THE BEHAVIOUR OF NEW TYPES OF MATERIAL MODELS IN A SQUEEZE FLOW GEOMETRY

1. Obsah práce

Práce se zabývá klasickým problémem v mechanice kontinua – chováním tekutin v takzvané *squeeze flow* geometrii. Squeeze flow (lisování) je problém, který je zajímavý jak z ryze technologického – zjednodušený popis některých typů tlumičů, lisování plastických hmot a podobně – tak teoretického hlediska. Obšírné pojednání o problému squeeze flow včetně přehledu známých výsledků lze najít například v práci Engmann et al. (2005).

Mnohé v praxi důležité tekutiny vykazují charakteristiky, které nelze popsat klasickým Navier–Stokes modelem. Příkladem jsou tekutiny s viskozitou závislou na tlaku. Cauchyho tenzor napětí $\mathbb{T}$ je v tomto případě dán vztahem

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mu(p)\mathbb{D}, \tag{1.1}$$

kde $\mathbb{D}$ je symetrická část gradientu rychlosti a p značí tlak. Viskozita $\mu(p)$ se obvykle volí ve tvaru $\mu(p) = \mu_0 e^{\alpha p}$, kde μ_0 a α jsou kladné konstanty.

Z matematického hlediska představuje problém squeeze flow zkoumání úlohy s volnou hranicí pro model (1.1), což je obtížný problém jednak kvůli přítomnosti volné hranice a také kvůli použití nestandardního matematického modelu pro tekutinu. Z přehledné práce Engmann et al. (2005) a dalších pozdějších prací je zřejmé, že úloha typu squeeze flow doposud nebyla, přes její velký praktický význam, pro model (1.1) řešena. **Cílem práce je vyřešit problém squeeze flow pro model** (1.1)**.**

1.1. **Dosažené výsledky.** Problém je v práci řešen „analytickými" a numerickými metodami. Analytickými metodami se rozumí analytické řešení zjednodušeného problému, který je za jistých rozumných předpokladů vhodnou aproximací úplného problému. Při hledání řešení se využívá metod poruchového počtu, viz například Bush (1992). Poruchovým parametrem je v tomto případě bezrozměrný protějšek materiálové konstanty α, což je v mnoha fyzikálně relevantních situacích skutečně velmi malé číslo. **Tímto způsobem je nalezeno analytické řešení pro dvě různé okrajové podmínky (ulpívání a úplný skluz) na hranici mezi tekutinou a pevnými deskami mezi kterými je tekutina sevřena.**

Druhá část práce je věnována numerické simulaci problému. Řídící rovnice jsou řešeny v cylindrických souřadnicích a pro jednoduchost je zanedbán konvektivní člen, což je fyzikálně příjatelné na základě rozměrové analýzy. Klíčovým problémem je samozřejmě zvládnutí pohybu volné hranice, čehož je dosaženo metodou *body-fitted curvilinear coordinates*, viz Crank (1987), a nelinearity v konstitutivním vztahu (1.1). Prostorová diskretizace systému řídících parciálních diferenciálních rovnic je provedena spektrální metodou – *spectral collocation*, viz například Peyret (2002), Canuto et al. (2006, 2007) – jejíž různé varianty se osvědčily při výpočtech pro tekutiny s viskozitou závislou na tlaku v jiných geometriích, viz Gwynllyw et al. (1996). Numerické řešení je spočteno v prostředí MATLAB, přičemž je využito kódu dostupného v balíku Weideman and Reddy (2000). **Problém byl úspěšně numericky vyřešen pro okrajovou podmínku popisující ulpívání tekutiny na hranici s pevnými deskami, které ji stlačují. Spočtené výsledky jsou pečlivě analyzovány s ohledem na numerickou chybu.**

Ukazuje se, že tlaková závislost viskozity má, i přesto že koeficient α je velmi malý, významný dopad na chování dané tekutiny ve squeeze flow geometrii. Výsledky dosažené poruchovým počtem jsou srovnány s výsledky numerických simulací.

1.2. **Přínos autora.** Všechny výše uvedené výsledky jsou, pokud není uvedeno jinak, původní a získané autorem v průběhu řešení diplomové práce.

2. Hodnocení

2.1. **Věcná kvalita práce.** Dosažené výsledky jsou originální a pozorování o souvislosti viskozity závislé na tlaku a singularit v rozích oblasti (bod dotyku pevné stěny a volného povrchu tekutiny) je velmi zajímavé a hodné podrobného rozpracování. Analýza numerické chyby provedená autorem ovšem naznačuje, že numerické výsledky je nutné interpretovat velmi opatrně. Toto je bod, který osobně velmi oceňuji, neboť zdaleka není pravidlem, že výpočty provedené pro nenewtonovské tekutiny jsou doplněny o podrobnější analýzu chyby. Autor správně podotýká, že volba okrajové podmínky na hranici mezi pevnými deskami a tekutinou a na volné hranici je důležitý problém sám o sobě, a že fyzikálně není zcela jasné (rozuměj existuje několik možných přístupů byť i jen v kontextu Navier–Stokes modelu) jak popsat chování tekutiny v oblasti dotyku volné hranice a pevné stěny.

Část práce byla pod názvem „Behaviour of an incompressible fluid with pressure-dependent viscosity in a squeeze flow geometry" prezentována na soutěži SVOČ 2012 v sekci „S10: Aplikovaná matematika – Matematické modely dynamiky" a byla zde oceněna prvním místem.

2.2. **Formální kvalita práce.** Formální kvalita práce je velmi dobrá. Množství překlepů či jazykových chyb je minimální, grafická úprava je vynikající.

2.3. **Doporučení.** Předloženou práci lze uznat jako diplomovou práci.

Mgr. Vít Průša, Ph.D.
Matematický ústav Univerzity Karlovy

Reference

Bush, A. W. (1992). *Perturbation methods for engineers and scientists.* Boca Raton: CRC Press.

Canuto, C., M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang (2006). *Spectral methods: Fundamentals in single domains.* Scientific Computation. Berlin: Springer-Verlag.

Canuto, C., M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang (2007). *Spectral methods: Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics.* Scientific Computation. Berlin: Springer.

Crank, J. (1987). *Free and moving boundary problems.* New York: The Clarendon Press Oxford University Press.

Dean, W. R. and P. E. Montagnon (1949). On the steady motion of viscous liquid in a corner. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 45*(03), 389–394.

Engmann, J., C. Servais, and A. S. Burbidge (2005). Squeeze flow theory and applications to rheometry: A review. *J. Non-Newton. Fluid Mech. 132*(1-3), 1–27.

Gwynllyw, D., A. Davies, and T. Phillips (1996, NOV-DEC). On the effects of a piezoviscous lubricant on the dynamics of a journal bearing. *J. Rheol. 40*(6), 1239–1266.

Huh, C. and L. E. Scriven (1971). Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line. *J. Colloid Interface Sci. 35*(1), 85–10.

Peyret, R. (2002). *Spectral methods for incompressible viscous flow*, Volume 148 of *Applied Mathematical Sciences.* New York: Springer-Verlag.

Weideman, J. A. and S. C. Reddy (2000). A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Trans. Math. Softw. 26*(4), 465–519.