Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Daniel Dvořák

Numerická analýza problému polydisperzní sedimentace

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jiří Felcman, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2012

Na tomto místě bych rád poděkoval doc. RNDr. Jiřímu Felcmanovi, CSc., vedoucímu bakalářské práce, za cenné rady i veškerý věnovaný čas.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Numerická analýza problému polydisperzní sedimentace

Autor: Daniel Dvořák

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jiří Felcman, CSc., Katedra numerické matematiky

Abstrakt: Práce se zabývá formulací problému polydisperzní sedimentace ve tvaru soustavy parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu a studiem problematiky určení vlastních čísel Jacobiho matice funkce toku. Vycházíme ze zákonů zachování hmotnosti a hybnosti a užitím konstitutivních vztahů odvodíme tzv. MLB model, který dále formulujeme jako jednorozměrný problém. Při jeho odvození se využívá aplikace Sherman-Morrisonovy formule pro výpočet inverzní matice k matici, která je ve tvaru součtu diagonální matice a matice vzniklé součinem dvou vektorů. Pro určení vlastních čísel Jacobiho matice funkce toku ukazujeme, že tato matice může být napsána ve tvaru poruchy diagonální matice. Tento rozklad umožňuje převedení problematiky vlastních čísel na řešení tzv. sekulární rovnice. Na základě řešení sekulární rovnice dokážeme hyperbolicitu systému za přepokladu, že hustoty jednotlivých částic jsou stejné.

Klíčová slova: polydisperzní sedimentace, sekulární rovnice, hyperbolický systém, zákony zachování.

Title: Numerical Analysis of a Polydisperse Sedimentation Problem

Author: Daniel Dvořák

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Felcman, CSc., Department of Numerical Mathematics

Abstract: The problem of the polydisperse sedimentation as the system of the partial differential equations is formulated. The hyperbolicity of the problem and the determination of the eigenvalues of the Jacobi matrix of the flux function is studied. Based on the conservation laws of the mass and momentum completed by the constitutive relations the so called MLB model is derived. The one-dimensional problem is formulated. The Sherman-Morrison formula is used to find the inverse matrix of the sum of the diagonal matrix and the matrix being the product of two vectors. In order to find the eigenvalues of the Jacobi matrix of the flux function the rank two perturbation of the diagonal matrix is used. In such a way the problem of the determination of the eigenvalues is reformulated as the solution of the so called secular equation. The eigenvalues can be localized and the strong hyperbolicity of the problem under certain conditions is proved.

Keywords: polydisperse sedimentation, secular equation, hyperbolic system, conservation laws.

Obsah

Úvod

Budeme se zabývat problémem polydisperzní sedimentace, jevem, kdy se v tekutině usazují částice. Situaci lze fyzikálně popsat pomocí zákonů zachování hmotnosti a hybnosti. To jsou parciální diferenciální rovnice, ve kterých jako neznámé funkce vystupují koncentrace jednotlivých částic. Na základě software pro metodu konečných objemů, vyvíjeného na KNM pro hyperbolické systémy, jako jsou např. Eulerovy rovnice nebo rovnice mělké vody, se nabízí možnost řešit daný problém pomocí metody konečných objemů. K tomu je třeba přeformulovat daný problém jako hyperbolický systém a vyšetřit jeho matematické vlastnosti. Na základě časopiseckých publikací převedeme rovnice pomocí určitých konstitutivních vztahů do tvaru, ve kterém za dodatečných předpokladů tvoří dokonce silně hyperbolický systém. Metoda konečných objemů je založena na vhodné aproximaci toku hledané veličiny pomocí numerického toku. Volba vhodného numerického toku je důležitou součástí algoritmu metody konečných objemů. Pro jeho konstrukci je v řadě případů třeba určit vlastní čísla Jacobiho matice funkce toku. V práci ukazujeme komplexnost problematiky určení vlastních čísel Jacobiho matice funkce toku pro problém polydisperzní sedimentace v případě, že částice mají stejné hustoty. Tato práce je rešeršního charakteru, původnim přínosem je komplexní zpracování problematiky hyperbolického systému popisujícího polydisperzní sedimentaci na základě současné literatury.

1. Model polydisperzní sedimentace

Tato práce se zabývá problémem polydisperzní sedimentace. Zabýváme se situací, kdy se v tekutině vlivem gravitační síly usazují částice. Částicemi zde budeme mít na mysli nestlačitelné homogenní koule o daném poloměru a tvořené z materiálu s danou hustotou. Označme čísly $1, 2, \dots, N$ jednotlivé typy částic, typem i rozumíme množinu všech částic v tekutině, které mají hustotu ρ_i a poloměr d_i, kde ρ_i,d_i pro $i = 1, \dots, N$ jsou známá. Vyžadujeme $d_i \neq d_j$ nebo $\rho_i \neq \rho_j$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, N$. Takto jsme definovali N typů částic v tekutině. Tato situace je fyzikálně popsána pomocí zákonů zachování, ve kterých v daném modelu určitým způsobem uvažujeme rovnice pro rychlosti částic usazujících se v tekutině. Hledaným řešením výsledných rovnic je tzv. vektor lokálních koncentrací $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_1, \dots, \phi_N)$, kde $\phi_i = \phi_i(\boldsymbol{x}, t)$ je lokální koncentrace (anglicky local concentration či volume fraction) příslušná částicím typu i, $i = 1, \dots, N$. Připouštíme pouze $\boldsymbol{\Phi} \in D_{\phi_{\max}} := \{\boldsymbol{\Phi} = (\phi_1, \dots, \phi_N)^T \in \mathbb{R}^N; \phi_1 > 0, \dots, \phi_N > 0, \phi_1 + \dots + \phi_N \leq \phi_{\max}\}$, kde $\phi_{\max} < 1$ je předem známé například pomocí experimentů určené číslo. V této kapitole především odvodíme tzv. MLB model (Masliyah, Lockett, Bassoon). Vzhledem k fyzikální podstatě problému však některé vztahy a rovnice budeme pouze postulovat, bez odvozování v tomto textu. Model MLB se poprvé objevil v na sobě nezávislých článcích [1],[2] z roku 1979. Uvedeme jeho odvození podle článku [3].

