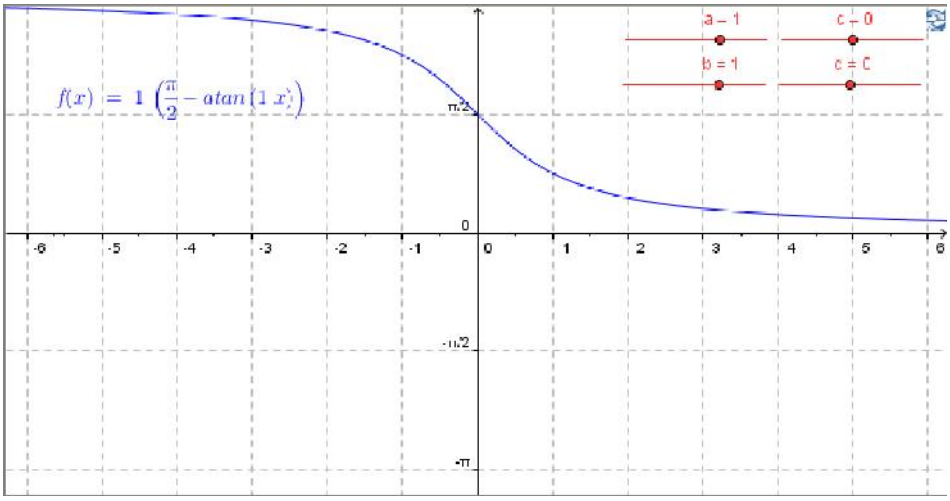


Arkuskotangens

Obecný graf funkcie arkuskotangens je znázornený na nasledujúcom obrázku.



Funkcia $f(x) = a \cdot \text{arccotg}\,(b \cdot x + c) + d$.



Veta

Pre cyklometrické funkcie platí:

$\arcsin 0 = 0$, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$;

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$;

$\text{arctg } 0 = 0$, $\text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$;

$\text{arccotg } 0 = \frac{\pi}{2}$, $\text{arccotg } 1 = \frac{\pi}{4}$.

Poznámka

Dôkaz tejto vety je triviálny, vychádza z vlastnosti inverzných funkcií. Napríklad $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, lebo $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Podobne postupujeme v ostatných prípadoch.

Hyperbolické funkcie

Definice

Funkcia $\sinh x$ (čítame hyperbolický sínus), $\cosh x$ (čítame hyperbolický kosínus), $\operatorname{tgh} x$ (čítame hyperbolický tangens) sú pre každé reálne x definované takto:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Pre $x \neq 0$ je funkcia $\operatorname{cotgh} x$ (čítame hyperbolický kotangens) definovaná vzťahom

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{tgh} x}.$$

Základné vlastnosti hyperbolických funkcií

V tabuľke je uvedený prehľad základných vlastností hyperbolických funkcií.

Hyperbolická funkcia	$\sinh x$	$\cosh x$	$\operatorname{tgh} x$	$\operatorname{cotgh} x$
Definičný obor	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Obor funkčných hodnôt	$\mathbf{R}$	$\langle 1, \infty)$	$(-1, 1)$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Monotónnosť	rastúca na celom $\mathbf{R}$	rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$ a klesajúca na intervale $(-\infty, 0\rangle$	rastúca na celom $\mathbf{R}$	klesajúca na intervale $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Veta

Pre hyperbolické funkcie platí:

1. $\sinh x$, $\operatorname{cotgh} x$ a $\operatorname{tgh} x$ sú nepárne funkcie.

2. $\cosh x$ je párna funkcia.

Poznámka

V dôkaze týchto viet využívame vlastnosť párnej funkcie:

$f(x) = f(-x)$,

alebo nepárnej funkcie:

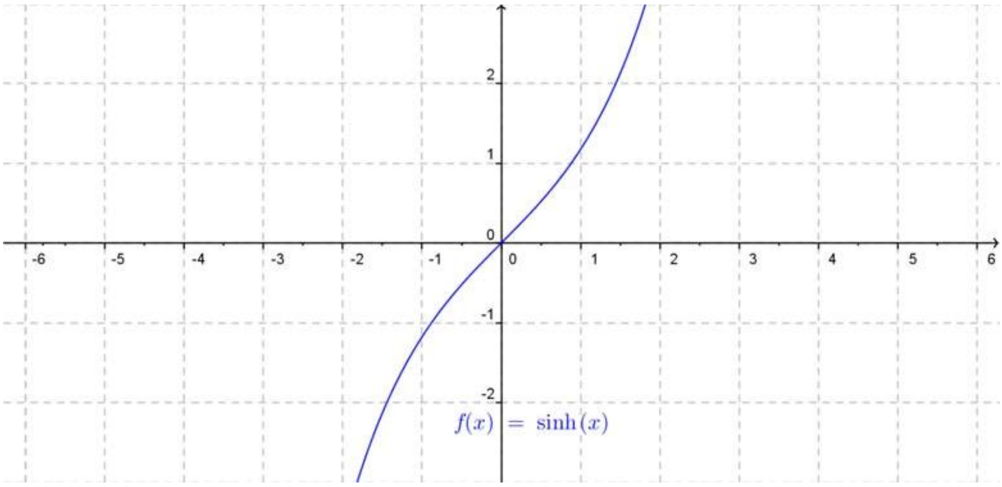
$f(-x) = -f(-x)$.

Grafy hyperbolických funkcií a ďalších funkcií

> **Poznámka**
>
> Grafy hyperbolických funkcií sú vytvorené pomocou programu GeoGebra, kde sa používa iné značenie hyperbolických funkcií. Preto napríklad funkcia $\operatorname{tgh} x$ sa v GeoGebre značí ako $\tanh x$.

Hyperbolický sínus

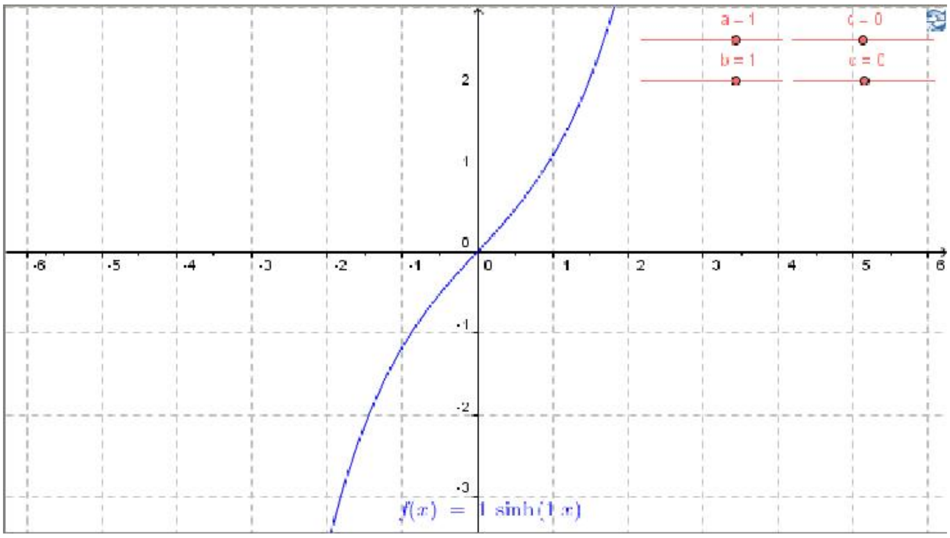
V nasledujúcom obrázku sa môžme pozrieť na obecný graf funkcie hyperbolický sínus.



Funkcia $f(x) = a \cdot \sinh x(b \cdot x + c) + d$.

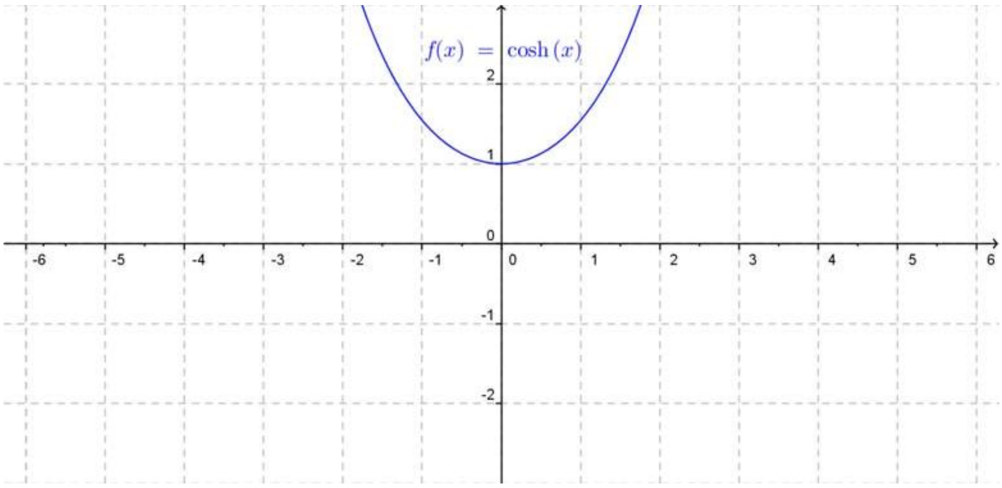
> **Poznámka**
>
> Grafy funkcií sú zobrazované pomocou apletu. V jednotlivých apletoch je možné pomocou posuvníkov meniť základné hodnoty parametrov a, b, c, d a všimnuť si tak správanie funkcií pri rôznych zmenách.

V tomto aplete pomocou posuvníkov môžme meniť základné hodnoty parametrov a, b, c, d.



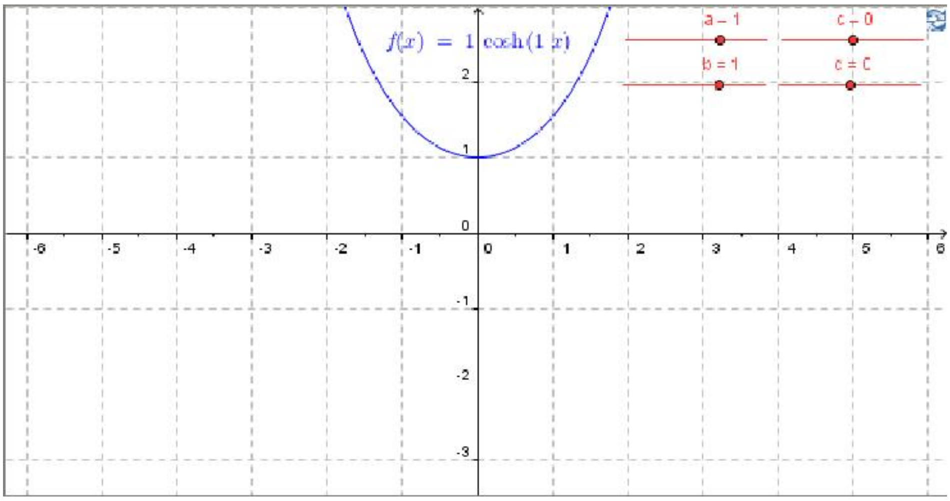
Hyperbolický kosínus

Obecný graf funkcie hyperbolický kosínus.



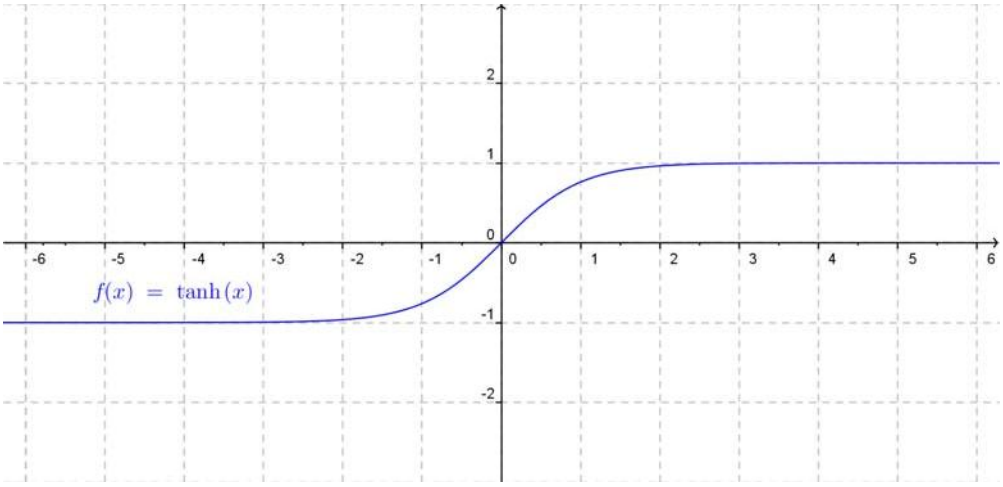
Funkcia $f(x) = a \cdot \cosh x(b \cdot x + c) + d$.

V tomto aplete pomocou posuvníkov môžme meniť základné hodnoty parametrov a, b, c, d.



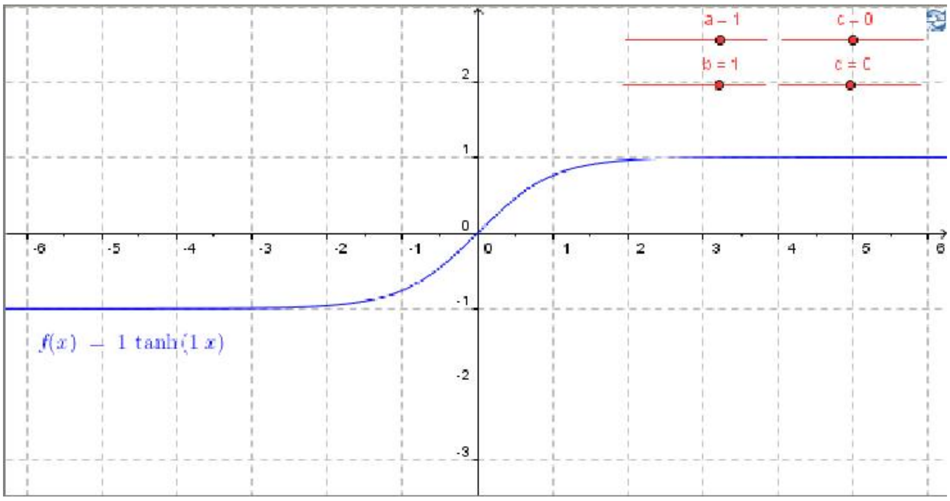
Hyperbolický tangens

Obecný graf funkcie hyperbolický tangens.



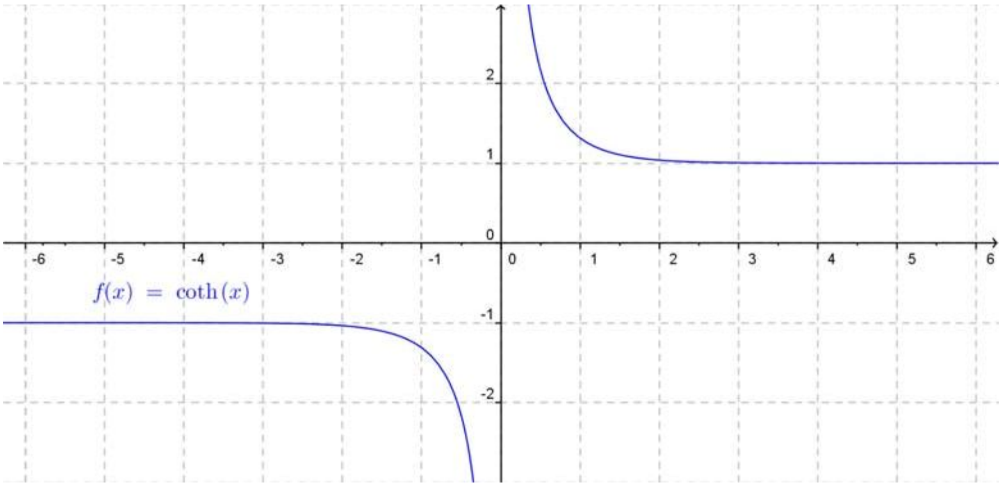
Funkcia $f(x) = a \cdot \text{tgh}\, x(b \cdot x + c) + d$.

V tomto aplete pomocou posuvníkov môžme meniť základné hodnoty parametrov a, b, c, d.



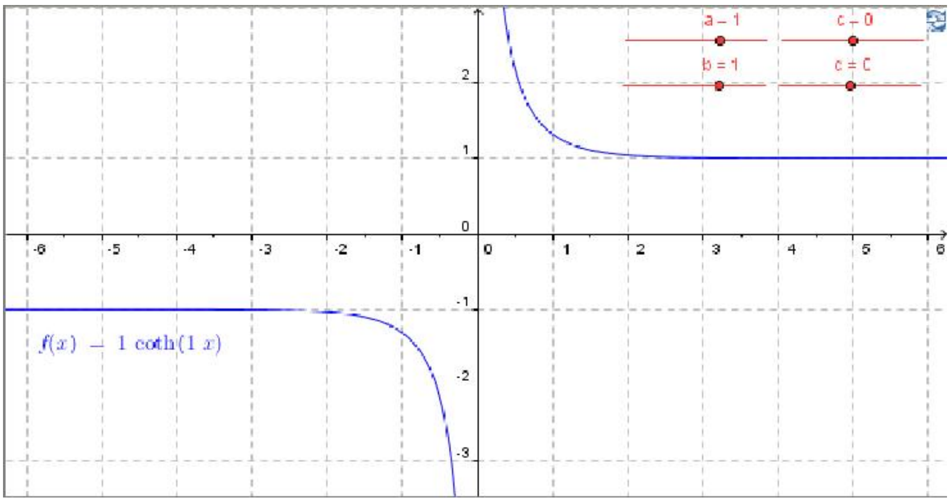
Hyperbolický kotangens

Obecný graf funkcie hyperbolický kotangens.



Funkcia $f(x) = a \cdot \text{cotgh}\, x(b \cdot x + c) + d$.

V tomto aplete pomocou posuvníkov môžme meniť základné hodnoty parametrov a, b, c, d.



Veta

Pre hyperbolické funkcie platí:

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \ (x \in \mathbf{R}),$

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} (x \in \mathbf{R}),$$

$$\operatorname{cotgh}^2 x - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x} (x \neq 0).$$

Poznámka

Dôkaz tejto vety plynie zo základnej definicie hyperbolických funkcií. Postupnou úpravou dostávame požadované výsledky.

Hyperbolometrické funkcie

Sú to funkcie $y = \operatorname{argsinh} x$ (čítame argument hyperbolického sínusu), $y = \operatorname{argcosh} x$ (čítame argument hyperbolického kosínusu), $y = \operatorname{argtgh} x$ (čítame argument hyperbolického tangensu), $y = \operatorname{argcotgh} x$ (čítame argument hyperbolického kotangensu), ktoré sú inverzné k hyperbolickým funkciam.

Definice

Funkcia $y = \operatorname{argsinh} x$ je inverzná k funkcií $x = \sinh y$; je definovaná na $\mathbf{R}$. Teda: Ak x je reálne číslo, potom $y = \operatorname{argsinh} x$ je to jednoznačne určené číslo y, pre ktoré $\sinh y = x$.

Definice

Funkcia $y = \operatorname{argcosh} x$ je inverzná k funkcií $x = \cosh x$ uvažovanej len na intervale $\langle 0, +\infty)$; je definovaná pre každé x z intervalu $\langle -1, +\infty)$. Teda: Ak $1 \leq x < \infty$, potom $y = \operatorname{argcosh} x$ je to jednoznačne určené číslo y z intervalu $\langle 0, +\infty)$ pre ktoré $\cosh y = x$

Definice

Funkcia $y = \operatorname{argtgh} x$ je inverzná k funkcií $x = \operatorname{tgh} y$; je definovaná pre každé x z intervalu $(-1, 1)$. Teda: Ak $-1 < x < 1$, potom $y = \operatorname{argtgh} x$ je to jednoznačne určené číslo y, pre ktoré $\operatorname{tgh} y = x$.

Definice

Funkcia $y = \operatorname{argcotgh} x$ je inverzná k funkcií $x = \operatorname{cotgh} y$; je definovaná pre každé x, pre ktoré $|x| > 1$. Teda: Ak $|x| > 1$, potom $y = \operatorname{argcotgh} x$ je to jednoznačne určené číslo y, pre ktoré $\operatorname{cotgh} y = x$.

Základné vlastnosti hyperbolometrických funkcií

V tabuľke je uvedený prehľad základných vlastností hyperbolometrických funkcií.

