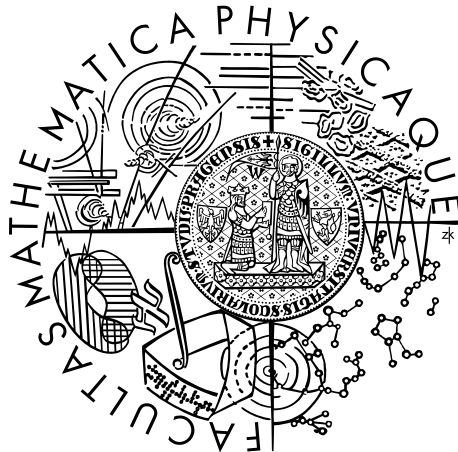


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jana Babováková

## Oscilace mechanických systémů s implicitními konstitutivními vztahy

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Numerická a výpočtová matematika

Praha 2012

Poděkování:

Chtěla bych v první řadě velmi poděkovat mému vedoucímu práce, jmenovitě **Doc. RNDr. Daliboru Pražákovi, Ph.D.**, za zajímavou volbu tématu a za jeho spolupráci, vlídnou pomoc, ochotu a trpělivost při zpracování celé práce. Dále bych chtěla poděkovat **Profesoru K. R. Rajagopalovi, Doctor honoris causa**, který nám velmi pomohl v začátcích naší práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Oscilace mechanických systémů s implicitními konstitutivními vztahy.

Autor: Jana Babováková

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.

Abstrakt: Studujeme soustavu diferenciálně-algebraických rovnic, které popisují pohyb oscilátoru sestávajícího z hmoty, pružiny a pístu pomocí tří různých tvarů implicitních konstitutivních vztahů. Pro některé úlohy s plně implicitními ale lineárními konstitutivními vztahy najdeme podmínky stability řešení. Za předpokladu monotónního vztahu mezi polohou, rychlostí a příslušnými silami, dokážeme globální existenci řešení. Pro lineární pružinu a píst s maximálně monotóním vztahem mezi tlumivou silou a rychlostí, dokážeme globální existenci a jednoznačnost řešení. Tuto úlohu řešíme také numericky pro tlumící člen Coulombova typu.

Klíčová slova: Coulombovo tření, Binghamova tekutina, diferenciálně-algebraické rovnice, implicitní konstitutivní vztahy, maximálně monotóní graf.

Title: Oscillations of mechanical systems with implicit constitutive relations.

Author: Jana Babováková

Department: Department of mathematical analysis

Supervisor: Doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.

Abstract: We study a system of differential-algebraic equations, describing motions of a mass-spring-dashpot oscillator by three different forms of implicit constitutive relations. For some problems with fully implicit but linear constitutive laws for combined force, we find conditions for solution stability. Assuming monotone relationship between the displacement, velocity and the respective forces, we prove global existence of the solutions. For a linear spring and a dashpot with maximal monotone relationship between the damping force and the velocity, we prove the global existence and uniqueness result. We also solve this problem numerically for Coulomb-like damping term.

Keywords: Coulomb friction, Bingham fluid, differential-algebraic equations, implicit constitutive relations, maximal monotone graph.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Lineární modely se smíšenou silou <math>F_V</math></b>	<b>4</b>
1.1 Hurwitzova věta . . . . .	4
1.2 Model obsahující $F_V, \dot{F}_V, x$ a $\dot{x}$ . . . . .	6
1.3 Model obsahující $F_V, \dot{F}_V, \ddot{F}_V, x$ a $\dot{x}$ . . . . .	6
1.4 Model obsahující $F_V, \dot{F}_V, \ddot{F}_V, x, \dot{x}$ a $\ddot{x}$ . . . . .	8
<b>2 Mechanické oscilátory s implicitními vztahy</b>	<b>9</b>
2.1 Formulace úlohy . . . . .	9
2.2 Obecný výsledek o existenci . . . . .	10
2.2.1 Jednoznačnost řešení autonomní úlohy . . . . .	17
<b>3 Mechanické oscilátory s plně implicitním tlumením</b>	<b>18</b>
3.1 Příprava . . . . .	18
3.2 Hlavní výsledky . . . . .	21
<b>4 Analýza konkrétních modelů</b>	<b>26</b>
4.1 Sestavení numerického algoritmu . . . . .	26
4.2 Numerické výsledky . . . . .	29
<b>Závěr</b>	<b>32</b>
<b>Použitá tvrzení a definice</b>	<b>33</b>
<b>Literatura</b>	<b>35</b>

# Úvod

Tématem práce jsou oscilace mechanických soustav s implicitními konstitutivními vztahy, tj. vztahy popisující silové působení uvnitř soustavy v závislosti na kinematických proměnných. Mechanická soustava je většinou realizována jako soustava prvků, v nejjednodušším případě jde o kombinované zapojení pružin a tlumičů. Tlumič (píst) zde reprezentuje prvek, který disipuje energii a pružina prvek, který energii konzervuje. Tradičním způsobem získáme popis chování soustavy např. z rovnováhy sil působících uvnitř soustavy. Pohybová rovnice má pak tvar

$$m\ddot{x} = F(t) - F_s - F_d. \quad (1)$$

Síly  $F_s$  a  $F_d$ , které popisují působení pružin a pístů soustavy závisí na kinematických veličinách, jako např. na poloze a rychlosti. V běžném případě umíme působící síly  $F_s$  a  $F_d$  popsat jako funkce kinematických veličin  $x, \dot{x}$ , tj. platí

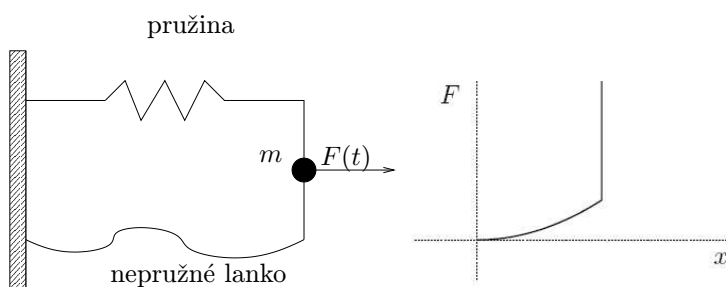
$$F_s = \hat{f}(x), \quad F_d = \hat{g}(\dot{x}). \quad (2)$$

Pak lze vztahy (2) dosadit do (1) a získáme jednu pohybovou diferenciální rovnici, kterou lze vyřešit díky vhodné volbě počátečních podmínek  $x(0), \dot{x}(0)$ .

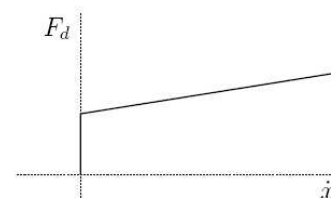
Může se ale stát, že toto nebudeme moci provést. Například pro prvek sestávající z pružiny a nepružného lanka zapojeného paralelně, nelze působení síly  $F_s$  popsat jako funkci polohy  $x$ , ale lze naopak popsat polohu  $x$  jako funkci působící síly  $F_s$  (viz Obrázek 1). V případě tlumícího prvku se lze často v praxi setkat s takovým prvkem, kde reakce tohoto členu odpovídá chování tzv. Binghamovy tekutiny, jejíž odezva na silové působení je znázorněna na Obrázku 2. Působení tlumivé síly  $F_d$  tedy nelze popsat jako funkci rychlosti  $\dot{x}$ , ale naopak lze popsat rychlost  $\dot{x}$  jako funkci tlumivé síly  $F_d$ . Tento přístup v popisu mechanického systému se zdá být fyzikálně přirozenější, neboť již první Newtonův zákon říká, že síla je příčinou a pohyb následkem. Celkem tedy dostáváme popis

$$x = f(F_s), \quad \dot{x} = g(F_d). \quad (3)$$

Jelikož pak nelze dosadit (3) do (1) a řešit pak jednu pohybovou diferenciální rovnici, jsme nuceni řešit tyto rovnice zároveň. Tímto řešíme soustavu tzv.



Obrázek 1: Soustava sestávající z hmotného bodu a paralelního zapojení pružiny a nepružného lanka (vlevo). Příslušný graf závislosti působící síly na poloze (vpravo).



Obrázek 2: Graf závislosti působící síly na rychlosti pro tlumič Binghamova typu.

diferenciálně-algebraických rovnic. Takovým systémem, kde jsou působící síly  $F_s, F_d$  zadány jako funkce kinematických veličin  $x, \dot{x}$ , se budeme zabývat v kapitole 2.

V technické praxi se navíc objevují i takové prvky, kdy působící síly  $F_s$  či  $F_d$  nelze vyjádřit jako funkce kinematických proměnných  $x, \dot{x}$ , ale ani kinematické proměnné jako funkce působících sil. Máme tedy konstitutivní vztahy tvaru

$$\tilde{f}(F_s, x) = 0, \quad \tilde{g}(F_d, \dot{x}) = 0.$$

Příkladem takového působení je prvek realizující tzv. Coulombovské tření, kde pro nulovou hodnotu rychlosti  $\dot{x}$  může síla  $F_d$  nabývat libovolné hodnoty  $-\phi \leq F_d \leq \phi$ , a pro nenulovou rychlost  $\dot{x} \neq 0$  je působící síla konstantní. Úlohou s takovýmto prvkem se budeme zabývat v kapitole 3 a 4.

Nakonec může dokonce nastat situace, kdy nemůžeme působící síly v soustavě rozdělit na prvky realizované pružinami a tlumiči. Úloha může být také složitější v tom, že uvažujeme i vyšší časové derivace sil a polohy. Pak může mít konstitutivní vztah např. tvar

$$h_i(\dot{f}_i, f_i, x, \dot{x}) = 0, \tag{4}$$

kde  $f_i$  je síla působící v  $i$ -tém prvku. Tato závislost (4) může být opět plně implicitní. Příkladem takového prvku je tzv. Maxwellův prvek, který koresponduje se vztahem tvaru  $\dot{x} = \alpha f + \beta \dot{f}$ . Tímto případem pro jednoduché lineární tvary funkce  $h$  se budeme zabývat v kapitole 1, kde se podíváme na problém stability řešení takových úloh.

V dalších kapitolách se budeme zabývat nejjednodušším tvarem mechanické soustavy sestávající pouze z jednoho oscilátoru (pružiny) a tlumiče (pístu) zapojenými paralelně. Síly jež popisují působení těchto prvků jsou zadány implicitně.

V kapitole 2 můžeme vyjádřit jednotlivé kinematické veličiny  $x, \dot{x}$  jako funkce působících sil  $F_s, F_d$ , ale na naopak, viz (3). Pro takovou úlohu dokážeme existenci jejího řešení pro funkce  $f, g$  monotónní. Jednoznačnost takové úlohy je pak dokázána v článku [1] pro dodatečné požadavky na  $f, g$ . Celá kapitola 2 je převzatá část článku [1], kde jsme v důkazech doplnili podrobné výpočty a na konci důkazu existence řešení je doplněn limitní přechod pro aproximativní úlohu.

V kapitole 3 a 4 se zabýváme úlohou, kde je působení pružiny popsáno standardním způsobem  $F_s = kx$ , ale působící síla tlumiče je plně implicitní. V našem případě jsme zvolili působení síly  $F_d$  Coulombova typu a navíc jsme přidali relaxační funkci. Dokážeme existenci a jednoznačnost řešení takové úlohy, kde obecně požadujeme maximálně monotónní vztah mezi tlumivou silou  $F_d$  a rychlostí  $\dot{x}$ . Kapitola 3 je zčásti převzatá z článku [2], kde jsme ale provedli zásadní změny v důkazu existence. Převzatá část textu je opět rozšířena o podrobnější výpočty.

V kapitole 4 se na výše uvedené úlohu s Coulombovským třením podíváme numericky. Nejprve sestavíme algoritmus výpočtu řešení úlohy a pak vykreslíme některá řešení. Při sestavování numerického algoritmu jsme se inspirovali článkem [3], kde byla řešena podobná jednodušší úloha.

# 1. Lineární modely se smíšenou silou $F_V$

Podíváme se na skupinu modelů tvaru:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} + F_V &= F(t), \\ f_V(x, \dot{x}, F_V, \dot{F}_V) &= 0, \end{aligned}} \quad (\text{FS})$$

kde síla  $F_V$  popisuje reakci materiálu na působení vnější síly  $F(t)$  a je zadána implicitně pomocí funkce  $f_V$ . Nerozlišujeme zde mezi pružnou a tlumící silou, tj. mezi  $F_s$  a  $F_d$ , nýbrž uvažujeme jednu smíšenou sílu  $F_V$ , která obě síly zahrnuje. Působení síly  $F_V$  může být složitější než standardní  $F_V = F_s + F_d$ . Funkce  $f_V$  je konstitutivním vztahem, který popisuje závislost mezi kinematickými proměnnými  $x, \dot{x}$  a dynamickými proměnnými  $F_V, \dot{F}_V$ .

Prvním úkolem je prozkoumání různých lineárních tvarů funkce  $f_V$  z pohledu stability řešení úlohy (FS) bez vlivu vnějšího působení. Zajímavé je, že takový systém může být nestabilní pro některé hodnoty parametrů modelu. Pro charakterizaci podmínek nestability lze užít Hurwitzovy věty (viz dále). Je otázkou, zda je tato nestabilita očekávaná vzhledem ke zkušenostem z technické praxe. Další možností je, že tyto lineární úlohy jsou pouze aproximací prvního řádu, kdy reálný problém je stabilní díky přítomnosti členů vyššího řádu (které jsou důležité pouze pro velké hodnoty  $x, F_V$ , atd.).

## 1.1 Hurwitzova věta

Při vyšetřování stability řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (dále jen ODR) je potřeba určit znaménka reálných částí vlastních čísel matice soustavy ODR popisující daný problém (viz standardní teorie ODR). To vede na problém vyšetření reálných částí kořenů příslušného charakteristického polynomu. K tomuto dobře slouží následující věta.

**Definice 1.1.** *Polynom  $p(\lambda)$  nazveme Hurwitzovský, jestliže reálné části všech jeho kořenů jsou striktně záporné.*

**Věta 1.1** (Hurwitz). *Polynom*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (1.1)$$

*je Hurwitzovský, právě když všechny hlavní subdeterminanty matice*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-1} & a_{2n-1} & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

*jsou kladné. Proky matice jsou  $A_{ij} = a_{2i-j}$ , kde  $a_k = 0$  pro  $k \notin \{0, 1, \dots, n\}$ .*

Pro naše výpočty budou užitečné konkrétní tvary vyplývající z podmínek pro konkrétní stupně polynomu (1.1). Půjde o následující důsledky Věty 1.1.



