Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

Bakalárska práca

Matúš Ivan

Objem a povrch gule

Katedra didaktiky matematiky

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.

Študijný program: Chemie

Študijný odbor: Chemie a matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2012

Poďakovanie

Chcel by som sa srdečne poďakovať svojej školiteľke doc. RNDr. Martine Bečvářovej, Ph.D., za jej pomoc pri vypracovaní mojej práce ako aj oddeleniu histórie prírodných vied knižnice Matematicko-fyzikálnej fakulty Univerzity Karlovej v Prahe.

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďaľších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Zb., autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzatvorenie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa § 60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dňa ....

Názov práce: Objem a povrch gule

Autor: Matúš Ivan

Katedra/Ústav: Katedra didaktiky matematiky

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.

Abstrakt: Práca popisuje historický vývoj metód počítania objemu a povrchu gule. Je určená stredoškolským učiteľom ako pomôcka pri výuke objemov a povrchov telies ako aj stredoškolským študentom, ktorí majú záujem o historický náhľad na preberanú tému. Obsahuje popis jednotlivých zachovaných úloh zo starovekého Egypta a Mezopotámie. Porovnáva presnosť jednotlivých postupov s prihliadnutím na presnosť konštanty π. Rozoberá dôkazy poznatkov o objeme a povrchu gule zo starovekého Grécka. Popisuje prínos osvietencov k tejto téme a ukazuje exaktné postupy odvodenia vzorcov pre výpočet objemu a povrchu gule.

Kľúčové slová: objem, povrch, guľa, metódy výpočtu, historická cesta

Title: Volume and surface of sphere

Author: Matúš Ivan

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.,

Abstract: This work presents historical development in methods of calculating volume and surface of a sphere. It’s made for high school teachers as a resource for teaching about volume and surface of solids and for high school students who developed interest in historical outlook for this theme. It contains description of particular preserved tasks from ancient Egypt and Mesopotamia. It compares precision of particular approaches taking into account the precision of the constant π. It analyses proofs of facts about volume and surface of sphere from ancient Greece. It describes assets of enlighteners for this theme and shows exact approaches for deducing the formulas for calculating volume and surface of a sphere.

Keywords: volume, surface, sphere, methods of solution, historical way

Obsah

Úvod

Výpočtami objemov a povrchov telies sa ľudia zaoberali už od počiatkov matematického myslenia. Mali potrebu zistiť a vyjadriť veľkosť objektov vo svojom okolí. Náplňou tejto bakalárskej práce je objasnenie historického vývoja počítania objemu a povrchu jedného konkrétneho telesa a to gule. Toto teleso nemá veľký praktický význam a použitie, preto v starovekých civilizáciách o ňom nájdeme len útržkovité informácie. Až s rozvojom matematickej teórie prichádzajú presnejšie poznatky o guli a guľovej ploche.

Táto práca je rozdelená na šesť kapitol. V prvých dvoch sa nachádzajú definície nami študovaných objektov a mier množín v eukleidovských priestoroch, špeciálnymi prípadmi ktorých sú objem a povrch v trojrozmernom priestore. V druhých dvoch kapitolách rozoberieme metódy počítania objemu a povrchu gule používané v starovekom Egypte, Mezopotámii a Grécku. V záverečných kapitolách uvádzame presné postupy používané v novoveku a v súčasnosti a odvodzujeme presné vzorce pre výpočet objemu a povrchu nami študovaného telesa.

V práci pripomíname najvýznamnejšie osobnosti, ktoré ovplyvnili vývoj metód počítania objemu a povrchu gule.

1 Definícia gule

1.1 Definícia gule rotáciou

Prvé náznaky definície gule nemožno hľadať v praveku ani v dávnejšom staroveku. Z hľadiska vývoja myslenia sa musíme pozrieť na doby, kedy bola abstrakcia už viac rozvinutá. Prvú zachovanú definíciu gule podal Eukleides vo svojich *Základoch*, konkrétne v 11. knihe v časti definícií.

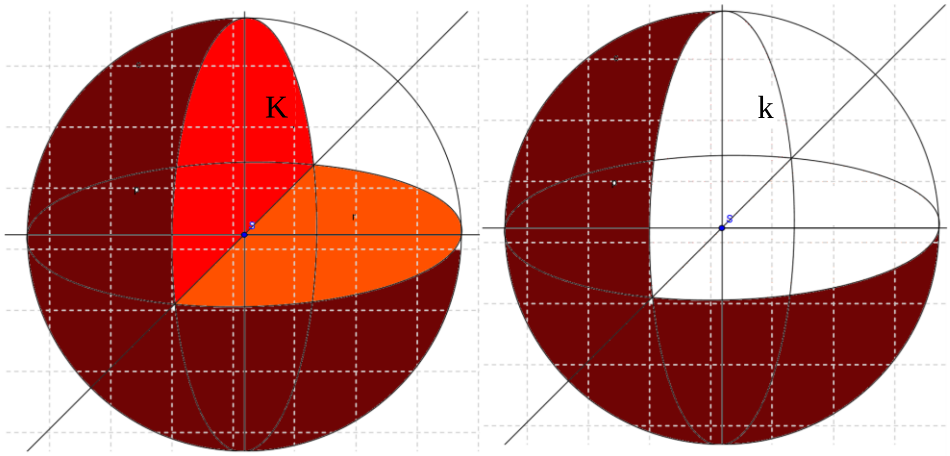
Kniha 11, definícia 14:

Sféra (guľa) je teleso opísané polkruhom, ktorý sa pohybuje okolo svojho fixovaného priemeru späť do pôvodnej pozície.[1]

Na tejto definícii je zaujímavé to, že Eukleides definoval guľu pomocou pohybu – rotácie polkruhu okolo osi. Tento postup je neobvyklý pre grécku matematiku, keďže existencia pohybu bola niektorými z učencov v starovekom Grécku dokonca popieraná – napr. (napríklad) Zénonom z Eley v tzv. (takzvaných) *Zenónových apóriách*.

V definíciách 15 až 17 v 11. knihe *Základov* Eukleides definoval stred gule ako stred polkruhu, ktorý danú guľu vytvorí rotáciou okolo svojho priemeru. Ďalej definoval priemer gule ako úsečku prechádzajúcu stredom, ktorej oba koncové body ležia na hranici gule. Definoval aj os rotácie gule ako os, okolo ktorej rotoval polkruh, ktorý guľu vytvoril. Definícia osi gule nie je veľmi významná v porovnaní s ostatnými rotačnými telesami, keďže osou gule by bola každá priamka, prechádzajúca stredom gule, pretože guľa je súmerná podľa svojho stredu.

[1] Pozri [6], str. 424.