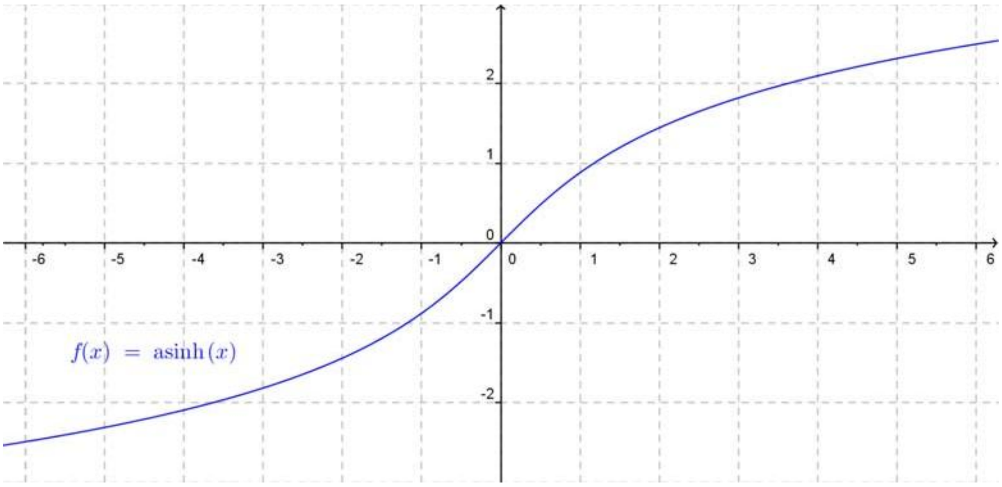
Hyperbolometrická funkcia	$\operatorname{argsinh} x$	$\operatorname{argcosh} x$	$\operatorname{argtgh} x$	$\operatorname{argcotgh} x$
Definičný obor	$\mathbf{R}$	$\langle 1, \infty)$	$(-1, 1)$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Obor funkčných hodnôt	$\mathbf{R}$	$\langle 0, \infty)$	$\mathbf{R}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Monotónnosť	rastúca na celom $\mathbf{R}$	rastúca na intervale $\langle 1, \infty)$	rastúca na intervale $(-1, 1)$	klesajúca na intervale $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Grafy hyperbolometrických funkcií a ďalších funkcií

> **Poznámka**
>
> Grafy hyperbolometrických funkcií sú vytvorené pomocou programu GeoGebra, kde sa používa iné značenie hyperbolometrických funkcií. Preto napríklad funkcia $\operatorname{argtgh} x$ sa v GeoGebre značí ako $\operatorname{atanh} x$.

Argument hyperbolického sínusu

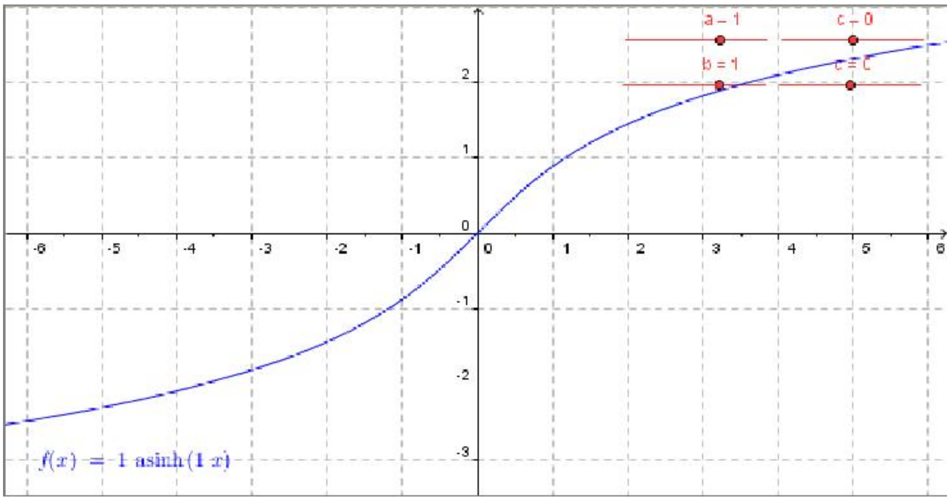
V nasledujúcom obrázku sa môžme pozrieť na obecný graf funkcie argument hyperbolického sínusu.



Funkcia $f(x) = a \cdot \operatorname{argsinh} x(b \cdot x + c) + d$.

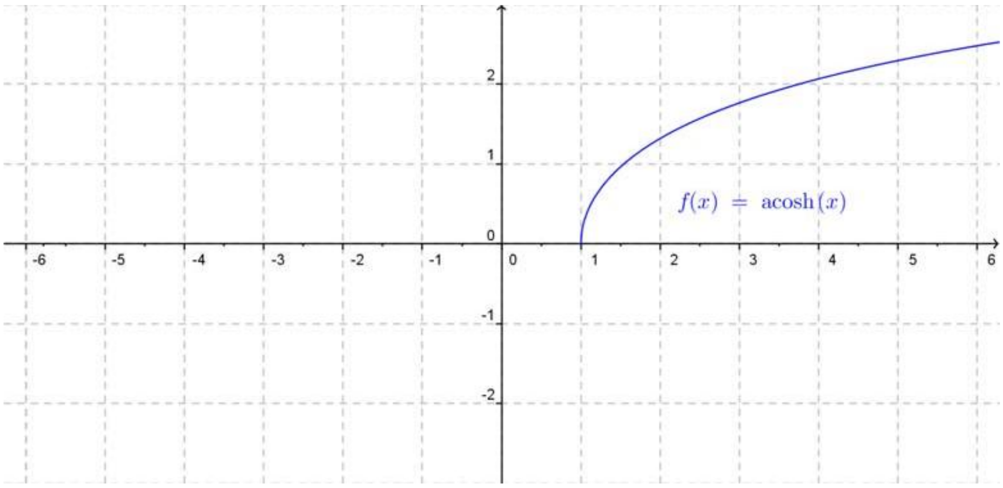
> **Poznámka**
>
> Grafy funkcií sú zobrazované pomocou apletu. V jednotlivých apletoch je možné pomocou posuvníkov meniť základné hodnoty parametrov a, b, c, d a všimnuť si tak správanie funkcií pri rôznych zmenách.

V tomto aplete pomocou posuvníkov môžme meniť základné hodnoty parametrov a, b, c, d.

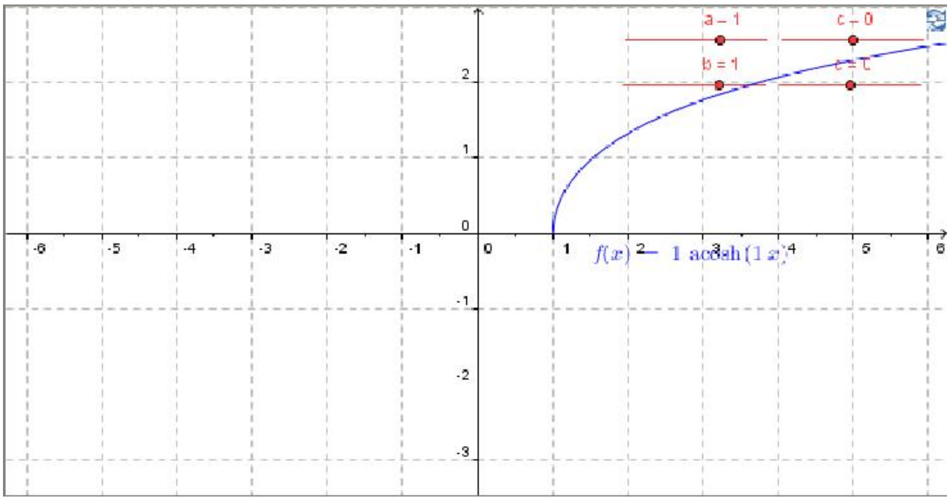


Argument hyperbolického kosínusu

V nasledujúcom obrázku sa môžme pozrieť na obecný graf funkcie argument hyperbolického kosínusu.

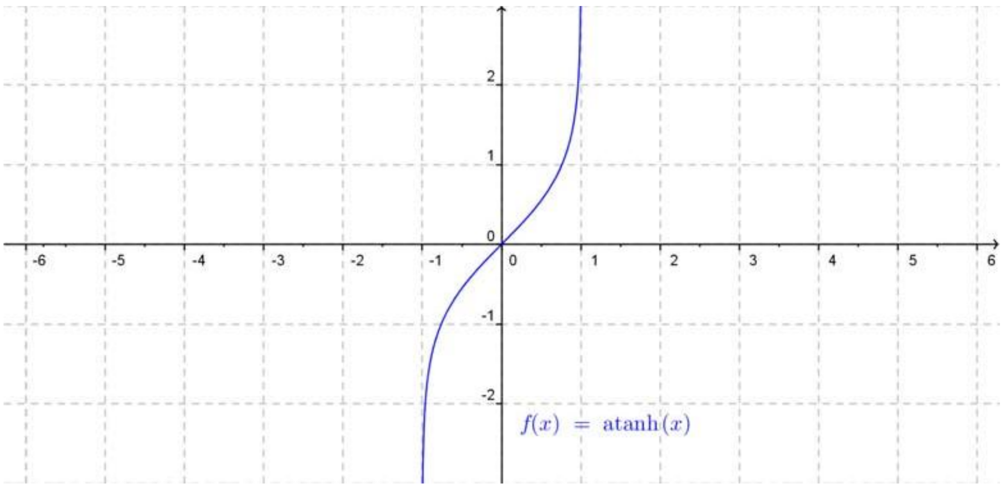


Funkcia $f(x) = a \cdot \text{argcosh}\, x(b \cdot x + c) + d$.

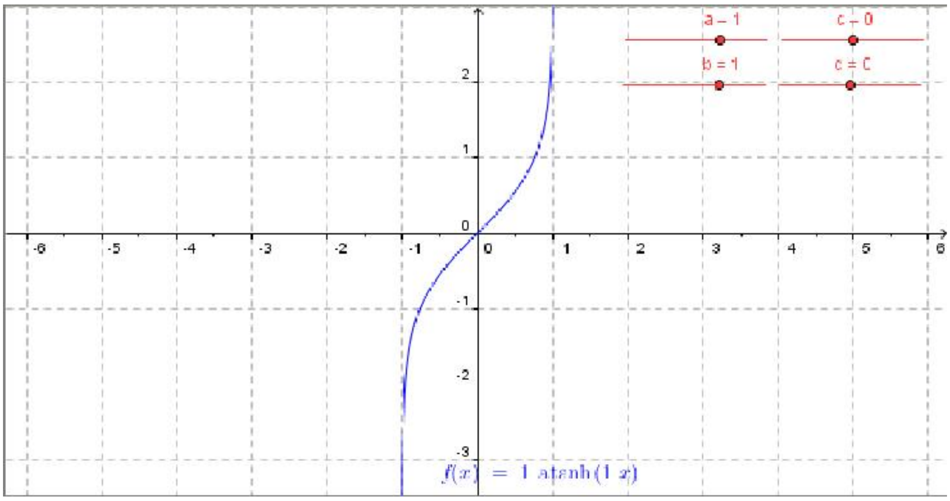


Argument hyperbolického tangensu

V nasledujúcom obrázku sa môžme pozrieť na obecný graf funkcie argument hyperbolického tangensu.

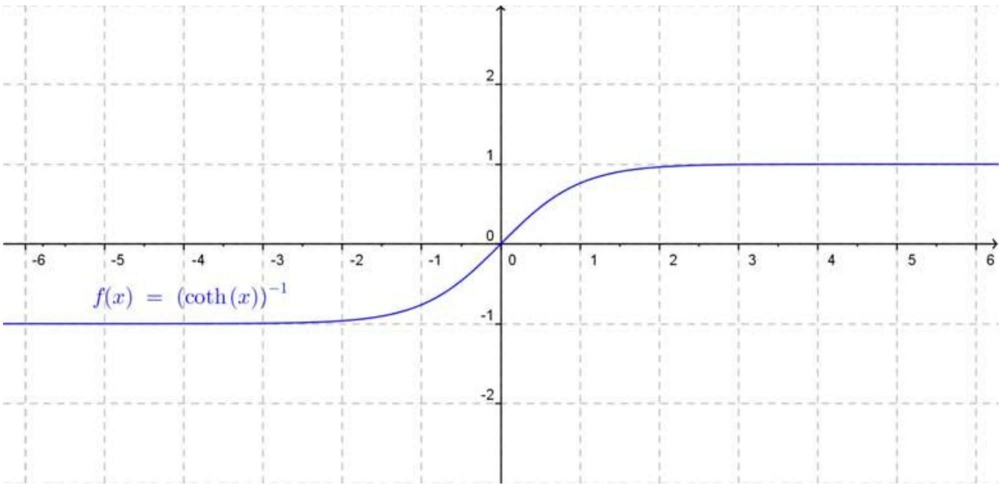


Funkcia $f(x) = a \cdot \text{argtgh}\, x(b \cdot x + c) + d$.

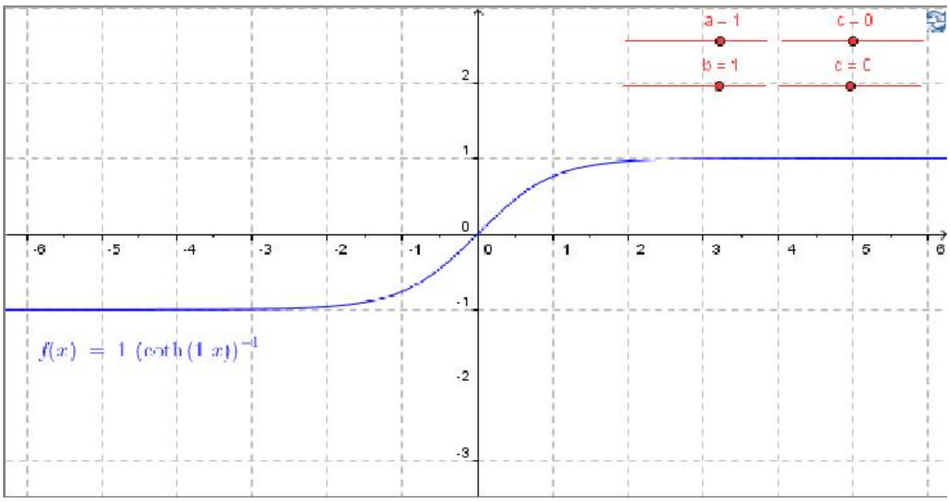


Argument hyperbolického kotangensu

V nasledujúcom obrázku sa môžme pozrieť na obecný graf funkcie argument hyperbolického kotangensu.



Funkcia $f(x) = a \cdot \text{argcotgh}\, x(b \cdot x + c) + d$.



Základné goniometrické rovnice

Riešenie základných goniometrických rovníc je viditeľné priamo z grafov goniometrických funkcií a z tabuľkových hodnôt, ako si to môžeme pozrieť na úvodných vzorovo vyriešených príkladoch v rámci tejto kapitoly. Úlohy venované základným goniometrickým rovniciam sú doprevadzané riešenim, poprípade návodmi, ktoré sa zobrazia po kliknutí na prislušný príklad.

Poznámka

Argument x predstavuje veľkosť uhla, môžme výsledok vyjadriť tiež v oblúkovej alebo v stupňovej miere, například $\pi = 180°$.

Príklady

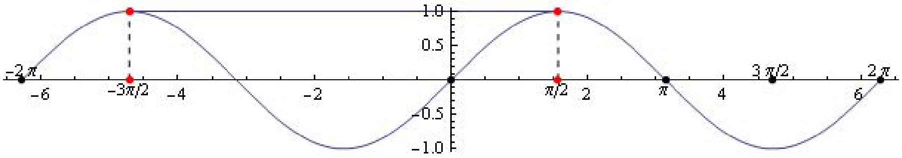
Príklad 1

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$\sin(x) = 1$

Riešenie

Riešenie je vidieť priamo z grafu funkcie sínus:



Pri pohľade na graf funkcie sínus je vidieť, že pre $x = -\frac{3}{2}\pi; x = \frac{1}{2}\pi$ je na danom intervale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ funkcia $\sin x = 1$.

Využitím periody 2π dostávame množinu riešení $K = \{ \dots, -\frac{7}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \dots \}$.

Množinu riešení budeme zapísovať stručnejším zápisom $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \}$.

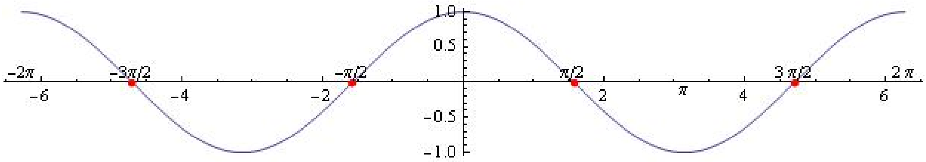
Príklad 2

Riešte goniometrickú nerovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$\cos(x) = 0$

Riešenie

Pri riešení využijeme graf funkcie kosínus a zistíme, v ktorých hodnotách kosínus nadobúda hodnoty 0.



Pri pohľade na graf funkcie kosínus je vidieť, že pre $x = -\frac{3}{2}\pi, x = -\frac{1}{2}\pi, x = \frac{1}{2}\pi, x = \frac{3}{2}\pi$ je na danom intervale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ funkcia $\cos x = 0$. Využitim periodičnosti funkcie kosínus, podobne ako v prvom príklade, dostávame riešenie rovnice v tvare

$$K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \} .$$

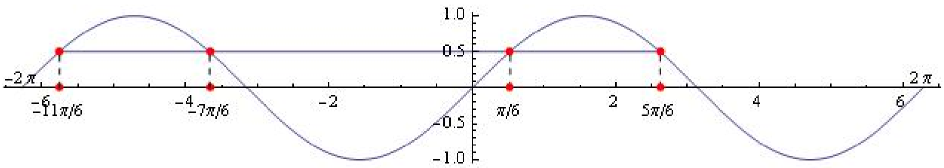
Príklad 3

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$ a výsledok zapíšte v stupňovej miere:

$\sin(x) = \frac{1}{2}$

Riešenie

Riešenie tejto úlohy je opäť viditeľné priamo z grafu funkcie sínus a z tabuľkových hodnôt funkcie sínus:



Platí, že pre $x \in \langle 0; \frac{1}{2}\pi \rangle$ je riešením $x_1 = \frac{1}{6}\pi$, pre $x \in \langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle$ je riešením $x_2 = \frac{5}{6}\pi$.

Funkcia kosínus je periodická s periódou 2π, obecné riešenie je teda

$K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \}$ a výsledok v stupňovej miere je

$K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{ 30° + k \cdot 360°; 150° + k \cdot 360° \}$.

Príklad 4

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$\cos(x) = 0{,}985\,0$

> **Poznámka**
>
> Funkčné hodnoty uvádzame na 4 desatinné miesta.

Riešenie

Použitím kalkulačky alebo matematických tabuliek pre kosínus uhla v oblúkovej miere dostávame riešenie $x_1 = 0{,}713\,0 + 2k\pi$ a $x_2 = 6{,}110\,0 + 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$.

Použitím matematických tabuliek kosínusu uhla v stupňovej miere dostávame riešenia $x_1 = 9°56 + k \cdot 360°$ a $x_2 = 360° - 9°56 + k \cdot 360° = 350°4 + k \cdot 360°$

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{ 9°56 + k \cdot 360°; 350°4 + k \cdot 360° \}$.

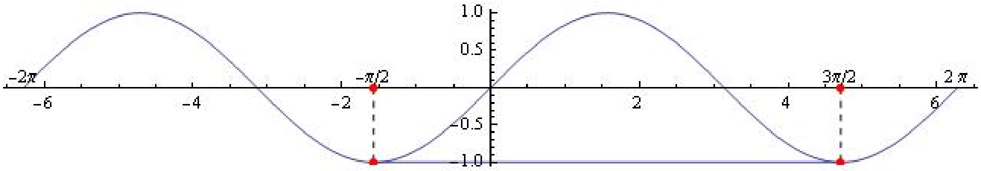
Úlohy

Riešte rovnice s neznámou $t \in \mathbf{R}$:

1. $\sin t = -1$

Riešenie

- Využijeme graf funkcie sínus:



- Z grafu a z tabuľkových hodnôt plynie, že riešením je množina $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$.

2. $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Riešenie

3. $\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Riešenie

4. $\operatorname{cotg} t = 1$

Riešenie

5. $2\frac{\cos t - 1}{3} - 4\frac{\cos t + 1}{2} = -1 - \cos t$

Riešenie

6. Riešte rovnicu s neznámou t a výsledok zapíšte v stupňovej miere s presnosťou na minúty: $\cos t = 0{,}242\,5$

Riešenie

7. Riešte rovnicu s neznámou t na intervale $\langle 0; 2\pi)$ a výsledok zapíšte v oblúkovej miere s presnosťou na dve desatinné miesta: $\sin t = 0{,}987\,6$

Riešenie

Zložitejšie goniometrické rovnice

V tejto kapitole sa budeme venovať zložitejším goniometrickým rovniciam. Pomocou jednoduchých metod sa naučíme vyriešiť jednotlivé typy zložitejších goniometrických rovníc. Každá časť obsahuje vzorovo vyriešené príklady a v závere jednotlivých kapitol môžme nájsť úlohy určené k precvičovaniu, ktoré sú doprevadzané krokovaným riešením.