**Důsledek 1.1.** *Polynom stupně  $n = 3$ , čili*

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \quad (1.3)$$

*je Hurwitzovský, právě tehdy když*

$$a_1 > 0, \quad a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \quad a_3 > 0. \quad (1.4)$$

Příslušná matice (1.2) pro  $n = 3$  je

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

a její hlavní subdeterminanty:

$$|a_1| > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0.$$

**Důsledek 1.2.** *Polynom stupně  $n = 4$ , čili*

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 \quad (1.6)$$

*je Hurwitzovský, právě tehdy když*

$$a_1 > 0, \quad a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \quad a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 > 0, \quad a_4 > 0, \quad (1.7)$$

Příslušná matice (1.2) pro  $n = 4$  je

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

a její hlavní subdeterminanty:

$$|a_1| > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0.$$

## 1.2 Model obsahující $F_V, \dot{F}_V, x$ a $\dot{x}$

Předpokládáme-li konstitutivní vztah  $f_V$  ve tvaru

$$\boxed{F_V + \lambda \dot{F}_V = \mu_1 x + \mu_2 \dot{x}},$$

můžeme úlohu (FS) přepsat jako soustavu lineárních ODR s konstantními koeficienty:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{m}F_V + \frac{1}{m}F(t), \\ \dot{F}_V = \frac{\mu_1}{\lambda}x + \frac{\mu_2}{\lambda}y - \frac{1}{\lambda}F_V. \end{cases} \quad (1.9)$$

Máme globální existenci a jednoznačnost řešení (1.9) pro dané počáteční podmínky  $x, \dot{x}, F_V$  a  $F(t) = 0$ . Příslušná matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m} \\ \frac{\mu_1}{\lambda} & \frac{\mu_2}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

a její charakteristický polynom

$$p(z) = \lambda m z^3 + m z^2 + \mu_2 z + \mu_1.$$

Použijeme Důsledek 1.1 Hurwitzovy věty, kde příslušné koeficienty polynomu (1.3) jsou

$$a_0 = \lambda m, \quad a_1 = m, \quad a_2 = \mu_2, \quad a_3 = \mu_1.$$

Odpovídající matice (1.5) pro aplikaci Hurwitzovy věty je:

$$\begin{pmatrix} m & \lambda m & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & m \\ 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}$$

Dosazením do vztahů (1.4) dostáváme podmínky stability řešení (1.9):

$$m > 0, \quad m(\mu_2 - \lambda\mu_1) > 0, \quad \mu_1 > 0.$$

Jestliže považujeme všechny koeficienty (1.9) za kladné, pak je řešení soustavy stabilní právě tehdy když

$$\boxed{\mu_2 - \lambda\mu_1 > 0}. \quad (1.10)$$

## 1.3 Model obsahující $F_V, \dot{F}_V, \ddot{F}_V, x$ a $\dot{x}$

Předpokládáme-li konstitutivní vztah  $f_V$  ve tvaru

$$\boxed{F_V + \lambda_1 \dot{F}_V + \lambda_2 \ddot{F}_V = \mu_1 x + \mu_2 \dot{x}},$$

můžeme úlohu (FS) přepsat jako soustavu lineárních ODR s konstantními koeficienty:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{m}F_V + \frac{1}{m}F(t), \\ \dot{F}_V = G_V, \\ \dot{G}_V = \frac{\mu_1}{\lambda_2}x + \frac{\mu_2}{\lambda_2}y - \frac{1}{\lambda_2}F_V - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}G_V. \end{cases} \quad (1.11)$$

Opět máme globální existenci a jednoznačnost řešení (1.11), též pro dané počáteční podmínky  $x, \dot{x}, F_V, \dot{F}_V$  a  $F(t) = 0$ . Příslušná matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\mu_1}{\lambda_2} & \frac{\mu_2}{\lambda_2} & -\frac{1}{\lambda_2} & -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

a její charakteristický polynom

$$p(z) = \lambda_2 m z^4 + \lambda_1 m z^3 + m z^2 + \mu_2 z + \mu_1.$$

Použijeme Důsledek 1.2 Hurwitzovy věty, kde příslušné koeficienty polynomu (1.6) jsou

$$a_0 = \lambda_2 m, \quad a_1 = \lambda_1 m, \quad a_2 = m, \quad a_3 = \mu_2, \quad a_4 = \mu_1.$$

Odpovídající matice (1.8) pro aplikaci Hurwitzovy věty je:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 m & \lambda_2 m & 0 & 0 \\ \mu_2 & m & \lambda_1 m & \lambda_2 m \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & m \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}$$

Dosazením do vztahů (1.7) dostáváme podmínky stability řešení (1.11):

$$\lambda_1 m > 0, \quad m(\lambda_1 m - \lambda_2 \mu_2) > 0, \quad m(\lambda_1 m(\mu_2 - \lambda_1 \mu_1) - \lambda_2 \mu_2^2) > 0, \quad \mu_1 > 0.$$

Pokud považujeme všechny koeficienty soustavy (1.11) za kladné, pak dostáváme pouze podmínky

$$\lambda_1 m - \lambda_2 \mu_2 > 0, \quad \lambda_1 m(\mu_2 - \lambda_1 \mu_1) - \lambda_2 \mu_2^2 > 0.$$

Po malé úpravě druhého z těchto výrazů získáme vztah

$$\mu_2(\lambda_1 m - \lambda_2 \mu_2) > \lambda_1^2 \mu_1 m,$$

který v sobě zahrnuje i první nerovnost. Pro porovnání s výsledky v předchozím příkladě použijeme původní tvar podmínky

$$\boxed{\lambda_1 m(\mu_2 - \lambda_1 \mu_1) > \lambda_2 \mu_2^2}. \quad (1.12)$$

Tímto jsme získali nutnou a postačující podmínku stability řešení soustavy (1.11). Všimněme si, že tato podmínka je silnější než podmínka (1.10).

## 1.4 Model obsahující $F_V, \dot{F}_V, \ddot{F}_V, x, \dot{x}$ a $\ddot{x}$

Uvažujeme konstitutivní vztah pro  $F_V$  ve tvaru

$$\boxed{F_V + \lambda_1 \dot{F}_V + \lambda_2 \ddot{F}_V = \mu_1 x + \mu_2 \dot{x} + \mu_3 \ddot{x}}.$$

Pomocí zavedení nové proměnné  $G$  a  $y$  tak, že  $G = \dot{F}_V$  a  $y = \dot{x}$  můžeme úlohu (FS) přepsat na soustavu lineárních ODR (pro případ  $F(t) = 0$ )

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{m}F_V, \\ \dot{F}_V = G_V, \\ \dot{G}_V = \frac{1}{\lambda_2} [\mu_1 x + \mu_2 y - \mu_3 \frac{F_V}{m} - F_V - \lambda_1 G]. \end{cases} \quad (1.13)$$

Příslušná matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\mu_1}{\lambda_2} & \frac{\mu_2}{\lambda_2} & -\frac{\mu_3}{\lambda_2 m} - \frac{1}{\lambda_2} & -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

a její charakteristický polynom

$$p(z) = \lambda_2 m z^4 + \lambda_1 m z^3 + (m + \mu_3) z^2 + \mu_2 z + \mu_1.$$

Pro získání podmínek stability řešení (1.13) použijeme Důsledek 1.2 Věty 1.1, kde příslušné koeficienty polynomu (1.6) jsou

$$a_0 = \lambda_2 m, \quad a_1 = \lambda_1 m, \quad a_2 = m + \mu_3, \quad a_3 = \mu_2, \quad a_4 = \mu_1.$$

Odpovídající matice (1.8) pro aplikaci Hurwitzovy věty je:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 m & \lambda_2 m & 0 & 0 \\ \mu_2 & m + \mu_3 & \lambda_1 m & \lambda_2 m \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & m + \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}$$

Dosazením do vztahů (1.7) dostáváme podmínky stability řešení (1.11):

$$\lambda_1 m > 0, \quad m \lambda_1 (m + \mu_3) - m \lambda_2 \mu_2 > 0, \quad m \lambda_1 [(m + \mu_3) \mu_2 - m \lambda_1 \mu_1] - m \lambda_2 \mu_2^2 > 0, \quad \mu_1 > 0.$$

Všechny koeficienty soustavy (1.13) považujeme za kladné. Zabýváme se tedy pouze prostředními dvěma nerovnostmi. Třetí nerovnost lze upravit do tvaru, z něhož je zřejmé obsažení druhé nerovnosti:

$$\mu_2 [\lambda_1 (m + \mu_3) - \lambda_2 \mu_2] > \lambda_1^2 \mu_1 m.$$

Tento výraz ještě upravíme tak, aby byla zřejmá souvislost s výsledkem (1.12) z předchozího případu:

$$[\lambda_1 m (\mu_2 - \lambda_1 \mu_1) - \lambda_2 \mu_2^2] + \lambda_1 \mu_2 \mu_3 > 0.$$

Vidíme, že tento model zahrnuje předchozí případ pouze pro  $\mu_3 = 0$ , jinak jde o podmínku slabší než (1.12).

Nakonec můžeme nerovnost přepsat do přehlednějšího tvaru

$$\boxed{\lambda_1 (m + \mu_3) - \lambda_2 \mu_2 > \lambda_1^2 m \frac{\mu_1}{\mu_2}}. \quad (1.14)$$

## 2. Mechanické oscilátory s implicitními vztahy

Studujeme systém diferenciálně-algebraických rovnic, které popisují pohyb oscilátoru sestávajícího z tělesa, pružiny a tlumiče. Předpokládáme-li monotónní vztah mezi polohou, rychlostí a příslušnými silami, dokážeme globální existenci a jednoznačnost řešení. Nakonec analyzujeme chování některých jednoduchých modelů.

### 2.1 Formulace úlohy

Studujeme kmitání jednoduché mechanické soustavy sestávající z hmotného bodu připojeného k pružině a tlumiči, které jsou zapojeny paralelně (viz Obrázek 2.1). Podle druhého Newtonova zákona síly máme soustavu popsánu jako rovnováhu sil

$$m\ddot{x} = F - F_s - F_d, \quad (2.1)$$

kde  $m$  je hmotnost tělesa (bez újmy na obecnosti položíme  $m = 1$ ),  $x$  je neznámá poloha,  $F$  je daná vnější síla působící na těleso, a  $F_s, F_d$  jsou síly přiřazené k pružině a k tlumiči. Tečka označuje derivování vzhledem času. Obvykle je takový systém doplněn konstitutivními vztahy tvaru

$$\begin{aligned} F_s &= \hat{f}(x), \\ F_d &= \hat{g}(\dot{x}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

kteří explicitně popisují pružnou a tlumivou sílu v závislosti na poloze a rychlosti tělesa. Pokud dosadíme (2.2) do (2.1), získáme obyčejnou diferenciální rovnici (dále jen ODR) druhého řádu a tím dobře definovanou matematickou úlohu, pokud přiřadíme přirozené počáteční podmínky

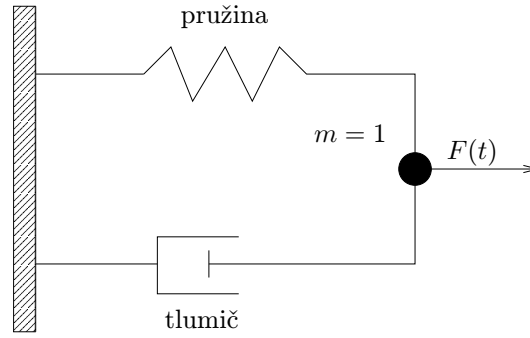
$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= x_1. \end{aligned} \quad (\text{IC})$$

Naším záměrem bude studovat jiné tvary těchto konstitutivních tvarů, přesněji

$$\begin{aligned} x &= f(F_s), \\ \dot{x} &= g(F_d), \end{aligned} \quad (2.3)$$

kteří popisují polohu a rychlost v závislosti na pružné a tlumivé síle, čili na  $F_s, F_d$ . Všimněme si, že vztahy (2.3) nejsou obecně redukovatelné na vztahy (2.2) v případě, že funkce  $f, g$  nejsou invertovatelné. Existují důležité aplikace, kde toto platí, např. Binghamova tekutina. Vztahy (2.2) říkají, že odlišné síly způsobují odlišné pohyby, což dobře popisuje příčinnost (kauzalitu). Bohužel je v praxi často nelze použít. Naopak vztahy (2.3) dokonce popisují realitu fyzikálně lépe, jelikož říkají, že pohyb je důsledkem síly (i v případě nulového buzení  $F$ ). Tímto místem ODR druhého řádu dostáváme diferenciálně-algebraickou úlohu

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= F - F_s - F_d, \\ x &= f(F_s), \\ \dot{x} &= g(F_d). \end{aligned}} \quad (\text{PI})$$



Obrázek 2.1: Mechanický systém sestávající z hmotného bodu a paralelního zapojení pružiny a tlumiče.

Základní požadavky na síly  $f, g$  jsou

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ jsou spojité a neklesající,} \quad (2.4)$$

$$f(0) = g(0) = 0, \quad (2.5)$$

$$c_1|u| - c_2 \leq |f(u)| \leq c_3(|u| + 1), \quad (2.6)$$

$$c_4|u| - c_5 \leq |g(u)| \leq c_6(|u| + 1). \quad (2.7)$$

Nerovnosti (2.6), (2.7) jsou technické předpoklady, které společně s (2.3) implikují

$$x \text{ je omezené} \iff F_s \text{ je omezená,}$$

$$\dot{x} \text{ je omezené} \iff F_d \text{ je omezená.}$$

Je zřejmé, že (2.6), (2.7) jsou splněny, pokud  $f, g$  rostou lineárně v blízkosti nekonečna (tzv. vlastnost koercivity). Také odtud plyne, že tyto funkce jsou na, což se zdá být nezbytné pro globální existenci řešení pro libovolná počáteční data.

Základní analýza nekoresponduje přímo se standardní teorií ODR, proto je důležité specifikovat pojem řešení.

**Definice 2.1.** Řešením rozumíme trojici  $(x, F_s, F_d)$  definovanou na nějakém časovém intervalu  $I$ , kde  $x, \dot{x}$  jsou absolutně spojitě funkce,  $F_s, F_d$  jsou integrovatelné funkce, a vztahy z (PI) platí skoro všude v  $I$ .

## 2.2 Obecný výsledek o existenci

V této části dokážeme následující větu.

**Věta 2.1.** Pro libovolné  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$  a  $F \in L^2(0, T)$  má úloha (PI) alespoň jedno řešení, vázané k (IC) a definované na celém intervalu  $[0, T]$ .

*Důkaz.* V důkazu nejprve formulujeme úlohu, která aproximuje (PI) a je řešitelná standardní teorií ODR. Odtud vytvoříme odhady nezávislé na  $k$ , které nám pomohou najít konvergentní podposloupnosti řešení nové aproximativní úlohy (PI $_k$ ). Tímto postupně dokážeme ekvivalenci řešení těchto úloh.