Obr. 1 Vznik gule (vľavo) a guľovej plochy (vpravo) rotáciou

1.2 Definícia gule vzdialenosťou v Eukleidovskom priestore

Objekt, ktorý Eukleides nazval guľou, sa dá zadefinovať aj inak, a to pomocou vzdialenosti v priestore. Množina všetkých bodov, ktoré opíše polkruh rotujúci okolo svojho priemeru, je množina bodov, ktorých vzdialenosť od stredu tohto polkruhu je rovná alebo menšia než jeho polomer. Takto sa dá zaviesť všeobecne sféra v n-dimenziálnom priestore. My sa však zameriame len na sféru v trojrozmernom priestore, ktorú nazývame guľa. Označme ju G, jej stred S a polomer r. Potom guľou je množina:

$$G = \{ \ \forall X \in R^3_, \ |XS| \le r \ \}.$$

Táto definícia nám poskytne predstavu o guli ako o trojrozmernom telese, ktorého objemom sa budeme zaoberať.

Chceme sa však zaoberať aj povrchom tohto telesa, a preto musíme definovať aj hraničnú plochu gule – guľovú plochu. Označme ju κ, jej stredom je stred gule S a jej polomerom je polomer gule r. Potom guľovou plochou je množina:

$$\kappa = \{ \ \forall X \in R^3_, \ |XS| = r \ \}.$$

Je to teda množina bodov v priestore, ktoré majú od pevného bodu (stredu) rovnakú vzdialenosť. Ak by sme chceli využiť paralelu s Eukleidovou definíciou, teda definícou rotáciou rovinného útvaru, guľová plocha by bola útvarom vzniknutým rotáciou polkružnice okolo svojho priemeru.

1.3 Guľa v karteziánskej sústave súradníc

V Eukleidovskom priestore so zavedenou karteziánskou sústavou súradníc, ak uvažujeme, že ľubovoľný bod gule má súradnice $X = [x, y, z]$, jej stred má súradnice $S = [m, n, o]$ a polomer gule je r, môžeme postupnými úpravami dostať:

$$|SX| \leq r,$$
$$\|X - S\| \leq r,$$
$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-o)^2} \leq r,$$
$$G : (x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-o)^2 \leq r^2,$$

analytické vyjadrenie gule, ak zameníme nerovnosť za rovnosť dostaneme analytické vyjadrenie guľovej plochy.

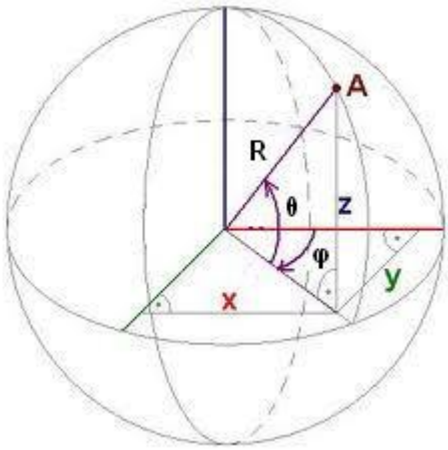
1.4 Sférické súradnice

Pri odvodzovaní vzorcov pre výpočet objemu a povrchu gule je výhodné nahradiť karteziánsku sústavu súradníc sférickou sústavou. Sférická sústava súradníc pre popis polohy bodu X so súradnicami $[x, y, z]$ v priestore využíva jeho vzdialenosť od počiatku R, orientovaný uhol kolmého priemetu vektoru $X-O$, kde O je počiatok súradnicovej sústavy, do roviny (o_x, o_y) a kladnej časti osi x – φ, a orientovaný uhol, ktorý zviera vektor $X-O$ a rovina (o_x, o_y) – θ. Potom pre karteziánske súradnice platí vzťah:

$$x = R \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta,$$
$$y = R \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta,$$
$$z = R \cdot \sin\theta,$$

$$R \in \langle 0, \infty), \quad \varphi \in \langle -\pi, \pi), \quad \theta \in \langle -\pi/2, \pi/2).$$

Rozsah súradníc je zvolený tak, aby popísal celý trojrozmerný priestor.



Obr. 2. Sférické a karteziánske súradnice

Sférické súradnice budú pre nás pri popise gule a guľovej plochy výhodné vtedy, keď nami popisované gule a guľové plochy budú mať stred v počiatku sústavy súradníc. Vtedy stačí pre popis gule obmedziť iba parameter R a to tak, že $0 \leq R \leq r$.

Pre popis guľovej plochy bude parameter R konštantný a to tak, že $R = r$. Z toho vyplýva, že pre popis guľovej plochy nám stačia dva parametre, čo by nás nemalo prekvapiť, pretože guľová plocha je plocha.

2 Definícia objemu a povrchu

2.1 Miera množín

Miera je funkcia, ktorá každej množine z vhodného systému podmnožín danej množiny X priradí reálne číslo tak, že splní axiómy miery.

Definícia: Nech X je množina, nech Z je nejaký systém podmnožín množiny X taký, že platí $\emptyset \in Z$. Mierou nazveme ľubovoľnú nezápornú reálnu funkciu $\mu : Z \to R_0^+$, pre ktorú platí:

1) $\mu(\emptyset)=0$
2) pre každú postupnosť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ navzájom disjunktných množín patriacich do Z platí
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in Z \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\ .$$ [2]

2.2 Miery v trojdimenziálnom priestore

Guľa, ktorej objem a povrch chceme ďalej študovať, je objekt, ktorý sme definovali v trojrozmernom priestore. Zavedenou mierou v eukleidovskom priestore dimenzie 3 je objem. Mierou v dvojrozmernom eukleidovskom priestore je obsah. Obsah hranice trojrozmerného telesa nazývame povrchom.

V stredoškolských učebniciach matematiky sa stretneme s priamou definíciou objemu a povrchu telesa v tejto podobe:

Definícia: *Objem telesa je kladné reálne číslo priradené telesu tak, že platí:*

Zhodné telesá majú objemy sebe rovné.

Ak je teleso zložené z niekoľkých neprenikajúcich sa telies, je jeho objem rovný súčtu objemov týchto telies.

Objem kocky, hrana ktorej má dĺžku 1*(m, cm,...) je rovný* 1 *(*m^3*, cm*^{3}*,...).*

Navzájom sa neprenikajúcimi telesami rozumieme také telesá, z ktorých žiadne neobsahuje vnútorný bod druhého.[3]

---

[2] Pozri [5].

[3] Originálna citácia viď [8], str. 149.

Definícia: *Povrchom telesa rozumieme obsah jeho hranice.*[4]

Stredoškolská definícia objemu nám dáva predstavu o tom ako počítať objemy „hranatých“ telies, teda mnohostenov, nedáva nám však návod, ako počítať objem „krivočiarych“, teda aj rotačných telies.

[4] Originálna citácia viď [8], str. 150.

3 Prehistória

3.1 Egypt

Geometrické myslenie starovekých Egypťanov sa zachovalo najmä v stavbe pyramíd. Zo záznamov v papyrusoch sa dozvedáme iba niekoľko znalostí o počítaní obsahov a objemov útvarov. Všetky geometrické úlohy vznikali z praxe staviteľstva, vymeriavania polí a poľnohospodárstva.