Nechť $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x}, t)$ značí rychlost částic typu $i = 1, \dots, N$, $\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x}, t)$ rychlost tekutiny. Pro částice typu $1, \dots, N$ a pro tekutinu platí následující rovnice kontinuity (uveďme zde, že odvození těchto rovnic kontinuity i později uvedených rovnic zákonu zachování hybnosti lze nalézt v knihách uvedených na straně 3 článku [4])

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi_i \boldsymbol{v}_i) = 0, \qquad i = 1, \dots, N, \tag{1.1}$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot ((1 - \phi)\boldsymbol{v}_f) = 0, \tag{1.2}$$

kde $\phi := \phi_1 + \dots + \phi_N$. Označme $\boldsymbol{q} := (1 - \phi)\boldsymbol{v}_f + \phi_1 \boldsymbol{v}_1 + \dots + \phi_N \boldsymbol{v}_N$ veličinu zvanou průměrná objemová rychlost (average volume velocity) a dále relativní rychlosti $\boldsymbol{u}_i := \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_f$. Pak lze psát

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{q} &= (1 - (\phi_1 + \dots + \phi_N))\boldsymbol{v}_f + \phi_1 \boldsymbol{v}_1 + \dots + \phi_N \boldsymbol{v}_N \\
&= \boldsymbol{v}_f - (\phi_1 \dots + \phi_N)\boldsymbol{v}_f + \phi_1 \boldsymbol{v}_1 + \dots + \phi_N \boldsymbol{v}_N \\
&= \boldsymbol{v}_f + \phi_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_f) + \dots + \phi_N(\boldsymbol{v}_N - \boldsymbol{v}_f) \\
&= \boldsymbol{v}_f + \phi_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + \phi_N \boldsymbol{u}_N,
\end{aligned}$$

odkud plyne, že

$$\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{q} - (\phi_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + \phi_N \boldsymbol{u}_N). \tag{1.3}$$

Užitím tohoto vyjádření $\boldsymbol{v}_f$ získáme

$$\phi_i \boldsymbol{v}_i = \phi_i(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{v}_f) = \phi_i(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{q} - (\phi_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + \phi_N \boldsymbol{u}_N)), \qquad i = 1, \dots, N. \tag{1.4}$$

Tento vztah budeme později potřebovat. Pokud sečteme všechny rovnice (1.1) a rovnici (1.2), získáme vztah

$$\nabla \cdot \boldsymbol{q} = 0. \tag{1.5}$$

V dalším textu používáme značení

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} := \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$$

Je-li $\boldsymbol{T}$ tenzor reprezentovaný maticí 3×3, značí symbol $\nabla \cdot \boldsymbol{T}$ vektor, jehož i-tou složku tvoří $\nabla \cdot \boldsymbol{T}^i \equiv \mathrm{div}\boldsymbol{T}^i$, kde $\boldsymbol{T}^i$ je i-tý sloupec matice reprezentující tenzor $\boldsymbol{T}$. Dalšími rovnicemi, které máme k dispozici, jsou rovnice vyjadřující zákon zachování hybnosti

$$\rho_i \phi_i \frac{D\boldsymbol{v}_i}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{T}_i + \rho_i \phi_i \boldsymbol{b} + \boldsymbol{m}_i^f + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{m}_{ik}^s, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1.6}$$

$$\rho_f (1-\phi) \frac{D\boldsymbol{v}_f}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{T}_f + \rho_f (1-\phi)\boldsymbol{b} - \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{m}_k^f. \tag{1.7}$$

Zde $\boldsymbol{T}_i$ představuje tenzor napětí částic typu $i, i = 1, \ldots, N$, $\boldsymbol{T}_f$ tenzor napětí tekutiny, $\boldsymbol{b}$ představuje sílu. V našem případě to bude pouze gravitační síla, tedy píšeme $\boldsymbol{b} = -g\boldsymbol{k}$, kde g je velikost gravitačního zrychlení a $\boldsymbol{k}$ je jednotkový vektor $(0,0,1)^T$. Dále $\boldsymbol{m}_i^f$ resp. $\boldsymbol{m}_{ij}^s$ jsou interakční síly vztažené na jednotku objemu mezi částicemi typu i a tekutinou resp. mezi částicemi typu i a částicemi typu j. Předpokládejme, že tenzory $\boldsymbol{T}_i$, $\boldsymbol{T}_f$ lze psát ve tvaru

$$\boldsymbol{T}_i = -p_i \boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_i^E, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{T}_f = -p_f \boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_f^E, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1.9}$$

kde $\boldsymbol{T}_i^E$, $\boldsymbol{T}_f^E$ jsou tenzory a $\boldsymbol{I}$ je jednotkový tenzor. Veličiny p_i, p_f jsou teoretické veličiny, které nelze přímo experimentálně měřit. Dle [3] ale platí vztahy

$$p_f = (1-\phi)p \tag{1.10}$$

$$p_i = \phi_i p, \tag{1.11}$$

ve kterých $p = p(\boldsymbol{x}, t)$ je tlak v uvažované tekutině s částicemi. Dále předpokládejme, že pro $\boldsymbol{m}_i^f$ platí následující vztah

$$\boldsymbol{m}_i^f = \alpha_i(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{u}_i + \beta \nabla \phi_i, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1.12}$$

kde $\alpha_i(\boldsymbol{\Phi})$, β jsou zatím blíže nespecifikované parametry. Rovnici pro popis členů $\boldsymbol{m}_{ij}^s$ uvádět nebudeme, protože tyto členy později stejně zanedbáme. Dosaďme do (1.8) za p_i z (1.11), do (1.9) za p_f z (1.10), získáme tak

$$\boldsymbol{T}_i = -\phi_i p \boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_i^E, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{T}_f = -(1-\phi)p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_f^E, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.14}$$

Dosaďme do (1.6) $\boldsymbol{T}_i$ z (1.13), $\boldsymbol{m}_i^f$ z (1.12). Protože platí

$$\nabla \cdot (-\phi_i p \boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_i^E) = \nabla \cdot \boldsymbol{T}_i^E - \nabla(\phi_i p) = \nabla \cdot \boldsymbol{T}_i^E - p\nabla\phi_i - \phi_i \nabla p,$$

přejde (1.6) v

$$\rho_i\phi_i\frac{D\boldsymbol{v}_i}{Dt} = -\rho_i\phi_i g\boldsymbol{k}+\nabla\cdot\boldsymbol{T}_i^E-\phi_i\nabla p-p\nabla\phi_i+\alpha_i(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{u}_i+\beta\nabla\phi_i+\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{m}_{ik}^s, i=1,\dots,N \tag{1.15}$$

Dále dosaďme do (1.7) $\boldsymbol{T}_f$ z (1.14), $\boldsymbol{m}_i^f$ z (1.12). Protože platí

$$\nabla\cdot(-(1-\phi)p\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_f^E) = \nabla\cdot\boldsymbol{T}_f^E-(1-\phi)\nabla p+p\nabla\phi,$$

přejde (1.7) v

$$\rho_f(1-\phi)\frac{D\boldsymbol{v}_f}{Dt} = -\rho_f(1-\phi)g\boldsymbol{k}+\nabla\cdot\boldsymbol{T}_f^E-(1-\phi)\nabla p+p\nabla\phi-\beta\nabla\phi-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{u}_k. \tag{1.16}$$

Nyní pomocí fyzikálních úvah můžeme určit parametr β. Probíhá-li sedimentace, uvažujme $t\to\infty$, na konci procesu ve stavu rovnováhy budou rychlosti usazujících se částic i rychlost tekutiny nulové, tlak zůstane pouze hydrostatický ($\nabla p = -\rho_f g\boldsymbol{k}$). Dle článku [3] je navíc možné přepsat člen $\boldsymbol{T}_f^E$ pomocí $\boldsymbol{u}_i$ a $\boldsymbol{v}_f$, které ale budou nulové, takže bude také platit, že $\nabla\cdot\boldsymbol{T}_f^E = 0$. Pokud tyto hodnoty dosadíme do rovnice (1.16), vyjde nám $\beta = p$. Dosazením p místo β do (1.15) přejde (1.15) v

$$\rho_i\phi_i\frac{D\boldsymbol{v}_i}{Dt} = -\rho_i\phi_i g\boldsymbol{k}+\nabla\cdot\boldsymbol{T}_i^E-\phi_i\nabla p+\alpha_i(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{u}_i+\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{m}_{ik}^s, i=1,\dots,N \tag{1.17}$$