1) *Aproximativní úloha*

Nejprve provedeme aproximaci funkcí  $f, g$  tak, abychom je mohli invertovat.

$$\boxed{\begin{aligned} f_k(u) &= f(u) + u/k, \\ g_k(u) &= g(u) + u/k. \end{aligned}} \quad (\text{FIk})$$

Tímto dostáváme aproximativní úlohu

$$\begin{aligned} \ddot{x}^k &= F - F_s^k - F_d^k, \\ x^k &= f_k(F_s^k), \\ \dot{x}^k &= g_k(F_d^k). \end{aligned} \quad (\text{PIk})$$

Jelikož nyní jsou funkce  $f_k, g_k$  invertovatelné, dostáváme ekvivaletní úlohu

$$\ddot{x}^k = F - f_k^{-1}(x) - g_k^{-1}(\dot{x}).$$

Ze vztahů (FIk) lze odvodit, že funkce  $f_k^{-1}, g_k^{-1}$  jsou globálně  $k$ -lipschitzovské. Ukážeme tuto vlastnost pouze pro funkci  $f$ , pro funkci  $g$  je postup analogický. Pro lepší přehlednost zápisu označíme  $u := f_k^{-1}(x)$ , pak z (FIk) vidíme, že  $u = k(f_k(u) - f(u)) = k\tilde{f}(u)$ . Odtud plyne, že

$$|f_k^{-1}(u) - f_k^{-1}(v)| = |u - v| \leq k[(f_k(u) - f_k(v)) - (f(u) - f(v))] = k[\tilde{f}(u) - \tilde{f}(v)].$$

Jelikož funkce  $f_k^{-1}, g_k^{-1}$  jsou globálně  $k$ -lipschitzovské, pak pro libovolné  $k \geq 1$  máme globální existenci řešení vzhledem ke standardní teorii ODR (viz [9], Věta 2.4.5).

2) *Výrazy nezávislé na  $k$  a jejich odhady*

V následujícím výpočtu užitíme dvě užitečné vlastnosti

$$F_d^k \dot{x}^k = F_d^k g_k(F_d^k) \geq 0, \quad (2.8)$$

$$|F_s^k| \leq c(|x^k| + 1), \quad (2.9)$$

kde  $c$  je nezávislé na  $k$ , pro  $k$  dost velké (tj. jdoucí k nekonečnu jej lze zanedbat). Vlastnost (2.8) je zřejmá z předpokladů (2.4), (2.5) a z odvození

$$F_d^k \dot{x}^k = F_d^k g_k(F_d^k) = F_d^k (g(F_d^k) + F_d^k/k) = (F_d^k)^2/k + F_d^k g(F_d^k) \geq 0.$$

Samozřejmě vztah (2.8) platí stejně i pro  $F_s^k$  (užijeme později). Vlastnost (2.9) plyne z nerovnosti (2.6), kde  $u := F_s^k$ . Jelikož  $x^k = f_k(F_s^k) = f(F_s^k) + F_s^k/k$ , pak  $f(u) = f_k(u) - u/k$ . Dále upravujeme první nerovnost z (2.6) tak, abychom získali odhad pro  $u$ .

$$\begin{aligned} c_1|u| - c_2 &\leq |f(u)| = |f_k(u) - u/k| \leq |f_k(u)| + |u|/k \\ |u|(c_1 - 1/k) - c_2 &\leq |f_k(u)| \\ |u| &\leq \frac{|f_k(u)| + c_2}{c_1 - 1/k} \leq \frac{c_2}{c_1 - 1/k} (|f_k(u)| + 1) \leq c(|f_k(u)| + 1) \end{aligned}$$

Tímto máme odhad pro  $F_s^k$  nezávislý na  $k$  v případě, že  $k \rightarrow \infty$ . Podobnou nerovnost (2.9) pro  $F_d^k$  získáme obdobným způsobem z nerovnosti (2.7), tj. z omezenosti funkce  $g$ .

Abychom získali výrazy nezávislé na  $k$ , vynásobíme rovnici  $(\text{PIk})_1$  výrazem  $2\dot{x}^k$  a dostaneme

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) \leq 2(|F| + c_1|x^k| + c_1)|\dot{x}^k| \leq |F|^2 + c_2(1 + (x^k)^2 + (\dot{x}^k)^2). \quad (2.10)$$

První nerovnost v (2.10) získáme vynásobením rovnice  $(\text{PIk})_1$  výrazem  $2\dot{x}^k$ , a následným užitím vlastností (2.8) a (2.9).

$$\begin{aligned} 2\ddot{x}^k\dot{x}^k &= 2\dot{x}^k(F - F_s^k - F_d^k) \\ (\dot{x}^k)^2 &\leq 2\dot{x}^k(F + c(|x^k| + 1)) \\ &\leq 2|\dot{x}^k|(|F| + c|x^k| + c) \end{aligned}$$

Druhou nerovnost v (2.10) získáme pouze úpravou předchozí nerovnosti pomocí známých nerovností  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  a  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ .

$$\begin{aligned} 2|\dot{x}^k|(|F| + c|x^k| + c) &\leq |\dot{x}^k|^2 + (|F| + c(|x^k| + 1))^2 \\ &\leq |\dot{x}^k|^2 + 2(|F|^2 + c^2(|x^k| + 1)) \\ &\leq |F|^2 + c_2(1 + |x^k|^2 + |\dot{x}^k|^2) \end{aligned}$$

Tímto jsme postupně odvodili (2.10), což je přípravný odhad pro  $\dot{x}^k$ .

Dále integrujeme (2.10) přes interval  $(0, t)$ , kde užitíme nerovnosti

$$\int_0^t (x^k)^2 ds = \int_0^t (x_0 + \int_0^s \dot{x}^k d\tau)^2 ds \leq c_3(x_0^2 + \int_0^t (\dot{x}^k)^2 ds) \quad (2.11)$$

Rovnost ve (2.11) je zřejmá z

$$\int_0^s \dot{x}^k d\tau = x^k(s) - x_0 \implies \int_0^t x^k ds = \int_0^t (x_0 + \int_0^s \dot{x}^k d\tau) ds$$

kde  $x_0$  je počáteční podmínka z (IC). Nerovnost z (2.11) získáme opět užitím  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  a Hölderovy nerovnosti  $\int_{\Omega} 1f \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}}(\int_{\Omega} |f|^2)^{\frac{1}{2}}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^t (x_0 + \int_0^s \dot{x}^k d\tau)^2 ds &\leq \int_0^t c_1(x_0^2 + (\int_0^s \dot{x}^k d\tau)^2) ds \leq \int_0^t c_1(x_0^2 + c' \int_0^s (\dot{x}^k)^2 d\tau) ds \\ &\leq \int_0^t c''(x_0^2 + \int_0^s (\dot{x}^k)^2 d\tau) ds \leq c'''(x_0^2 + \int_0^t \int_0^s (\dot{x}^k)^2 d\tau) ds \\ &\leq c_3(x_0^2 + \int_0^t (\dot{x}^k)^2 d\tau) \end{aligned}$$

kde  $c_3 = c_3(|s|^{\frac{1}{2}}, |t|, |T|)$ , přičemž  $s \leq t \leq T$ .

Pokud integrujeme (2.10) přes interval  $(0, t)$  a užitíme (2.11), získáme odhad

$$(\dot{x}^k)^2 \leq x_1^2 + c_4(x_0^2 + \int_0^t |F|^2 + (\dot{x}^k)^2 ds), \quad t \in [0, T], \quad (2.12)$$



kde konstanta  $c_4$  závisí na  $T$ . Pro odvození (2.12) postupujeme následovně

$$\begin{aligned}
\int_0^t (\dot{x}^k)^2 ds &\leq \int_0^t |F|^2 + c_2(1 + |x^k|^2 + |\dot{x}^k|^2) ds \\
(\dot{x}^k)^2 - x_1^2 &\leq \int_0^t |F|^2 ds + \int_0^t c_2 ds + \int_0^t |x^k|^2 ds + \int_0^t |\dot{x}^k|^2 ds \\
&\leq \int_0^t |F|^2 ds + c' + c''(x_0^2 + \int_0^t |\dot{x}^k|^2 ds) + \int_0^t |\dot{x}^k|^2 ds \\
&\leq c_4(x_0^2 + \int_0^t |F|^2 + |\dot{x}^k|^2 ds)
\end{aligned}$$

Tvar odhadu (2.12) je již vhodný k užití Gronwallova Lemmatu 4.1, díky čemuž dostaneme finální odhad

$$\sup_{t \in [0, T]} (|\dot{x}^k(t)| + |x^k(t)|) \leq K_1, \quad (2.13)$$

kde  $K_1$  závisí na  $x_0, x_1, F$  a  $T > 0$ , ale je nezávislé na  $k$  dost velké. Předpoklady pro užití Lemmatu 4.1 jsou splněny, jelikož ve výrazu (2.12) jsou funkce  $(\dot{x}^k)^2$  spojité a nezáporné na intervalu  $[0, T]$ , konstanta  $x_1^2 + c_4 x_0^2$  je nezáporná a  $t \in [0, T]$ . Dostáváme tedy z (2.12) odhad

$$\begin{aligned}
(\dot{x}^k(t))^2 &\leq (x_1^2 + c_4 x_0^2 + \int_0^t |F(s)|^2 ds) \exp\left(\int_0^t 1 ds\right) \\
&\leq (x_1^2 + c_4 x_0^2 + K_F) e^T, \quad t \leq T \\
&\leq \hat{K}_1(x_0, x_1, T, F)
\end{aligned}$$

Konstanta  $K_F$  existuje, jelikož  $F \in L^2(0, T)$ , čili platí  $\int_0^T |F(s)|^2 ds \leq K_F$ . Tímto jsme získali odhad  $|\dot{x}^k(t)| \leq \sqrt{\hat{K}_1}$ . Odtud snadno odhadneme  $|x^k(t)|$

$$|x^k(t)| \leq \int_0^t |\dot{x}^k(s)| ds + |x_0| \leq t \sup_{t \in [0, T]} |\dot{x}^k(t)| \leq T \sqrt{\hat{K}_1} =: \tilde{K}_1.$$

Dohromady tedy máme, že  $\sup_{t \in [0, T]} (|\dot{x}^k(t)| + |x^k(t)|) \leq K_1(x_0, x_1, T, F)$ .

Podobně získáme ze vztahů v (PIk) užitím (2.6) a (2.7) následující odhady

$$\sup_{t \in [0, T]} (|F_s^k(t)| + |F_d^k(t)|) \leq K_2, \quad (2.14)$$

$$\int_0^T |\ddot{x}^k|^2 ds \leq K_3. \quad (2.15)$$

První odhad v (2.14) získáme jednoduše z (2.9)

$$|F_s^k| \leq c(|x^k| + 1) \leq c(\tilde{K}_1 + 1) =: \tilde{K}_2.$$

Pro  $F_d^k$  lze z (2.7) odvodit odhad  $|F_d^k| \leq c(|\dot{x}^k| + 1)$  stejným způsobem jako pro (2.9). Užitím meziodhadu  $|\dot{x}^k|$  pro (2.13) dostaneme

$$|F_d^k| \leq c(|\dot{x}^k| + 1) \leq c(\sqrt{\hat{K}_1} + 1) =: \hat{K}_2.$$

Dohromady opět dostáváme  $\sup_{t \in [0, T]} (|F_s^k(t)| + |F_d^k(t)|) \leq K_2$ .

Poslední odhad (2.15) získáme po dosazení všech předchozích odhadů do  $(\text{PIk})_1$ , ale pouze v  $L^2$ -normě, jelikož pouze tam máme odhad pro  $F$ . Užijeme nerovnosti  $(a - b)^2 \leq c(a^2 + b^2)$  a  $t \leq T$ .

$$\begin{aligned} \int_0^t |\ddot{x}^k|^2 ds &= \int_0^t |F - (F_s^k + F_d^k)|^2 ds \leq \int_0^T |F|^2 + c(|F_s^k| + |F_d^k|)^2 ds \\ &\leq K_F + cTK_2^2 =: K_3. \end{aligned}$$

### 3) Konvergentní podposloupnosti

Nyní máme omezené všechny členy úlohy  $(\text{PIk})$  v prostoru  $L^2(0, T)$ , jmenovitě členy  $x^k, \dot{x}^k, \ddot{x}^k, F_s^k, F_d^k$  pro libovolné  $k \in \mathbb{N}$  dost velké. Protože  $L^2(0, T)$  je reflexivní Banachův prostor, platí zde věta sdělující, že z každé omezené posloupnosti lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost. Pro posloupnosti  $x^k, \dot{x}^k$  umíme dokázat dokonce stejnoměrnou konvergenci na intervalu  $(0, T)$ . Celkem máme tyto konvergence jednotlivých posloupností z  $(\text{PIk})$

$$\left. \begin{array}{l} F_s^k \rightarrow F_s, \\ F_d^k \rightarrow F_d, \\ \ddot{x}^k \rightarrow \ddot{x}, \end{array} \right\} \text{slabě v } L^2(0, T), \quad (2.16)$$

$$\left. \begin{array}{l} x^k \rightarrow x, \\ \dot{x}^k \rightarrow \dot{x}, \end{array} \right\} \text{stejněměrně na } [0, T]. \quad (2.17)$$

K dokázání platnosti (2.16) nám postačí výše uvedená věta o reflexivních prostorech. Abychom potvrdili platnost (2.17), je potřeba postupně sledovat několik důležitých tvrzení z funkcionální analýzy:

T1 Omezená množina  $A$  je relativně kompaktní právě tehdy, když z každé posloupnosti v  $A$  lze vybrat konvergentní podposloupnost.

T2 (Arzela-Ascoli): Buď  $K$  kompaktní prostor. Množina  $A$  je relativně kompaktní v  $\mathcal{C}(K)$  právě tehdy, když  $A$  je omezená a stejně spojitá.

T3 (Definice) Množina funkcí  $A$  na prostoru  $K$  je stejně spojitá, jestliže  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in K : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall f \in \mathcal{C}(K)$

Množinami  $A$  jsou pro nás posloupnosti  $x^k, \dot{x}^k$  a onen kompaktní prostor  $K$  je interval  $[0, T]$ . Pomocí těchto tvrzení T1-T3 dostaneme konvergenci na prostoru  $\mathcal{C}([0, T])$ , která je ekvivalentní stejnoměrné konvergenci na  $[0, T]$ . Ekvivalence těchto konvergencí plyne z toho, že  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(K)} = \|\cdot\|_{\text{sup}}$  a z následujícího tvrzení.

T4 Nechť posloupnost  $f_n(x)$  je definována na  $K$ . Pak následující výroky jsou ekvivalentní:

1.  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  konvergují stejnoměrně v  $K$ .
2.  $\sigma_n \rightarrow 0$  pro  $n \rightarrow \infty$ , kde  $\sigma_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ .

Pro důkaz stejnoměrné konvergence v (2.17) nám díky tvrzením T1-T4 stačí dokázat, že posloupnosti  $x^k, \dot{x}^k$  jsou stejně spojité. Ověříme tedy platnost definice stejné spojitosti pro posloupnosti  $x^k(t), \dot{x}^k(t)$ , tj. hledáme vhodnou volbu  $\delta$ . Při výpočtu použijeme již známých odhadů pro posloupnosti  $\dot{x}^k, \ddot{x}^k$  z odvození (2.13), (2.15), Hölderovu nerovnost a předpoklad  $t_2 > t_1$ . Jelikož platí  $(t_1, t_2) \subset (0, T)$ , můžeme říct, že  $\|\dot{x}^k\|_{L^2(t_1, t_2)} \leq \|\ddot{x}^k\|_{L^2(0, T)} \leq K_3$ .

$$\begin{aligned} |x^k(t_2) - x^k(t_1)| &\leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}^k(t)| dt \leq \sqrt{\widehat{K}_1}(t_2 - t_1) = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\widehat{K}_1}}, \\ |\dot{x}^k(t_2) - \dot{x}^k(t_1)| &\leq \int_{t_1}^{t_2} |\ddot{x}^k(t)| dt \leq \left( \int_{t_1}^{t_2} |\ddot{x}^k(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t_1}^{t_2} 1 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_3(t_2 - t_1) = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{K_3}. \end{aligned}$$

Ověřili jsme výše stejnou spojitost posloupností  $x^k, \dot{x}^k$ , a tím jsme dokázali stejnoměrnou konvergenci jejich podposloupností.

#### 4) Limitní přechod mezi úlohami (PIk) a (PI)

V této finální části důkazu se budeme zabývat limitním přechodem úlohy (PIk) k úloze (PI).

$$\left[ \begin{array}{l} \ddot{x}^k = F - F_s^k - F_d^k, \\ x^k = f_k(F_s^k), \\ \dot{x}^k = g_k(F_d^k), \end{array} \right] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{?} \left[ \begin{array}{l} \ddot{x} = F - F_s - F_d, \\ x = f(F_s), \\ \dot{x} = g(F_d). \end{array} \right] \quad (2.18)$$

Pro provedení limitního přechodu (2.18)<sub>1</sub> bude vhodné použít úlohu (PIk)<sub>1</sub> v integrálním tvaru

$$\begin{aligned} x^k(t) &= x_0 + \int_0^t \dot{x}^k(\tau) d\tau, \quad t \in (0, T), \\ \dot{x}^k(t) &= x_1 + \int_0^t [F(\tau) - F_s^k(x^k(\tau)) - F_d^k(\dot{x}^k(\tau))] d\tau. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Limitní přechod v rovnosti (2.19)<sub>1</sub> je zřejmý, neboť  $x^k, \dot{x}^k$  konvergují stejnoměrně na  $[0, T]$ . V rovnosti (2.19)<sub>2</sub> se podíváme postupně na jednotlivé její členy. Členy  $x^k, \dot{x}^k$  konvergují stejně jako výše. Členy  $F_s^k, F_d^k$  konvergují pouze slabě na  $L^2(0, T)$ . To nám ale stačí, jelikož můžeme použít

$$\int_0^T F_s^k(x^k(\tau)) \chi(\tau)_{(0,t)} d\tau \longrightarrow \int_0^t F_s(x(\tau)) d\tau,$$

kde charakteristickou funkci  $\chi_{(0,t)}$  bereme jako testovací funkci pro konvergenci funkce  $F_s^k(x^k(\tau))$  v  $L^2(0, t)$ . Podobně platí pro  $F_d^k(\dot{x}^k(\tau))$ . Dohromady tímto máme odůvodněn limitní přechod v (2.18)<sub>1</sub>.

Nakonec se zamyslíme nad limitními přechody ve (2.18)<sub>2</sub> a (2.18)<sub>3</sub>. Podíváme se podrobně pouze na  $f_k(F_s^k) \rightarrow f(F_s)$ , limitní přechod pro funkci  $g_k(F_d^k)$  je proveden analogicky. Monotónii funkce  $f$  chápeme standardním způsobem, čili platí  $(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$ . Všimneme si, že  $f_k \rightarrow f$  konverguje lokálně stejnoměrně na  $\mathbb{R}$  (tj. lokálně v normě  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ ), kde  $f_k(u) = f(u) - u/k$ .

$$\sup_{|u| \leq A} |f_k(u) - f(u)| = \sup_{|u| \leq A} \frac{|u|}{k} = \frac{A}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \text{ kde } A > 0, \text{ konst.}$$

Díky omezenosti  $f(F_s^k)$  dostáváme

$$f(F_s^k) = \underbrace{f(F_s^k) - f_k(F_s^k)}_{\Rightarrow 0} + \underbrace{f_k(F_s^k)}_{x^k} \longrightarrow x \text{ stejnoměrně na } [0, T]. \quad (2.20)$$

V následujícím postupu použijeme tzv. Mintyho trik. Můžeme psát

$$\int_0^T \underbrace{(f(F_s^k) - f(w))}_{=:f_n} \underbrace{(F_s^k - w)}_{=:g_n} dt \geq 0, \quad (2.21)$$

kde  $w \in L^2(0, T)$  specifikujeme později. Něcht'  $k \rightarrow \infty$ , pak odvodíme

$$\int_0^T \underbrace{(x - f(w))}_{=:f} \underbrace{(F_s - w)}_{=:g} dt \geq 0. \quad (2.22)$$

Provedeme výpočet potřebný k přechodu od (2.21) k (2.22). Pro přehlednost použijeme výše uvedených označení  $f_n, g_n, f, g$ . Víme, že  $f_n \rightarrow f$  konverguje stejnoměrně na  $[0, T]$  díky (2.20) a  $g_n \rightarrow g$  slabě v  $L^2(0, T) \hookrightarrow L^1(0, T)$  díky (2.16)<sub>1</sub> a je omezená na  $L^2(0, T)$ . Nás zajímá konvergence integrálu ze součinu těchto dvou funkcí  $f_n, g_n$  k součinu funkcí  $f, g$ .

$$\begin{aligned} & \int_0^T [f_n(t)g_n(t) - f(t)g(t)] dt = \int_0^T [f_n g_n - f g_n + f g_n - f g] dt = \\ & = \underbrace{\int_0^T g_n(f_n - f) dt}_A + \underbrace{\int_0^T f(g_n - g) dt}_B \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ & A = \int_0^T g_n(f_n - f) dt \leq \underbrace{\|(f_n - f)\|_{\sup}}_{f_n \rightarrow f} \underbrace{\int_0^T |g_n| dt}_0 \rightarrow 0, \\ & \qquad \qquad \qquad \|g_n\|_{L^1(0,T)} \leq c \|g_n\|_{L^2(0,T)} < K \\ & B = \int_0^T f \underbrace{(g_n - g)}_{g_n \rightarrow g} dt \rightarrow 0, \text{ kde } f \text{ je testovací funkce nezávislá na } n. \end{aligned}$$

Tímto jsme odůvodnili limitní přechod mezi (2.21) a (2.22).

Do nerovnosti (2.22) nyní dosadíme  $w = F_s \pm av$ , kde  $a > 0$  je konstanta a  $v \in L^2(0, T)$  je libovolná funkce (tím navíc dostaneme z nerovnice rovnici).

$$\int_0^T (x - f(F_s \pm av))(\pm av) dt = 0.$$

Rovnost vydělíme konstatnou  $a$ , kterou následně pošleme do nuly. Řešíme rovnici

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^T \underbrace{(x - f(F_s \pm av))(\pm v)}_{=: \xi(t,a)} dt = 0. \quad (2.23)$$

Abychom mohli zaměnit pořadí limity a integrálu, použijeme známý důsledek Lebesgueovy věty o Limitě integrálu závislém na parametru (4.2). Potřebujeme tedy najít integrovatelnou majorantu  $\varphi(t) \in L^1(0, T)$  pro funkci  $\xi(t, a) = (x(t) - f(F_s(t) \pm av(t)))(\pm v(t))$ . Užijeme předpokladu o omezenosti  $|f(u)| \leq c(|u| + 1)$  z (2.6) a trojúhelníkové nerovnosti.

$$\begin{aligned} |\xi(t, a)| = |(x - f(F_s \pm av))(\pm v)| &\leq (|x| + |f(F_s \pm av)|)|v| \\ &\leq (|x| + c(|F_s| + a|v| + 1))|v| \\ &\leq (|x| + c(|F_s| + |v| + 1))|v| =: \varphi(t) \end{aligned}$$

Navíc můžeme považovat  $a$  za omezené např. konstatnou 1, jelikož je  $a$  blízko nule. Celý integrand  $\xi(t, a)$  z (2.23) je omezený funkcí  $\varphi(t)$  nezávislou na parametru  $a$ . Navíc je funkce  $\varphi(t)$   $L^1$ -integrovatelná, neboť  $x(t)$  a  $F_s^k(t)$  jsou funkce omezené na  $[0, T]$  (viz výše) a funkce  $v(t)$  je z  $L^2(0, T) \hookrightarrow L^1(0, T)$ . Celkem  $\xi(t, a)$  z (2.23) splňuje předpoklady věty (4.2) a lze ji tedy použít. Získáváme

$$\int_0^T (x - f(F_s))(\pm v) dt = 0. \quad (2.24)$$

Nakonec díky obecnosti funkce  $v$  dostáváme z (2.24), že  $x = f(F_s)$  skoro všude na  $(0, T)$ , což jsme chtěli dokázat pro platnost (2.18)<sub>2</sub>. Důkaz platnosti (2.18)<sub>3</sub> probíhá analogicky.  $\square$

## 2.2.1 Jednoznačnost řešení autonomní úlohy

Téma této podkapitoly je podrobně zpracováno v článku [1]. Zmíníme jen základní principy.

Dodatečné strukturální předpoklady na funkci  $f$  z (PI)<sub>2</sub>:

- Existuje konečný počet disjunktních uzavřených intervalů  $I_k$  a reálné nezávislé konstanty  $\xi_k$  takové, že  $f \equiv \xi_k$  na  $I_k$ ,
- $f$  je ostře rostoucí vně sjednocení intervalů  $\cup_k I_k$ .
- Položíme  $\Phi := (f|_{\mathbb{R} \setminus \cup_k I_k})^{-1}$  a požadujeme, aby  $\Phi$  byla lokálně lipschitzovská na svém definičním oboru, tj. na  $\mathbb{R} \setminus \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ .
- Poznamenejme, že  $\Phi$  je ostře rostoucí funkce.

**Věta 2.2.** *Nechť  $F \equiv F_0$  (tj. buzení je konstatní). Nechť  $f$  splňuje strukturální předpoklady uvedené výše. Pak řešení úlohy (PI) je jednoznačné v každém bodě  $(x_0, x_1)$ .*

*Důkaz.* Viz článek [1], důkaz Věty 2.  $\square$

# 3. Mechanické oscilátory s plně implicitním tlumením

Cílem práce je zabývat se úlohami typu  $m\ddot{x} + F_d + F_s = F$ , kde síly  $F_s, F_d$  jsou zadány implicitními vztahy. V této kapitole vyšetřujeme případ, kdy  $F_s$  je zadána explicitně pomocí Hookeova zákona  $F_s = kx$  a pouze  $F_d$  je zadáno implicitně. Studujeme tedy soustavu rovnic tvaru

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} + F_d + kx &= F, \\ g(\dot{x}, F_d) &= 0, \end{aligned}} \quad (3.1)$$

kde neznámá  $x$  je poloha,  $m$  je hmotnost (pro jednoduchost položíme  $m = 1$ ),  $F(t)$  je daná vnější síla a  $F_d$  je síla tlumení. Zajímá nás situace, kdy funkce  $g$  z (3.1)<sub>2</sub> je zadána plně implicitním vztahem. To znamená, že vztah nelze obecně zapsat ve tvaru  $F_d = g(\dot{x})$  ani ve tvaru  $\dot{x} = \hat{g}(F_d)$ . Existuje několik významných fyzikálních příkladů takové disipace, mezi něž patří např. Coulombovo tření.

V této kapitole se podrobněji podíváme na speciální tvar implicitního tlumení. Nejprve uvedeme potřebné požadavky na vlastnosti tlumivé síly  $F_d$ . Dále se zabýváme tlumením Coulombova typu s relaxací. Pro tento typ úlohy (3.1) dokážeme existenci a jednoznačnost jejího řešení. Ve druhé části kapitoly prozkoumáme úlohy tohoto typu numericky. Budeme se věnovat hlavně úlohám, které mají více řešení, tzn. jejich řešení nejsou určena jednoznačně.

## 3.1 Příprava

Začneme definicí pojmu řešení, vhodné pro naše účely v této kapitole.

**Definice 3.1.** *Řešením rozumíme dvojici  $(F_d, x) \in L^2(0, T) \times W^{2,2}(0, T)$  takovou, že (3.1) platí skoro všude v  $(0, T)$ .*

Poznamenejme, že z toho vyplývá, že  $x$  a  $\dot{x}$  mají absolutně spojitě reprezentanty, které jsou určeny počátečními podmínkami

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1. \quad (\text{IC})$$

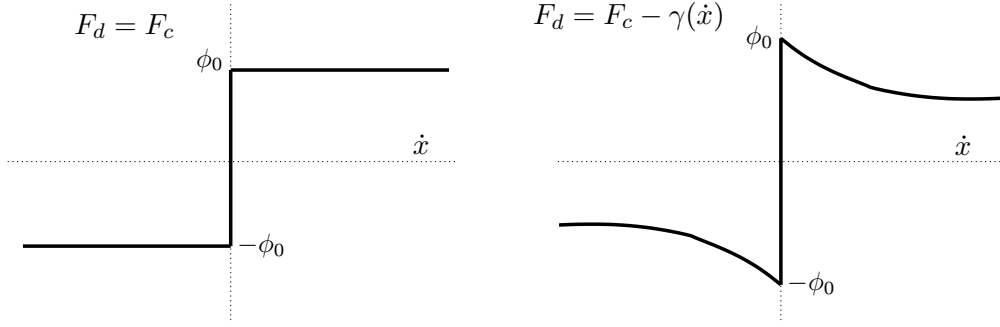
Nyní si uvedeme definici pojmu maximálně monotónní graf, který je zobecněním pojmu monotónní funkce. Pro každou monotónní funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neklesající platí, že  $\mathcal{A} = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$  je maximálně monotónní graf.