Substitúcia na základný typ

Pomocou jednoduchej substitúcie $y = x + l$ alebo $y = x \cdot l$ prevedieme zložitejšiu goniometrickú rovnicu typu $g(x + l) = k$ alebo $g(x \cdot l) = k$, kde g je goniometrická funkcia s neznámou x a l, k sú reálne čísla, na základný typ goniometrických rovníc $g(y) = k$.

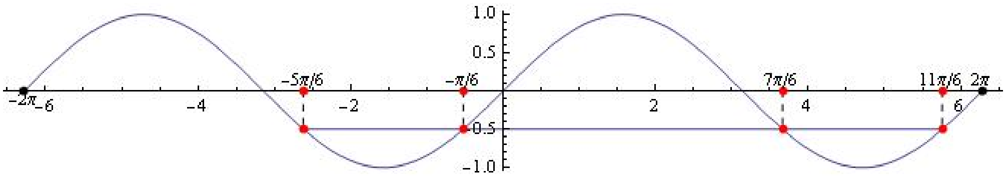
Príklad 1

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$\sin 2x = -\frac{1}{2}$

Riešenie

Zavedieme pomocnú substitúciu $y = 2x$ a dostaneme rovnicu $\sin y = -\frac{1}{2}$.



Z grafu je vidieť, že pre $y = \frac{11}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi; -\frac{1}{6}\pi; -\frac{5}{6}\pi$ je na intervale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ funkcia $\sin y = -\frac{1}{2}$.

Využitím periodičnosti funkcie sínus dostávame riešenia:

$y_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi; k \in \mathbf{Z}$, a $y_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi; k \in \mathbf{Z}$

Vrátime sa k substitúcií a postupnou úpravou dostávame:

$y_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$

$2x_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \;/ : 2$

$x_1 = \frac{7}{12}\pi + k\pi; k \in \mathbf{Z}$ (Prvé riešenie.)

$y_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

$2x_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \;/ : 2$

$x_2 = \frac{11}{12}\pi + k\pi; k \in \mathbf{Z}$ (Druhé riešenie.)

Výsledné riešenie môžme zapísať v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{7}{12}\pi + k\pi; \frac{11}{12}\pi + k\pi \right\}$.

Príklad 2

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

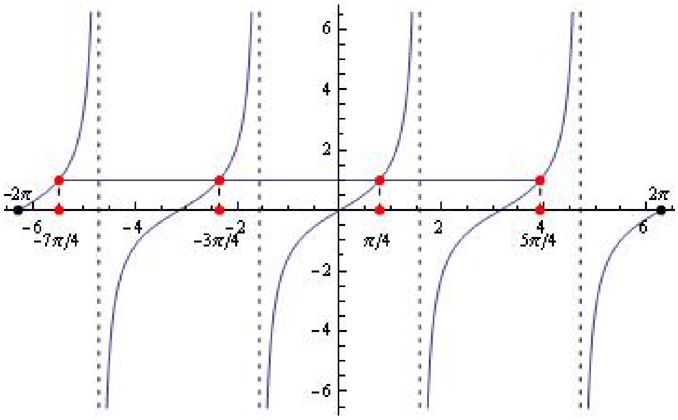
$\mathrm{tg}(4x - 3) = 1$

Platí podmienka: $4x - 3 \neq (2k + 1)\frac{1}{2}\pi; k \in \mathbf{Z}$.

$x \neq \frac{5}{4} + k\frac{\pi}{4}$.

Zavedieme pomocnú substitúciu $y = (4x - 3)$ a dostaneme rovnicu:

$\mathrm{tg}\, y = 1$



Z grafu a zo základných tabuľkových hodnôt funkcie tangens plynie, že pre $y = \frac{1}{4}\pi + k\pi$ je funkcia $\operatorname{tg} y = 1$.

Vrátime sa späť k substitúcii a postupnou úpravou dostávame:

$y = \frac{1}{4}\pi + k\pi$

$4x - 3 = \frac{1}{4}\pi + k\pi \;/ + 3$

$4x = \frac{1}{4}\pi + k\pi + 3 \;/ : 4$

$x = \frac{1}{16}\pi + \frac{3}{4} + \frac{k\pi}{4}$

Výsledné riešenie môžme zapísať v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{16}\pi + \frac{1}{4}k\pi + \frac{3}{4} \right\}$.

Substitúcia na základný typ

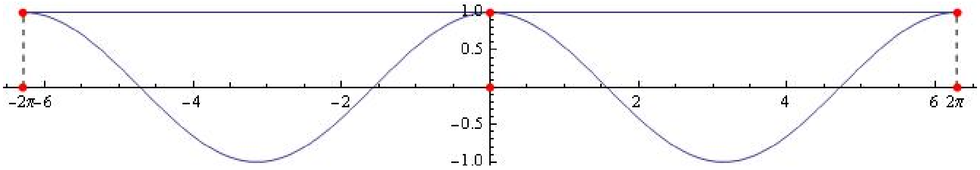
Úlohy

Riešte rovnice s neznámou $t \in \mathbf{R}$:

1. $\cos 3t = 1$

Riešenie

- Zavedieme substitúciu $y = 3t$.
- $\cos y = 1$
- Využijeme graf funkcie kosínus:



- Z grafu a z tabuľkových hodnôt funkcie kosínus plynie, že $y = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.
- Vrátime sa k substitúcii a postupnou úpravou dostávame $3t = 2k\pi / : 3$
- $t = \frac{2}{3}\pi k$
- Výsledným riešením je množina $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{2\pi}{3} + k\pi\}$

2. $\sqrt{2}\cos(4\pi + 2t) = -1$

Riešenie

3. $\cos(4\pi + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} = 0$

Riešenie

4. $\sin(2t - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Riešenie

5. $\operatorname{tg}(1 + t) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Riešenie

Substitúcia na kvadratickú rovnicu

Pomocou ďalšiej jednoduchej substitúcie prevedieme zložitejšiu goniometrickú rovnicu, ktorá obsahuje goniometrickú funkciu, v druhej alebo vo štvrtej mocnine, na kvadratickú rovnicu. Pri tomto type úloh často využívame goniometrické vzorce.

Príklad 1

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Riešenie

Zavedieme substitúciu $y = \cos x$.

Platí: $2y^2 - y - 1 = 0$

Vypočítame diskriminant kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ pomocou známeho vzorca:

$$D = b^2 - 4ac$$

V našom prípade:

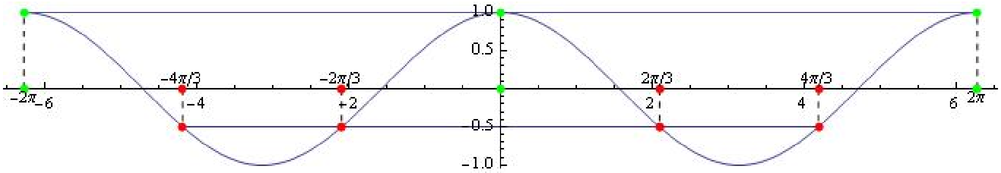
$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$D = 9$$

Určíme riešenie kvadratickej rovnice pomocou vzorca

$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; $y_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$.

Čiže $y_1 = 1$; $y_2 = -\frac{1}{2}$.



Vrátime sa k substitúcií $y = \cos x$

Platí $\cos x_1 = 1$, čiže $x_1 = 0 + 2k\pi$.

Ďalej $\cos x_2 = -\frac{1}{2}$, takže $x_2 = \frac{2}{3} + 2k\pi$; $\frac{4}{3} + 2k\pi$ (vidno z grafu).

Riešenie zapíšeme v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$.

Príklad 2

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$$2\cos^2 x - 3 = 3\sin x$$

Riešenie

$2(1 - \sin^2 x) - 3 - 3\sin x = 0$ (Využili sme základný vzorec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.)

$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$$

Zavedieme substitúciu $a = \sin x$.

Platí: $2a^2 + 3a + 1 = 0$.

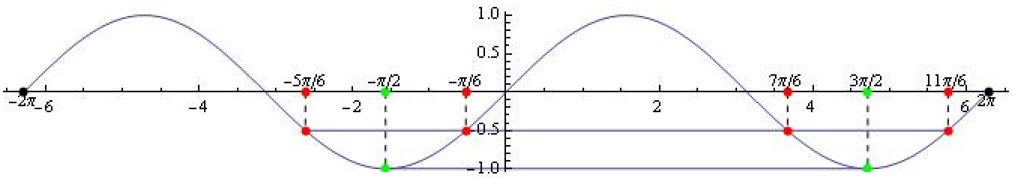
Vypočítame diskriminant kvadratickej rovnice a určíme riešenia rovnice podobne ako v predchádzajúcom príklade.

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$

$D = 1$

Riešenia kvadratickej rovnice teda sú:

$a_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$, čiže $a_1 = -1$; $a_2 = -\frac{1}{2}$



Vrátime sa k substitúcií $a = \sin x$

V prvom prípade dostávame $\sin a_1 = -1 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$.

V prvom prípade je $\sin a_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi;\ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$.

(Riešenie je vidieť z grafu a z tabuľkových hodnôt, postupujeme podobne ako v príkladoch predchádzajúcej kapitoly.)

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi;\ \frac{7}{6}\pi + 2k\pi;\ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right\}$.

Príklad 3

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$\mathrm{tg}^2\, x + 3\mathrm{cotg}^2\, x = 4$

Riešenie

Použijeme vzorce $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 4$

Aby výrazy v rovnici boli definované, musí platiť podmienka:

$\cos^2 x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ \sin^2 x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$

Upravíme rovnicu do najjednoduchšieho tvaru s využitím spoločného menovateľa:

$\sin^4 x + 3\cos^4 x = 4\cos^2 x \sin^2 x$

$\sin^4 x + 3\cos^4 x = 4\cos^2 x(1 - \cos^2 x)$ (Využili sme základný vzorec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.)

$\sin^4 x + 3\cos^4 x = 4\cos^2 x - 4\cos^4 x$ (Platí, že $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2$)

$(1 - \cos^2 x)^2 + 7\cos^4 x - 4\cos^2 x = 0$

$1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x + 7\cos^4 x - 4\cos^2 x = 0$

$8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 1 = 0$

Zavedieme substitúciu $\cos^2 x = t$ a dostaneme:

$8t^2 - 6t + 1 = 0$

Vyriešime kvadratickú rovnicu (vypočítame diskriminant a určíme korene kvadratickej rovnice, vzorce pre výpočet diskriminantu a koreňov kvadratickej rovnice sú uvedené v prvom príklade tejto kapitoly).

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1$

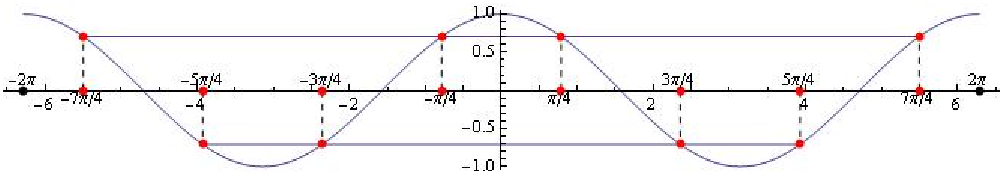
$D = 4$

Riešenia kvadratickej rovnice teda sú:

$t_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2 \cdot 8}$, čiže $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = \frac{1}{4}$

Vrátime sa k substitúcií $\cos^2 x = t$ a po dosadení za t dostaneme:

$\cos^2 x_1 = \frac{1}{2}$

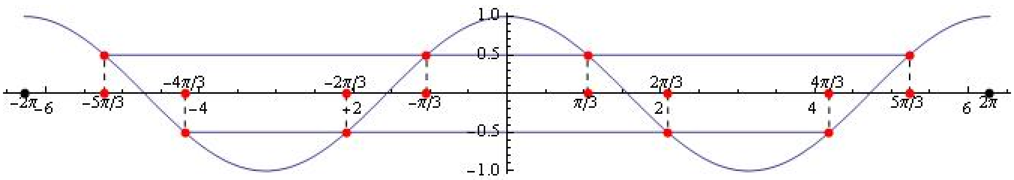


Z grafu a využitím periodičnosti funkcie kosínus dostávame koreň pre x_1:

$\cos^2 x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x_1 = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi; x_2 = \frac{3}{4}\pi + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

V druhom prípade dostávame pre x_2 :

$\cos^2 x_1 = \frac{1}{2}$



$\cos^2 x_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x_2 = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi; x_2 = \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{\frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{3}\pi + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi\right\}$.

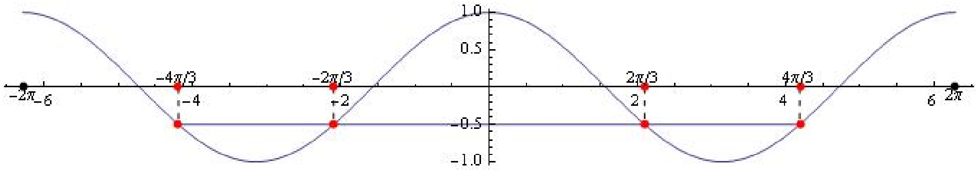
Substitúcia na kvadratickú rovnicu

Úlohy

Riešte rovnice s neznámou $t \in \mathbf{R}$:

1. $2\sin^2 t + 3\cos t = 0$

Riešenie

- $2(1 - \cos^2 t) + 3\cos t = 0$ (Používame vzorce uvedené v časti goniometrické vzorce.)
- $2\cos^2 t - 3\cos t - 2 = 0$
- Zavedieme substitúciu: $\cos t = y$
- $2y^2 - 3y - 2 = 0$ (Vypočítame diskriminant kvadratickej rovnice a určíme riešenia rovnice, postupujeme ako vo vzorových príkladoch kapitoly.)
- $D = 25$
- $y_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow y_1 = 2; y_2 = -\frac{1}{2}$
- Vrátime sa k substitúcii $\cos t = y$ a po dosadení za y dostávame:
- $\cos t_1 = 2 \Rightarrow t_1 \in \emptyset$
- $\cos t_2 = -\frac{1}{2}$
- 

- $\cos t_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$
- Výsledné riešenie napíšeme v tvare: $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$.

2. $2\sin^2 t - \cos^2 t - 4\sin t + 2 = 0$

Riešenie

3. $12\sin^4 t + \sin^2 t - 1 = 0$

Riešenie

4. $\operatorname{tg} t + \operatorname{cotg} t = 2$

Riešenie

5. $2\sin t\, \operatorname{tg} t + 4\cos t - 5 = 0$

Riešenie

Dvojnásobný argument

Pri tomto type úloh využívame vzorce pre dvojnásobný uhol, taktiež sa predpokladá znalosť predchádzajúcich typov úloh.

Príklad 1

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$\cos x + \sin 2x = 0$

Riešenie

$\cos x + 2\sin x \cos x = 0$ (Použili sme vzorec $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.)

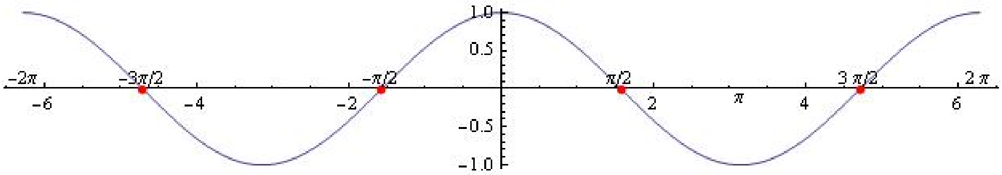
$\cos x(1 + 2\sin x) = 0$ (Vytknuli sme pred zátvorku výraz obsahujúci funkciu kosínus.)

Využijeme vlastnosť, kedy sa súčin rovná nule (aspoň, keď jeden činiteľ je rovný nule). Odkiaľ plynie:

$\cos x(1 + 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee (1 + 2\sin x) = 0$

Prvá možnosť:

$\cos x = 0$

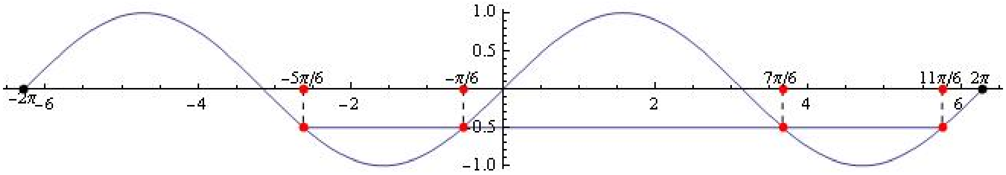


Z grafu a z tabuľkových hodnôt funkcie kosínus plynie, že $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Druhá možnosť:

$1 + 2\sin x = 0$

Úpravou dostávame $\sin x = -\frac{1}{2}$



Z grafu a z tabuľkových hodnôt funkcie kosínus plynie, že $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi;\ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare: $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{7}{6}\pi + 2k\pi;\ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \right\}$.

Príklad 2

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$\sin 2x \cos x + \sin^2 x = 1$

Riešenie

$2\sin x\cos x\cos x = 1 - \sin^2 x$ (Použili sme vzorec $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.)

$2\sin x\cos^2 x = \cos^2$ (Použili sme vzorec $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.)

$\cos^2 x(2\sin x - 1) = 0$

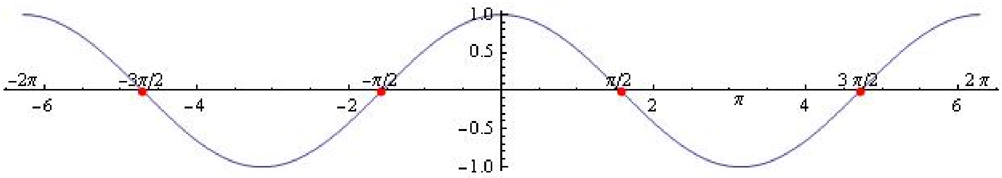
Využijeme vlastnosť, kedy sa súčin rovná nule (aspoň, keď jeden činiteľ je rovný nule).

$\cos^2 x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \vee 2\sin x - 1 = 0$

Prvá možnosť:

$\cos^2 x = 0$

$\cos x = 0$

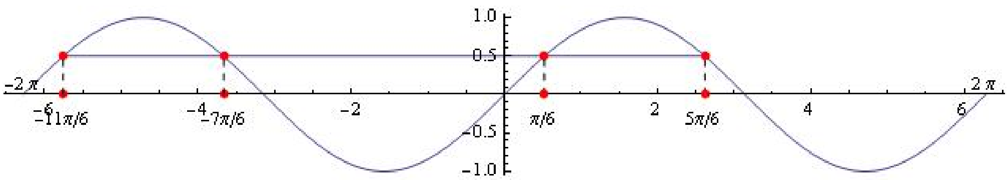


Z grafu a z tabuľkových hodnôt funkcie kosínus plynie, že $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Druhá možnosť:

$2\sin x - 1 = 0$

Úpravou dostávame $\sin x = \frac{1}{2}$.



Z grafu a z tabuľkových hodnôt funkcie kosínus plynie, že $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare: $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right\}$.

Príklad 3

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$2\sin 2x - 2\cos 2x = 2$

Riešenie

$4\sin x\cos x - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2$ (Použili sme vzorce $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ a $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.)

$4\sin x\cos x - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2$

$4\sin x\cos x - 2\cos^2 x + 2(1 - \cos^2 x) = 2$ (Použili sme vzorec $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.)

$4\sin x\cos x - 4\cos^2 x + 2 - 2 = 0$

$4\cos x(\sin x - \cos x) = 0$

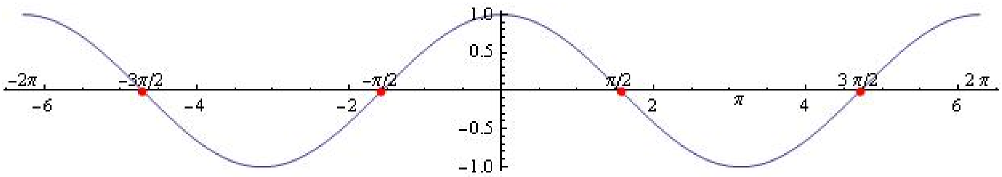
Využijeme vlastnosť, kedy sa súčin rovná nule (aspoň, keď jeden činiteľ je rovný nule).