Pokud dosadíme p místo β do (1.16), poté (1.16) vydělíme výrazem $(1-\phi)$ ($0<\phi<1$ pro $\boldsymbol{\Phi}\in D_{\phi_{\max}}$) a nakonec z ní vyjádříme ∇p, přejde (1.16) v

$$\nabla p = -\rho_f g\boldsymbol{k}-\frac{1}{1-\phi}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{u}_k-\rho_f\frac{D\boldsymbol{v}_f}{Dt}+\frac{1}{1-\phi}\nabla\cdot\boldsymbol{T}_f^E. \tag{1.18}$$

Některé členy v těchto rovnicích je možné zanedbat. Jsou to ty členy, které jsou po dosazení hodnot typických v prováděných experimentech menší než určitá stanovená hranice (např. 10^{-5}). Provedením tohoto postupu v článku [3] přejde (1.17) v

$$\alpha_i(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{u}_i = \rho_i\phi_i g\boldsymbol{k}+\phi_i\nabla p, \qquad i=1,\dots,N \tag{1.19}$$

a rovnice (1.18) přejde v

$$\nabla p = -\rho_f g\boldsymbol{k}-\frac{1}{1-\phi}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{u}_k+\frac{1}{1-\phi}\nabla\cdot\boldsymbol{T}_f^E. \tag{1.20}$$

Označme nyní

$$\boldsymbol{r}_i := (1-\phi)(\rho_i-\rho_f)g\boldsymbol{k}+\nabla\cdot\boldsymbol{T}_f^E, \qquad i=1,\dots,N, \tag{1.21}$$

pak dosazením pravé strany rovnice (1.20) do (1.19) a následným vynásobením získané rovnice výrazem $\frac{1-\phi}{\phi_i}$ získáme vztah

$$\frac{\alpha_i(\boldsymbol{\Phi})(1-\phi)}{\phi_i}\boldsymbol{u}_i + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{r}_i, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.22}$$

Toto je soustava N lineárních rovnic o neznámých $\boldsymbol{u}_i, i = 1, \ldots, N$. Protože $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{r}_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \ldots, N$, platí tato soustava postupně pro první, druhou a třetí složku těchto vektorů. Označme $\boldsymbol{u}_i := (u_i^1, u_i^2, u_i^3)^T$, $\boldsymbol{r}_i := (r_i^1, r_i^2, r_i^3)^T$, $i = 1, \ldots, N$, $\boldsymbol{u}^j := (u_1^j, \ldots, u_N^j)^T$, $\boldsymbol{r}^j := (r_1^j, \ldots, r_N^j)^T$,$j = 1, 2, 3$, pak pro jednotlivé složky $j = 1, 2, 3$ máme soustavu N lineárních rovnic

$$\frac{\alpha_i(\boldsymbol{\Phi})(1-\phi)}{\phi_i}u_i^j + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(\boldsymbol{\Phi})u_k^j = r_i^j, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.23}$$

Řešením těchto tří soustav (pro j=1,2,3) najdeme neznámé $\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2, \boldsymbol{u}^3$, tedy budeme znát $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N$. Díky svému specifickému tvaru lze (1.23) vyřešit pomocí Sherman-Morrisonovy formule. Uveďme, co Sherman-Morrisonova formule tvrdí: Máme-li dánu invertibilní diagonální matici $\boldsymbol{D}$ řádu n a vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, pak pro matici $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$ platí Sherman-Morrisonova formule

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{D}^{-1} - \frac{\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{D}^{-1}}{1 + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{x}},$$

pokud je jmenovatel zlomku na pravé straně nenulový. Nyní budeme chtít aplikovat tuto formuli na soustavu (1.23) a najít vektor $\boldsymbol{u}^j$. Označme $a_i := \frac{\alpha_i(\boldsymbol{\Phi})(1-\phi)}{\phi_i}$. Napíšeme-li (1.23) v maticovém tvaru $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^j = \boldsymbol{r}^j$, vidíme, že matici $\boldsymbol{A}$ lze psát jako $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{D}$ je diagonální matice mající prvek a_i na místě d_{ii}, $i = 1, \ldots, N$, a kde $\boldsymbol{B}$ je matice, jejíž všech N řádků tvoří řádkový vektor $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\Phi})^T := (\alpha_1(\boldsymbol{\Phi}), \ldots, \alpha_N(\boldsymbol{\Phi}))$. Označíme-li nyní $\boldsymbol{x} := (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\Phi})$, pak platí, že $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$. Použijeme-li tedy Sherman-Morrisonovu formuli na matici řešené soustavy, dostaneme, že

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_N^{-1} \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_N^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_N \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1, & \ldots, & \alpha_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_N^{-1} \end{pmatrix}}{1 + \begin{pmatrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_N^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Protože $\boldsymbol{u}^j = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{r}^j$, spočteme u_i^j tak, že vynásobíme skalárně i-tý řádek matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ s vektorem $\boldsymbol{r}^j$, tedy

$$
\begin{aligned}
u_i^j &= a_i^{-1}r_i^j - \frac{a_i^{-1}\sum_{k=1}^N a_k^{-1}\alpha_k(\mathbf{\Phi})r_k^j}{1+\sum_{k=1}^N a_k^{-1}\alpha_k(\mathbf{\Phi})} = a_i^{-1}\left(r_i^j - \frac{\sum_{k=1}^N a_k^{-1}\alpha_k(\mathbf{\Phi})r_k^j}{1+\sum_{k=1}^N a_k^{-1}\alpha_k(\mathbf{\Phi})}\right)\\
&= \frac{\phi_i}{\alpha_i(\mathbf{\Phi})(1-\phi)}\left(r_i^j - \frac{\sum_{k=1}^N \frac{\phi_k}{\alpha_k(\mathbf{\Phi})(1-\phi)}\alpha_k(\mathbf{\Phi})r_k^j}{1+\sum_{k=1}^N \frac{\phi_k}{\alpha_k(\mathbf{\Phi})(1-\phi)}\alpha_k(\mathbf{\Phi})}\right)\\
&= \frac{\phi_i}{\alpha_i(\mathbf{\Phi})(1-\phi)}\left(r_i^j - \frac{\sum_{k=1}^N \frac{\phi_k}{(1-\phi)}r_k^j}{1+\sum_{k=1}^N \frac{\phi_k}{(1-\phi)}}\right)\\
&= \frac{\phi_i}{\alpha_i(\mathbf{\Phi})(1-\phi)}\left(r_i^j - \frac{\sum_{k=1}^N \phi_k r_k^j}{(1-\phi)+\sum_{k=1}^N \phi_k}\right)\\
&= \frac{\phi_i}{\alpha_i(\mathbf{\Phi})(1-\phi)}\left(r_i^j - \sum_{k=1}^N \phi_k r_k^j\right), \qquad j=1,2,3.
\end{aligned}
$$