**Definice 3.2.**  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^2$  nazveme *maximálně monotónní graf*, jestliže

$$\begin{aligned} (F, y), (\bar{F}, \bar{y}) \in \mathcal{A} &\Rightarrow (F - \bar{F})(y - \bar{y}) \geq 0, \\ (F_0 - F)(y_0 - y) \geq 0 \quad \forall (F, y) \in \mathcal{A} &\Rightarrow (F_0, y_0) \in \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (\text{MG})$$

Budeme se zabývat variantou úlohy (3.1), kde implicitní funkce  $g$  má tvar

$$\boxed{\begin{aligned} F_d &= F_c - \gamma(\dot{x}), \\ (F_c, \dot{x}) &\in \mathcal{A}, \end{aligned}} \quad (3.2)$$



Obrázek 3.1: Monotónní graf plně implicitní tlumivé síly Coulombova typu (vlevo) a graf obecnější implicitní tlumivé síly Coulombova typu s relaxací (vpravo).

kde  $\gamma(\cdot)$  je relaxační funkce a  $F_c$  je síla Coulombova typu (viz dále), která je obecně monotónní vzhledem k  $\dot{x}$ . Předpokládáme, že  $\gamma$  je globálně lipschitzovsky spojitá s konstantou  $L_\gamma$ . Budeme také potřebovat jistý druh koercivity vzhledem k síle

$$(F, y) \in \mathcal{A} \Rightarrow Fy \geq c_2 F^2 - c_3. \quad (\text{K})$$

Typickým příkladem maximálně monotónního vztahu tohoto tvaru je Coulombův zákon tření, který je zadán podmínkami

$$\begin{array}{l} \dot{x} > 0 \Rightarrow F_c = \phi_0, \\ \dot{x} < 0 \Rightarrow F_c = -\phi_0, \\ \dot{x} = 0 \Rightarrow F_c \in [-\phi_0, \phi_0] \text{ libovolný.} \end{array} \quad (\text{C})$$

Viz Obrázek 3.1 (vlevo). Poznamenejme, že takový vztah je opravdu plně implicitní, tj. nelze napsat  $F_c$  jako funkci  $\dot{x}$ , ani  $\dot{x}$  jako funkci  $F_c$ . Předpokládáme-li, že relaxační funkce  $\gamma$  je omezená, rostoucí a  $\gamma(0) = 0$ , získáme obecnější model (viz. Obrázek 3.1 (vpravo)). Vzhledem k analýze bychom rádi zdůraznili, že spojitost  $\gamma$  zaručuje pouze existenci řešení (3.1). Jednoznačnost vyžaduje silnější předpoklad, jmenovitě že  $\gamma$  je lipschitzovsky spojitá. Náš poslední předpoklad je

$$F = F(t) \in L^2(0, T). \quad (3.3)$$

Řešíme tedy úlohu

$$\begin{array}{l} \ddot{x} + F_c - \gamma(\dot{x}) + kx = F, \\ (F_c, \dot{x}) \in \mathcal{A}. \end{array} \quad (\text{PC})$$

Nyní zmíníme několik výsledků, které budou nápomocny při vyšetřování monotóních vztahů mezi silou a rychlostí. Nejprve připomeneme užitečnou "geometrickou" charakterizaci maximálně monotónního grafu.

**Lemma 3.1.** *Relace  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  je maximálně monotónní právě tehdy když existuje 1-lipschitzovská funkce  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že*

$$(F, y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow F - y = \varphi(F + y). \quad (3.4)$$

Toto tvrzení popisuje případ, kdy při pootočení grafu o  $45^\circ$  získáme graf 1-lipschitzovské funkce.

Důkaz. Viz [7] Lemma 2.1. □

Následuje výsledek o slabé uzavřenosti.

**Lemma 3.2.** *Nechť  $F^n, y^n$  konvergují k  $F, y$  slabě v  $L^2(0, T)$ , a necht'  $F^n y^n \rightarrow Fy$  ve smyslu distribucí. Jestliže  $(F^n, y^n) \in \mathcal{A}$  pro skoro všechna  $t \in (0, T)$ , kde  $\mathcal{A}$  je maximálně monotónní, pak také  $(F, y) \in \mathcal{A}$  pro s.v.  $t \in (0, T)$ .*

Důkaz. Necht'  $w$  je libovolná funkce z  $L^2(0, T)$ . Máme

$$|F^n - y^n - \varphi(w)|^2 \leq |F^n + y^n - w|^2$$

skoro všude na  $(0, T)$ , kde  $\varphi$  je z Lemmatu 3.1. Toto je ekvivalentní s

$$-2(F^n - y^n)\varphi(w) + |\varphi(w)|^2 \leq -2(F^n + y^n)w + |w|^2 + 4F^n y^n.$$

Jelikož  $\varphi(\cdot)$  je funkce 1-lipschitzovská, pak je  $\varphi(w)$  stejně jako  $w$  funkcí z  $L^2(0, T)$ . Můžeme je tedy obě považovat za testovací funkce pro slabou konvergenci posloupností  $F^n, y^n$  na  $L^2(0, T)$ <sup>1</sup>. Navíc uijeme předpokladu, že  $F^n y^n \rightarrow Fy$  ve smyslu distribucí. Pro  $n \rightarrow \infty$  dostáváme

$$\int_0^T -2(F - y)\varphi(w) + |\varphi(w)|^2 dt \leq \int_0^T -2(F + y)w + |w|^2 + 4Fy dt.$$

Zpětnou manipulací získáme

$$\int_0^T |F - y - \varphi(w)|^2 dt \leq \int_0^T |F + y - w|^2 dt.$$

Jelikož  $w$  je libovolná funkce z  $L^2(0, T)$ , můžeme dosadit  $w = F + y$  a dostaneme

$$\int_0^T |F - y - \varphi(F + y)|^2 dt \leq 0.$$

Jelikož funkce uvnitř integrálu je nezáporná, dostáváme  $F - y - \varphi(F + y) = 0$  a díky Lemmatu 3.1 pak platí  $(F, y) \in \mathcal{A}$  pro skoro všechna  $t \in (0, T)$ . □

Nakonec uvedeme důležitou větu o kontrakci na Banachových prostorech.

**Věta 3.1** (Věta o stejnoměrné kontrakci). *Nechť  $X, Y$  jsou neprázdné Banachovy prostory. Necht' zobrazení  $G : X \times Y \rightarrow X$  splňuje*

$$\|G(x, y) - G(\bar{x}, y)\|_X \leq \alpha \|x - \bar{x}\|_X, \quad (3.5)$$

$$\|G(x, y) - G(x, \bar{y})\|_X \leq \beta \|y - \bar{y}\|_Y, \quad (3.6)$$

pro libovolné  $x, \bar{x} \in X, y, \bar{y} \in Y$  s nějakými konstantami  $\alpha \in (0, 1)$  a  $\beta > 0$ . (Funkce  $G(x, y)$  je tedy kontrakcí vzhledem k první proměnné  $x$ . Vzhledem k druhé proměnné  $y$  je lipschitzovskou funkcí.) Pak pro libovolné  $y \in Y$  existuje právě jedno  $x \in X$  takové, že  $x = G(x, y)$ . Navíc zobrazení  $y \mapsto x$  je lipschitzovsky spojitě.

Důkaz. Viz [8], §1, Věta 3.2, důkaz obecnějšího výsledku. □

---

<sup>1</sup>  $f_n(t) \xrightarrow[L^2(0, T)]{\text{slabě}} f(t) \iff \int_0^T f_n(t)\varphi dt \rightarrow \int_0^T f(t)\varphi dt \quad \forall \varphi \in L^2(0, T)$



## 3.2 Hlavní výsledky

V této podkapitole uvádíme důkazy dvou vět, které dohromady dávají existenci a jednoznačnost řešení naší úlohy (PC).

**Věta 3.2.** *Nechť platí předpoklady (MG), (K) a  $\gamma$  lipschitzovsky spojitá. Pak úloha (PC) má nejvýše jedno řešení přiřazené k počátečním podmínkám (IC).*

*Důkaz.* Nechť  $(x^1, F_d^1), (x^2, F_d^2)$  jsou dvě řešení se stejnými počátečními podmínkami. Dosadíme je do (3.1)<sub>1</sub> a vzniklé dvě rovnice od sebe odečteme. Položíme  $z = x^1 - x^2$ . Tím jsme získali rovnici

$$\ddot{z} + F_d^1 - F_d^2 + kz = 0.$$

Rovnici vynásobíme výrazem  $2\dot{z}$  a dostaneme

$$\frac{d}{dt}(\dot{z}^2 + kz^2) + (F_d^1 - F_d^2)2\dot{z} = 0. \quad (3.7)$$

Díky vztahům v (3.2) máme  $(F_d + \gamma(\dot{x}), \dot{x}) \in \mathcal{A}$ . Jelikož  $\gamma$  je lipschitzovská s konstantou  $L_\gamma$ , pak z monotónie  $\mathcal{A}$  (viz (MG)<sub>1</sub>) dostáváme

$$0 \leq [F_d^1 - F_d^2 + \gamma(\dot{x}^1) - \gamma(\dot{x}^2)](\dot{x}^1 - \dot{x}^2) \leq (F_d^1 - F_d^2)\dot{z} + L_\gamma\dot{z}^2$$

Po dosazení do (3.7) dostaneme

$$\frac{d}{dt}(\dot{z}^2 + kz^2) \leq 2L_\gamma\dot{z}^2.$$

Integrací přes interval  $(0, t)$  získáme

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{ds}(\dot{z}^2 + kz^2) ds &\leq \int_0^t 2L_\gamma\dot{z}^2 ds \\ \dot{z}^2 + kz^2 &\leq \dot{z}_1^2 + kz_0^2 + 2L_\gamma \int_0^t \dot{z}^2 ds \\ &\leq \dot{z}_1^2 + kz_0^2 + 2L_\gamma \int_0^t (\dot{z}^2 + kz^2) ds \quad \forall t \in (0, T). \end{aligned}$$

Nyní můžeme užít (Gronwallova) Lemmatu 4.1 a dostaneme

$$\dot{z}^2 + kz^2 \leq (\dot{z}_1^2 + kz_0^2) \exp[2L_\gamma(t - t_0)] \quad \forall t \in (0, T).$$

Jelikož  $z_0 = z_1 = 0$  (díky shodným počátečním podmínkám pro  $x^1, x^2$ ), pak řešení  $z = x^1 - x^2$  je nulové, a tedy řešení  $x$  je dáno jednoznačně.  $\square$

**Věta 3.3.** *Nechť platí předpoklady (MG), (K) a  $\gamma$  lipschitzovsky spojitá. Pak úloha (PC) má alespoň jedno řešení přiřazené k počátečním podmínkám (IC).*

*Důkaz.* Důkaz provedeme v několika krocích. Vytvoříme aproximativní úlohu (FCn), pro její řešení najdeme odhady nezávislé na  $n$ , vybereme konvergentní podposloupnosti a provedeme limitní přechod k úloze (PC).

1) *Aproximativní úloha (PCn)*

Vzhledem k Lemmatu 3.1 dostáváme z (PC)<sub>2</sub> ekvivalentní vztah

$$F_c = \dot{x} + \varphi(F_c + \dot{x}).$$

Provedeme-li substituci  $\dot{x} := \dot{x} - \frac{F_c}{n}$ , získáme posloupnost aproximativních úloh

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) F_c = \dot{x} + \varphi\left(\dot{x} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) F_c\right). \quad (3.8)$$

Uvažujeme nyní řešení  $F^n, x^n$ , ale horní index  $n$  pro jednoduchost zápisu vynecháváme. Pro  $n$  dost velké je pravá strana (3.8) stejnoměrnou kontrakcí v proměnné  $F_c$ . To plyne z ověření předpokladu Věty 3.1, tj. vztahu (3.5), kde funkce  $G(x, y)$  má tvar

$$G(F_c, \dot{x}) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left[ \dot{x} + \varphi\left(\dot{x} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) F_c\right) \right].$$

Provedeme výpočet k ověření vlastnosti (3.5), kde využijeme 1-lipschitzovskosti funkce  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} & \|G(F_c, \dot{x}) - G(\bar{F}_c, \dot{x})\| \\ &= \left\| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left[ \varphi\left(\dot{x} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) F_c\right) - \varphi\left(\dot{x} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \bar{F}_c\right) \right] \right\| \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|F_c - \bar{F}_c\| = \frac{n-1}{n+1} \|F_c - \bar{F}_c\| \end{aligned}$$

Protože  $\frac{n-1}{n+1} \in (0, 1) \forall n \in \mathbb{N}$  má funkce  $G(F_c, \dot{x})$  vlastnost (3.5) stejnoměrné kontrakce. Podobně odvodíme, že funkce  $G(F_c, \dot{x})$  je lipschitzovská vzhledem k  $\dot{x}$ , tj. ověříme vlastnost (3.6) a vyjde nám konstanta  $\beta = \frac{2(n+1)}{n} \geq 0$ . Tímto z Věty 3.1 plyne, že vztah (3.8) je ekvivalentní

$$\boxed{F_c = g_n(\dot{x})}$$

a tato funkce  $g_n$  je globálně lipschitzovsky spojitá. Odpovídající systém obyčejných diferenciálních rovnic (dále jen ODR) je

$$\ddot{x} + g_n(\dot{x}) - \gamma(\dot{x}) + kx = F, \quad (3.9)$$

který je globálně řešitelný pomocí standardní teorie ODR (viz [9], Věta 2.4.5). Vytvořili jsme tímto úlohu, která aproximuje (PC).