$4\cos x(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos x = 0 \vee \sin x - \cos x = 0$

Prvá možnosť:

$4\cos x = 0$

Úpravou dostávame, že $\cos x = 0$.



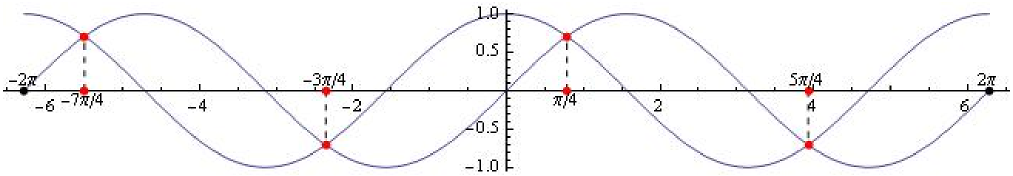
Z grafu a z tabuľkových hodnôt funkcie kosínus plynie, že $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Druhá možnosť:

$\sin x - \cos x = 0$

Po úprave dostávame:

$\sin x = \cos x$



Z grafu plynie, že $\sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare: $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\}$.

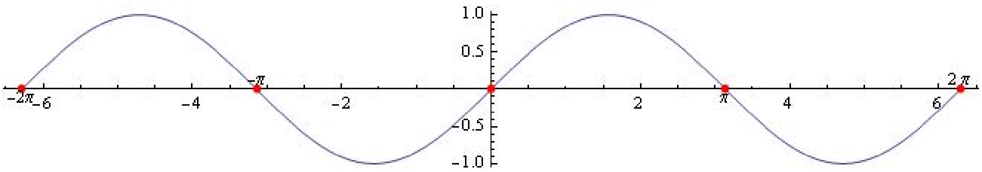
Dvojnásobný argument

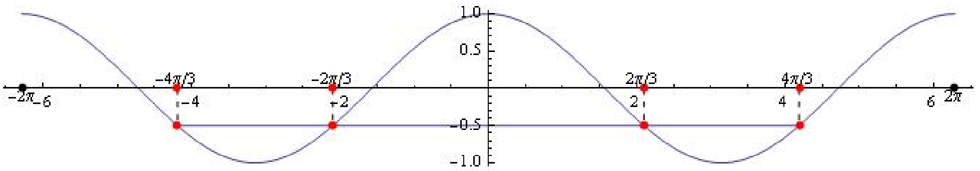
Úlohy

Riešte rovnice s neznámou $t \in \mathbf{R}$:

1. $\sin t + \sin 2t = 0$

Riešenie

- $\sin t + 2 \sin t \cos t = 0$ (Používame vzorce pre dvojnásobný argument.)
- $\sin t(1 + 2\cos t) = 0$ (Využijeme vlastnosť, kedy sa súčin rovná nule (aspoň, keď jeden činiteľ je rovný nule.))
- $\sin t(1 + 2\cos t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \vee 1 + 2\cos t = 0$
- Prvá možnosť: $\sin t = 0$
- 

- $\sin t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0 + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ (Využitím grafu a tabuľkových hodnôt funkcie sínus.)
- Druhá možnosť: $1 + 2\cos t = 0$
- $\cos t_2 = -\frac{1}{2}$
- 

- $\cos t_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$
- Výsledné riešenie napíšeme v tvare: $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right\}$.

2. $-1 = \cos 2t - \cos t$

Riešenie

3. $\sin^4 t - \cos^4 t = \cos^2 2t$

Riešenie

4. $(1 + \cos 2t) \sin t = 4\cos^2 t$

Riešenie

5. $1 - \cos 2t = \sin 2t \sin t$

Riešenie

Súčet a rozdiel goniometrických funkcií, súčtové vzorce

Pri tomto type úloh využívame vzorce pre (súčet a rozdiel goniometrických funkcií, súčtové vzorce). Zároveň sa predpokladá znalosť predchádzajúcich typov úloh.

Príklad 1

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$$\sin(5x + 45^\circ) = \sin x$$

Riešenie

$\sin(5x + 45^\circ) - \sin x = 0$ (Využijeme $\frac{\pi}{2} = 90^\circ \Rightarrow 45^\circ = \frac{\pi}{4}$.)

$2\cos\frac{5x+\frac{\pi}{4}+x}{2}\sin\frac{5x+\frac{\pi}{4}-x}{2} = 0$ (Použili sme vzorec pre $\sin x - \sin y$.)

$$2\cos\frac{6x+\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{4x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

Využijeme vlastnosť, kedy sa súčin rovná nule (aspoň, keď jeden činiteľ je rovný nule).

$$2\cos\frac{6x+\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{4x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{6x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0 \vee \sin\frac{4x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

Prvá možnosť:

$$2\cos\frac{6x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

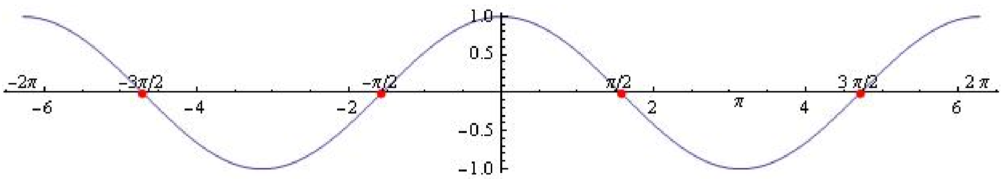
Po úprave dostaneme:

$$\cos\frac{6x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

Zavedieme substitúciu:

$$\frac{6x+\frac{\pi}{4}}{2} = y$$

$$\cos y = 0$$



Z grafu a z tabuľkových hodnôt funkcie kosínus plynie, že $\cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Vrátime sa k substitúcií a upravíme rovnicu:

$$\frac{6x+\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$6x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi$$

$x_1 = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$ (Prvé riešenie príkladu.)

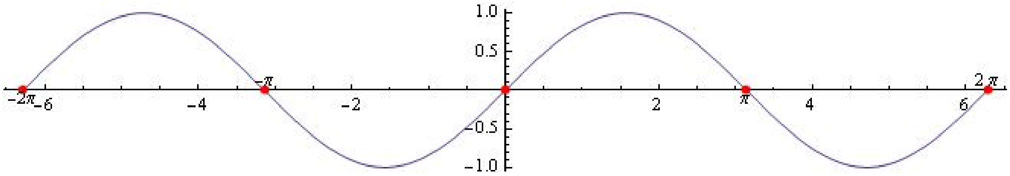
Druhá možnosť:

$$\sin\frac{4x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

Zavedieme substitúciu:

$\frac{4x+\frac{\pi}{4}}{2} = y$

$\sin y = 0$



Z grafu a z tabuľkových hodnôt funkcie sínus plynie, že $\sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Vrátime sa k substitúcií a upravíme rovnicu:

$\frac{4x+\frac{\pi}{4}}{2} = k\pi$

$4x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi$

$x_2 = \frac{15\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ (Druhé riešenie príkladu.)

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}; \frac{15}{16}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$.

Príklad 2

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$-\cos 3x = \cos 7x$

Riešenie

$\cos 7x + \cos 3x = 0$

$2\cos\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2} = 0$ (Použili sme vzorec pre $\cos x + \cos y$.)

$2\cos 5x \cos 2x = 0$

Využijeme vlastnosť, kedy sa súčin rovná nule (aspoň, keď jeden činiteľ je rovný nule).

$2\cos 5x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = 0 \vee \cos 2x = 0$

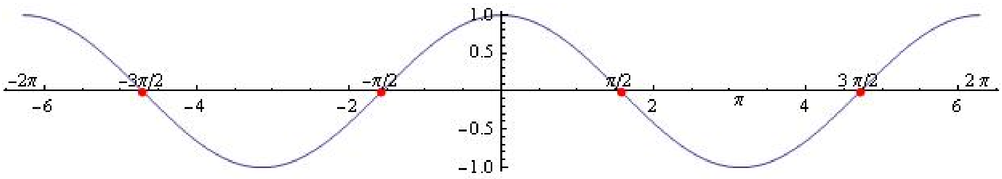
<u>Prvá možnosť:</u>

$\cos 5x = 0$

Zavedieme substitúciu:

$5x = y$

$\cos y = 0$



Z grafu a z tabuľkových hodnôt funkcie kosínus plynie, že $\cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$..

Vrátime sa k substitúcií a upravíme rovnicu:

$5x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x_1 = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}$ (Prvé riešenie príkladu.)

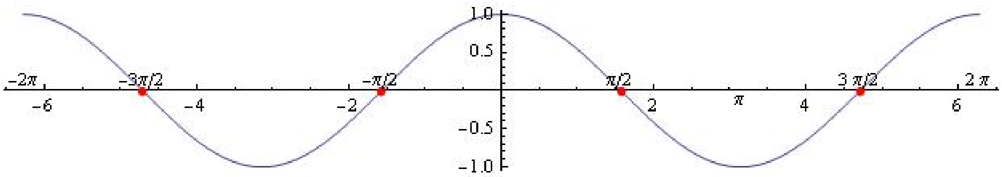
<u>Druhá možnosť:</u>

$\cos 2x = 0$

Zavedieme substitúciu:

$2x = y$

$\cos y = 0$



Z grafu a z tabuľkových hodnôt funkcie kosínus plynie, že $\cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$..

Vrátime sa k substitúcií a upravíme rovnicu:

$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x_2 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ (Druhé riešenie príkladu.)

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$.

Príklad 3

Riešte goniometrickú rovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 5\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Riešenie

$\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} = 5\left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right)$ (Použili sme vzorce pre $\sin(x+y)$; $\cos(x+y)$.)

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 5\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$ (Použili sme tabuľkové hodnoty funkcie (sínus a kosínus).)

$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = 5\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$

$0 = 5\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$

$0 = 4\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$

$2\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = 0$

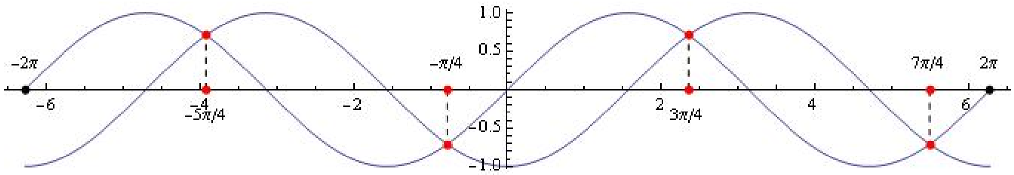
Využijeme vlastnosť, kedy sa súčin rovná nule (aspoň, keď jeden činiteľ je rovný nule).

$2\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$

Riešime teda rovnicu:

$\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = -\cos x$



Z grafu oboch funkcií sínus a kosínus plynie:

$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ (Využívame periodičnosť goniometrických funkcií.)

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi \right\}$.

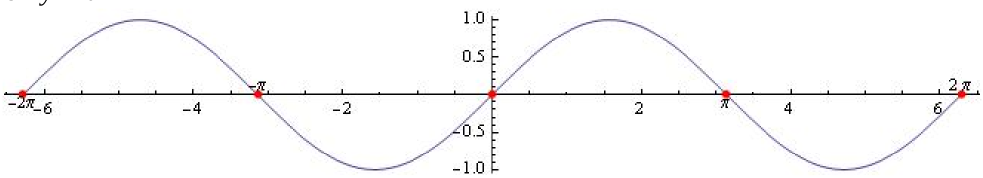
Súčet a rozdiel goniometrických funkcií, súčtové vzorce

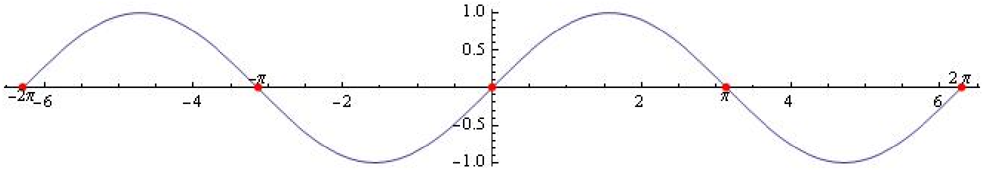
Úlohy

Riešte rovnice s neznámou $t \in \mathbf{R}$:

1. $\cos(4t + 60^\circ) = \cos t$

Riešenie

- $\cos(4t + 60^\circ) - \cos t = 0$
- $-2\sin\frac{4t+60^\circ+t}{2}\sin\frac{4t+60^\circ-t}{2} = 0$ (Používame vzorce uvedené v časti.)
- $-2\sin\frac{5t+\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{3t+\frac{\pi}{3}}{2} = 0$ (Využijeme $\frac{\pi}{2} = 90^\circ \rightarrow 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.)
- Prvá možnosť: $-2\sin\frac{5t+\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{3t+\frac{\pi}{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{5t+\frac{\pi}{3}}{2} = 0 \vee \sin\frac{3t+\frac{\pi}{3}}{2} = 0$ Využijeme vlastnosť, kedy sa súčin rovná nule (aspoň, keď jeden činiteľ je rovný nule).
- Prvá možnosť: $\sin\frac{5t+\frac{\pi}{3}}{2} = 0$
- Zavedieme substitúciu $\frac{5t+\frac{\pi}{3}}{2} = y$ a získame rovnicu:
- $\sin y = 0$
- 

- $\sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ Vrátime sa k substitúcií a upravíme rovnicu.
- $\frac{5t+\frac{\pi}{3}}{2} = k\pi$
- $t_1 = \frac{2}{5}k\pi - \frac{1}{15}\pi; k \in \mathbf{Z}$
- Druhá možnosť: $\sin\frac{3t+\frac{\pi}{3}}{2} = 0$
- Zavedieme substitúciu $\frac{3t+\frac{\pi}{3}}{2} = y$ a získame rovnicu:
- $\sin y = 0$
- 

- $\sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ Vrátime sa k substitúcií a upravíme rovnicu.
- $\frac{3t+\frac{\pi}{3}}{2} = k\pi$
- $t_2 = \frac{2}{3}k\pi - \frac{1}{9}\pi; k \in \mathbf{Z}$
- Výsledné riešenie napíšeme v tvare: $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left\{\frac{2}{5}k\pi - \frac{1}{15}\pi; \frac{2}{3}k\pi - \frac{1}{9}\pi\right\}$.

2. $-\sin 2t = \sin 10t$

Riešenie

3. $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$

Riešenie

4. $\sin\left(t + 45^\circ\right) + \sin\left(t - 45^\circ\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Riešenie

5. $\mathrm{tg}\left(t + \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{tg}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

Riešenie

Goniometrické nerovnice

V tejto časti sa budeme zaoberať riešením goniometrických nerovníc. Príklady sú opäť obohatené vzorovým riešenim a úlohy určene k precvičovaniu sú doprevadzané riešením po krokoch zobrazujúcich sa po kliknutí na príslušnú ikonu. Pri riešení goniometrických nerovníc využívame znalosti získane z riešenia goniometrických rovníc, riešenie je často viditeľné priamo z grafu daných funkcií alebo z jednotkovej kružnice, taktiež využívame základné tabuľkové hodnoty goniometrických funkcií.

Poznámka

Bližšie informácie o jednotkovej kružnici môžme nájsť v diplomovej práci *Goniometrie a trigonometrie.*

Základné goniometrické nerovnice

Riešenie základných goniometrických nerovníc je viditeľné priamo z grafov goniometrických funkcií, ako si to môžme pozrieť na úvodných vzorovo riešených príkladoch. Kapitola obsahuje aj úlohy určené k precvičovaniu, ktoré sú obohatené krokovaným riešenim. Pri riešeni základných goniometrických nerovníc sa predpokladá znalosť riešenia goniometrických rovníc, lineárnych a kvadratických nerovníc.

Príklad 1

Riešte goniometrickú nerovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

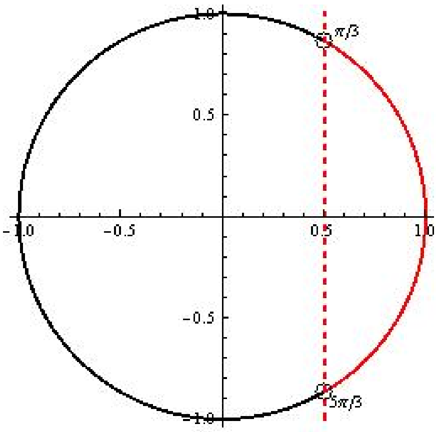
$\cos x > \frac{1}{2}$

Riešenie

Na tomto príklade si ukážeme dve rôzne metody ako riešiť goniometrickú nerovnicu.

Prvá metóda:

V prvom prípade riešenie určíme pomocou jednotkovej kružnice.



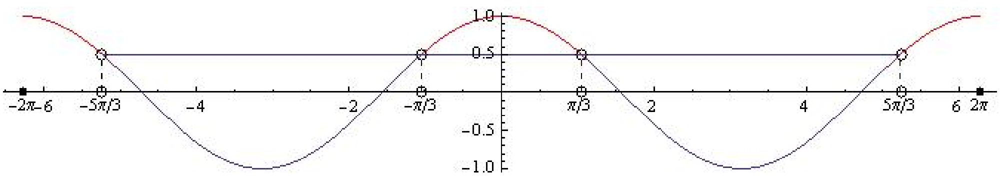
Z jednotkovej kružnice je vidieť, že daná goniometrická nerovnica nadobúda riešenie v prvom a v štvrtom kvadrante. Časť jednotkovej kružnice znázornená červenou farbou určuje riešenie danej goniometrickej nerovnice.

Výsledné riešenie môžme zapísať v tvare:

$K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi; 2\pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) = \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right)$. využívame podobne ako pri goniometrických rovniciach periodičnosť funkcie kosínus, platí $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi$.

Druhá metóda:

V druhom prípade riešenie určíme pomocou grafu funkcie kosínus.



$K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right)$.

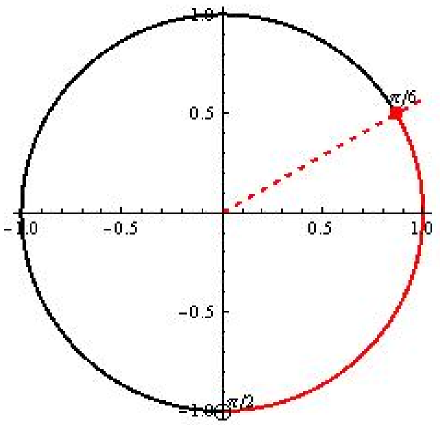
Príklad 2

Riešte goniometrickú nerovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$$\operatorname{tg} x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Riešenie

Aby výrazy v nerovnici boli definované, musí platiť podmienka $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}$.



Z jednotkovej kružnice je vidieť, že riešenim je množina

$K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi\right\rangle$, , pričom platí, že v bode $-\frac{\pi}{2}$ funkcia tangens nie je definovaná, preto použijeme okrúhlu zátvorku, naopak bod $\frac{\pi}{6}$ patrí do riešenia, plynie zo zadania, preto použijeme uhlovú zátvorku.

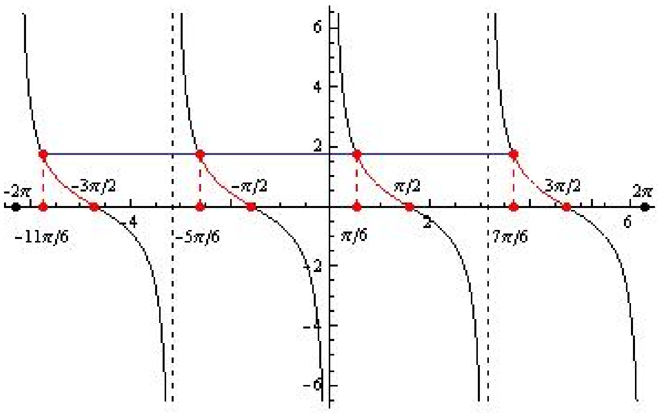
Príklad 3

Riešte goniometrickú nerovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$$0 \leq \operatorname{cotg} x \leq \sqrt{3}$$

Riešenie

Aby výrazy v nerovnici boli definované, musí platiť podmienka $x \neq (k\pi; k \in \mathbf{Z}$.