Jednou z takýchto úloh je úloha č. 10 z *Moskovského papyrusu*[5], ktorej znenie je:

Majme košík s priemerom 4 a 1/2. Aký je jeho povrch? Vezmi 1/9 z 9 , pretože košík je polovica z vajcovej škrupiny. Dostaneš 1. Vypočítaj zvyšok (z 9), ktorý je 8. Počítaj 1/9 z 8. Dostaneš 2/3 +1/6 +1/18. Nájdi zvyšok z 8 po odčítaní 2/3+1/6+1/18. Dostaneš 7 + 1/9. Násob 7 + 1/9 s 4+1/2. Dostaneš 32. Pozri našiel si povrch (košíka). A našiel si ho správne.[6]

Obr. 3. Moskovský papyrus[7]

Príklad teda popisuje postup výpočtu povrchu koša alebo košíku s priemerom 9/2. Matematicky môžeme sled týchto operácií zapísať takto:

[5] Papyrus je uložený v Moskovskom múzeu. Je datovaný do obdobia 1700 p. n. l.

[6] Originálna anglická verzia úlohy viď [4], str. 218.

[7] Zdroj http://www.ablogabouthistory.com/2010/12/09/ancient-egyptian-mathematics.

$$P = \left(\left(9 - \frac{1}{9}\cdot 9\right) - \frac{1}{9}\left(9 - \frac{1}{9}\cdot 9\right)\right)\cdot\frac{9}{2} = 32.$$

Keď upravíme predošlý vzťah tak, aby približne odpovedal výpočtu povrchu polgule so zadaným polomerom, teda 9/4, dostaneme:

$$P = 2\cdot\left(\frac{256}{81}\right)\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^2.$$

Z uvedeného vyplýva, že namiesto konštanty π starovekí Egypťania používali číslo 256/81 a teda v tomto príklade je číslo π určené s odchýlkou asi 0,0189, čo odpovedá chybe asi 0,6%.[8]

3.2 Mezopotámia

Matematika starovekej Mezopotámie je známejšia ako matematika starovekého Egypta hlavne preto, že svoje poznatky a myšlienky obyvatelia Mezopotámie vyrývali do hlinených tabuliek, ktoré mali vyššiu trvanlivosť než papyrus Egypťanov. V Mezopotámii zapisovali svoje poznatky učni aj učenci.

Z ich riešenia rovníc sa dozvedáme, že im boli známe vzťahy ako:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,

$(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2$,

$1 + 2 + 4 + ... + 2^n = 2^n + (2^n - 1)$,

$1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n\right)\cdot(1 + 2 + 3 + ... + n)$ a Pytagorova veta. Avšak toto bol zároveň aj vrchol geometrických vedomostí Mezopotámie. Poznali postupy pre výpočet obsahu trojuholníka a lichobežníka, objemu kvádru, kocky a ihlanu, ale návody na výpočty objemu valca, kužeľa, zrezaného ihlanu a ďalších komplikovanejších telies (klíny, koryto a iné) mali iba približné.

Keďže matematické poznatky starovekej Mezopotámie vychádzali z potrieb praxe a predmety guľového tvaru sa v poľnohospodárstve a staviteľstve tohto času veľmi nepoužívali, pre Mezopotámčanov nemalo význam zaoberať sa výpočtami objemu či povrchu tohto telesa. Z babylonských matematických tabuliek sa však môžeme dozvedieť o znalosti rovinného ekvivalentu gule – kruhu. Tabuľka

---

[8] Pozri [2], str. 103.

YBC 7302[9] popisuje vzťah medzi obvodom a obsahom kruhu. Obsahuje nákres kruhu s tromi číslami (3 nad kruhom, 9 vedľa kruhu a 45 v kruhu). Interpretácia týchto čísel je: 3 obvod kruhu, 9 jeho druhá mocnina a 45 značí 0;45, teda 45/60, čo je obsah kruhu. Babylonskí matematici využívali „vzorec“ pre obsah kruhu v tomto tvare: $S = 1/12 \cdot o^2$.[10]

Obr. 4. Tabuľka YBC 7302[11]

Postupnými úpravami spomenutého vzorca s použitím zadania z tabuľky YBC 7302 zistíme, že v Mezopotámii používali miesto konštanty π číslo 3, čo je chyba približne 0,1416, čo odpovedá chybe približne 5%. V inom babylonskom texte sa však uvádza vzťah medzi obvodom pravidelného šesťuholníku a obsahom jeho opísaného kruhu, kde je pre π použitá hodnota 3,125, čo je chyba približne 0,01659, čo odpovedá chybe asi 0,5%. Poznamenajme, že je to podstatne menšia chyba, dokonca menšia než v Egypte.[12]

---

[9] Tabuľka je súčasťou Babylonskej kolekcie Yalovej Univerzity.

[10] Pozri [2], str. 325.

[11] Zdroj http://numberwarrior.wordpress.com, článok On the ancient babylonian value for pi.

[12] Pozri [7], str. 10.

4 Staré Grécko

4.1 Matematika starovekého Grécka

Základné rozdiely medzi matematikou Grécka a matematikou Mezopotámie a Egyptu boli v týchto desiatich princípoch:

- v motivácii matematického myslenia – v Egypte vychádzala len z potreby praxe, ale v Grécku naviac vychádzala aj z túžby vysvetliť príčinu javov i problémy mágie aj samotnej matematiky;
- v otázke pre bádanie – v Egypte „Ako?“ (vymerať, zostrojiť), v Grécku „Prečo?“ (je to tak a tak);
- v systéme práce – v Egypte experimenty typu pokus – omyl, v Grécku orientované nadobúdanie skúseností a ich hierarchizácia;
- v nástroji – v Egypte ruka, trpezlivosť, pamäť, v Grécku rozmýšľanie a špekulácia;
- v predstave – v Egypte predmetná, v Grécku idealizované objekty;
- v klíme objavu – v Egypte mýtická, objav je vnuknutie, dar bohov, v Grécku logická, objav je dôsledok cieľavedomého bádateľa;
- v kritériu pravdivosti poznatku – v Egypte náboženská viera, aproximatívny súhlas s praxou, v Grécku logická preukázateľnosť poznatku, dôkaz;
- vo výsledkoch – v Egypte náhodné a mozaikovité, v Grécku systematizované a hierarchizované;
- vo vyučovaní – v Egypte reprodukcia návodu a imitácia učiteľa, v Grécku dialóg podnecujúci a usmerňujúci samostatné bádanie žiaka;
- v kritériu náročnosti – v Egypte náročnosť závisí od dĺžky návodu pre poznatok, v Grécku závisí od výšky abstrakcie pojmov a myšlienok.[13]

Matematika v starovekom Grécku bola úzko spätá s prírodnou filozofiou. Medzi najdôležitejších vedcov starovekého Grécka, ktorí ovplyvnili rozvoj matematiky a geometrie, patrili Thales Milétsky, Pythagoras zo Samu, Zenón z Elley, Democritos z Abdér, Hippokrates z Chiu, Sokrates, Platón, Aristoteles, Eukleides z Alexandrie a i. (a iní) Spomínaných vedcov nemôžeme nazvať čistými

[13] Pozri [10], str. 20.

matematikmi, pretože v tejto dobe ešte nie sú vedecké odbory vymedzené tak ako dnes. Väčšina týchto vedcov sa venovala filozofii, fyzike aj matematike zároveň.