Dostali jsme tedy rovnici

$$
\boldsymbol{u}_i = \frac{\phi_i}{\alpha_i(\mathbf{\Phi})(1-\phi)}\left(\boldsymbol{r}_i - \sum_{k=1}^N \phi_k \boldsymbol{r}_k\right). \tag{1.24}
$$

Označme $\rho(\mathbf{\Phi}) := (1-\phi)\rho_f + \sum_{k=1}^N \phi_k\rho_k$. Dosaďme do (1.24) $\boldsymbol{r}_i$ z (1.21), ale zanedbejme člen $\nabla\cdot\boldsymbol{T}_f^E$ (tento člen zanedbáme pouze v tomto kroku). Pak dostáváme

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_i &= \frac{\phi_i}{\alpha_i(\mathbf{\Phi})(1-\phi)}\left((1-\phi)(\rho_i-\rho_f)g\boldsymbol{k} - \sum_{k=1}^N \phi_k(1-\phi)(\rho_k-\rho_f)g\boldsymbol{k}\right)\\
&= \frac{\phi_i}{\alpha_i(\mathbf{\Phi})}\left(\rho_i-\rho_f-\sum_{k=1}^N \phi_k(\rho_k-\rho_f)\right)g\boldsymbol{k}\\
&= \frac{\phi_i}{\alpha_i(\mathbf{\Phi})}(\rho_i-\rho_f-(\rho(\mathbf{\Phi})-\rho_f))g\boldsymbol{k}\\
&= \frac{\phi_i}{\alpha_i(\mathbf{\Phi})}(\rho_i-\rho(\mathbf{\Phi}))g\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

Třetí rovnost v tomto výpočtu plyne z toho, že $\sum_{k=1}^N \phi_k(\rho_k-\rho_f) = \sum_{k=1}^N \phi_k\rho_k - \rho_f\phi = \rho(\mathbf{\Phi}) - \rho_f$. Tedy

$$
\boldsymbol{u}_i = \frac{\phi_i}{\alpha_i(\mathbf{\Phi})}(\rho_i-\rho(\mathbf{\Phi}))g\boldsymbol{k}, \qquad i=1,\dots,N. \tag{1.25}
$$

V posledním kroku odvození modelu je nutná bližší specifikace členu $\alpha_i(\mathbf{\Phi})$. V článku [3] proto najdeme rovnici

$$
\alpha_i(\mathbf{\Phi}) = \phi_i\xi_i(\mathbf{\Phi}), \tag{1.26}
$$

ta je tohoto tvaru z toho důvodu, že $\alpha_i(\mathbf{\Phi})$ se v rovnici pro vyjádření relativní rychlosti $\boldsymbol{u}_i$ (1.25) nachází ve jmenovateli a my požadujeme, aby rychlost zůstala konečná pro $\phi_i \to 0$. To zajistíme vhodnou volbou funkce $\xi_i(\mathbf{\Phi})$:

$$\xi_i(\mathbf{\Phi}) = -\frac{18\mu_f}{d_i^2 V(\mathbf{\Phi})}, \qquad V(\mathbf{\Phi}) := (1-\phi)^{n(\mathbf{\Phi})-2}, \tag{1.27}$$

kde μ_f představuje dynamickou vazkost tekutiny. Tento empirický vztah se ukázal jako velmi vyhovující srovnáním s experimenty. Vztahu pro $V(\mathbf{\Phi})$ se říká Richardson-Zakiho rovnice. Teď můžeme nové vztahy (1.26) a (1.27) dosadit do (1.25) a dostaneme tak

$$\boldsymbol{u}_i = -\frac{(\rho_i - \rho(\mathbf{\Phi}))g d_i^2}{18\mu_f} V(\mathbf{\Phi})\boldsymbol{k}, \qquad i = 1, \dots, N. \tag{1.28}$$

Označme $\bar{\rho}_i := \rho_i - \rho_f, i = 1, \dots, N$, dále $\bar{\boldsymbol{\rho}} := (\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_N)^T$ a nakonec

$$\mu := -\frac{g d_1^2}{18\mu_f}, \qquad \delta_i := \frac{d_i^2}{d_1^2}, \qquad i = 1, \dots, N.$$

Pak lze (1.28) přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{u}_i = \mu\delta_i(\rho_i - \rho(\mathbf{\Phi}))V(\mathbf{\Phi})\boldsymbol{k}. \tag{1.29}$$

Protože platí

$$\rho(\mathbf{\Phi}) = (1-\phi)\rho_f + \sum_{k=1}^{N} \phi_k \rho_k = \rho_f + \sum_{k=1}^{N} \phi_k(\rho_k - \rho_f) = \rho_f + \sum_{k=1}^{N} \phi_k \bar{\rho}_k = \rho_f + \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \mathbf{\Phi},$$

platí také

$$\rho_i - \rho(\mathbf{\Phi}) = \rho_i - \rho_f - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \mathbf{\Phi} = \bar{\rho}_i - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \mathbf{\Phi}$$

Užitím posledního vztahu lze (1.29) přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{u}_i = \mu\delta_i(\bar{\rho}_i - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \mathbf{\Phi})V(\mathbf{\Phi})\boldsymbol{k}, \qquad i = 1, \dots, N. \tag{1.30}$$

Rovnice (1.4) říká, že

$$\phi_i \boldsymbol{v}_i = \phi_i \boldsymbol{u}_i + \phi_i \boldsymbol{q} - \phi_i \sum_{k=1}^{N} \phi_k \boldsymbol{u}_k.$$

Dosaďme do posledního vztahu $\boldsymbol{u}_i$ z (1.30):

$$\phi_i \boldsymbol{v}_i = \phi_i \left(\mu\delta_i(\bar{\rho}_i - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \mathbf{\Phi})V(\mathbf{\Phi})\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q} - \sum_{k=1}^{N} \phi_k \mu \delta_k (\bar{\rho}_k - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \mathbf{\Phi})V(\mathbf{\Phi})\boldsymbol{k} \right).$$

Jednoduchou úpravou tento vztah přejde v

$$\phi_i \boldsymbol{v}_i = \phi_i \boldsymbol{q} + \phi_i \mu V(\mathbf{\Phi}) \left(\delta_i(\bar{\rho}_i - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \mathbf{\Phi}) - \sum_{k=1}^{N} \phi_k \delta_k (\bar{\rho}_k - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \mathbf{\Phi}) \right) \boldsymbol{k}.$$

Označme $f_i(\mathbf{\Phi}) := \phi_i \mu V(\mathbf{\Phi}) \left(\delta_i(\bar{\rho}_i - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \mathbf{\Phi}) - \sum_{k=1}^{N} \phi_k \delta_k (\bar{\rho}_k - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \mathbf{\Phi}) \right)$ výraz vyskytující se v poslední rovnici, pak můžeme psát

$$\phi_i \boldsymbol{v}_i = \phi_i \boldsymbol{q} + f_i(\mathbf{\Phi})\boldsymbol{k}. \tag{1.31}$$

Díky (1.31) lze (1.1) vyjádřit jako

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi_i \boldsymbol{q} + f_i(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{k}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.32}$$

Z definice $\rho(\boldsymbol{\Phi})$ plyne, že

$$\sum_{k=1}^{N} \phi_k \rho_k = \rho(\boldsymbol{\Phi}) + (\phi - 1)\rho_f. \tag{1.33}$$