Využitím grafu a periodičnosti funkcie kotangens dostávame výsledok, ktorý zapíšeme v tvare

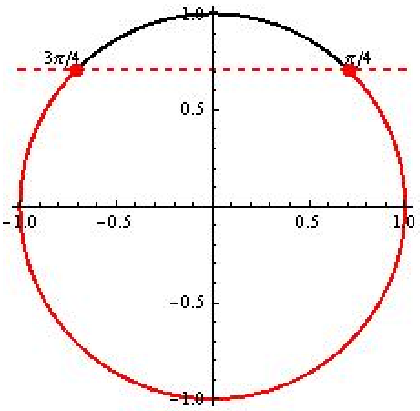
$$K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \langle -\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \rangle .$$

Úlohy

Riešte rovnice s neznámou $t \in \mathbf{R}$:

1. $\sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Riešenie

- 

- Využitím jednotkovej kružnice dostávame riešenie, ktoré zapíšeme v tvare:

  $K = \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} \langle \frac{3}{4}\pi + 2k\pi; 2\pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rangle = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \langle \frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{9}{4}\pi + 2k\pi \rangle.$

2. $2\sqrt{3}\cos t \geq 3$

Riešenie

3. $\operatorname{cotg} t < 1$

Riešenie

4. $3\sqrt{3}\operatorname{tg} t - 3 \geq 0$

Riešenie

5. $\cos t < \cos \frac{\pi}{4}$

Riešenie

Zložitejšie goniometrické nerovnice

Pri riešeni zložitejších goniometrických nerovníc využívame znalosti, ktoré sme získali pri riešení goniometrických rovníc a základných goniometrických nerovníc. Postupnou úpravou prevedieme zložitejšiu goniometrickú nerovnicu na základný typ goniometrických nerovníc. Kapitola obsahuje vzorové vyriešene príklady a taktiež aj úlohy určené k precvičovaniu, ktoré sú obohatené riešenim.

Príklady

Príklad 1

Riešte goniometrickú nerovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

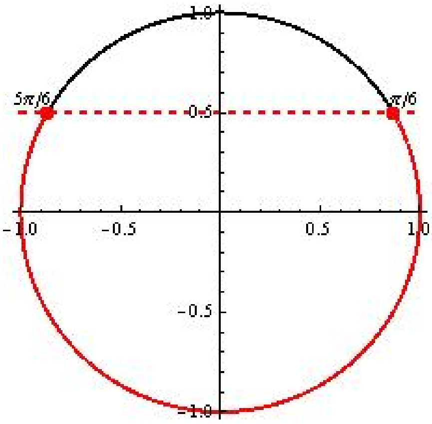
$\sin 2x \leq \frac{1}{2}$

Riešenie

Zavedieme pomocnú substitúciu $y = 2x$.

$\sin y \leq \frac{1}{2}$

Situáciu zobrazíme na jednotkovej kružnici:



Využitím jednotkovej kružnice dostávame riešenie:

$y \in \left\langle \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; 2\pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle = \left\langle \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; \frac{13}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$

Vrátime sa k subtitúcií $y = 2x$, odkiaľ plynie, že $2x \in \left\langle \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; \frac{13}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$.

Úpravou dostávame $x \in \left\langle \frac{5}{12}\pi + k\pi; \frac{13}{12}\pi + k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$.

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\langle \frac{5}{12}\pi + k\pi; \frac{13}{12}\pi + k\pi \right\rangle$.

Príklad 2

Riešte goniometrickú nerovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$|\operatorname{tg} x| \geq \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$

Riešenie

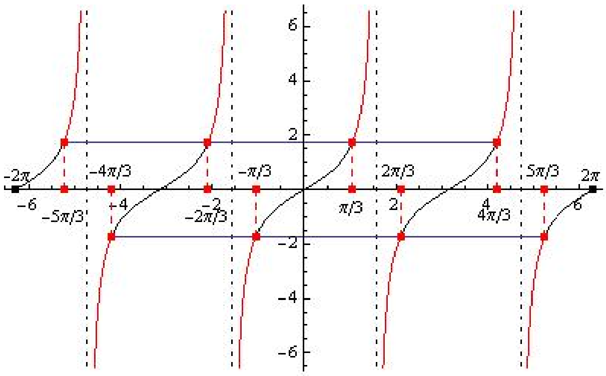
Aby výrazy v nerovnici boli definované, musí platiť podmienka $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

$|\operatorname{tg} x| \geq \sqrt{3}$ (Použili sme tabuľkovú hodnotu funkcie tangens uvedenú v časti.)

Z definície absolútnej hodnoty vyplýva:

$\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3} \vee \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$

(Bližšie informácie o absolútnej hodnote môžme nájsť v bakalárskej práci Základné poznatky z matematiky na strednej škole.)



Využitím grafu funkcie a periodičnosti funkcie tangens dostávame riešenie:

$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{3} + k\pi\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{3} + k\pi\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \right\}$.

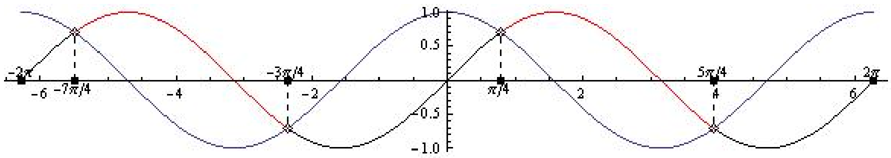
Príklad 3

Riešte goniometrickú nerovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$\sin x > \cos x$

Riešenie

Využijeme graf funkcie sínus a kosínus:



Časť grafu vyznačená červenou farbou zahŕňa riešenie danej nerovnice. Je vidieť, že riešenim pri využití periódy 2π je množina $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right)$.

Príklad 4

Riešte goniometrickú nerovnicu s neznámou $x \in \langle 0; 2\pi)$:

$\cos 2x + \sin x < 1$

Riešenie

$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x < 1$ (Použili sme vzorec $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.)

$(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x + \sin x < 1$ (Použili sme vzorec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.)

$1 - 2\sin^2 x + \sin x < 1$

$-2\sin^2 x + \sin x < 0$

$\sin x(-2\sin x + 1) < 0$ (Využijeme vlastnosť, kedy je súčin dvoch čísel menší ako nula.)

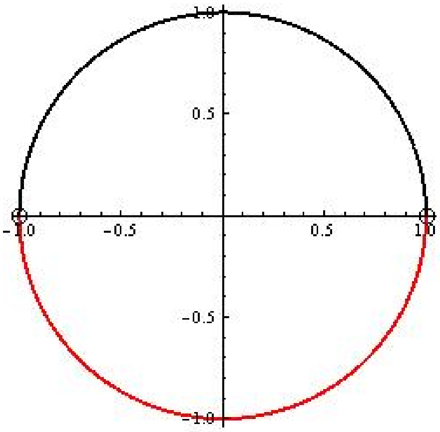
$\sin x(-2\sin x + 1) < 0 \Leftrightarrow (\sin x < 0 \wedge -2\sin x + 1 > 0) \vee (\sin x > 0 \wedge -2\sin x + 1 < 0)$

Riešenie sa nám rozdelí na dva prípady.

<u>Prvá možnosť:</u>

$\sin x < 0 \wedge -2\sin x + 1 > 0$

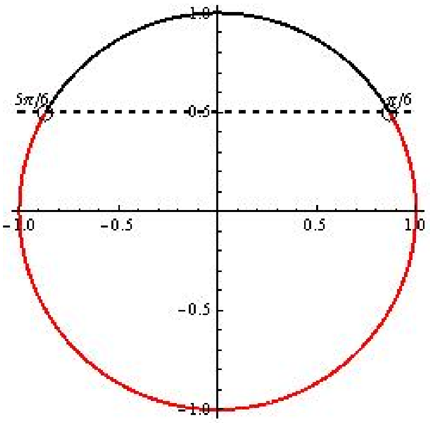
$\sin x < 0$



Z jednotkovej kružnice plynie, že $\sin x < 0 \Rightarrow K_{11} = (\pi; 2\pi)$.

$-2\sin x + 1 > 0$

$\sin x < \frac{1}{2}$



Z jednotkovej kružnice plynie, že $\sin x < \frac{1}{2} \Rightarrow K_{12} = \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; 2\pi\right)$.

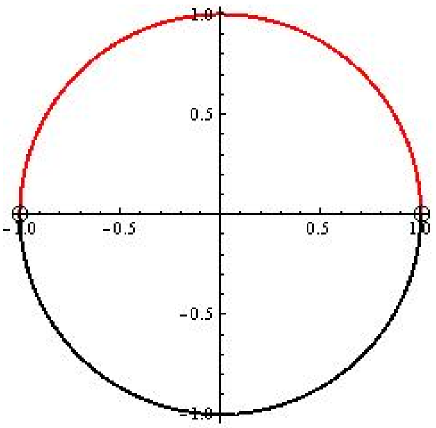
$K_1 = K_{11} \cap K_{12}$

$K_1 = (\pi; 2\pi)$

<u>Druhá možnosť:</u>

$\sin x > 0 \wedge -2\sin x + 1 < 0$

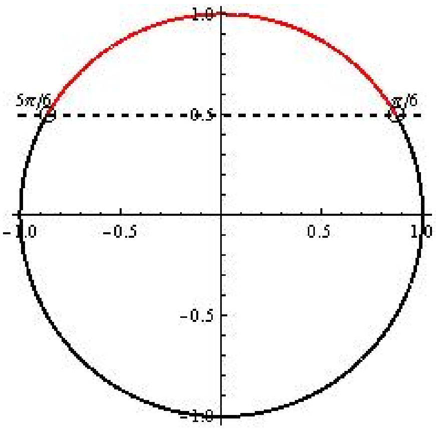
$\sin x > 0$



Z jednotkovej kružnice plynie, že $\sin x > 0 \Rightarrow K_{21} = (0; \pi)$.

$-2\sin x + 1 < 0$

$\sin x > \frac{1}{2}$



Z jednotkovej kružnice plynie, že $\sin x > \frac{1}{2} \Rightarrow K_{22} = \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

$K_2 = K_{21} \cap K_{22}$

$K_2 = \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\right)$

$K = K_1 \cup K_2$ (Celkově riešenie je zjednotením dvoch čiastkových.)

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare $K = \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right) \cup \left(\pi; 2\pi\right)$.

Príklad 5

Riešte goniometrickú nerovnicu s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$-2\sin^2 x + 5\cos x + 4 \geq 0$

Riešenie

$-2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x + 4 \geq 0$ (Použili sme vzorec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.)

$2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \geq 0$

Zavedieme substitúciu $\cos x = a$

$2a^2 + 5a + 2 \geq 0$ (Určíme diskriminant a korene odpovedajúcej kvadratickej rovnice.)

$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$

Riešenia kvadratickej rovnice teda sú:

$a_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2 \cdot 2}$, čiže $a_1 = \frac{-1}{2}$; $a_2 = -2$

Nájdené korene využijeme k tomu, aby sme kvadratický trojčlen v nerovnici rozložili na súčin.

$2\left(a + \frac{1}{2}\right) \cdot (a + 2) \geq 0$ (Vrátime sa k substitúcií $\cos x = a$.)

$(2\cos x + 1)(\cos x + 2) \geq 0$ (Využijeme vlastnosť, kedy je súčin dvoch čísel väčší ako nula.)

$(2\cos x + 1)(\cos x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow (2\cos x + 1 \geq 0 \wedge \cos x + 2 \geq 0) \vee (2\cos x + 1 \leq 0 \wedge \cos x + 2 \leq 0)$

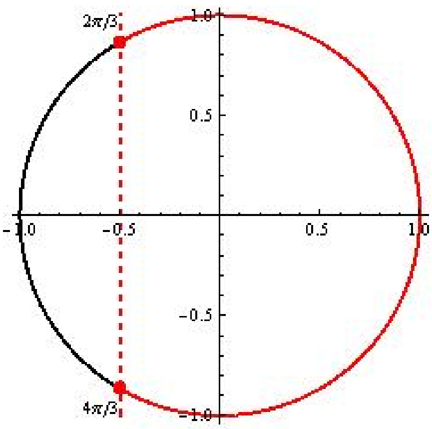
Riešenie sa nám rozdelí na dva prípady.

<u>Prvá možnosť:</u>

$2\cos x + 1 \geq 0 \wedge \cos x + 2 \geq 0$

$\cos x \geq -\frac{1}{2} \wedge \cos x \geq -2$, odkiaľ plynie, že $\cos x \geq -\frac{1}{2}$

Situáciu si znázorníme na jednotkovej kružnici.



Využitím jednotkovej kružnice, periodičnosti funkcie kosínus, platí $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi = \frac{4}{3}\pi$, dostávame riešenie, ktoré zapíšeme v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\langle -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right\rangle$.

<u>Druhá možnosť:</u>

$2\cos x + 1 \leq 0 \wedge \cos x + 2 \leq 0$

$\cos x \leq -\frac{1}{2} \wedge \cos x \leq -2$, odkiaľ plynie, že $\cos x \leq -2$

$\cos x \leq -2 \Rightarrow x \in \emptyset$ (Plynie z oboru funkčných hodnôt funkcie kosínus.)

Odkiaľ plynie, že množina koreňov je prázdna, čo matematický zapíšeme ako $K_2 = \emptyset$

$K = K_1 \cup K_2$ (Celkově riešenie je zjednotením dvoch čiastkových.)

Výsledné riešenie zapíšeme v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\langle -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right\rangle$.

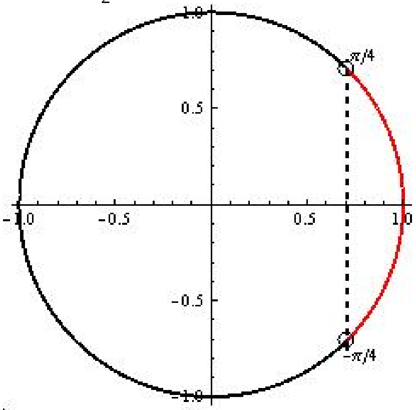
Úlohy

Riešte nerovnice s neznámou $t \in \mathbf{R}$:

1. $\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Riešenie

- Zavedieme substitúciu $y = 3t - \frac{\pi}{2}$.
- $\cos y > \frac{\sqrt{2}}{2}$



- Z jednotkovej kružnice je vidieť, že riešením je $y \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$.
- Vrátime sa k substitúcií $y = 3t - \frac{\pi}{2}$.
- $3t \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) \Rightarrow t \in \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$.
- Výsledné riešenie zapíšeme v tvare $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi\right)$.

2. $|\sin t| < \cos\frac{\pi}{6}$

Riešenie

3. $\operatorname{tg} t \geq \operatorname{cotg} t$

Riešenie

4. $\sin 2t \leq \cos t$

Riešenie

5. $\cos^2 t + 3\sin t - 3 \leq 0$

Riešenie

Testy

Táto kapitola je venovaná testom, ktoré slúžia k zopakovaniu učiva preberaného v predchádzajúcich kapitolách. Testy sú doprevadzané výsledkom, ktorý sa zobrazí po kliknutí na danú možnosť.

Jednotlivé kapitoly sú rozdelené podľa typu funkcií na goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické funkcie. Dôraz pri testovaní je kladený na základné vlastnosti funkcií, funkčné hodnoty, grafy funkcií a riešenie goniometrických rovníc a nerovníc.

Goniometrické funkcie

Úloha 1

Priraď správnu funkčnú hodnotu:

	A	B	C	D	E	F	G	H
	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{3}$
a) $\sin\frac{\pi}{6}$	○	○	○	○	○	○	○	○
b) $\cos\frac{\pi}{4}$	○	○	○	○	○	○	○	○
c) $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}$	○	○	○	○	○	○	○	○
d) $\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{3}$	○	○	○	○	○	○	○	○
e) $\sin\frac{3\pi}{2}$	○	○	○	○	○	○	○	○
f) $\cos\frac{\pi}{6}$	○	○	○	○	○	○	○	○
g) $\mathrm{tg}\,\pi$	○	○	○	○	○	○	○	○
h) $\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{4}$	○	○	○	○	○	○	○	○

Znova

Úloha 2

Urči riešenie danej rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

a) $\cos x = -1$

○ $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{0 + 2k\pi\}$

○ $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$

○ $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{-\pi + 2k\pi\}$

b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

○ $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\}$

○ $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\}$

○ $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\}$

c) $\mathrm{tg}\,x = 1$

○ $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{2k\pi\}$

○ $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

○ $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{\pi}{4} + k\pi\}$

d) $\mathrm{cotg}\,x = -1$

○ $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\}$

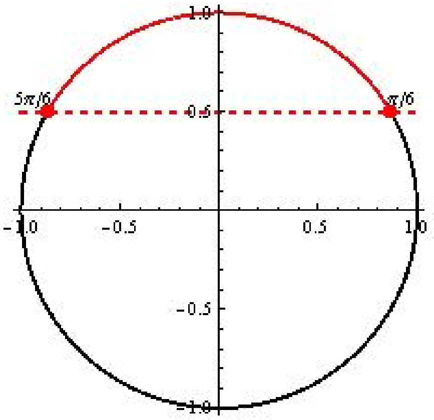
○ $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{-\frac{\pi}{4} + k\pi\}$

○ $K = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{\pi}{4} + k\pi\}$

Úloha 3

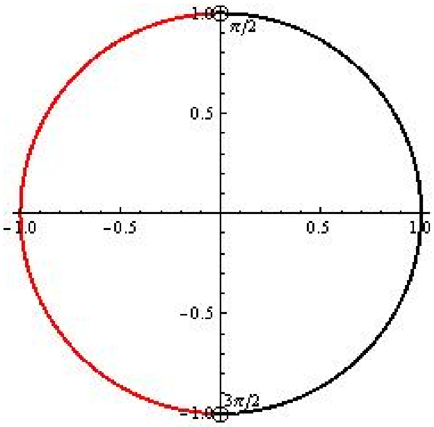
Zisti akému zadaniu odpoveda červenou farbou vyznačené riešenie na jednotkovej kružnici.

a)



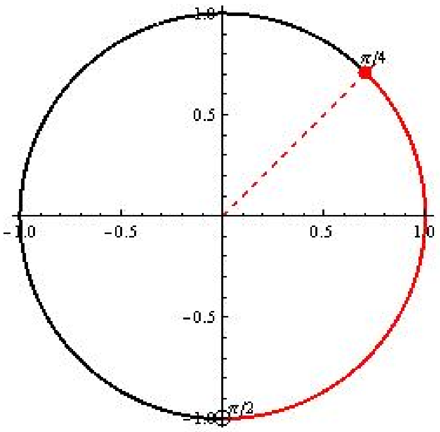
- $\sin x \geq \frac{1}{2}$
- $\cos x > \frac{1}{2}$
- $\sin x > \frac{1}{2}$

b)



- $\sin x \leq 0$
- $\cos x > 0$
- $\cos x < 0$

c)



- $\cos x \leq 1$
- $\text{tg}\, x \leq 1$

○ $\mathrm{cotg}\,x \leq 1$

Úloha 4

Rozhodni, či dané tvrdenie je pravdivé:

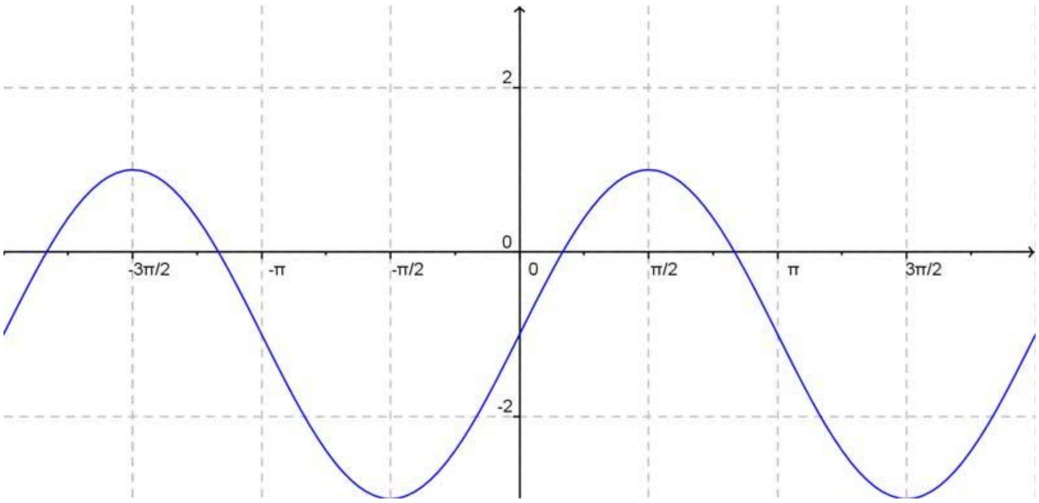
a) $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	ano	nie
b) Funkcia sínus je pre $x \in \mathbf{R}$ nepárna.	ano	nie
c) Funkcia tangens je pre $x \in \mathbf{R}$ neohraničená.	ano	nie
d) Funkcia kotangens je pre $x \in \mathbf{R}$ rastúca na celom definičnom obore.	ano	nie
e) Funkcia kosínus je pre $x \in \mathbf{R}$ neohraničená.	ano	nie
f) $\cos 180^\circ = -1$	ano	nie
g) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2} = 0$	ano	nie
h) $\mathrm{cotg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$	ano	nie