Pod rozvoj a hierarchizáciu matematickej teórie sa najviac podpísal Eukleides z Alexandrie svojim dielom *Základy*. Toto dielo používa metódu axiomatickej výstavby teórie, ktorú neskôr prebrali mnohí ďalší vedci. Každá kniha *Základov* je rozdelená na dve časti – v prvej sa nachádzajú predpoklady a definície a v druhej matematické vety, ktoré sú exaktne odvodené z predpokladov a dokázané. Eukleides vo svojom diele zhŕňa poznatky planimetrie, stereometrie, algebry a teórie čísel. Na výskume rotačných telies, ich objemov a povrchov sa veľkou mierou podieľal Archimedes zo Syrakúz.

4.2 Archimedes zo Syrakúz

Archimedes (narodený asi roku 287 p. n. l. (pred našim letopočtom) v Syrakúzach, umrel 212 p. n. l.) bol gréckym matematikom, fyzikom, astronómom, mechanikom a vynálezcom. Z fyziky sú najdôležitejšími z jeho objavov základy hydrostatiky, statiky a princípu páky. Pripisujú sa mu vynálezy mnohých inovatívnych strojov (aj bojových) a skrutky, ktorá dodnes nosí jeho meno a ktorá bola využívaná už v starovekom Egypte ako zavlažovacie zariadenie. Umrel pri prelomení obliehania Syrakúz, ktorého obrane napomáhal svojimi vynálezmi.

Všeobecne je považovaný za najväčšieho matematika staroveku a jedného z najväčších matematikov všetkých čias. Pri svojom výskume geometrických objektov, ich obvodov, obsahov, povrchov či objemov využíval tzv. exhaustívnu metódu, ktorú rozvedieme v jednom z naládujúcich odstavcov.

Archimedes po sebe zanechal obsiahle diela, zachovalo sa nám z nich trinásť. Uveďme ich chronologicky: O *rovnováhe alebo ťažiskách rovinných útvarov*, kniha I., *O kvadratúre paraboly*, *O rovnováhe alebo ťažiskách rovinných útvarov*, kniha II., *Posolstvo Erastothenovi o mechanickej metóde riešenia geometrických úloh*, *O guli a valci*, kniha I. a II., *O špirálach*, *O kónoidoch a sféroidoch*, *O plávajúcich telesách*, kniha I. a II., *Meranie kruhu*, *Počítanie piesku*, *Kratochvíle*, *Poučky*, *Problém dobytka*.[14] Pre nás je najdôležitejšie dielo *O guli a valci*.

[14] Pozri [3], str. 24.

4.3 Exhaustívna metóda

Autorstvo tejto metódy je pripisované Eudoxovi z Knidu. Je známa ako staroveká metóda limít. Môžeme nájsť jej ekvivalent vo viacerých dimenziách. Na priamke môžeme odhadovať iracionálne číslo obmedzovaním intervalu jeho výskytu racionálnymi číslami (napr. číslo π môžeme hrubo odhadnúť číslom 3,1 zdola a 3,2 zhora a postupne odhad zjemňovať). Pre dvojrozmerné objekty sa táto metóda dá využiť pri výpočte obsahu kruhu a to vpisovaním a opisovaním pravidelných *n*-uholníkov.

Exhaustívnu metódu ďalej rozpracoval Archimedes, ktorý ju následne využíval pri mnohých dôkazoch svojich tvrdení. *Vo svojich prácach rozvíjal myšlienky infinitezimálneho charakteru, v určitom zmysle môžeme hovoriť o výpočtoch limít a určitých integrálov aj o diferenciálnych úvahách.*[15] Túto metódu Archimedes využíval aj pri výskume objemov a povrchov telies. V ďalšom odstavci rozoberiem jeho výsledky zahrňujúce guľu z jeho diela *O guli a valci.*

4.4 O guli a valci

Toto Archimedovo dielo pojednáva o troch rotačných telesách, a to o valci, kuželi a guli. Najdôležitejšie, a teda aj hlavné výsledky, ku ktorým sa Archimedes dopracoval v tejto práci, sú zhrnuté v druhej časti prvej knihy tohto diela. V druhej knihe Archimedes rieši problémy konštrukcie valcov, kužeľov, gúľ a ich častí s rovnakými objemami či povrchmi. Závery z prvej knihy preložené tak, aby odpovedali Archimedovej pôvodnej formulácii, teda sú:

Propozícia 33: *Povrch gule je štyrikrát väčší než obsah jeho najväčšieho kruhu.*[16]

Dôkaz tejto matematickej vety je vedený sporom v dvoch krokoch – predpoklad nerovnosti je rozdelený na dve ostré nerovnosti.

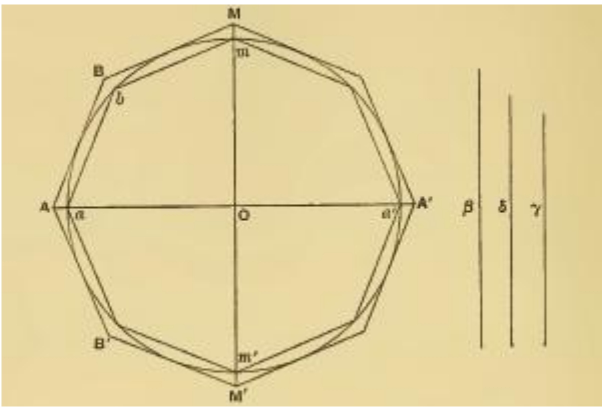
Dôkaz: Nech *C* je kruh, štyrikrát väčší, než najväčší kruh gule. Prepokladajme, že sa jeho obsah nerovná povrchu gule.

---

[15] Originálna vitácia viď [3], str. 31.

[16] Pozri [1], str. 39.

I. C je menší než štvornásobok najväčšieho kruhu gule. Potom môžeme nájsť dve úsečky γ a β tak aby: $\beta : \gamma$ = (povrch gule) : C (Propozícia 2). Nech δ je úsečka, ktorej dĺžka je priemerom dĺžok γ a β. Do kruhu vpíšeme a kruhu opíšeme $4n$-uholníky. Ich pomer strán bude menší než pomer $\beta : \delta$ (Propozícia 3).