Dosaďme do (1.20) $\boldsymbol{u}_i$ z (1.25) a upravme užitím (1.33):

$$\begin{aligned}
\nabla p &= -\rho_f g\boldsymbol{k} - \frac{1}{1-\phi}\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(\boldsymbol{\Phi})\frac{\phi_k}{\alpha_k(\boldsymbol{\Phi})}(\rho_k - \rho(\boldsymbol{\Phi}))g\boldsymbol{k} + \frac{1}{1-\phi}\nabla \cdot \boldsymbol{T}_f^E \\
&= -\rho_f g\boldsymbol{k} - \frac{1}{1-\phi}\left(\sum_{k=1}^{N} \phi_k\rho_k - \rho(\boldsymbol{\Phi})\sum_{k=1}^{N}\phi_k\right) g\boldsymbol{k} + \frac{1}{1-\phi}\nabla \cdot \boldsymbol{T}_f^E \\
&= -\rho_f g\boldsymbol{k} - \frac{1}{1-\phi}(\rho(\boldsymbol{\Phi}) + (1-\phi)\rho_f - \phi\rho(\boldsymbol{\Phi}))g\boldsymbol{k} + \frac{1}{1-\phi}\nabla \cdot \boldsymbol{T}_f^E \\
&= -\rho_f g\boldsymbol{k} - (\rho(\boldsymbol{\Phi}) - \rho_f)g\boldsymbol{k} + \frac{1}{1-\phi}\nabla \cdot \boldsymbol{T}_f^E \\
&= -\rho(\boldsymbol{\Phi})g\boldsymbol{k} + \frac{1}{1-\phi}\nabla \cdot \boldsymbol{T}_f^E.
\end{aligned}$$

Získali jsme tak

$$\nabla p = -\rho(\boldsymbol{\Phi})g\boldsymbol{k} + \frac{1}{1-\phi}\nabla \cdot \boldsymbol{T}_f^E. \tag{1.34}$$

Tímto je odvození MLB modelu u konce. Výsledný systém rovnic tvoří rovnice (1.39), (1.5), (1.34), pro přehlednost je zde uveďme pohromadě:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi_i \boldsymbol{q} + f_i(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{k}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1.35}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{q} = 0, \tag{1.36}$$

$$\nabla p = -\rho(\boldsymbol{\Phi})g\boldsymbol{k} + \frac{1}{1-\phi}\nabla \cdot \boldsymbol{T}_f^E, \tag{1.37}$$

kde $f_i(\boldsymbol{\Phi}) = \phi_i \mu V(\boldsymbol{\Phi}) \left(\delta_i(\bar{\rho}_i - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T\boldsymbol{\Phi}) - \sum_{k=1}^{N}\phi_k\delta_k(\bar{\rho}_k - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T\boldsymbol{\Phi})\right)$. Takto jsme podle článku [3] odvodili výsledné rovnice. Vyšli jsme ze zákonů zachování, užili jsme určité fyzikální vztahy, zanedbání některých členů a experimenty.

Uvažujme nádobu s tekutinou, ve které se usazují částice, tedy situaci, kterou výše uvedené rovnice popisují. Rovnice jsou ve třech prostorových dimenzích, závislé na prostorové souřadnici $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$. Proveďme úvahu pocházející ze článku [5]. Označme L výšku hladiny v nádobě, volme $0 \leq x_3 \leq L$. Uvažujme nyní hladinu v nádobě v hloubce x_3, tedy množinu všech bodů, pro které je třetí souřadnice rovna právě x_3. Budeme předpokládat, že všechny veličiny z rovnic závisející na třech prostorových souřadnicích budou na dané hladině konstantní, tedy jsou závislé pouze na x_3. Takovouto idealizací získáme z původních rovnic rovnice závislé pouze na čase a jedné prostorové proměnné. V dalším textu budeme uvažovat pouze tento jednorozměrný model. Pišme x místo x_3. Nyní přejdeme k rovnicím pro jednu prostorovou proměnnou. Rychlosti $\boldsymbol{v}_f$, $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, \ldots, N$, jsou nyní skalární veličiny, které budeme psát pouze jako v_f, v_i, $i = 1, \ldots, N$. Vzhledem k své definice je také $\boldsymbol{q}$ skalární veličinou, tedy q. Z (1.36) získáme

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{1.38}$$

rovnice (1.35) přejde v

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi_i q + \partial f_i(\boldsymbol{\Phi})) = 0, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.39}$$

V případě tekutiny v nádobě jsou na dně ($x = 0$) rychlosti částic i tekutiny nulové, $v_f = 0$, $v_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$. Proto vzhledem k (1.38) pro $q = (1 - \phi)v_f + \phi_1 v_1 + \ldots + \phi_N v_N$ platí $q \equiv 0$. Pak (1.39) přejde v

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\Phi})}{\partial x} = 0, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.40}$$

Dle článku [6] není v případě jedné prostorové proměnné nutné řešit rovnici (1.37) (její ekvivalent v jedné dimenzi), protože člen $\boldsymbol{T}_f^E$ lze přepsat do tvaru, kdy je funkcí $\boldsymbol{\Phi}$, tedy rovnici pro tlak bude možné vyřešit zpětně ze znalosti $\phi_1, \ldots, \phi_N$. Rovnici (1.38) vyřešíme pomocí předepsané okrajové podmínky a jedinou rovnicí, kterou je nutné vyřešit je tedy rovnice (1.39), přičemž dále známe

$$\boldsymbol{\Phi}(x, 0) =: \boldsymbol{\Phi}^0(x) \in D_{\phi_{\max}}, \qquad 0 \le x \le L$$

a dále

$$\boldsymbol{f}|_{x=0} = 0, \qquad \boldsymbol{f}|_{x=L} = 0, \qquad t > 0,$$

kde $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_N)^T$. V průběhu odvození jsme z rovnice (1.1) bližší specifikací rychlosti $\boldsymbol{v}_i$ přešli k rovnici (1.40). Proto (uvažujeme-li (1.1) také v jedné dimenzi) platí

$$v_i \phi_i = f_i(\boldsymbol{\Phi}).$$

Tuto rovnost získáme také, uvažujeme-li (1.31) a dosadíme-li $q \equiv 0$. Z definice $f_i(\boldsymbol{\Phi})$

$$\phi_i v_i = \phi_i \mu V(\boldsymbol{\Phi}) \left(\delta_i(\bar{\rho}_i - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\Phi}) - \sum_{k=1}^{N} \phi_k \delta_k (\bar{\rho}_k - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\Phi}) \right),$$

odkud zkrácením ϕ_i získáme rovnici pro rychlost v MLB modelu:

$$v_i = \mu V(\boldsymbol{\Phi}) \left(\delta_i(\bar{\rho}_i - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\Phi}) - \sum_{k=1}^{N} \phi_k \delta_k (\bar{\rho}_k - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\Phi}) \right). \tag{1.41}$$

2. Hyperbolicita systému

Z předchozího textu máme k dispozici zákon zachování tvaru

$$\partial_t \boldsymbol{\Phi} + \partial_x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Phi}) = 0,\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Phi}) = (f_1(\boldsymbol{\Phi}), \dots, f_N(\boldsymbol{\Phi}))^T,\ f_i(\boldsymbol{\Phi}) = \phi_i v_i(\boldsymbol{\Phi}),\ i = 1, \dots, N \tag{2.1}$$

Definice 1. Řekneme, že systém (2.1) je hyperbolický, jestliže pro Jacobiho matici $\boldsymbol{J}_f := \left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\Phi})}{\partial \phi_j}\right)_{i,j=1}^N$ platí, že má N reálných vlastních čísel. Dále řekneme, že je silně hyperbolický, pokud jsou tato vlastní čísla navíc jednoduchá.