Znova

Úloha 5

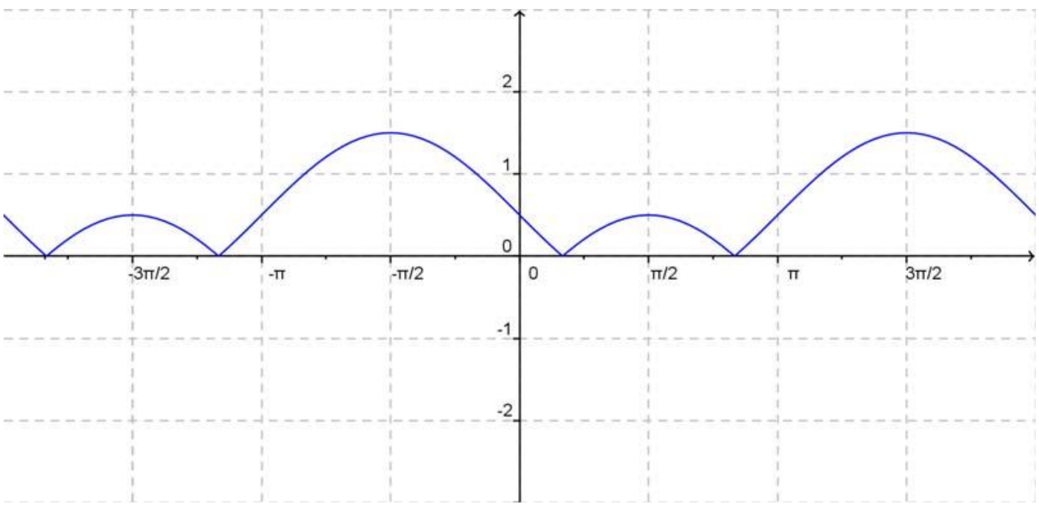
Zisti predpis funkcie, ktorá je vykreslená na obrázku!

a)



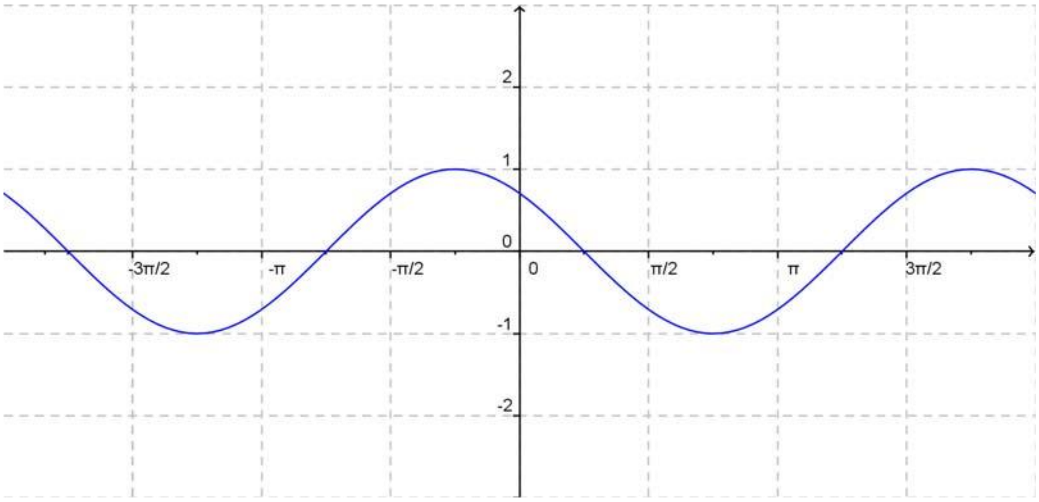
○ $y = 2\sin x - 1$
○ $y = 2\cos x - 1$
○ $y = 2\cos x$

b)



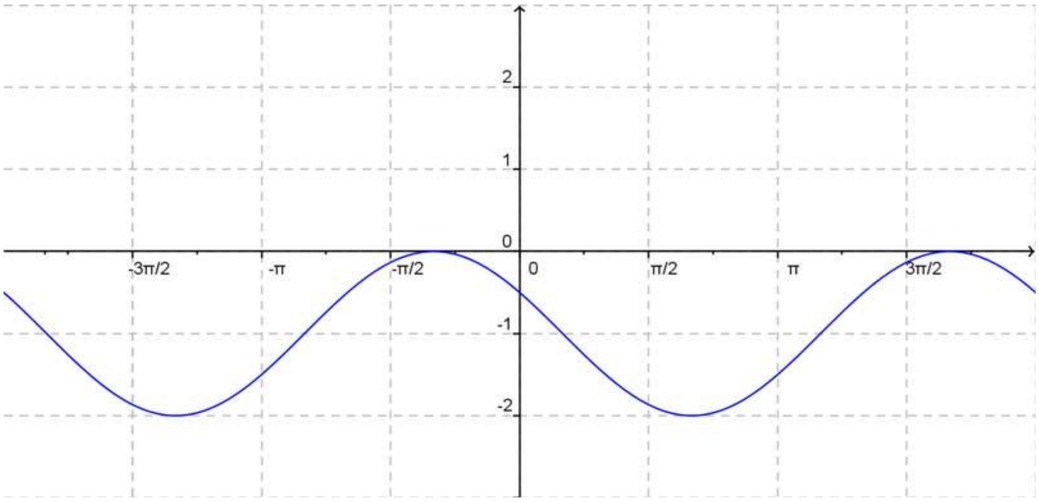
○$y = |\sin x| - \frac{1}{2}$
○$y = |\sin x - 1|$
○$y = |\sin x - \frac{1}{2}|$

c)



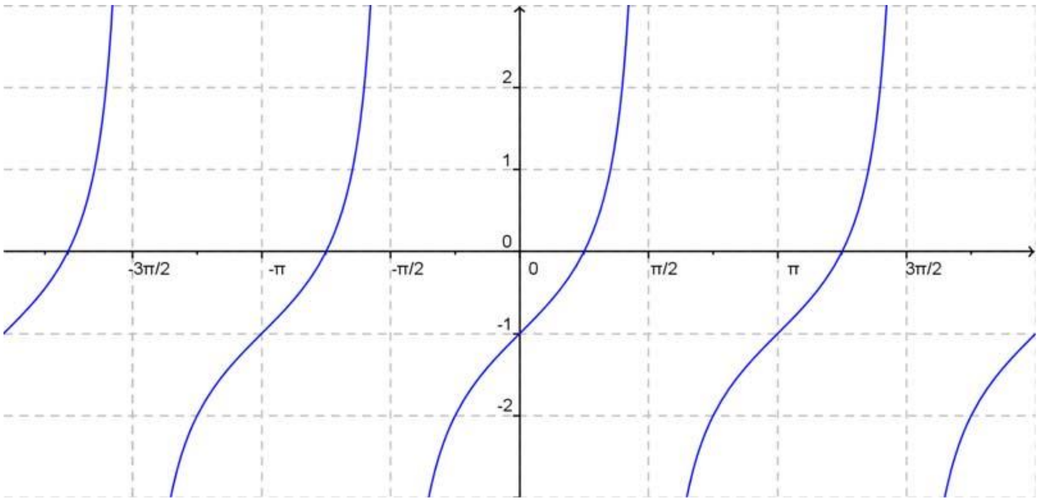
○$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
○$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
○$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

d)



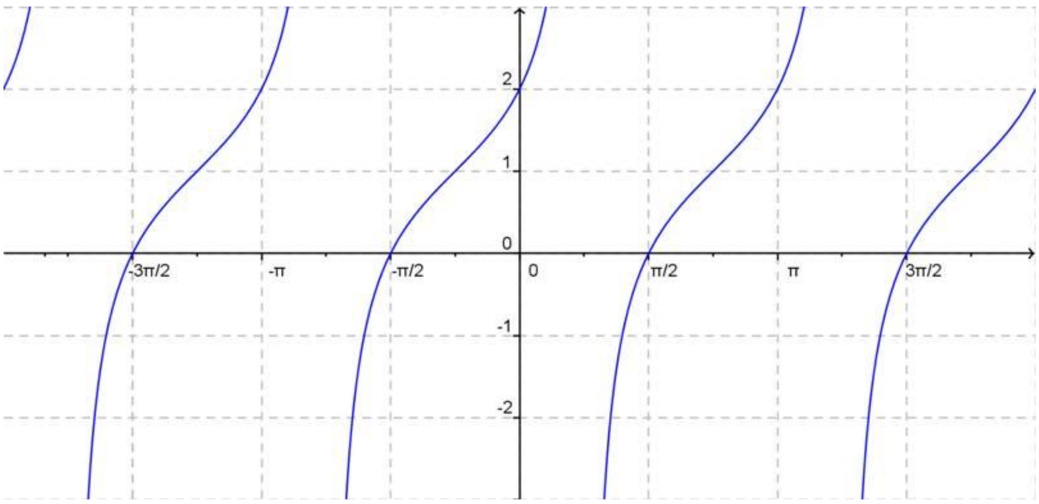
○$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$
○$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$
○$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$

e)



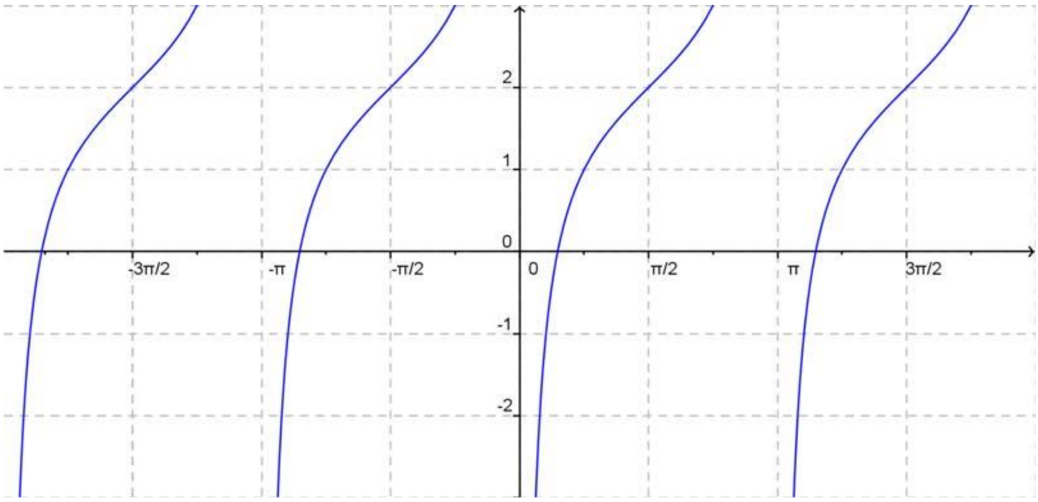
○$y = 2\text{tg}\,x - 1$
○$y = \text{tg}\,x - 1$
○$y = 2\text{tg}\,x$

f)



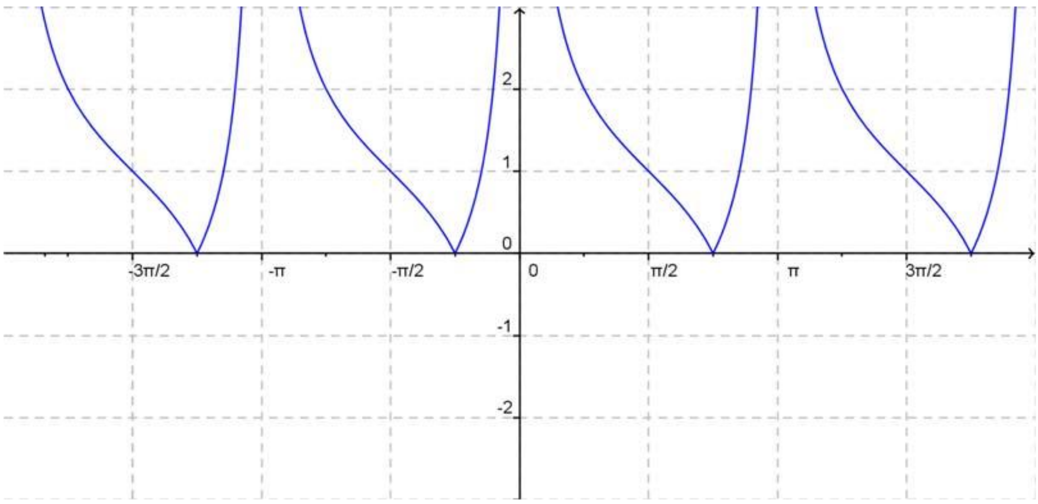
○$y = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
○$y = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$
○$y = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

g)



- $y = 1 - \operatorname{cotg} x$
- $y = 2 - \operatorname{cotg} x$
- $y = \operatorname{cotg} x$

h)



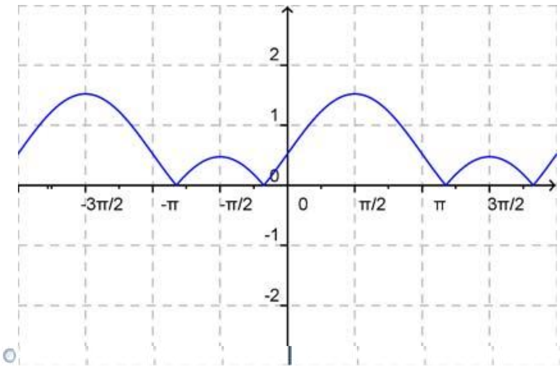
- $y = |\operatorname{cotg} x - 1|$
- $y = |\operatorname{cotg} x + 1|$
- $y = 2|\operatorname{cotg} x - 1|$

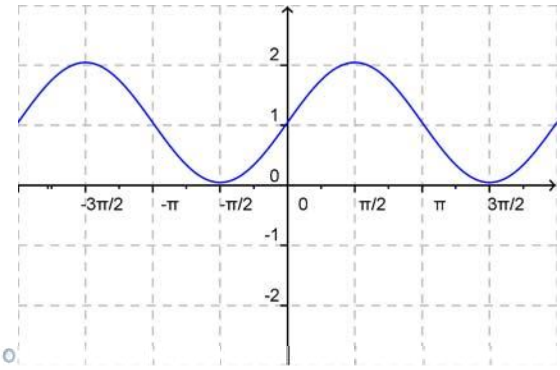
Úloha 6

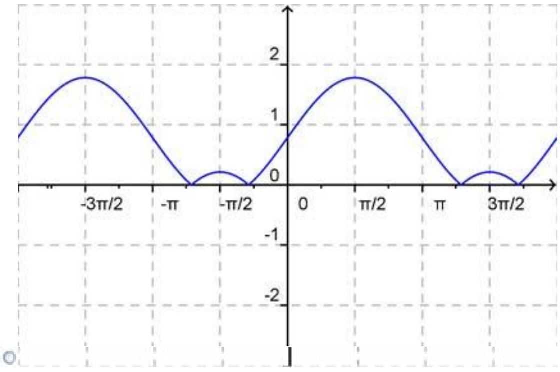
Zisti, ktorý graf odpovedá zadanému predpisu funkcie!

a)

$f(x) = |\sin x + \frac{\pi}{6}|$

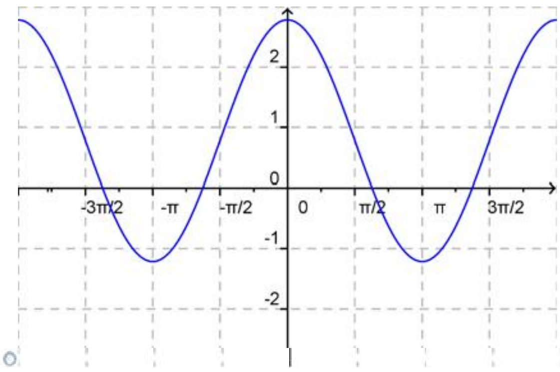


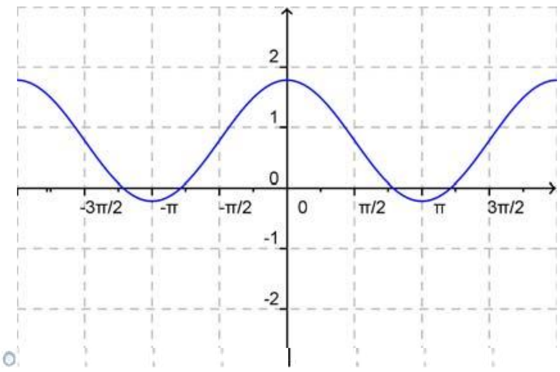


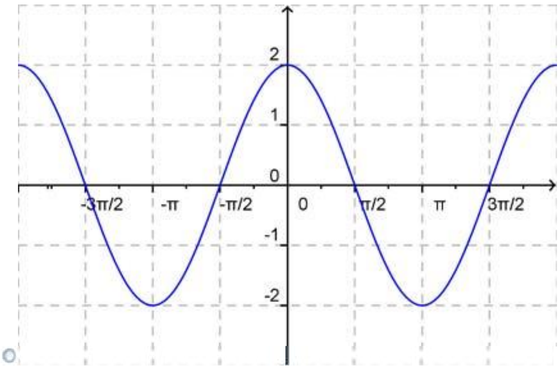


b)

$f(x) = 2\cos x + \frac{\pi}{4}$

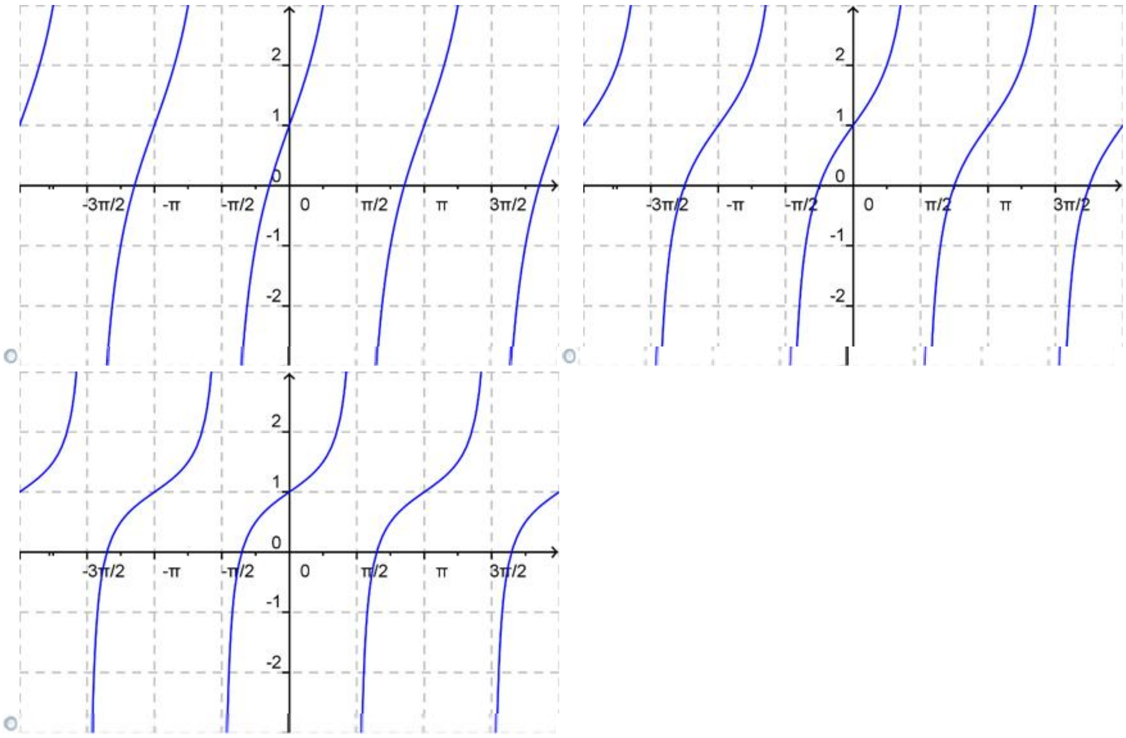






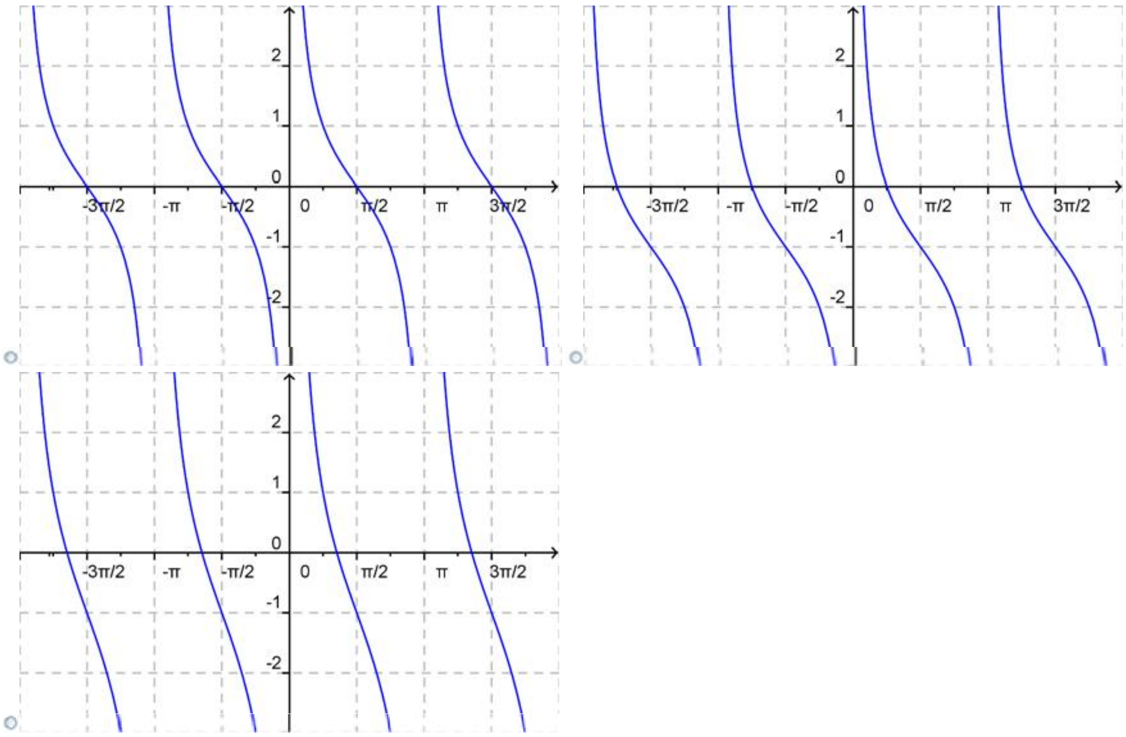
c)