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x}^n + F_c^n(\dot{x}^n) - \gamma(\dot{x}^n) + kx^n &= F, \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right) F_c^n &= \left[\dot{x}^n + \varphi\left(\dot{x}^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right) F_c^n\right)\right]. \end{aligned}} \quad (\text{PCn})$$

2) *Řešení ( $F^n, x^n$ ) úlohy (PCn) a odhady nezávislé na  $n$*

Nyní potřebujeme získat apriorní odhady, které jsou nezávislé na  $n$ . Vztah (PCn)<sub>2</sub> je díky Lemmatu 3.1 ekvivalentní s

$$\left(F_c, \dot{x} - \frac{F_c}{n}\right) \in \mathcal{A}$$

Z předpokladu koercivity (K) dostáváme

$$\begin{aligned} F_c \left(\dot{x} - \frac{F_c}{n}\right) &\geq c_2 F_c^2 - c_3 \\ F_c \dot{x} &\geq \left(c_2 + \frac{1}{n}\right) F_c^2 - c_3 \end{aligned}$$

Pro  $n$  dost velké máme

$$F_c \dot{x} \geq c_4 F_c^2 - c_3. \quad (3.10)$$

Vynásobíme rovnici (3.9) výrazem  $2\dot{x}$ . Při úpravě výrazů využijeme vlastností: koercivita z (3.10), omezenost relaxační funkce  $|\gamma(u)| \leq L_\gamma |u|$  díky předpokladu  $\gamma(0) = 0$  a Youngova nerovnost  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + kx^2) + 2F_c \dot{x} - 2\gamma(\dot{x})\dot{x} &= 2F\dot{x} \\ \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + kx^2) + c_4 F_c^2 - c_3 - 2\gamma(\dot{x})\dot{x} &\leq 2F\dot{x} \\ \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + kx^2) + c_4 F_c^2 &\leq c_3 + 2L_\gamma |\dot{x}|^2 + 2F\dot{x} \\ &\leq c_3 + 2L_\gamma |\dot{x}|^2 + c_5(|F|^2 + |\dot{x}|^2) \\ &\leq c_3 + c_6 |\dot{x}|^2 + c_5 |F|^2 \\ &\leq c_7(1 + |\dot{x}|^2 + |F|^2) \end{aligned}$$

Získali jsme potřebný odhad

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + kx^2) + c_4 F_c^2 \leq c_7(1 + |\dot{x}|^2 + |F|^2). \quad (3.11)$$

Rovnici integrujeme přes interval  $(0, t)$ ,  $t \in (0, T)$ . Jelikož vnější síla je omezená na  $L^2(0, T)$  z předpokladu (3.3), tlumící síla  $F_c$  je omezená z její definice v (C) a  $\int_0^t 1 ds \leq T$ , dostaneme

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + kx^2) ds \leq K_1 + c_7 \int_0^t |\dot{x}|^2 ds, \quad K_1 = K_1(F, F_c, T).$$

A odtud

$$\dot{x}^2 + kx^2 \leq K_2 + c_7 \int_0^t |\dot{x}|^2 ds, \quad K_2 = K_2(F, F_c, T, x_0, x_1).$$

Užijeme (Gronwallovo) Lemma 4.1

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + kx^2 &\leq K_2 + c_7 \int_0^t |\dot{x}|^2 ds \\ &\leq K_2 + c_7 \int_0^t |\dot{x}|^2 + |kx|^2 ds \quad \forall t \in (0, T) \\ \Rightarrow \dot{x}^2 + kx^2 &\leq K_3, \quad K_3 = K_3(F, F_c, T, x_0, x_1) \quad \forall t \in (0, T). \end{aligned}$$

Pokud zvolíme  $t_0 = 0$  a  $t = T$ , máme omezenost  $x, \dot{x}$  na  $\mathcal{C}(0, T)$ . Omezenost  $\ddot{x}$  získáme ze vztahu (3.9), kde všechny ostatní členy rovnice jsou omezené na  $L^2(0, T)$ .

Na prostoru  $W^{2,2}(0, T) = \{v \in L^2(0, T); D^\alpha v \in L^2(0, T) \quad \forall |\alpha| \leq 2\}$  je definována norma  $\|f(t)\|_{W^{2,2}(0, T)}^2 = \int_0^T \sum_{|\alpha| \leq 2} |D^\alpha f(t)|^2 dt$ . Pro nás to tedy znamená

$$\|x(t)\|_{W^{2,2}(0, T)}^2 = \int_0^T a|x(t)|^2 + b|\dot{x}(t)|^2 + c|\ddot{x}(t)|^2 dt, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$

Celkem máme omezené posloupnosti  $F_c, x, \dot{x}, \ddot{x}$ , stejně tak máme omezené  $\gamma(\cdot), F(t)$  na  $L^2(0, T)$ . Odtud je vidět, že posloupnosti  $(F_c, x)$  řešení rovnice (3.9) jsou omezené na  $L^2(0, T) \times W^{2,2}(0, T)$ .

### 3) Výběr konvergentních podposloupností

Prostor  $L^2(0, T)$  je reflexivní Banachův prostor a tedy platí, že z každé omezené posloupnosti lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost. Pro posloupnosti  $x^n, \dot{x}^n$  umíme dokázat dokonce stejnoměrnou konvergenci. K tomu je potřeba užití několika následujících tvrzení.

- T1 Omezená množina  $A$  je relativně kompaktní právě tehdy, když z každé posloupnosti v  $A$  lze vybrat konvergentní podposloupnost.
- T2 (Arzela-Ascoli): Buď  $K$  kompaktní prostor. Množina  $A$  je relativně kompaktní v  $\mathcal{C}(K)$  právě tehdy, když  $A$  je omezená a stejně spojitá.
- T3 (Definice) Množina funkcí  $A$  na prostoru  $K$  je stejně spojitá, jestliže  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in K : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall f \in \mathcal{C}(K)$
- T4 Nechť posloupnost  $f_n(x)$  je definována na  $K$ . Pak následující výroky jsou ekvivalentní:

1.  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$  konvergují stejnoměrně v  $K$ .
2.  $\sigma_n \rightarrow 0$  pro  $n \rightarrow \infty$ , kde  $\sigma_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ .

Stačí pouze ověřit stejnou spojitost pro posloupnosti  $x^n, \dot{x}^n$ . Hledáme volbu pro  $\delta$ , kde  $K = [0, T]$ . Užijeme zde již známého výsledku  $\|\ddot{x}^n\|_{L^2(0, T)} \leq K_4$ . Jelikož platí  $(t_1, t_2) \subset (0, T)$ , můžeme říct, že  $\|\ddot{x}^n\|_{L^2(t_1, t_2)} \leq \|\ddot{x}^n\|_{L^2(0, T)} \leq K_4$ .

$$|x^n(t_2) - x^n(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}^n(t)| dt \leq K(t_2 - t_1) = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{K},$$

$$|\dot{x}^n(t_2) - \dot{x}^n(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\ddot{x}^n(t)| dt \leq \left( \int_{t_1}^{t_2} |\ddot{x}^n(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t_1}^{t_2} 1 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq K_4 \sqrt{t_2 - t_1} = \varepsilon \Rightarrow \delta = \left( \frac{\varepsilon}{K_4} \right)^2.$$

Díky tvrzením T1-T3 jsme získali konvergenci podposloupností  $x^n, \dot{x}^n$  na prostoru  $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}([0, T])$ , kde  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(K)} = \|\cdot\|_{\text{sup}}$ . Z tvrzení T4 již jasně vidíme, že se jedná o stejnoměrnou konvergenci na  $K = [0, T]$ . Celkem máme

$$\begin{aligned} F_c^{n_k} &\rightharpoonup F_c, & \ddot{x}^{n_k} &\rightharpoonup \ddot{x} & \text{slabě v } L^2(0, T) \\ \dot{x}^{n_k} &\rightarrow \dot{x}, & x^{n_k} &\rightarrow x & \text{stejněměrně na } (0, T). \end{aligned}$$

### 4) Limitní přechod k úloze (PC)

Ověříme nejprve, že limitní dvojice  $(F_c, \dot{x})$  z (PC<sub>n</sub>) splňuje vztah (PC)<sub>2</sub>. Pro každé  $n$  máme

$$\begin{aligned} (F^n, y^n) &\in \mathcal{A}, \\ F^n &= F_c^n, \\ y^n &= \dot{x}^n - \frac{F_c^n}{n}. \end{aligned}$$

Posloupnost  $F^n \rightarrow F = F_c$  konverguje slabě v  $L^2(0, T)$  a  $y^n \rightarrow y = \dot{x}$  konverguje silně. Odtud dostáváme platnost předpokladu z Lemma 3.2, tj. zda  $F^n y^n \rightarrow Fy$

$$\int_0^T [F^n y^n - Fy] \varphi dt = \int_0^T [F^n (y^n - y) + y(F^n - F)] \varphi dt \rightarrow 0.$$

První člen jde k nule díky silné konvergenci  $y^n$ , kterou násobení funkcí  $F^n$  ( $n$  libovolné) neovlivní, jelikož  $F^n$  je omezená na  $L^2(0, T)$ . V druhém členu je konvergence  $F^n$  pouze slabá, ale násobíme funkcí  $y \in L^2(0, T)$ , kterou můžeme považovat za testovací funkci na  $L^2(0, T)$ . Tímto získáváme z Lemmatu 3.2, že platí  $(F_c, \dot{x}) \in \mathcal{A}$ .

Nakonec se podíváme, že limitní dvojice  $(F_c, \dot{x})$  z (PCn) splňuje (PC)<sub>1</sub>. K tomu využijeme předchozích výsledků o konvergenci jednotlivých členů výrazu z (PCn)<sub>1</sub>. Limitní přechod mezi rovnicemi (PCn)<sub>1</sub> a (PC)<sub>1</sub> provedeme pomocí jejich integrálních formulací, tj. jde o ekvivalentní formulaci rovnice  $m\ddot{x}^n + F_c^n - \gamma(\dot{x}^n) + kx^n = F$ .

$$x^n(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}^n(s) ds, \quad t \in (0, T), \quad (3.12)$$

$$\dot{x}^n(t) = \dot{x}_1 + \int_0^t [F(s) - F_c^n(\dot{x}^n(s)) + \gamma(\dot{x}^n(s)) - kx^n(s)] ds. \quad (3.13)$$

Limitní přechod v rovnosti (3.12) je zřejmý, neboť  $x^n, \dot{x}^n$  konvergují stejnoměrně na  $[0, T]$ . V rovnosti (3.13) se podíváme postupně na jednotlivé její členy. Členy  $x^n, \dot{x}^n$  konvergují stejně jako výše. Funkce  $\gamma(\cdot)$  je lipschitzovská s konstantou  $L_\gamma$ , konvergence  $\dot{x}^n$  je stejnoměrná na  $[0, T]$ . Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} \|\gamma(\dot{x}^n(t)) - \gamma(\dot{x}(t))\|_{L^2(0, T)} &= \left( \int_0^T |\gamma(\dot{x}^n(t)) - \gamma(\dot{x}(t))|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq |T|^{1/2} \sup_{t \in (0, T)} |\gamma(\dot{x}^n(t)) - \gamma(\dot{x}(t))| \\ &= |T|^{1/2} \|\gamma(\dot{x}^n(t)) - \gamma(\dot{x}(t))\|_{C(0, T)} \\ &\leq |T|^{1/2} L_\gamma \|\dot{x}^n(t) - \dot{x}(t)\|_{C(0, T)} \xrightarrow[\text{stejnomyrně}]{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

tzn. funkce  $\gamma(\dot{x}^n)$  konverguje na  $L^2(0, T)$ , dokonce konverguje stejnoměrně na  $[0, T]$ . Zbývá nám člen  $F_c^n$ , který konverguje pouze slabě na  $L^2(0, T)$ . To nám ale stačí, jelikož můžeme použít následující

$$\int_0^T F_c^n(\dot{x}^n(s)) \chi(s)_{(0, t)} ds \longrightarrow \int_0^t F_c(\dot{x}(s)) ds,$$

kde charakteristickou funkci  $\chi_{(0, t)}$  bereme jako testovací funkci pro konvergenci funkce  $F_c^n(\dot{x}^n(s))$  v  $L^2(0, t)$ .

Tímto postupem jsme dokázali, že naše aproximativní úloha (PCn) odpovídá úloze (PC). Za daných podmínek tedy vždy existuje řešení úlohy (PC).  $\square$

Díky uvedeným Větám 3.2 a 3.3 jsme dokázali, že úloha (PC) má za daných podmínek: (MG), (K), (3.3) a  $\gamma(\cdot)$  globálně lipschitzovská, právě jedno řešení.

## 4. Analýza konkrétních modelů

V této kapitole se věnujeme některým konkrétním modelům jednoduchých mechanických oscilátorů s implicitními konstitutivními vztahy. Zaměříme se hlavně na modely s implicitním tlumením Coulombova typu s nějakou relaxační funkcí  $\gamma(\dot{x})$ . Na vlastnosti řešení daných modelů se podíváme nejen pomocí matematické analýzy, ale též numericky znázorníme chování daného systému. Prvním úkolem je sestavení algoritmu pro výpočet řešení diferenciálně-algebraické soustavy rovnic, konkrétně řešení úlohy (PC) z kapitoly 3.

### 4.1 Sestavení numerického algoritmu

Postup tvorby algoritmu je inspirován článkem [3], kde byla řešena podobná úloha s  $F_d = a\dot{x}$  pro  $\dot{x} \neq 0$  a  $\dot{x} = 0$  pro  $|F_d| \leq \phi_0$ . Náš model má navíc předpis pro sílu  $F_d$  plně implicitní.

Studujeme jednoduchý mechanický oscilátor s pružinou a tlumičem zapojeným paralelně. Tlumící síla je Coulombova typu s relaxací  $F_d = F_c - \gamma(\dot{x})$  a síla v pružině je lineární  $F_s = kx$ . Relaxační funkci  $\gamma(\cdot)$  požadujeme lipschitzovsky spojitou s konstantnou  $L_\gamma$  a navíc  $\gamma(0) = 0$ . Rovnováha sil dává

$$m\ddot{x} + \overbrace{F_d}^{F_d} - \overbrace{\gamma(\dot{x})}^{\gamma(\dot{x})} + \overbrace{kx}^{F_s(x)} = F(t), \quad (\text{FC})$$

kde síla  $F_c$  Coulombova typu je definována (stejně jako v kapitole 3)

$$\boxed{\begin{array}{ll} F_c = \phi_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}) & \text{pro } \dot{x} \neq 0, \\ \dot{x} = 0 & \text{pro } |F_c| \leq \phi_0. \end{array}} \quad (\text{C})$$

Řešení je přiřazeno počátečním podmínkám

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1. \quad (\text{IC})$$

Pro lepší představu při sestavování algoritmu opět uvádíme grafy závislosti tlumivé síly  $F_c$  a  $F_c - \gamma(\dot{x})$  na rychlosti  $\dot{x}$  (viz obrázek 4.1).

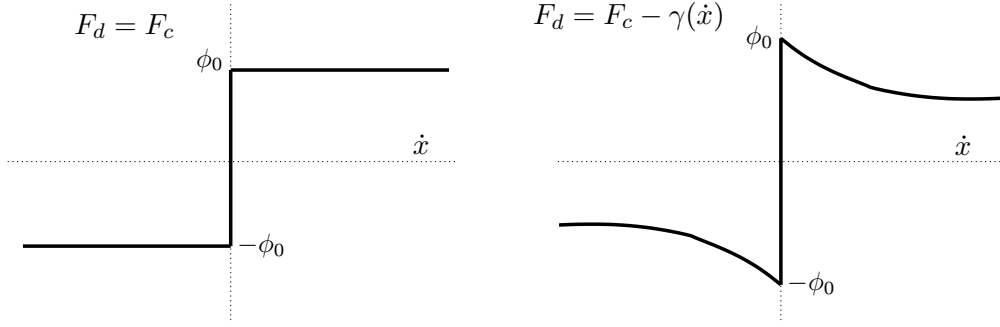
Pro výpočet řešení rovnice (FC) sestavíme numerické schéma pomocí zpětné diference použité na  $v := \dot{x}$ . Abychom získali celé schéma pouze v proměnných  $v$ , použijeme zpětnou diferenci také na  $\dot{F}_s$ , jelikož lze psát  $F_s = kx \Rightarrow \dot{F}_s = k\dot{x}$ . Použijeme tedy aproximace

$$\dot{v} \approx \frac{v^{n+1} - v^n}{dt}, \quad (4.1)$$

$$\dot{F}_s \approx \frac{F_s^{n+1} - F_s^n}{dt} = kv^{n+1}, \quad (4.2)$$

kde  $dt$  značí časový krok  $dt = t_{n+1} - t_n$  při ekvidistantním dělení časového intervalu  $[0, T]$ . Diskretizovaná veličina  $z^n$  značí aproximaci veličiny  $z(t)$  v čase  $t_n$ , čili  $z^n \approx z(t = t_n)$ ,  $n = 0, \dots, N$ . Dosadíme (4.1) a (4.2) do (FC) a dostaneme

$$m \frac{v^{n+1} - v^n}{dt} + F_c^{n+1} - \gamma(v^{n+1}) + \overbrace{F_s^n + dtkv^{n+1}}^{=F_s^{n+1}} = F^{n+1}. \quad (4.3)$$



Obrázek 4.1: Monotónní graf plně implicitní tlumivé síly Coulombova typu (vlevo) a graf obecnější implicitní tlumivé síly Coulombova typu s relaxací (vpravo).