Obr. 5. Náčrt kruhu k dôkazu Propozície 33[17]

Potom:

(povrch vonkajšieho telesa) : (povrch vnútorného telesa) =

(strana vonkajšieho telesa)^2 : (strana vnútorného telesa)^2 $< \beta^2 : \delta^2$, alebo $\beta : \gamma <$ < (povrch gule) : C. (Propozícia 32).

To je spor, pretože povrch vonkajšieho telesa je väčší ako povrch gule (Popozícia 28) a povrch vnútorného telesa je menší než C (Propozícia 25). Z toho vyplýva, že C nie je menší než povrch gule.

II. C je väčší než povrch gule. zvolíme γ a β tak, aby platilo: $\beta : \gamma$ = (povrch gule) : C. Opäť vpíšeme a opíšeme kruhu C $4n$-uholníky tak ako v I.

Potom v tomto prípade platí:

(povrch vonkajšieho telesa) : (povrch vnútorného telesa) < C : (povrch gule)

Toto je opäť spor, pretože povrch vonkajšieho telesa je väčší než C (Propozícia 30) a povrch vnútorného telesa je menší než povrch gule (Propozícia 23). C teda nemôže byť väčší než povrch gule.

Z uvedeného je teda zrejmé že C = (povrch gule).[18]

---

[17] Pozri [1], str. 40.

[18] Spomínané propozície viď v [1].

Propozícia 34: *Každá guľa je rovná štvornásobku kužeľa, ktorého podstava je rovná najväčšiemu kruhu gule a jeho výška je rovná polomeru gule.*[19]

Dôkaz je podobne ako v predošlom prípade vedený sporom a predpoklad nerovnosti je rozdelený na dve ostré nerovnosti.

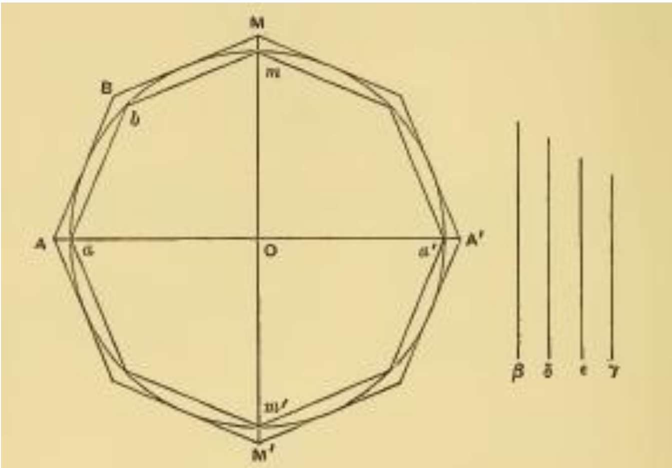
Dôkaz: Nech najväčší kruh gule je *mam'a'* (viď Obr. 6). Predpokladajme, že objem gule nie je štvornásobok príslušného kužeľa.

Potom:

I. Nech je objem gule v väčší než štvornásobok príslušného kužeľa.

Označme V kužeľ, ktorý má podstavu štyrikrát väčšiu než najväčší kruh gule a jeho výška je rovná polomeru gule. Potom môžme nájsť dve úsečky β a γ tak, aby platilo: $\beta : \gamma =$ (objem gule) : V. Medzi β a γ vložíme ešte dve úsečky, ktorých dĺžky budú s dĺžkami β a γ tvoriť aritmetickú postupnosť (viď Obr. 6). Opäť kruhu opíšeme a vpíšeme 4n- uholníky, pomer strán ktorých bude menší než β : δ. Všetky tri rovinné útvary necháme rotovať okolo úsečky *aa'*. Objemy opísaného a vpísaného telesa budú k sebe v pomere ako tretie mocniny ich strán:

Teda: (objem vonkajšieho telesa) : (objem vnútorného telesa) < $\beta^3 : \delta^3 <$ < (objem gule) : V.



Obr. 6. Náčrt k dôkazu Propozície 34[20]

To je však spor, pretože objem opísaného telesa je väčší než objem gule (Propozícia 28) a objem vpísaného telesa je menší než objem V (Propozícia 27).

[19] Pozri [1], str. 41.

[20] Pozri [1], str. 42.

Guľa teda nemá väčší objem než *V*.

II. Nech je objem gule menší než objem *V*. V tomto prípade volíme β a γ tak, aby platilo: $\beta : \gamma = V$: (objem gule).

Opakujeme postup tak ako predtým a zisťujeme:

(objem vonkajšieho telesa) : (objem vnútorného telesa) < V : (objem gule).

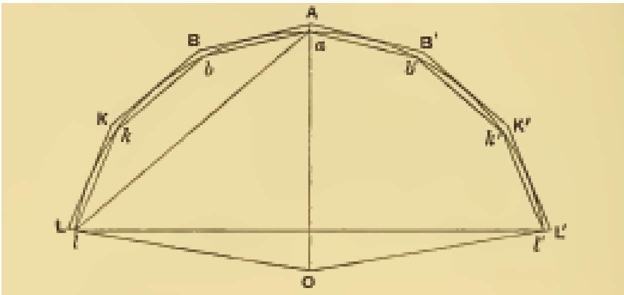
Toto je spor, pretože objem vonkajšieho telesa je väčší než *V* (Propozícia 31) a objem vnútorného telesa je menší než objem gule.

Tým pádom *V* nie je väčší než objem gule.

Z uvedeného vyplýva, že platí: V = (objem gule).[21]

Propozícia 42: *Guľový vrchlík má povrch rovný obsahu kruhu s polomerom dĺžky spojnice vrcholu vrchlíku a jeho okraja.*[22]. V tejto propozícii je za guľový vrchlík považovaný len vrchlík menší než polguľa. Tento problém je však vyriešený v nasledujúcej propozícii.

Dôkaz: Označme vrchlík spomínaný v propozícii *lal'*. Nech *R* je kruh s polomerom *al*. Potom označme povrch vrchlíku *S*. Predpokladajme, že sa obsah *R* a povrch vrchlíku *S* nerovnajú



Obr. 7 Náčrt k dôkazu Propozície 42[23]

I. Predpokladajme $S > R$. Nech *lal'* je kruhový odsek najväčšieho kruhu v guli. Tomuto odseku vpíšeme a opíšeme 2*n*-uholníky tak aby platilo:

(opísaný mnohouholník) : (vpísaný mnohouholník) < $S : R$ (Propozícia 6). Mnohouholníky budeme rotovať okolo *AO* (viď Obr. 7). Potom o povrchoch takto vzniknutých telies bude platiť:

---

[21] Spomínané propozície viď v [1].

[22] Pozri [1], str. 52.

[23] Pozri [1], str. 52.

(povrch vonkajšieho telesa) : (povrch vnútorného telesa) =

= $AB^2 : ab^2$ =

= (opísaný mnohouholník) : (vpísaný mnohouholník) < $S : R$.