$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\, x + 1$



d)

$f(x) = 2\cot g\,x - 1$



Cyklometrické funkcie

Úloha 1

Priraď správnu funkčnú hodnotu:

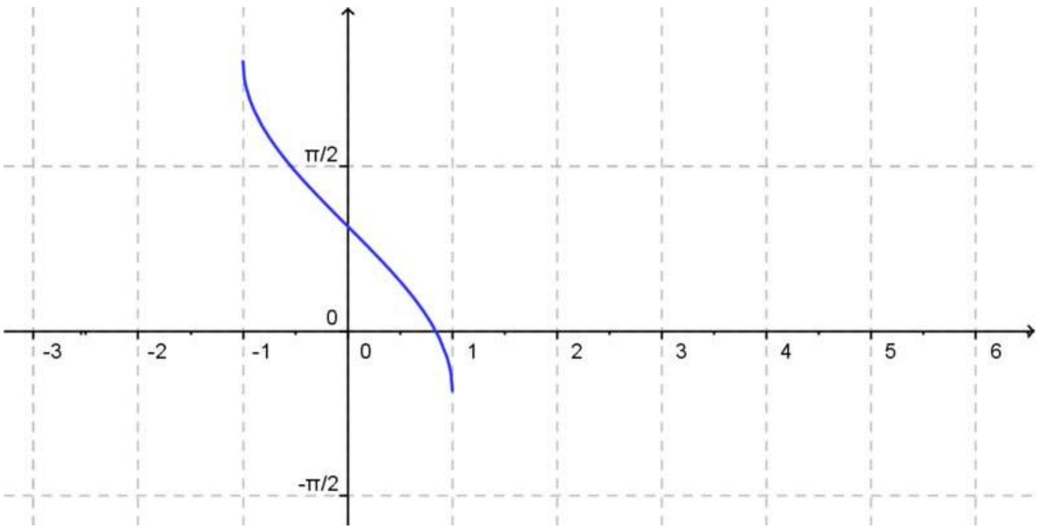
	A	B	C	D	E	F	G
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{4}$	π
a) $\text{arctg}\, 1$							
b) $\arcsin\, -1$							
c) $\arcsin \frac{1}{2}$							
d) $\arccos \frac{1}{2}$							
e) $\text{arccotg}\ 0$							
f) $\text{arctg}\ 0$							
h) $\arccos\ -1$							

nova

Úloha 2

Zisti predpis funkcie, ktorá je vykreslená na obrázku!

a)

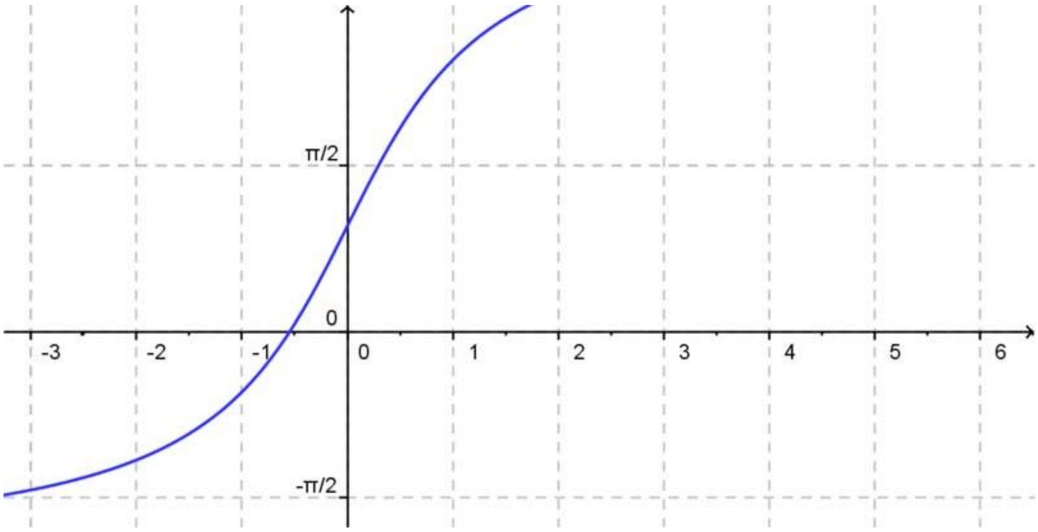


$y = -\arcsin x + 1$

$y = -\arccos x + 1$

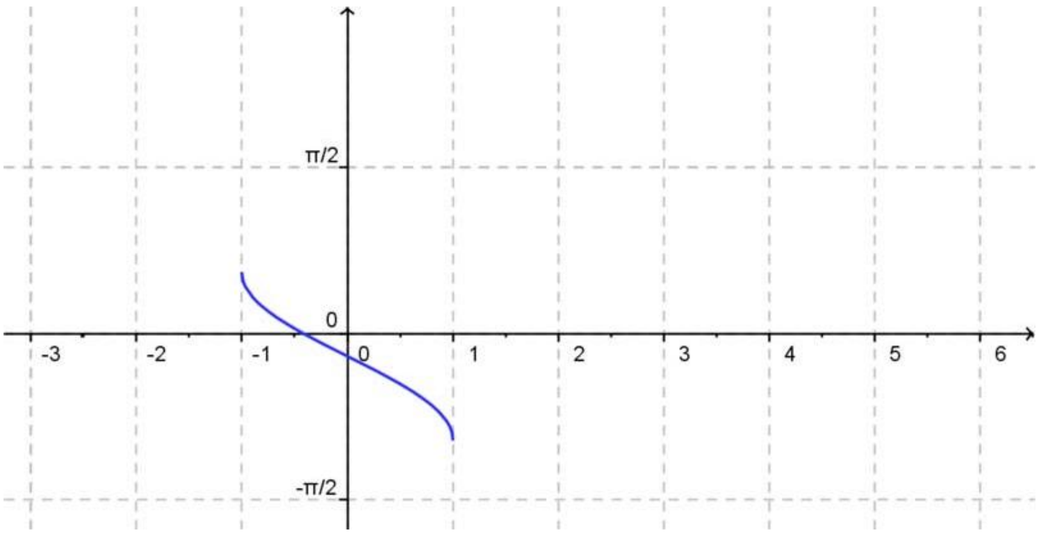
$y = \arccos x + 1$

b)



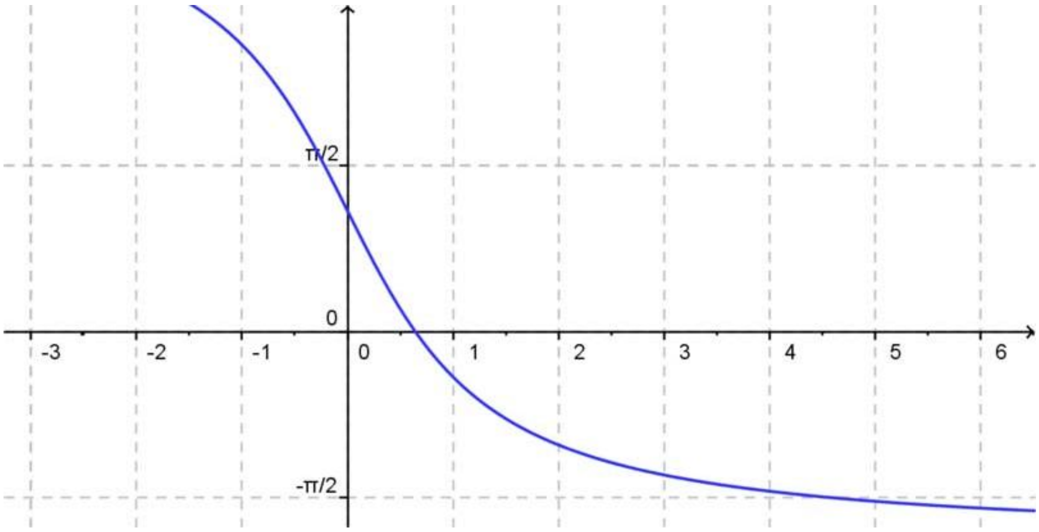
○$y = \operatorname{arctg} x - 1$
○$y = \operatorname{arctg} x + 1$
○$y = 2\operatorname{arctg} x + 1$

c)



○$y = \frac{1}{2} \arcsin x - 1$
○$y = \frac{1}{2} \arccos x - 1$
○$y = \arccos x - 1$

d)



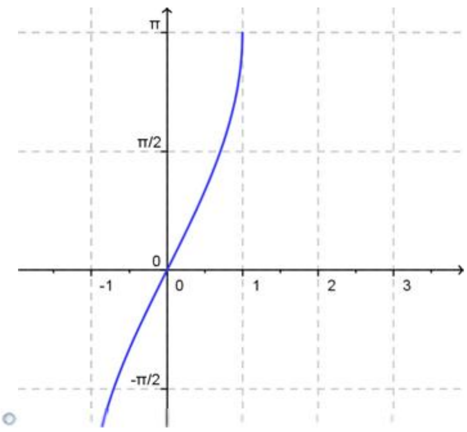
- $y = \operatorname{arctg} x - 1$
- $y = 2\operatorname{arccotg} x - 2$
- $y = 2\operatorname{arctg} x - 2$

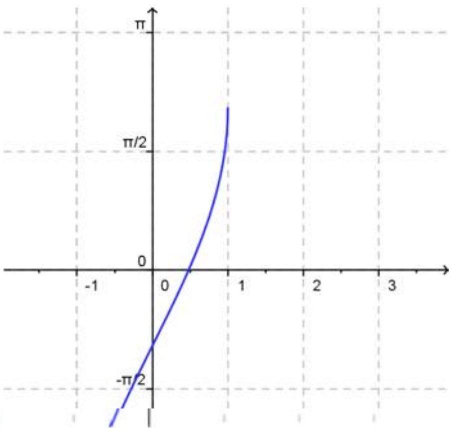
Úloha 3

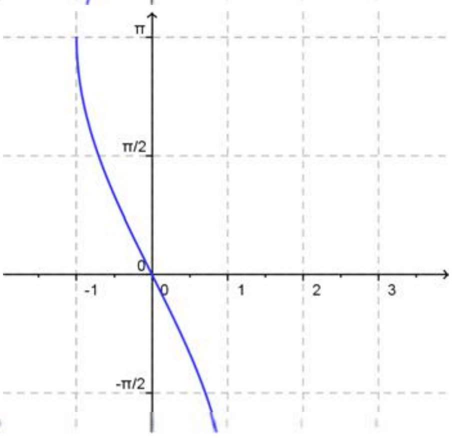
Zisti, ktorý graf odpovedá zadanému predpisu funkcie!

a)

$f(x) = 2\arcsin x$

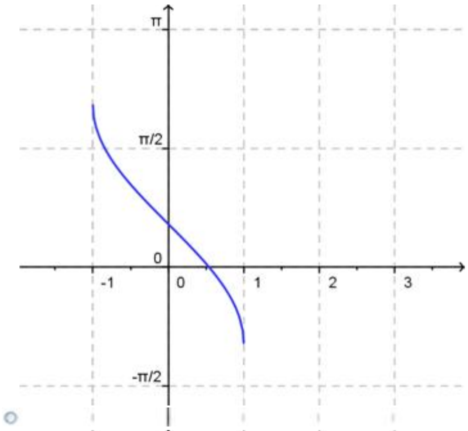


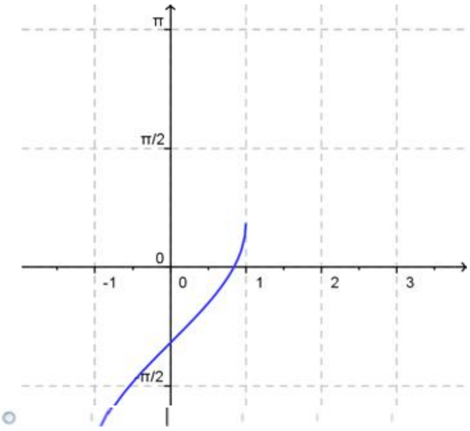


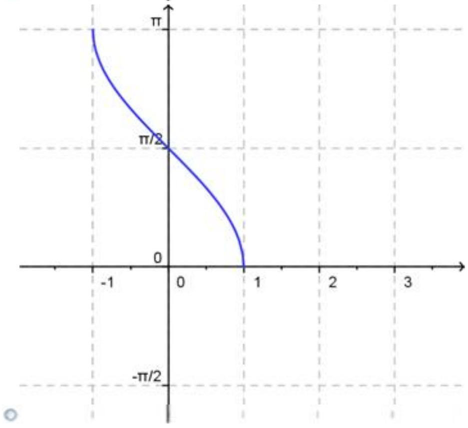


b)

$f(x) = \arccos x - 1$

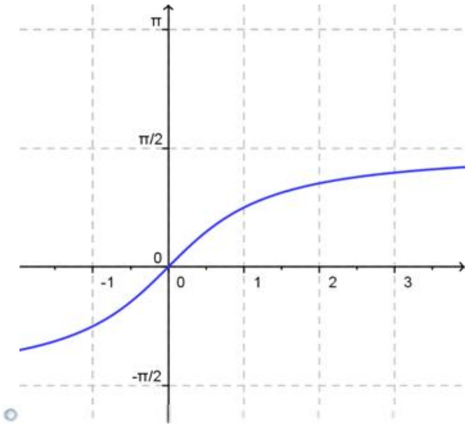


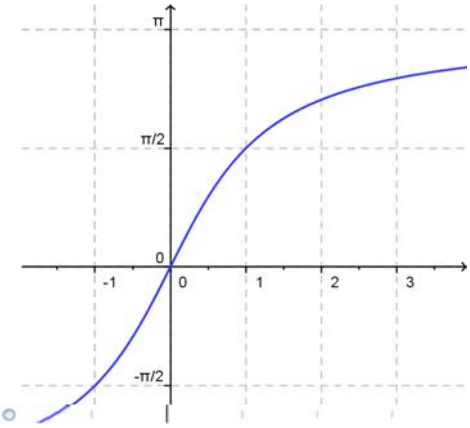


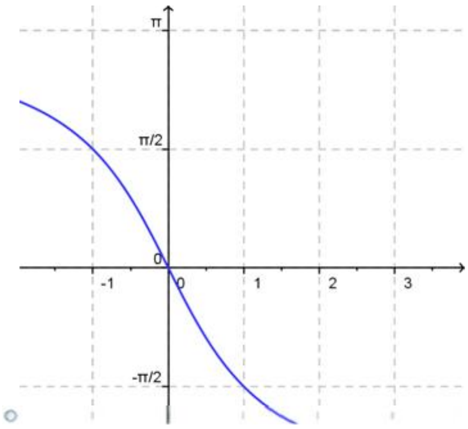


c)

$f(x) = -2\operatorname{arctg} x$

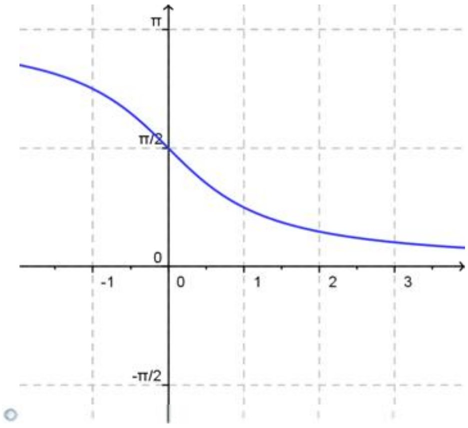


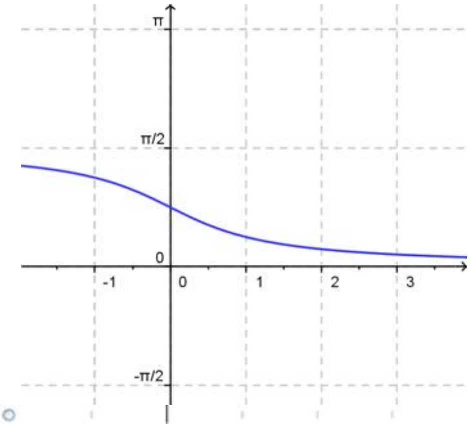


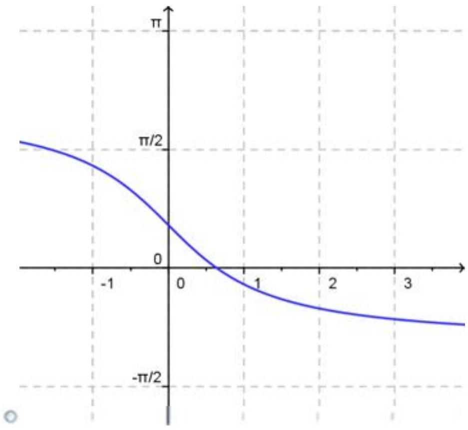


d)

$f(x) = \text{arccotg}\, x - 1$





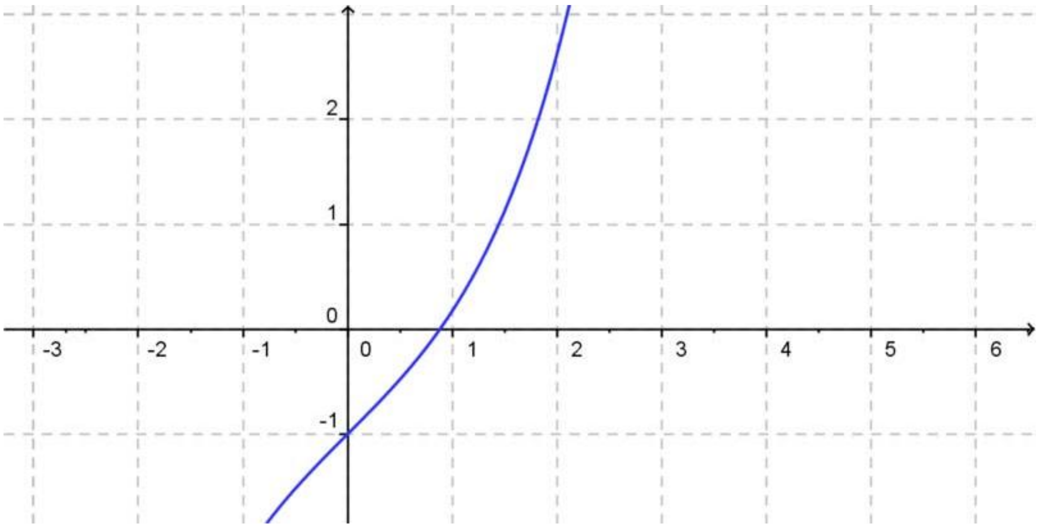


Hyperbolické funkcie

Úloha 1

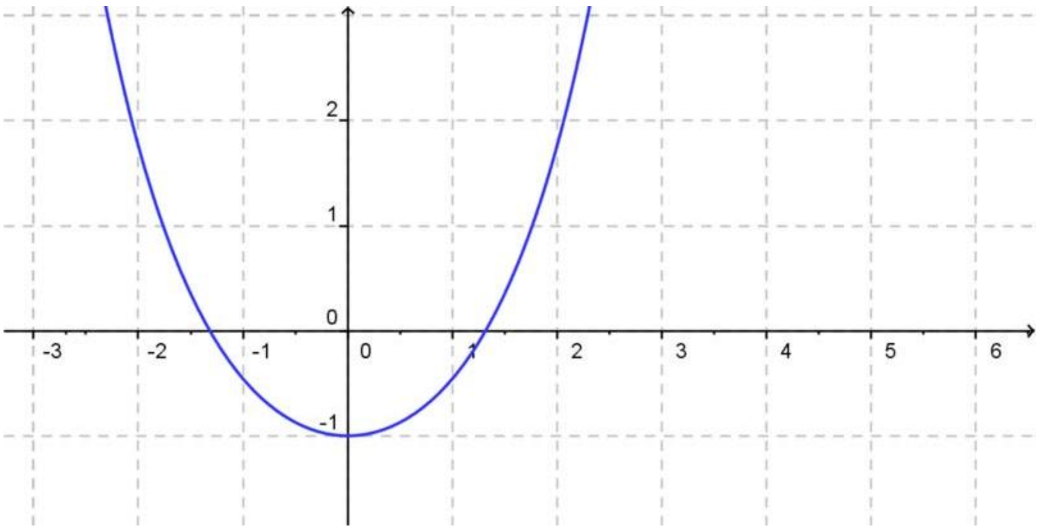
Zisti predpis funkcie, ktorá je vykreslená na obrázku!