Upravíme výraz (4.3) tak, abychom získali předpis pro výpočet  $v^{n+1}$ .

$$v^{n+1} = \left( \frac{m}{dt} + dtk \right)^{-1} \left( \frac{m}{dt} v^n + F^{n+1} - F_s^n - F_c^{n+1} + \gamma(v^{n+1}) \right) \quad (4.4)$$

Výraz ve (4.4) definuje  $v^{n+1}$  pomocí implicitního vztahu  $v^{n+1} = g(F_d^{n+1}, \gamma(v^{n+1}))$ . Nejprve se budeme zabývat problémem implicitní funkce jen z pohledu zadání síly  $F_c^{n+1}$ , tj. bez ohledu na tvar relaxační funkce  $\gamma(v^{n+1})$ . Díky tvaru funkce  $F_c^{n+1}$  danou v (C) se lze při jejím výpočtu vyhnout závislosti na  $v^{n+1}$ . Označíme výrazy ve (4.4) následovně

$$v^{n+1} = \left( \frac{m}{dt} + dtk \right)^{-1} \left( \tilde{F}^{n+1} - \frac{-F_c^{n+1} + \gamma(v^{n+1})}{-F_d^{n+1}} \right), \quad (4.5)$$

$$\tilde{F}^{n+1} = \frac{m}{dt} v^n + F^{n+1} - F_s^n.$$

Označení souhrnné síly  $\tilde{F}^{n+1}$  je velmi užitečné pro další úvahy při tvorbě numerického algoritmu. Pokud celá mechanická soustava setrvává v klidu, tj.  $v^{n+1} = 0$ , pak síla  $\tilde{F}^{n+1} = \tilde{f}(m, dt, v^n, F^{n+1}, F_s^n)$  z (4.5) vyrovnává působení síly  $F_c^{n+1}$  (je-li  $F_d^{n+1} = F_c^{n+1}$  díky  $\gamma = 0$ ). Odtud platí

$$F_c^{n+1} = \tilde{F}^{n+1} \text{ pro } v^{n+1} = 0. \quad (4.6)$$

Pokud v nehybném stavu (tj.  $v^n = 0$ ) velikost síly  $\tilde{F}^{n+1}$  přesáhne mezní hodnotu  $\phi_0$  (což může nastat pouze pro  $F(t) \neq 0$ ), uvede tato síla celý systém do pohybu, tj.  $v^{n+1} \neq 0$ , ve směru svého působení. Určí tím také směr působení síly  $F_c^{n+1}$ , čili díky (4.5) a vlastnosti  $\text{sgn}(F_c) = \text{sgn}(v^{n+1})$  z definice (C) můžeme tvrdit

$$\text{sgn}(F_c) = \text{sgn}(\tilde{F}). \quad (4.7)$$

Při výpočtu hodnoty  $F_c^{n+1} = \phi_0 \text{sgn}(v^{n+1})$  je hodnota  $v^{n+1}$  neznámá. Chceme tedy užít vlastnosti (4.7) i v případě, kdy  $v^n \neq 0$ . Rovnost (4.7) je splněna pro taková  $v$ , kdy platí  $|\gamma(v)| < \phi_0$ ,  $\gamma(v)$  spojitě. Obecnou platnost (4.7) dostaneme pro relaxační funkce omezené tak, že existuje konstanta  $A_\gamma$  taková, že

$$|\gamma(v)| \leq A_\gamma < \phi_0, \quad \forall v. \quad (4.8)$$

Význam podmínky (4.8) je dobře vidět v Obrázku 4.1 vpravo.

Při sestavování algoritmu výpočtu rychlosti  $v^{n+1}$ , je potřeba se podívat na vlastnosti relaxační funkce  $\gamma(v^{n+1})$ , která stále způsobuje implicitní zadání  $v^{n+1}$ . Hodnotu veličiny  $v^{n+1}$  můžeme zjistit iteračně z (4.5) pomocí výpočtu

$$v_{i+1}^{n+1} = \overbrace{\left(\frac{m}{dt} + dtk\right)^{-1} (\tilde{F}^{n+1} - F_c^{n+1} + \gamma(v_i^{n+1}))}^{=:g(v_i^{n+1})}. \quad (4.9)$$

Tento výpočet bude konvergovat díky následujícím dvěma tvrzením.

- (Definice) Nechtě  $X$  je normovaný lineární prostor. Zobrazení  $g : X \rightarrow X$  je kontrahující, jestliže existuje  $\alpha \in (0, 1)$  takové, že pro všechna  $x, y \in X$  platí  $\|g(x) - g(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$ .
- (O pevném bodě) Jestliže je zobrazení  $g$  kontrahující, pak existuje právě jeden bod  $v^* \in X$  tak, že  $g(v^*) = v^*$  (pevný bod).

Stačí nám tedy ověřit, zda je zobrazení  $g$  z (4.9) kontrahující, nebo za jakých podmínek na dané parametry tak platí. Pro zjednodušení si označíme z (4.9)

$$g(v_i^{n+1}) = K^{-1}(F + \gamma(v_i^{n+1})),$$

kde  $K, F$  jsou konstantní vzhledem k  $v^{n+1}$  a  $K$  je vždy kladné. Pro relaxační funkci  $\gamma(\cdot)$  platí  $\|\gamma(v) - \gamma(u)\| \leq L_\gamma \|v - u\|$ . Provedeme odhad

$$\|K^{-1}(F + \gamma(v)) - K^{-1}(F + \gamma(u))\| = K^{-1} \|\gamma(v) - \gamma(u)\| \leq K^{-1} L_\gamma \|v - u\|.$$

Odtud máme podmínku (kde  $\alpha > 0$  vždy)

$$\alpha = \frac{L_\gamma}{K} = \frac{L_\gamma}{\frac{m}{dt} + dtk} < 1. \quad (4.10)$$

Pokud bude tato podmínka splněna (díky nastavení parametrů a zvolení vhodné funkce  $\gamma$ ), pak bude iterační výpočet veličiny  $v^{n+1}$  konvergovat. Stejně tak můžeme podle této podmínky najít vhodnou relaxační funkci, při které bude algoritmus stále konvergovat, jestliže bude splněno  $L_\gamma < \frac{m}{dt} + dtk$ , kde nás zajímá  $L_\gamma$  pouze v okolí  $v = 0$  (pro zvolené nastavení parametrů  $m, k, dt$ ).

Nyní můžeme sestavit algoritmus pro výpočet řešení úlohy (FC), (C), (IC). Pro konkrétní realizaci výpočtu jsme zvolili relaxační funkci  $\gamma(v) = \frac{av}{b+|v|}$ , jejíž konstanta lipschitzovskosti je  $L_{\gamma_1} = a/b$  a omezenost  $|\gamma(v)| < a, \forall v$ . Budící síla je pro jednoduchost  $F(t) \equiv 0$ . V algoritmu je přeznačeno  $G^n := \gamma(v^n)$ . Parametry  $Z \in \mathbb{N}$  a  $eps > 0$  dostatečně malé, jsou vhodně voleny pro potřeby zpřesnění při iteračním výpočtu implicitní funkce  $v^{n+1} = g(v^{n+1})$  viz (4.13). Bohužel v Matlabu nelze definovat cyklus while, proto je nahrazen iteračním cyklem s podmínkou pro ukončení cyklu.



---

ALGORITMUS pro Matlab:

**Vstup :**  $m, k, \phi_0, dt, a, b, F^{n+1}, v^n, F_s^n;$

**Výstup :**  $x^{n+1}, v^{n+1}, F_s^{n+1}, F_c^{n+1};$

**Počáteční hodnoty:**  $x^1 = x_0, v^1 = x_1, F_s^1 = kx^1, F^1 = 0;$

**Výpočet :**

$$p_1 = m/dt; \quad p_2 = p_1 + kdt;$$

$$F^{n+1} = 0;$$

$$\tilde{F}^{n+1} = p_1 v^n + F^{n+1} - F_s^n;$$

$$\mathbf{if} \quad \mathit{abs}(FF) < \phi_0 \tag{4.11}$$

$$v^{n+1} = 0; \quad G^{n+1} = 0;$$

$$F_c^{n+1} = \tilde{F}^{n+1};$$

**else**

$$F_c^{n+1} = \phi_0 \mathit{sgn}(\tilde{F}^{n+1}); \tag{4.12}$$

$$v_i^n = v^n;$$

**for**  $i = 1 : Z,$

$$G_i^n = av_i^n / (b + \mathit{abs}(v_i^n));$$

$$v_{i+1}^n = (\tilde{F}^{n+1} - F_c^{n+1} + G_i^n) / p_2; \tag{4.13}$$

**if**  $\mathit{abs}(v_i^n - v_{i+1}^n) < \mathit{eps}$  **break;**

**else**  $v_i^n = v_{i+1}^n;$  **end**

**end**

$$v^{n+1} = v_{i+1}^n;$$

**end**

$$F_s^{n+1} = dtkv^{n+1} + F_s^n;$$

$$x^{n+1} = F_s^{n+1} / k;$$

---

V úseku (4.11) jsme v implicitní oblasti  $v = 0$  a využíváme podmínky (4.6) a v úseku (4.12) využíváme podmínky (4.7) při splnění (4.8). Díky nastavení pro (4.10) provádíme v (4.13) iterační zpřesnění výpočtu  $v^{n+1}$ .

## 4.2 Numerické výsledky

Zde si vykreslíme numerické řešení úlohy (FC), (C), (IC). Čili přesněji

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + F_c - \gamma(\dot{x}) + kx &= F(t), \\ F_c &= \phi_0 \mathit{sgn}(\dot{x}) \quad \mathbf{pro} \quad \dot{x} \neq 0, \\ \dot{x} &= 0 \quad \mathbf{pro} \quad |F_c| \leq \phi_0, \tag{PC} \\ x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= x_1. \end{aligned}$$

Nejprve se budeme zabývat úlohou (PC) bez relaxační funkce, tj.  $\gamma(\dot{x}) \equiv 0$ , protože pak úlohu (PC) umíme řešit analyticky. Poté řešení porovnáme s numerickým řešením pomocí našeho algoritmu. Nakonec si vykreslíme řešení úlohy (PC) s relaxační funkcí  $\gamma(\dot{x}) \neq 0$  a porovnáme s řešením bez relaxace. Pro zjednodušení výpočtu si zvolíme nastavení  $m = 1, k = 1$  a  $F(t) \equiv 0$ .

Podíváme se tedy na řešení úlohy (PC) s  $\gamma(\dot{x}) \equiv 0$  analyticky. Vzhledem ke tvaru  $(F_c, \dot{x}) \in \mathcal{A}$  z (C) můžeme sílu  $F_c$  považovat za počástech konstantní funkci pro  $\dot{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Zabýváme se tedy úlohou

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= -\phi_0 & \text{pro } \dot{x} > 0, \\ \ddot{x} + x &= +\phi_0 & \text{pro } \dot{x} < 0, \\ x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= x_1. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Když se podíváme pouze na úlohu (4.14) pro  $\dot{x} > 0$ , je jejím řešením

$$x(t) = x_0 \cos t + x_1 \sin t - \phi_0,$$

kde  $x_0, x_1$  jsou počáteční podmínky. Rovnici (4.14)<sub>1</sub>, jež je druhého řádu, přepíšeme na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - \phi_0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Odtud lze snadno sestavit fázový portrét řešení (4.14)<sub>1</sub> ve fázové rovině  $(x, y) = (x, \dot{x})$ . Trajektorie budou mít tvar soustředných kružnic o poloměru  $r = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}$  a středu  $[-\phi_0, 0]$ , jež je stacionárním řešením (4.15). Řešením (4.14) pro  $\dot{x} < 0$  je

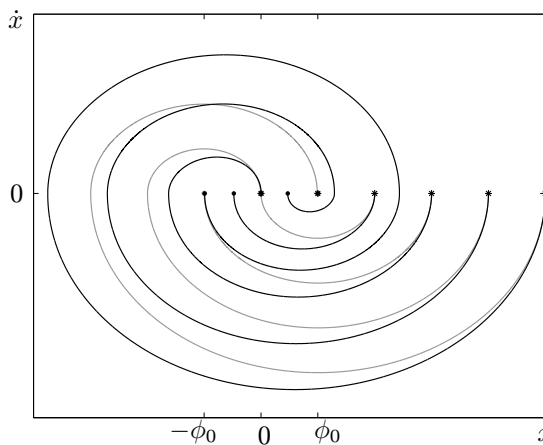
$$x(t) = x_0 \cos t + x_1 \sin t + \phi_0.$$

Trajektorie ve fázové rovině  $(x, y) = (x, \dot{x})$  jsou také soustředné kružnice o poloměru  $r = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}$ , ale o středu  $[\phi_0, 0]$ . Dohromady bude mít fázový portrét úlohy (4.14) tvar soustředných půlkružnic o středu  $[-\phi_0, 0]$  pro  $\dot{x} > 0$  a středu  $[\phi_0, 0]$  pro  $\dot{x} < 0$ . Díky tomuto tvaru trajektorií řešení, budou řešení v bodech  $[\cdot, 0]$  spojitě. Navíc platí, že body mezi  $-\phi_0$  a  $\phi_0$  na ose  $\dot{x} = 0$  jsou všechny stabilní stacionární body.