Ale to je spor, pretože povrch vonkajšieho telesa je väčší než S (Propozícia 39). Teda povrch vnútorného telesa je väčší než R, čo je nemožné podľa Propozície 37.

II. Predpokladajme $S < R$. V tomto prípade budeme vpisovať a opisovať mnohouholníky, ktorých pomer strán bude menší než $R : S$ a dostávame výsledok:

(povrch vonkajšieho telesa) : (povrch vnútorného telesa) < $R : S$.

Ale to je spor, pretože povrch vonkajšieho telesa je väčší než R (Propozícia 40). Teda povrch vnútorného telesa je väčší než S, čo je nemožné podľa Propozície 36.

Z uvedeného vyplýva, že platí $S = R$.[24]

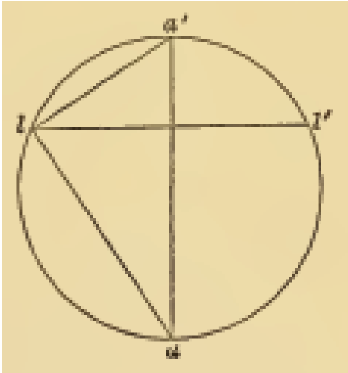
Propozícia 43: *Aj keď je guľový vrchlík väčší než polguľa je jeho povrch rovný kruhu s polomerom dĺžky spojnice vrcholu vrchlíku a jeho okraja*[25]. Dôkaz propozície 42 je vedený exhaustívnou metódou a sporom. Propozícia 43 je dokázaná priamo.

Dôkaz: Nech *lal'a'* je najväčší kruh v guli a *aa'* je jeho priemer. Nech *la'l'* je kruhový odsek menší než polkruh.

Potom podľa Propozície 42 je povrch menšieho vrchlíku rovný obsahu kruhu s polomerom *la'*. Podľa Propozície 33 je povrch celej gule rovný obsahu kruhu s polomerom *aa'*.

[24] Uvedené Propozície viď v [1].

[25] Pozri [1], str. 53.



Obr. 8. Načrt k dôkazu propozície 43[26]

Platí však $aa'^2 - a'l^2 = al^2$ a kruhy sú k sebe ako štvroce ich polomerov. Tým pádom povrch *lal'*, ktorý je rozdielom povrchu gule a povrchu *la'l'*, je obsah kruhu s polomerom *al*.[27]

Z uvedeného vyplýva, že Archimedes si bol vedomý existencie konštanty π, ktorá bola spoločným znakom rotačných telies. Pomocou exhaustívnej metódy (vpísaním a opísaním pravidelného 96 uholníka kruhu) túto konštantu obmedzil medzi 25344/8069 a 29376/9347 . Tento odhad čísla π má odchýlku asi 0,001234, čo predstavuje chybu približne 0,04%.[28]

---

[26] Pozri [1], str. 53.

[27] Uvedené Propozície viď v [1].

[28] Pozri [3], str. 43.

5 Cavalieriho princíp

5.1 Matematika v novoveku a osvietenstve

Obdobie stredoveku je často označované ako obdobie temnoty. Nemôžeme si však myslieť, že sa veda počas tohto obdobia vôbec nerozvíjala. Pokrok však bol spomalený nástupom kresťanstva a potláčaním tých poznatkov, ktoré by ohrozovali zvrchovanosť a moc cirkvi. V kresťanskej Európe sa teda teoretická matematika veľmi nerozvinula. Čím sa nemohla rozvinúť ani teória, ktorá by presnejšie riešila problém objemu a povrchu gule.

Úplne iným obdobím sa však stal novovek, renesancia a obzvlášť obdobie osvietenstva. V rokoch 1400 až 1600 bola Európa do základov otrasená udalosťami, ktoré zmenili náhľad na vedu a podnietili prudký rozvoj matematickej teórie. K tomuto prispela aj vyššia dostupnosť starogréckych vedeckých prác v Európe.[29]

Medzi matematikov tohto obdobia, ktorí sa zaoberali obsahmi plôch a objemami telies patrili, Johannes Kepler (1571 – 1630), Galileo Galilei (1564 – 1642), Pierre de Fermat (1601 – 1665). Najviac sa o rozvoj týchto teórií zaslúžil Bonaventura Cavalieri, ktorý začal odhaľovať cenné Archimedove postupy.[30]

5.2 Bonaventura Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) bol talianskym matematikom, ktorý sa však zaoberal aj optikou a mechanikou. Pracoval na prekurzoroch infinitezimálneho počtu a uviedol logaritmy do Talianska. Vo svojich prácach ďalej rozvinul klasickú exhaustívnu metódu.[31]

Zkonštruoval hydraulickú pumpu. Publikoval tabuľky logaritmov, ktorými zdôraznil ich praktické využitie v geometrii a astronómii.

Medzi jeho práce patrili: *Geometria indivisibilibus continuorum*, *Exercitationes Geometricae Sex*, *Directorium Generale Uranometricum*, *Lo specchio ustorio ouero trattato delle settioni conichea*, *Trigonometria plana et sphaerica linearis et logarithmica*.

---

[29] Pozri [7], str. 216.

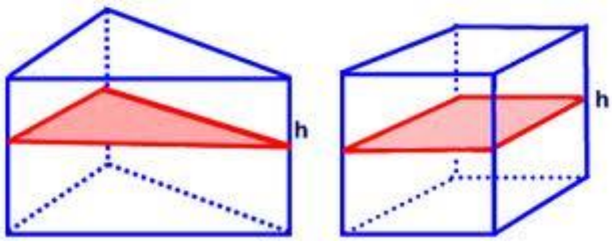
[30] Pozri [9], str. 26.

[31] Pozri [9], str. 25.

5.3 Cavalieriho princíp pre guľu

Bonavetntura Cavalieri zhrnul v roku 1635 vo svojom diele *Geometria indivisibilibus continuorum* všetky poznatky infinitezimálneho počtu nadobudnuté do 17. storočia. Súčasťou diela bol jednoduchý výklad metódy výpočtu objemu telesa dnes známeho ako Cavalieriho princíp.[32]

Keď dve telesá majú rovnakú výšku a keď rezy rovinami, ktoré sú rovnobežné s ich podstavami a majú od nich rovnakú vzdialenosť, sú také, že pomer ich obsahov je vždy rovnaký, potom objemy týchto telies majú tiež tento pomer.[33]



Obr. 9. Cavalieriho pricíp[34]

Veľkou výhodou Cavalieriho princípu je, že pre odvodenie presných vzorcov pre objem telies nie je potrebné využívať limitu známu v dnešnej dobe.

Pre odvodenie vzorca pre objem gule môžeme veľmi dobre využiť Cavalieriho princíp, ktorý je známy už v stredoškolskej matematike. Je potrebné nájsť teleso, ktoré bude splňovať podmienky Cavalieriho princípu pre guľu.