Naším cílem je ukázat, že systém (1.40) v MLB modelu polydisperzní sedimentace je za určitých podmínek silně hyperbolický. Uvažujme rovnice MLB modelu v jednorozměrném případě (jedna prostorová proměnná). V článku [3] bylo dokázáno, že systém rovnic uvedený výše (s rychlostmi v_i tvaru (1.41)) je silně hyperbolický, pokud $N = 2$ a $\rho_1 = \rho_2$. To vedlo spolu s experimenty k domněnce, že by daný systém mohl při rovnosti hustot být silně hyperbolický pro libovolné N. To bylo později dokázáno v článku [6]. Tuto skutečnost lze dokázat také užitím tzv. sekulární rovnice. To je provedeno v článcích [7], [8]. Podle těchto článků tvrzení dokážeme v následujícím textu. Nejprve podle zmíněných článků uvedeme teorii sekulární rovnice a poté ji budeme aplikovat.

Předpokládejme, že rychlosti $v_1, \dots, v_N$ jsou funkcemi m ($m \le N$) skalárních funkcí $p_j = p_j(\boldsymbol{\Phi})$, tedy $v_i = v_i(p_1, \dots, p_m)$, $i = 1, \dots, N$. Protože jsme v předchozí kapitole symbol p_j používali, poznamenejme, že zde nemá význam tlaku. Pro prvky Jacobiho matice, jejíž vlastní čísla zkoumáme, platí

$$\frac{\partial(\phi_i v_i)}{\partial \phi_j} = v_i \delta_{i,j} + \sum_{l=1}^{m} \phi_i \frac{\partial v_i}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial \phi_j}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Definujme diagonální matici $\boldsymbol{D}$ jako $\boldsymbol{D} := \mathrm{diag}(v_1, \dots, v_N)$. Uvážíme-li výše uvedené vyjádření prvků Jacobiho matice $\boldsymbol{J_f} = \left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\Phi})}{\partial \phi_j}\right)_{i,j=1}^N$, můžeme definovat matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ typu $N \times m$ následovně:

$$b_{i,l} := \frac{\phi_i \partial v_i}{\partial p_l}, \quad a_{j,l} := \frac{\partial p_l}{\partial \phi_j}, \quad 1 \le i, j \le N,\ 1 \le l \le m. \tag{2.2}$$

Pak můžeme psát $\boldsymbol{J_f} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T$. Snažíme se najít vlastní čísla této matice. Nechť λ je vlastní číslo a $\boldsymbol{x}$ příslušný vlastní vektor, navíc nechť $\lambda \neq v_i$, $i = 1, \dots, N$. Pak $(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{D} - \lambda \boldsymbol{I}$ je invertibilní. Drobnou úpravou pak získáme (nulu a nulový vektor graficky neodlišujeme)

$$\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{D} - \lambda \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x}) = 0,$$

vynásobením maticí $\boldsymbol{A}^T$ zleva dostaneme

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^T (\boldsymbol{D} - \lambda \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x}) = 0.$$

Definujeme-li $\boldsymbol{M}_\lambda := \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{D} - \lambda \boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}$, pak $\boldsymbol{M}_\lambda \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x} = 0$. Kdyby $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x} = 0$, z rovnice $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{D} - \lambda \boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x}) = 0$ získáme $\boldsymbol{x} = 0$, $\boldsymbol{x}$ je ale vlastní vektor, tedy z předpokladů nenulový. Tedy $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x} \neq 0$, $\boldsymbol{M}_\lambda$ je singulární a každé vlastní číslo

λ splňující $\lambda \neq v_i$, $i = 1, \ldots, N$, musí být kořenem rovnice $R(\lambda) := \det \boldsymbol{M}_\lambda = 0$. Rovnici $R(\lambda) = 0$ zveme sekulární rovnicí. V případě, že má tato rovnice N různých reálných kořenů, jsme našli N různých vlastních čísel Jacobiho matice $\boldsymbol{J_f}$ a dokázali jsme silnou hyperbolicitu vyšetřovaného systému. Poté, co uvedeme několik tvrzení týkajících se této rovnice, se nám podaří pro systém rovnic modelu MLB popisujícího polydisperzní sedimentaci ukázat, že příslušná sekulární rovnice má za určitých podmínek N různých reálných kořenů. Nyní bude vhodné zavést další značení. Nechť $\boldsymbol{X}$ je matice typu $m \times n$, $I := \{i_1 < \cdots < i_k\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $J := \{j_1 < \cdots < j_l\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, značme $\boldsymbol{X^{I,J}}$ matici typu $k \times l$ s prvky $x^{I,J}_{p,q} = x_{i_p, j_q}$, tedy $\boldsymbol{X^{I,J}}$ je podmaticí matice $\boldsymbol{X}$, která vznikla tak, že jsme z matice $\boldsymbol{X}$ ponechali pouze řádky s indexy $i_1, \ldots, i_k$ a z takto vzniklé matice typu $k \times n$ jsme následně ponechali pouze sloupce s indexy $j_1, \ldots, j_l$. Symbolem $\boldsymbol{X}^{I,*}$, resp. $\boldsymbol{X}^{*,J}$ rozumíme matici vzniklou z $\boldsymbol{X}$ ponecháním pouze řádků s indexy z množiny I, resp. pouze sloupců s indexy z množiny J. Dále symbolem S^N_k označme množinu všech k-prvkových podmnožin množiny $\{1, \ldots, n\}$. Symbolem $S(J)$ značíme množinu všech permutací množiny J, znaménko permutace σ značme $\mathrm{zn}(\sigma)$.