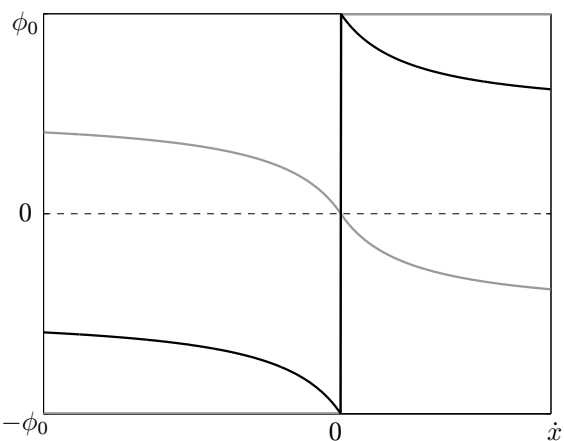
Následuje seznam obrázků, na kterých jsou vykreslena řešení úlohy (PC) s  $\gamma(\dot{x}) \equiv 0$  a s  $\gamma(\dot{x}) \neq 0$  vytvořená pomocí našeho algoritmu. Příslušná zobrazení jsou vždy vedle sebe, pro snadné porovnání výsledků. Vykreslená řešení mají parametry  $m = k = \phi_0 = 1$  a konečný čas výpočtu  $T = 10$  (pro  $dt = 10^{-3}$ ,  $Z = 100$ ,  $eps = 10^{-4}$ ). Počáteční hodnoty jsou  $x_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  a  $x_1 = 0$  (při  $F(t) \equiv 0$ ), kde pohyb vzniká pro  $x_0 \geq \phi_0$ . Pro relaxační funkci

$$\gamma(\dot{x}) = \frac{a\dot{x}}{b + |\dot{x}|}$$

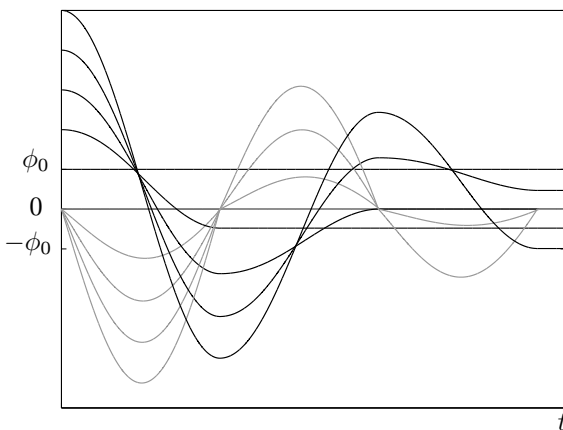
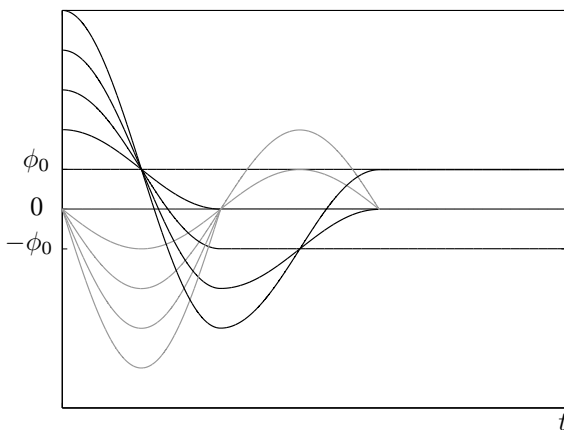
jsme zvolili nastavení  $a = 0.5$ ,  $b = 1$ . Na fázovém diagramu (viz Obrázek 4.2) je vidět porovnání řešení úlohy (PC) s a bez relaxace. Relaxační funkce snižuje účinek tlumivé síly  $F_c$  ve větší vzdálenosti od rovnovážné polohy, tj. pro větší hodnoty rychlosti.



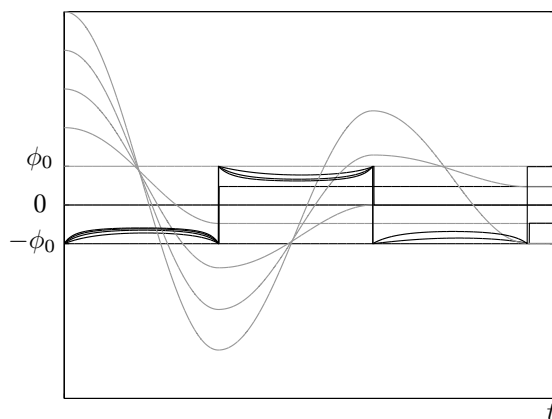
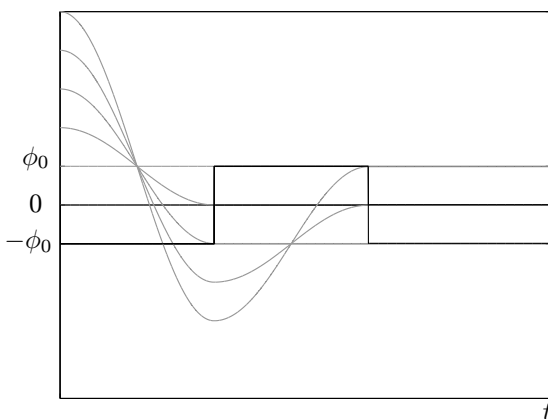
Obrázek 4.2: Fázový diagram řešení (PC) bez relaxace (šedě) a s relaxací (černě).



Obrázek 4.3: Graf implicitní tlumivé síly  $F_d$  (černě) s danou relaxací  $\gamma(\dot{x})$  (šedě).



Obrázek 4.4: Časový průběh polohy  $x(t)$  (černě) a rychlosti  $\dot{x}(t)$  (šedě) pro úlohu (PC) bez relaxace (vlevo) a s relaxací (vpravo) pro  $x_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  a  $x_1 = 0$ .



Obrázek 4.5: Časový průběh působících sil  $F_d$  (černě) a  $F_s$  (šedě) pro úlohu (PC) bez relaxace (vlevo) a s relaxací (vpravo) pro  $F_s^0 = kx_0$  a  $F_d^0 = F_c^0 = \phi_0$  (při  $F(t) \equiv 0$ ).

# Závěr

V práci jsme se zabývali úlohou

$$m\ddot{x} + F_s + F_d = F(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1$$

, kde působící síly  $F_s, F_d$  jsou zadány implicitně. V první kapitole jsme diskutovali stabilitu řešení některých lineárních úloh, kde jsme nerozlišovali mezi působením síly  $F_s$  a  $F_d$ . Implicitní závislost mezi vnitřními silami  $F_V$  a kinematickými veličinami obsahovala vyšší derivace síly  $F_V$  a polohy  $x$ . I přes jednoduchost takových úloh jsme našli taková parametrická nastavení, že řešení nebylo vždy stabilní. V druhé kapitole jsme řešili úlohu

$$\begin{aligned} \ddot{x} + F_s + F_d &= F, \\ x &= f(F_s), \\ \dot{x} &= g(F_d). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Pro monotónní funkce  $f, g$  jsme dokázali globální existenci řešení. Ve třetí kapitole jsme se zabývali úlohou

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx + F_d &= F, \\ F_d &= F_c - \gamma(\dot{x}), \\ (F_c, \dot{x}) &\in \mathcal{A}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

kde  $\mathcal{A}$  značí maximálně monotónní graf. Pro Lipschitzovskou funkci  $\gamma(\cdot)$  jsme dokázali globální existenci a jednoznačnost řešení. V poslední kapitole jsme sestavili numerický algoritmus pro řešení úlohy (4.17), kde síla  $F_c$  je Coulombova typu, tj.

$$\begin{aligned} F_c &= \phi_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}) & \text{pro } \dot{x} &\neq 0, \\ \dot{x} &= 0 & \text{pro } |F_c| &\leq \phi_0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Dále bychom se rádi podívali nejen numericky na úlohu (4.17), (4.18) pro  $\gamma(\dot{x})$  nelipschitzovské. Konkrétně na nejednoznačnost řešení takové úlohy a na možné vznikající bifurkační jevy. Také bychom rádi sestavily větu o existenci řešení úlohy, která by byla kombinací úlohy (4.16) a (4.17), tj.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + F_s + F_d &= F, \\ x &= f(F_s), \\ F_d &= F_c - \gamma(\dot{x}), \\ (F_c, \dot{x}) &\in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

# Použitá tvrzení a definice

**Lemma 4.1** (Gronwallovo lemma). *Nechť  $f, g$  jsou nezáporné spojité funkce na intervalu  $I$ . Nechť  $K \geq 0$  je konstantní a  $t \in I, t \geq t_0$ .*

$$\begin{aligned} \text{Jestliže} \quad & f(t) \leq K + \int_{t_0}^t f(s)g(s)ds, \\ \text{pak platí} \quad & f(t) \leq K \exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right). \end{aligned}$$

*Důkaz.* Viz [9], Lemma 1.5.2. □

**Lemma 4.2** (Youngova nerovnost). *Nechť  $p, q \in (1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Jestliže  $a, b$  jsou nezáporná čísla, pak*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Důkaz.* Viz [14] 10.2. □

**Lemma 4.3** (Hölderova nerovnost). *Předpokládejme, že  $f \in \mathcal{L}^p$  a  $g \in \mathcal{L}^q$ , kde  $p, q \in (1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Pak  $fg \in \mathcal{L}^1$  a*

$$\int_X |fg|d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.19)$$

*Důkaz.* Viz [14] 10.3. □

**Věta 4.1** (Arzela-Ascoli). *Buď  $K$  kompaktní prostor. Množina  $A$  je relativně kompaktní v  $\mathcal{C}(K)$  právě tehdy, když  $A$  je omezená a stejně spojitá.*

*Důkaz.* Viz [9], Věta 8.2.1. □

**Definice 4.1** (Stejně spojitá). *Množina funkcí  $A$  na prostoru  $K$  je stejně spojitá, jestliže ke každému  $x \in K$  a každému  $\varepsilon > 0$  lze nalézt takové okolí  $U$  bodu  $x$ , že  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ , kdykoliv  $f \in A$  a  $t \in U$ .*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in K : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall f \in \mathcal{C}(K)$$

**Definice 4.2** (Spojitě vnoření). *Banachův prostor  $X$  je spojitě vnořen do Banachova prostoru  $Y$ , značíme  $X \hookrightarrow Y$ , právě když*

- $X \subset Y$  ( $X$  je podmnožinou  $Y$ ),
- existuje  $C > 0$  tak, že pro každé  $x \in X$  platí  $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ .

**Poznámka 4.1.** *Je-li  $X$  spojitě vnořen do  $Y$ , je identické zobrazení  $Id : X \rightarrow Y, x \rightarrow x$  spojitě (omezené) nebo také omezené množiny v  $X$  jsou omezené v  $Y$ .*

**Lemma 4.4.**  $\mathcal{C}([0, T]) \hookrightarrow L^2(0, T) \hookrightarrow L^1(0, T)$  čili  $\|\cdot\|_{L^1} \leq c\|\cdot\|_{L^2} \leq c'\|\cdot\|_c$

*Důkaz.* V první části uijeme Hölderovy nerovnosti (4.19)

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_{L^1(0,T)} &= \int_0^T |f(t)| dt \leq \left( \int_0^T 1 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq T^{\frac{1}{2}} \|f(t)\|_{L^2(0,T)} \\ &\leq T \sup_{t \in (0,T)} |f(t)| = T \|f(t)\|_{C(0,T)} \end{aligned}$$

□

**Věta 4.2** (Limita integrálu závislého na parametru). *Bud'  $M \subset \mathbb{R}^n$  měřitelná,  $\mathbb{X}$  metrický prostor,  $a_0$  hromadný bod  $\mathbb{X}$ ,  $f(x, a)$  komplexní funkce na  $M \times \mathbb{X}$  a nechť platí*

1. *Pro s.v.  $x \in M$  existuje  $\lim_{a \rightarrow a_0} f(x, a) = g(x)$ .*
2. *Pro každé  $a \in \mathbb{X} - \{a_0\}$  je  $f(x, a)$  měřitelná v  $M$ .*
3. *Existuje funkce  $\varphi \in L(M)$  tak, že pro  $x \in \mathbb{X} - \{a_0\}$  je  $|f(x, a)| \leq \varphi(x)$  s.v. v  $M$ .*

Potom je

$$\lim_{a \rightarrow a_0} \int_M f(x, a) dx = \int_M g(x) dx.$$

*Důkaz.* Viz [14] důsledek věty 8.13.

□

**Definice 4.3** (Kontrahující zobrazení). *Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor. Zobrazení  $f : X \rightarrow X$  je kontrahující, jestliže existuje  $\alpha \in (0, 1)$  takové, že pro všechna  $x, y \in X$  platí*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|.$$

**Věta 4.3** (O pevném bodě). *Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a zobrazení  $f : X \rightarrow X$  je kontrahující. Pak existuje právě jeden bod  $x^* \in X$  tak, že  $f(x^*) = x^*$ . Tento bod nazýváme pevným bodem zobrazení  $f$ .*

*Důkaz.* Viz [15] 23.3.

□

# Literatura

- [1] D. PRAŽÁK, K. R. RAJAGOPAL: *Mechanical oscillators described by a system of differential-algebraic equations*. Appl. Math. 57 (2012), issue 2, 129-142.
- [2] D. PRAŽÁK, K. R. RAJAGOPAL: *Mechanical oscillators with fully implicit damping terms*. In preparation.
- [3] S. DARBHA, K. B. NAKSHATRALA, AND K. R. RAJAGOPAL: *On the vibrations of lumped parameter systems governed by differential-algebraic equations*. Journal of the Franklin Institute 347 (2010), issue 1, 87–101.
- [4] K.R. RAJAGOPAL: *A generalized framework for studying the vibration of lumped parameter systems*. Mechanics Research Communications 37 (2010), 463–466.
- [5] A.F. FILIPPOV: *Klassische Lösungen von Differentialgleichungen mit einer mehrdeutigen rechten Seite (Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side)*. SIAM J. Control 5 (1967), 609–621. (In English.)
- [6] L. MEIROVITCH: *Elements of Vibration Analysis*. 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [7] G. FRANCFORT, F. MURAT, AND L. TARTAR: *Monotone operators in divergence form with  $x$ -dependent multivalued graphs*. Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8), 7(1):23–59, 2004.
- [8] A. GRANAS AND J. DUGUNDJI: *Fixed point theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [9] I. I. VRABIE: *Differential Equations. An Introduction to Basic Concepts, Results and Applications*. World Scientific Publishing, River Edge, 2004.
- [10] W. RUDIN: *Real and Complex Analysis*. 3rd ed. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [11] C. CHICONE: *Ordinary differential equations with applications*. Springer, 2006.
- [12] K.R. RAJAGOPAL: *The elasticity of elasticity*. Z. Angew. Math. Phys. 58 (2007), no.2, 309-317.
- [13] J.K. HALE, H. KOCAK: *Dynamics and bifurcations*. Springer, 1991.
- [14] J.LUKEŠ, J.MALÝ: *Measure and integral*. Matfyzpress Praha, 2005.
- [15] J.LUKEŠ: *Zápisky z funkcionální analýzy*. skripta, UK Praha, 2003.