a)



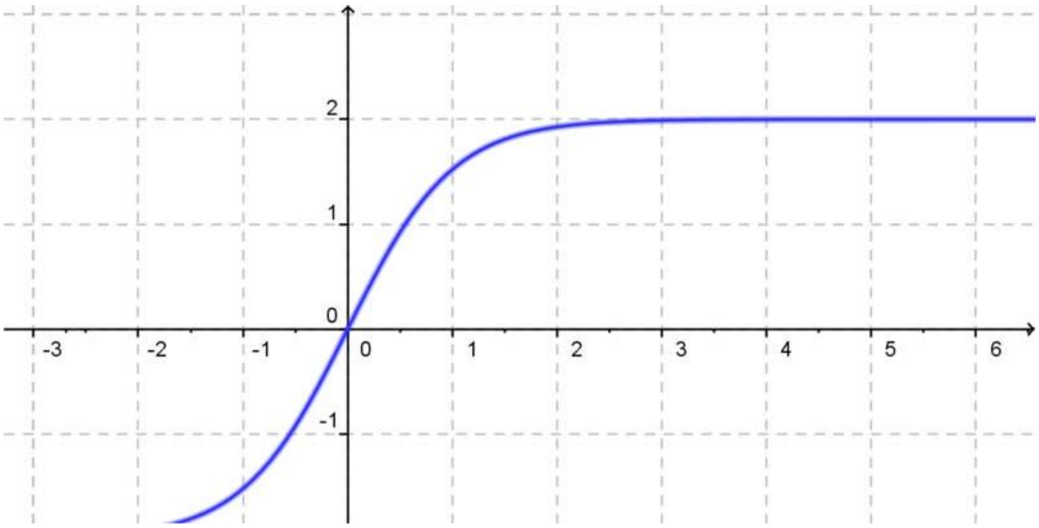
○ $y = \sinh x - 1$
○ $y = 2\sinh x - 1$
○ $y = 2\sinh x - 2$

b)



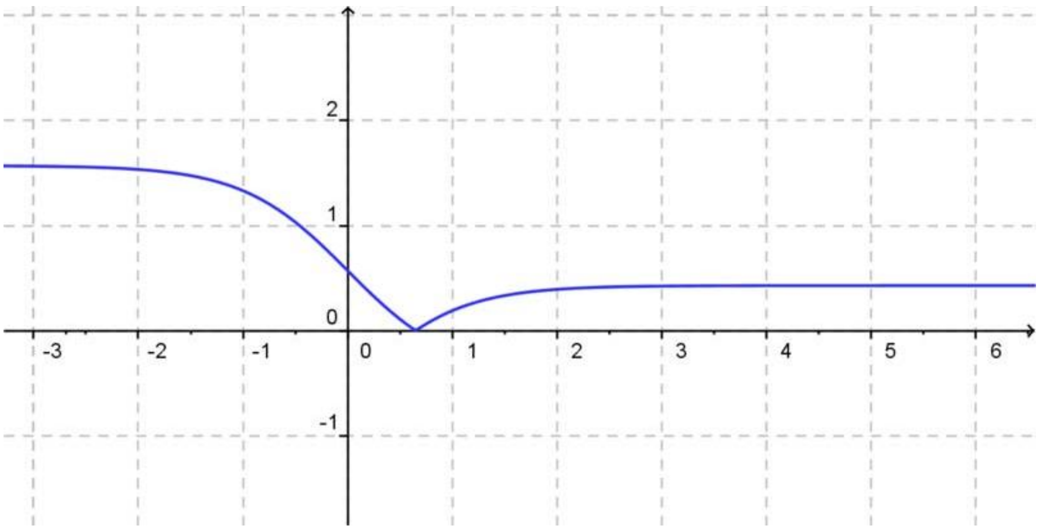
○ $y = \cosh x - 1$
○ $y = \frac{1}{2}\cosh x - 2$
○ $y = \cosh x - 2$

c)



○ $y = \operatorname{tgh} x - 1$
○ $y = 2\operatorname{tgh} x - 1$
○ $y = 2\operatorname{tgh} x$

d)



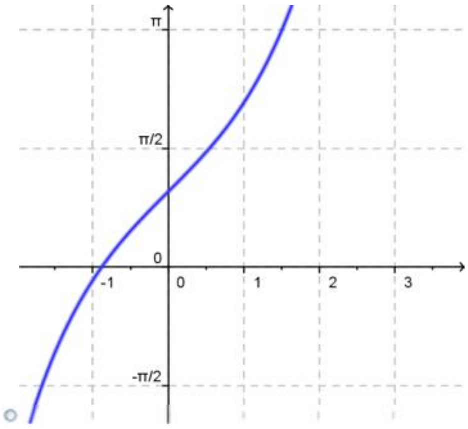
○ $y = |\operatorname{cotgh} x + 1|$
○ $y = |\operatorname{cotgh} x - 1|$
○ $y = |\operatorname{cotgh} x|$

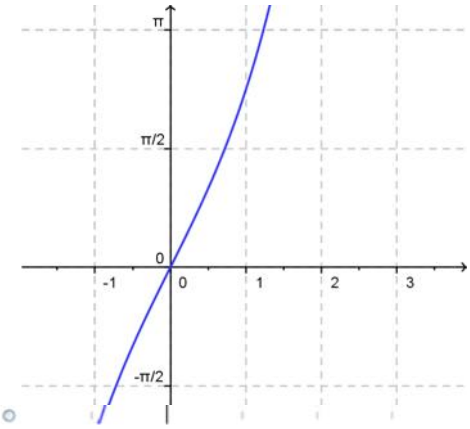
Úloha 2

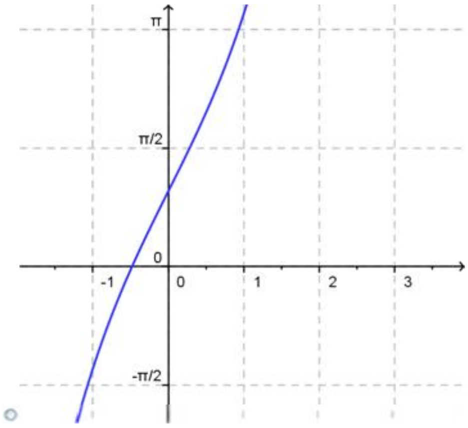
Zisti, ktorý graf odpovedá zadanému predpisu funkcie!

a)

$f(x) = \sinh x + 1$

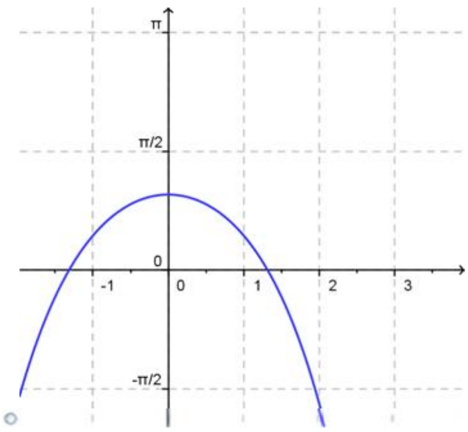

π
π/2
0
-1 0 1 2 3
-π/2

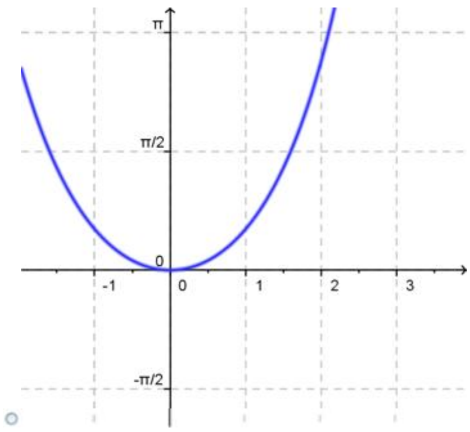

π
π/2
0
-1 0 1 2 3
-π/2

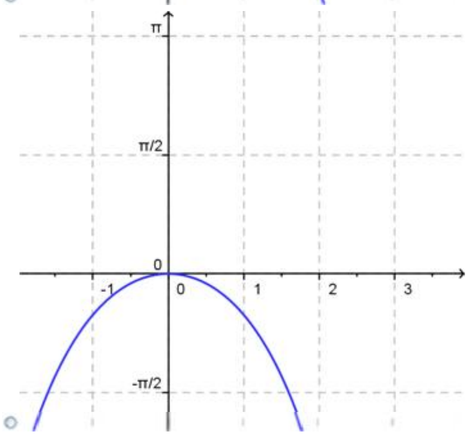

π
π/2
0
-1 0 1 2 3
-π/2

b)

$f(x) = -\cosh x + 2$

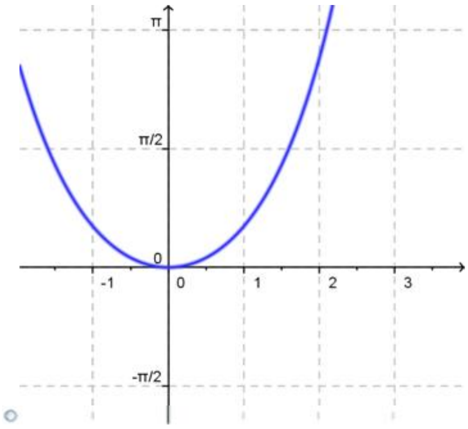

π
π/2
0
-1 0 1 2 3
-π/2

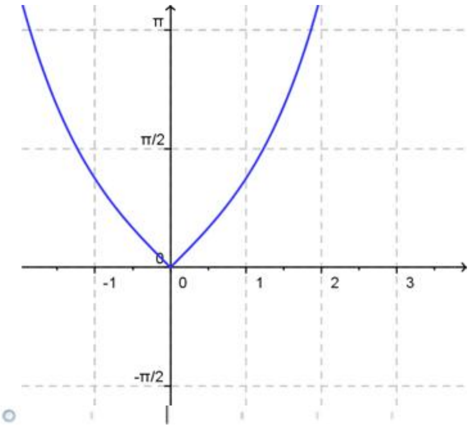

π
π/2
0
-1 0 1 2 3
-π/2

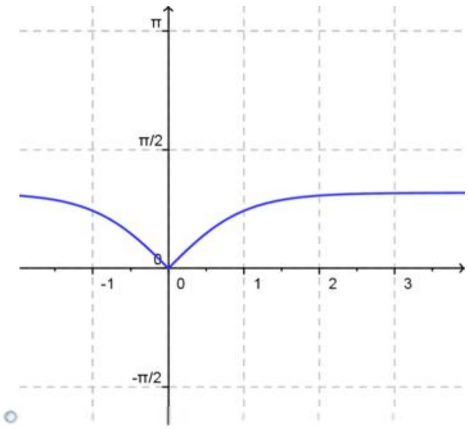

π
π/2
0
-1 0 1 2 3
-π/2

c)

$f(x) = |\text{tgh}\, x|$





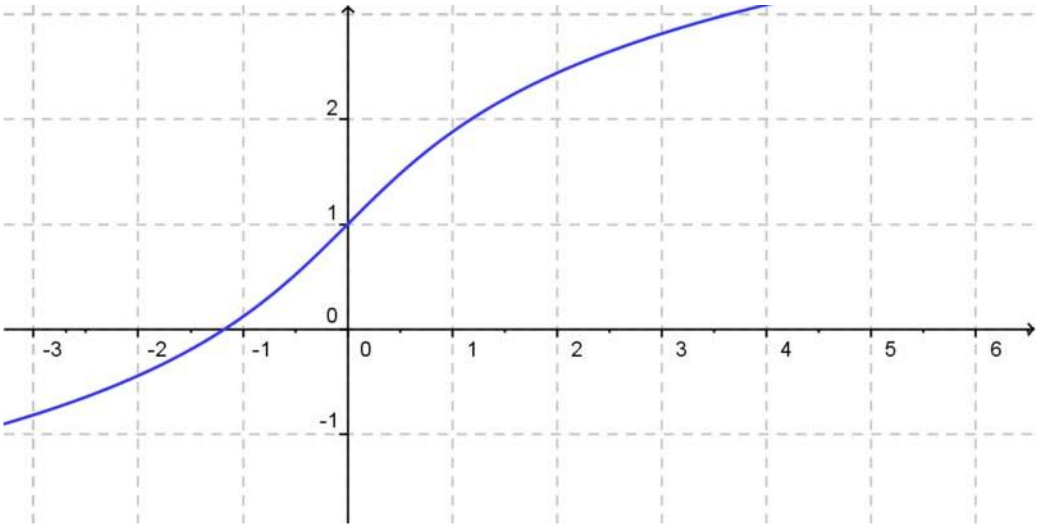


Hyperbolometrické funkcie

Úloha 1

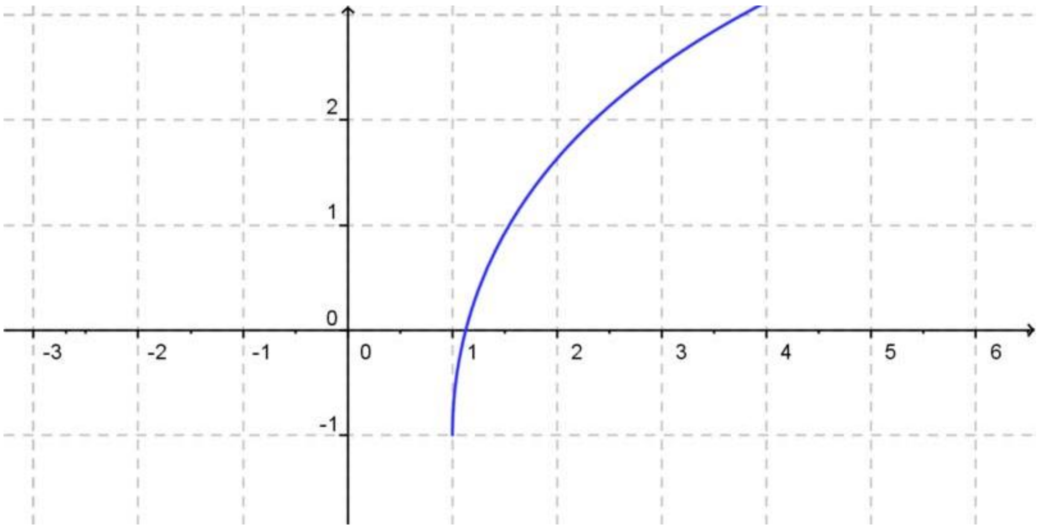
Zisti predpis funkcie, ktorá je vykreslená na obrázku!

a)



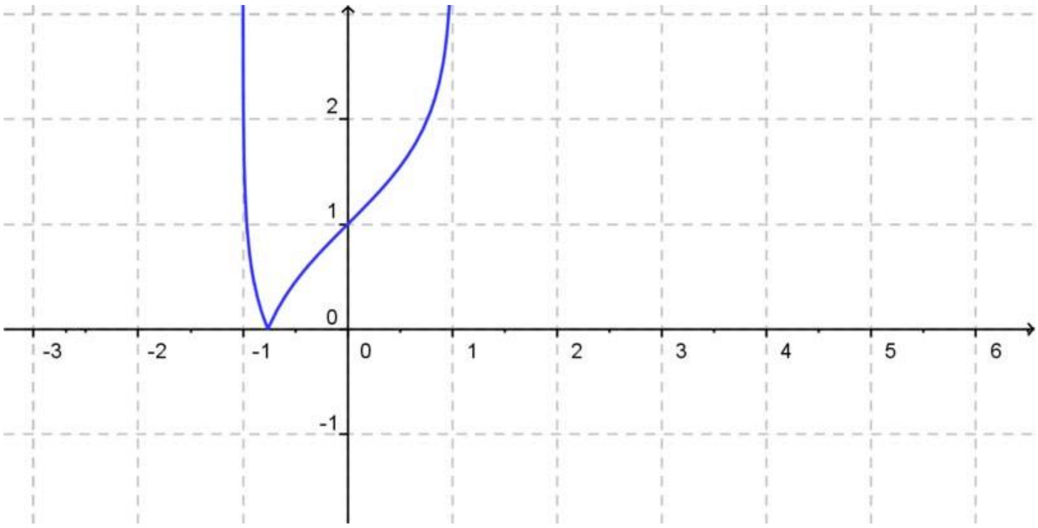
- ○ $y = \operatorname{argsinh} x + 1$
- ○ $y = \operatorname{argsinh} x$
- ○ $y = 2\operatorname{argsinh} x$

b)



- ○ $y = \operatorname{argcosh} x$
- ○ $y = 2\operatorname{argcosh} x$
- ○ $y = 2\operatorname{argcosh} x - 1$

c)



- $y = |\text{argtgh}\, x| + 1$
- $y = |\text{argtgh}\, x + 1|$
- $y = |\text{argtgh}\, x|$

Záver

Hlavným cieľom tejto práce bolo vytvorenie internetovej stránky, ktorá sa bude zaoberať výukou goniometrických rovníc a nerovníc. Súčasťou tejto práce je aj stručná charakteristika goniometrických a ďalších funkcií, ktorých znalosť je nutnou podmienkou k správnemu pochopeniu riešenia goniometrických rovníc a nerovníc. Na teoretickú časť je viazaná praktická časť, ktorá obsahuje veľké množstvo príkladov, či už vzorovo riešených alebo zobrazovaných pomocou krokov. Svoje nadobudnuté vedomosti si môže študenti preveriť v interaktívnych testoch s rôznou podobou. Táto webová aplikacia je voľne dostupná na internete, preto verím, že práve v dnešnej dobe bude žiakmi a učiteľmi dostatočne využívaná.

Vďaka tejto práci sa mi podarilo pochopiť okrem základných didaktických veci aj princip programovania webových stránok. Verím tomu, že táto získaná dovednosť mi bude užitočná aj v mojej budúcej pedagogickej praxi.

Literatúra

Zoznam použitej literatúry

[1] Bartsch H. J.(2000): *Matematické vzorce*. Mladá fronta, Praha.

[2] Kováčik J. a kol. (2006): *Řešené příklady z matematiky pro střední školy*. Aspi, Praha.

[3] Kubát J. (2004): *Sbirka úloh z matematiky pro přípravu k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus, Praha.

[4] Odvárko O. (1994): *Matematika pro gymnázia - goniometrie*. Prometheus, Praha.

[5] Partiková K. - Reiterová M. (2005): *Nová maturita - Matematika 1*. Príroda, Bratislava.

[6] Petáková J. (1998): *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus, Praha.

[7] Polák J. (1977): *Přehled středoškolské matematiky*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.

[8] Rektorys K. a spolupracovníci (2000): *Přehled užité matematiky I*. Prometheus, Praha.

Nakladanie s prácou

Súhlasím s vystavením svojej práce na webových stránkach Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Prahe. Ďalej súhlasím s jej neskoršími úpravami za účelom jej zapojenia do štruktúry matematického portálu, ktorý vznikne z tejto a podobných bakalárskych a diplomových práci. Portál vytvorí a bude spravovať práve a jedine Katedra didaktiky matematiky MFF UK, či osoba ňou poverená.

Matúš Kepič