Zisťujeme, že pre polguľu s polomerom r je takýmto telesom valec s polomerom a výškou r, z ktorého je vykrojený kužeľ s polomerom a výškou r, ktorý má s valcom spoločnú jednu podstavu. Označme objem tohto telesa V_2 a objem polgule V_1.

Vyjadríme postupne obsahy jednotlivých rezov rovinami rovnobežnými s podstavou polgule a telesa V_2. Označme vzdialenosť roviny, ktorou telesá režeme, od roviny, v ktorej ležia obe podstavy týchto telies, h. Označme $S_{h,1}$ obsah rezu danou rovinou vo vzdialenosti h v telese V_1 a $S_{h,2}$ obsah rezu danou rovinou vo vzdialenosti h v telese V_2. Potom:

[32] Pozri [9], str. 25.

[33] Pozri [9], str. 25.

[34] Zdroj http://www.regentsprep.org/regents/math/geometry/GG2/PrismPage.htm.

$$S_{h,1} = \pi \cdot (\sqrt{r^2 - h^2})^2 = \pi \cdot (r^2 - h^2),$$

kde obrazec, obsah ktorého počítame, je kruh, ktorého polomer je odvesnou v pravouhlom trojuholníku s preponou dĺžky *r* a jednou z odvesien dĺžky *h*.

Ďalej platí:

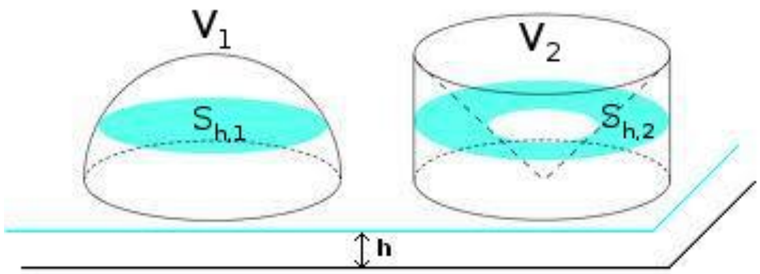
$$S_{h,2} = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot h^2 = \pi \cdot (r^2 - h^2),$$

kde obrazec, obsah ktorého počítame, je medzikružie dvoch kruhov, z ktorých väčší má polomer *r* a menší má polomer *h*.

Z uvedeného vidíme, že pre ľubovoľnú vzdialenosť rezovej roviny od roviny, v ktorej ležia podstavy oboch telies, platí rovnosť obsahov ich rezov. Z toho vyplýva, že objem telesa V_1 a V_2 je rovnaký a je rovný

$$V_{V_2} = \pi \cdot r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = V_{V_1}.$$

Objem polgule (telesa V_1) je teda rovný $2/3\pi \cdot r^3$, čo je už nám známy vzorec.



Obr. 10. Cavalieriho princíp pre guľu

Cavalieriho princíp je dnes chápaný ako dôsledok Fubiniho vety, ktorú rozoberieme v ďalšej kapitole pri odvodení vzorcov pre výpočet objemu a povrchu gule.

6 Infinitezimálny počet

6.1 História infinitezimálneho počtu

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 – 1716) a Isaac Newton(1643 – 1727) v druhej polovici 17. storočia nezávisle na sebe vytvorili teóriu diferenciálneho a integrálneho počtu, čím sa stali najväčšími matematikmi tohto obdobia. Do tejto vybudovanej teórie zahrnuli všetky roztrieštené jednotlivosti poznatkov svojich predchodcov. Infinitezimálne postupy mali veľký úspech v 17. storočí, boli použité na sčítanie nekonečného počtu nekonečne malých veličín (aplikácia pre Cavalieriho princíp, kde rezy sú vzhľadom k trojrozmernému priestoru nekonečne malé).[35]

Určitý integrál nadobudol veľké využitie vo fyzike, mechanike i optike. V matematike sa využíva pre výpočet obsahov plôch pod grafom a pomocou tzv. Fubiniho vety (integrácia viacrozmerných integrálov) ho možno použiť pre výpočet povrchu gule (veľkosť guľovej plochy) či jej objemu. Tieto výpočty si ukážeme v nasledujúcom odstavci.

6.2 Odvodenie vzorcov rôznymi postupmi

Objem a povrch gule ako rotačného telesa

Ak sa budeme držať historickej cesty, tak guľa bola prvý krát definovaná ako rotačné teleso, ktoré vzniká rotáciou polkruhu okolo svojho priemeru. Pre objem a povrch rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou krivky popísanej rovnicou $y = f(x)$, pre $x \in \langle a,\ b \rangle$ okolo osy x, sú odvodené vzorce:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Polkruh, rotáciou ktorého guľa vznikne, má polomer r. Bez ujmy na všeobecnosti sme ho mohli umiestniť tak, aby sa stred gule, ním vytvorenej, nachádzal v bode [0; 0; 0]. Takto zvolený polkruh a jeho hraničnú polkružnicu potom môžeme popísať funkciou:

---

[35] Pozri [9], str. 35.

$$f(x)=\sqrt{r^2-x^2}\ ,$$

potom s využitím spomínaných vzorcov dostaneme:

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=[r^2\cdot x-x^3/3]_{-r}^{r}=4/3\cdot\pi\cdot r^3,$$

$$S=2\cdot\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx=2\cdot\pi\int_{-r}^{r}rdx=[2\cdot\pi\cdot r\cdot x]_{-r}^{r}=4\pi r^2.$$

Fubiniho veta

Veta: Nech funkcia f je spojitá funkcia troch premenných definovaná na množine M:

$$M=\{\ [x,\ y,\ z]\in R^3_,\ x\in(a,\ b),\ y\in(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)),\ z\in(\psi_1(x,\ y),\ \psi_2(x,\ y))\ \},$$

kde φ je funkcia jednej premennej x a ψ je funkcia dvoch premenných x, y.

Potom platí:

$$\iiint_M f(x,y,z)\ dxdydz=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\int_{\psi_1(x,\ y)}^{\psi_2(x,\ y)}f(x,y,z)\ dzdydx.$$

Využijeme zavedené definície z prvej kapitoly o guli v karteziánskej súradnicovej sústave a o sférických súradniciach. Pri odvodení vzorca pre objem gule budeme počítať trojnásobný integrál z 1 cez množinu obsahujúcu všetky body gule, teda

$$V=\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}1\ dzdydx.$$

Hranice sú určené tak, aby množina, cez ktorú integrujeme, bola celá guľa. Táto integrácia by bola veľmi náročná na výpočet, preto zavádzame substitúciu pomocou sférických súradníc (viď kapitola 1.4, str. 3). Integrovaný výraz budeme musieť prenásobiť jakobiánom použitého substitučného zobrazenia, ktorý je v našom prípade rovný $R^2\cdot\cos\theta$. Následný výpočet sa potom zjednoduší:

$$V=\int_0^r\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}R^2\cdot\cos\theta\ d\theta d\varphi dR=[R^3/3]_0^r\cdot[\varphi]_{-\pi}^{\pi}\cdot[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}=4/3\cdot\pi\cdot r^3.$$