Věta 2. *Nechť $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times m}$,$\boldsymbol{I}_m$ budiž jednotková matice řádu m, pak*

$$\det(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{X}) = 1 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{I \in S^m_k} \det \boldsymbol{X}^{I,I} \tag{2.3}$$

Důkaz. Označme $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_m]$, kde $\boldsymbol{x}_i$, $i = 1, \ldots, m$, jsou (sloupcové) vektory. Značme $\boldsymbol{e}_i$ i-tý sloupec matice $\boldsymbol{I}_m$. Pak dle základních vlastností determinantů máme

$$\det(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{X}) = \det[\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m + \boldsymbol{x}_m] = \sum_{i_1, \ldots, i_m \in \{0,1\}} \det[\boldsymbol{c}_{i_1,1}, \ldots, \boldsymbol{c}_{i_m,m}], \tag{2.4}$$

kde značíme $\boldsymbol{c}_{0,j} := \boldsymbol{e}_j$ a $\boldsymbol{c}_{1,j} := \boldsymbol{x}_j$. Je-li j-tý sloupec matice $[\boldsymbol{c}_{i_1,1}, \ldots, \boldsymbol{c}_{i_m,m}]$ roven $\boldsymbol{e}_j$, můžeme determinant podle tohoto sloupce rozvinout. Z toho plyne, že pro $I := \{j = 1, \ldots, m | i_j = 1\}$

$$\det[\boldsymbol{c}_{i_1,1}, \ldots, \boldsymbol{c}_{i_m,m}] = \det \boldsymbol{X}^{I,I}. \tag{2.5}$$

Zřejmě pro $I = \emptyset$ máme $\det[\boldsymbol{c}_{i_1,1}, \ldots, \boldsymbol{c}_{i_m,m}] = \det \boldsymbol{I}_m = 1$. Pak můžeme (2.4) přepsat jako

$$\det(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{X}) = 1 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{I \in S^m_k} \det \boldsymbol{X}^{I,I}. \tag{2.6}$$

$\square$

Věta 3. *Nechť $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ jsou matice typu $N \times k$, $k \leq N$, pak*

$$\det \boldsymbol{G}^T F = \sum_{J \in S^N_k} \det \boldsymbol{G}^{J,*} \det \boldsymbol{F}^{J,*}. \tag{2.7}$$

Důkaz. V tomto důkazu značme $\boldsymbol{f}_i$, resp. $\boldsymbol{g}_i$ i-tý sloupec matice $\boldsymbol{F}^T$, resp. $\boldsymbol{G}^T$, tedy i-tý řádek matice $\boldsymbol{F}$, resp. $\boldsymbol{G}$. Protože pro prvek na i-tém řádku a v j-tém sloupci matice $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{F}$ platí vyjádření $\sum_{l=1}^N g_{i,l}^T f_{l,j}$, spočteme j-tý sloupec matice $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{F}$ jako $\sum_{i=1}^k \boldsymbol{e}_i \sum_{l=1}^N g_{i,l}^T f_{l,j}$, kde $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^k$ značí i-tý kanonický vektor. Pak lze j-tý sloupec matice $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{F}$ psát jako

$$\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^N g_{l,1} f_{l,j} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^N g_{l,k} f_{l,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,1}f_{1,j} & +\cdots+ & g_{N,1}f_{N,j} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{1,k}f_{1,j} & +\cdots+ & g_{N,k}f_{N,j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{g}_i f_{i,j}.$$

Potom můžeme psát

$$\det \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{F} = \det \left[\sum_{i_1=1}^N \boldsymbol{g}_{i_1} f_{i_1,1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^N \boldsymbol{g}_{i_k} f_{i_k,k} \right] = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^N f_{i_1,1}\cdots f_{i_k,k} \det\left[\boldsymbol{g}_{i_1}\cdots \boldsymbol{g}_{i_k}\right],$$

kde poslední rovnost plyne z opakovaného použití pravidla $\det[\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_k] = \det[\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_k] + \det[\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_k]$ a použitím pravidla pro násobení determinantu skalárem. Protože determinant s dvěma stejnými sloupci je roven nule, za pomoci přeznačení lze poslední výraz upravit:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1, i_p\neq i_q, p\neq q}^N f_{i_1,1}\cdots f_{i_k,k} \det[\boldsymbol{g}_{i_1}\cdots \boldsymbol{g}_{i_k}] \\ &= \sum_{J=\{j_1<\cdots<j_k\}\in S_k^N} \sum_{\sigma\in S(J)} f_{\sigma(j_1),1}\cdots f_{\sigma(j_k),k} \det[\boldsymbol{g}_{\sigma(j_1)}, \ldots, \boldsymbol{g}_{\sigma(j_k)}] \\ &= \sum_{J=\{j_1<\cdots<j_k\}\in S_k^N} \det[\boldsymbol{g}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j_k}] \sum_{\sigma\in S(J)} f_{\sigma(j_1),1}\cdots f_{\sigma(j_k),k} \mathrm{zn}(\sigma), \end{aligned}$$

kde $\mathrm{zn}(\sigma)$ je znaménko permutace $\sigma \in S(J)$. Užitím definice determinantu nakonec dostáváme

$$= \sum_{J=\{j_1<\cdots<j_k\}\in S_k^N} \det[\boldsymbol{g}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j_k}] \det[\boldsymbol{f}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{f}_{j_k}] = \sum_{J\in S_k^N} \det \boldsymbol{G}^{J,*} \det \boldsymbol{F}^{J,*}.$$

□

Lemma 4. *Nechť J značí konečnou indexovou množinu, nechť čísla λ,d_i,$i \in J$ jsou po dvou různá. Pak platí*

$$\frac{1}{\prod_{i\in J}(d_i - \lambda)} = \sum_{i\in J} \frac{1}{\prod_{j\in J\setminus\{i\}}(d_j - d_i)} \frac{1}{d_i - \lambda}. \tag{2.8}$$

Důkaz. Dokážeme platnost této identity matematickou indukcí. Nejprve nechť $J = \{1, 2\}$. Ukážeme, že platí

$$\frac{1}{(d_1 - \lambda)(d_2 - \lambda)} = \frac{1}{d_2 - d_1}\frac{1}{d_1 - \lambda} + \frac{1}{d_1 - d_2}\frac{1}{d_2 - \lambda}. \tag{2.9}$$

Upravme pravou stranu pomocí vytýkání a převedení na společného jmenovatele

$$\begin{aligned}\frac{1}{d_2-d_1}\frac{1}{d_1-\lambda}+\frac{1}{d_1-d_2}\frac{1}{d_2-\lambda}&=\frac{1}{d_2-d_1}\left(\frac{1}{d_1-\lambda}-\frac{1}{d_2-\lambda}\right)\\&=\frac{1}{d_2-d_1}\frac{d_2-\lambda-(d_1-\lambda)}{(d_1-\lambda)(d_2-\lambda)}=\frac{1}{(d_1-\lambda)(d_2-\lambda)},\end{aligned}$$

pro J dvouprvkovou tedy identita platí. Předpokládejme nyní platnost pro $J=\{1,\dots,n-1\}$ a dokažme platnost pro $K=\{1,\dots,n-1\}\cup\{n\}$. Dle indukčního předpokladu platí

$$\frac{1}{\prod_{i\in J}(d_i-\lambda)}=\sum_{i\in J}\frac{1}{\prod_{j\in J\setminus\{i\}}(d_j-d_i)}\frac{1}{d_i-\lambda}.$$

Potom

$$\frac{1}{\prod_{i\in K}(d_i-\lambda)}=\frac{1}{\prod_{i\in J}(d_i-\lambda)}\frac{1}{d_n-\lambda}=\sum_{i\in J}\frac{1}{\prod_{j\in J\setminus\{i\}}(d_j-d_i)}\frac{1}{d_i-\lambda}\frac{1}{d_n-\lambda}. \tag{2.10}$$

Dle již dokázaného platí

$$\frac{1}{(d_i-\lambda)(d_n-\lambda)}=\frac{1}{(d_n-d_i)(d_i-\lambda)}+\frac{1}{(d_i-d_n)(d_n-\lambda)}. \tag{2.11}$$