Obsah guľovej plochy ako parametrizovanej plochy

Pre výpočet povrchu musíme guľovú plochu zaviesť ako plochu s danou parametrizáciou:

$$f(u,v) = (r\cdot\cos u\cdot\cos v,\quad r\cdot\sin u\cdot\cos v,\quad r\cdot\sin v),$$

$$u\in\langle-\pi,\pi),\quad v\in\langle-\pi/2,\pi/2),$$

kde u, v sú parametre plochy, r je polomer guľovej plochy. Povrch takto zadanej gule potom vypočítame:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (\ -r\cdot\sin u\cdot\cos v,\quad r\cdot\cos u\cdot\cos v,\quad 0\ ),$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (\ -r\cdot\cos u\cdot\sin v,\quad -r\cdot\sin u\cdot\sin v,\quad r\cdot\cos v\ ),$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (r^2\cdot\cos u\cdot\cos^2 v,\quad r^2\cdot\sin u\cdot\cos^2 v,\quad r^2\cdot\sin v\cdot\cos v),$$

$$\left\|\ \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\ \right\| = r^2\cdot\cos v,$$

$$S = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\|\ \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\ \right\| dvdu = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos v\ dvdu = r^2[u]_{-\pi}^{\pi}[\sin v]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi\cdot r^2,$$

kde $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$ a $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ sú parciálne derivácie analytického vyjadrenia plochy podľa parametrov *u* a *v*, a teda počítame integrál z veľkosti ich vektorového súčinu.

Guldinovo pravidlo

Veta: Objem rotačného telesa *V*r je rovný objemu hranolu, ktorého podstava má rovnaký obsah ako rotujúci obrazec *S* a jeho výškou je kružnica s polomerom, ktorý odpovedá vzdialenosti ťažiska rotujúceho obrazca od osi rotácie y_T. Povrch tohto rotačného telesa S_r je rovný obsahu obdĺžniku, ktorého jedna strana je rovná dĺžke obvodu rotovaného obrazca *l* a druhá je y_T, teda:

$$V_r = 2\pi\cdot y_T\cdot S,$$

$$S = 2\pi\cdot y_T\cdot l.$$

Opäť budeme guľu uvažovať tak ako na začiatku tejto kapitoly.[36] Vzdialenosť ťažiska od osi rotácie bude v tomto prípade totožná s ypsilónovou súradnicou tohto ťažiska. Vypočítame $y_{T,K}$ – ťažisko kruhu ako integrál z y cez polkruh, delený jeho obsahom.

$$y_{T,K} = \frac{\int_{-r}^{r} \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} y \; dydx}{\pi \cdot r^2 / 2} = \frac{2 \cdot \int_{-r}^{r} [y^2/2]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dx}{\pi \cdot r^2} = \frac{\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \; dx}{\pi \cdot r^2} = \frac{[r^2 \cdot x - x^3/3]_{-r}^{r}}{\pi \cdot r^2} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}.$$

Ťažisko polkružnice ($y_{T,k}$) vypočítame ako integrál z y cez polkružnicu, delený jej dĺžkou. Polkružnicu budeme parametrizovať a budeme počítať krivkový integrál:

$$c(t) = (t, \quad \sqrt{r^2 - t^2}) \;, \qquad c'(t) = \left(1, \quad \frac{-t}{\sqrt{r^2 - t^2}}\right),$$

$$y_{T,\,k} = \frac{\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - t^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{t^2}{r^2 - t^2}} dt}{\pi \cdot r} = \frac{\int_{-r}^{r} r \; dt}{\pi \cdot r} = \frac{[r \cdot t]_{-r}^{r}}{\pi \cdot r} = \frac{2r}{\pi}.$$

Potom objem a povrch gule bude:

$$V_r = 2\pi \cdot \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3,$$

$$S_r = 2\pi \cdot \frac{2 \cdot r}{\pi} \cdot \pi \cdot r = 4\pi \cdot r^2.$$

---

[36] Pozri Objem a povrch gule ako rotačného telesa, str. 17.

Záver

V tejto bakalárskej práci sme ukázali vývoj postupov počítania objemu a povrchu gule. Od približných metód používaných v starovekom Egypte a Mezopotámii, kde iba nasledovali postup zapísaný na papyrusoch a vyrytý v tabuľkách s veľmi približnou hodnotou čísla π, cez Archimedove postupy s použitím exhaustívnej metódy, ktorá spresnila výpočty objemu a povrchu. Archimedes si už bol vedomý existencie konštanty π spoločnej pre rotačné telesá a mal vypracovaný postup, ktorý toto číslo mohol určiť s ľubovoľnou presnosťou.

Zlomovým momentom pre výpočet objemu a povrchu telies bol objav Cavalieriho princípu. Exaktné odvodenie dnes známych vzorcov pre objem a povrch gule však bolo až výsledkom infinitezimálneho počtu.

Zoznam použitej literatúry

1. ARCHIMEDES, HEATH, J. D.: The Works of Archimedes. Londýn: Cambridge University Press. 1897. 326 s.
2. BEČVÁŘ, J., BEČVÁŘOVÁ, M., VYMAZALOVÁ, H.: Matematika ve starověku Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus. 2003. 371 s. ISBN 80-7196-255-4.
3. BEČVÁŘ, J., ŠTOLL, I.: Archimedes Největší vědec starověku. Praha: Prometheus. 2005. 72 s. ISBN 80-7196-273-2.
4. CLAGETT, M.: Ancient Egyptian Science: Volume 3 Ancient Egyptian Mathematics. Philadelphia: American Philosophical Society. 1999. 467 s. ISBN 0-87169-232-5.
5. CORTZEN, A., WEISSTEIN, E. W.: "Measure." [online]. MathWorld-A Wolfram Web Resource. Jul. 2012 [cit. 25.7.2012]. Dostupné na internete:<http://mathworld.wolfram.com/Measure.html>
6. FITZPATRICK, R.: Euclid's Elements of Geometry. 2007. 428 s. ISBN 978-0-6151-7984-1.
7. KLINE, M.: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press. 1972. 390 s. ISBN 0-19-506135-7.
8. POMYKALOVÁ, E.: Matematika pre gymnáziá – Stereometria. Praha: Prometheus. 2007. 223 s. ISBN 978-80-7196-178-9.
9. SCHWABIK, Š., ŠARMANOVÁ, P.: Malý průvodce historií integrálu. Praha: Prometheus. 1996. 95 s. ISBN 80-7196-038-1.
10. ZNÁM, Š. a i.: Pohľad do dejín matematiky. Bratislava: ALFA. 1986. 240 s. ISBN 4558-1985-30.

Zoznam použitých skratiek

napr. – napríklad

tzv. – takzvaný

a i. – a iní

p. n. l. – pred naším letopočtom