Dosazením pravé strany (2.11) do (2.10) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{\prod_{i\in K}(d_i-\lambda)}&=\sum_{i\in J}\frac{1}{\prod_{j\in J\setminus\{i\}}(d_j-d_i)}\left(\frac{1}{(d_n-d_i)(d_i-\lambda)}+\frac{1}{(d_i-d_n)(d_n-\lambda)}\right)\\=&\sum_{i\in J}\frac{1}{\prod_{j\in J\setminus\{i\}}(d_j-d_i)}\frac{1}{(d_n-d_i)(d_i-\lambda)}+\sum_{i\in J}\frac{1}{\prod_{j\in J\setminus\{i\}}(d_j-d_i)}\frac{1}{(d_i-d_n)(d_n-\lambda)}\\=&\sum_{i\in J}\frac{1}{\prod_{j\in K\setminus\{i\}}(d_j-d_i)}\frac{1}{(d_i-\lambda)}+\sum_{i\in J}\frac{1}{\prod_{j\in J\setminus\{i\}}(d_j-d_i)}\frac{1}{(d_i-d_n)(d_n-\lambda)}.\end{aligned}$$

Zbývá dokázat, že

$$\sum_{i\in J}\frac{1}{\prod_{j\in J\setminus\{i\}}(d_j-d_i)}\frac{1}{(d_i-d_n)(d_n-\lambda)}=\frac{1}{\prod_{j\in K\setminus\{n\}}(d_j-d_n)}\frac{1}{d_n-\lambda}.$$

Vynásobením obou stran této rovnosti výrazem $d_n-\lambda$ získáme

$$\sum_{i\in J}\frac{1}{\prod_{j\in J\setminus\{i\}}(d_j-d_i)}\frac{1}{d_i-d_n}=\frac{1}{\prod_{j\in K\setminus\{n\}}(d_j-d_n)}\left(=\frac{1}{\prod_{j\in J}(d_j-d_n)}\right),$$

což je identita platná dle indukčního předpokladu, ve které je na místě λ psáno d_n.

$\square$

Věta 5. *Nechť* $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *je diagonální matice se členy* d_i *na* i*-tém řádku,* $d_1 > \cdots > d_N$*, dále nechť* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{N\times m}$*. Nechť* $\lambda \neq d_i$*,* $i = 1, \ldots, N$*. Označme* $\boldsymbol{M}_\lambda := \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{D} - \lambda \boldsymbol{I}_N)^{-1}\boldsymbol{B}$*. Pak*

$$\det \boldsymbol{M}_\lambda = 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\gamma_i}{d_i - \lambda},$$

kde

$$\gamma_i := \sum_{k=1}^{m} \sum_{J\in S_k^N, J\ni i} \frac{1}{\prod_{j\in J, j\neq i}(d_j - d_i)} \sum_{I\in S_k^m} \det \boldsymbol{A}^{J,I} \det \boldsymbol{B}^{J,I} \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Důkaz. Použijme větu 2 s $\boldsymbol{X} := \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G} := \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{F} := (\boldsymbol{D} - \lambda \boldsymbol{I}_N)^{-1}\boldsymbol{B}$, dostaneme tak

$$\det \boldsymbol{M}_\lambda = 1 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{I\in S_k^m} \det(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{F})^{I,I} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{I\in S_k^m} \det((\boldsymbol{G}^{*,I})^T \boldsymbol{F}^{*,I}). \tag{2.13}$$

Aplikujeme-li nyní větu 3 na $\det(\boldsymbol{G}^{*,I})^T\boldsymbol{F}^{*,I})$ pro matice $\boldsymbol{F}^{*,I}$, $\boldsymbol{G}^{*,I}$, které jsou typu $N \times k$, dostaneme

$$\det((\boldsymbol{G}^{*,I})^T \boldsymbol{F}^{*,I}) = \sum_{J\in S_k^N} \det \boldsymbol{G}^{J,I} \det \boldsymbol{F}^{J,I}.$$

Dosadíme-li tento výsledek do (2.13), získáme

$$\det \boldsymbol{M}_\lambda = 1 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{I\in S_k^m} \sum_{J\in S_k^N} \det \boldsymbol{G}^{J,I} \det \boldsymbol{F}^{J,I}. \tag{2.14}$$

Z definice matice $\boldsymbol{F}$ a věty o součinu determinantů plyne, že $\det \boldsymbol{F}^{J,I} = \frac{\det \boldsymbol{B}^{J,I}}{\prod_{i\in J}(d_i - \lambda)}$. Pišme $\boldsymbol{A}$ místo $\boldsymbol{G}$. Nahradíme-li takto výraz $\det \boldsymbol{G}^{J,I} \det \boldsymbol{F}^{J,I}$ v (2.14), můžeme (2.14) psát jako

$$\det \boldsymbol{M}_\lambda = 1 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{I\in S_k^m} \sum_{J\in S_k^N} \frac{\det \boldsymbol{A}^{J,I} \det \boldsymbol{B}^{J,I}}{\prod_{i\in J}(d_i - \lambda)}. \tag{2.15}$$

Aplikujme předchozí lemma. Dosazením pravé strany (2.8) za jmenovatele v (2.15) získáme

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{M}_\lambda &= 1 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{I\in S_k^m} \sum_{J\in S_k^N} \det \boldsymbol{A}^{J,I} \det \boldsymbol{B}^{J,I} \sum_{i\in J} \frac{1}{\prod_{j\in J\setminus\{i\}}(d_j - d_i)} \frac{1}{d_i - \lambda} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{d_i - \lambda} \sum_{k=1}^{m} \sum_{J\in S_k^N, i\in J} \sum_{I\in S_k^m} \frac{\det \boldsymbol{A}^{J,I} \det \boldsymbol{B}^{J,I}}{\prod_{j\in J\setminus\{i\}}(d_j - d_i)} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{d_i - \lambda} \sum_{k=1}^{m} \sum_{J\in S_k^N, i\in J} \frac{1}{\prod_{j\in J\setminus\{i\}}(d_j - d_i)} \sum_{I\in S_k^m} \det \boldsymbol{A}^{J,I} \det \boldsymbol{B}^{J,I} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\gamma_i}{d_i - \lambda}.
\end{aligned}$$

□

Věta 6. *Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}$ jsou matice z věty 5. Pokud koeficienty γ_i (z věty 5), $i = 1, \ldots, N$, mají všechny stejné znaménko, pak má matice $\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T$ N různých reálných vlastních čísel.*

Důkaz. Pokud mají všechna γ_i záporné znaménko, pak $\lim_{\lambda \to d_{i\pm}} R(\lambda) = \pm\infty$. Navíc $\lim_{\lambda \to \pm\infty} R(\lambda) = 1$. Proto existuje N reálných kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ funkce $R(\lambda)$ takových, že $\lambda_1 < d_1 < \cdots < \lambda_N < d_N$. Pokud je znaménko kladné, platí $\lim_{\lambda \to d_{i\pm}} R(\lambda) = \mp\infty$, a tedy existuje N reálných kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ funkce $R(\lambda)$ takových, že $d_1 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{N-1} < d_N < \lambda_N$. □

Rovnicí pro rychlost v MLB modelu je

$$v_i = \mu V(\phi)(\delta_i(\bar{\rho}_i - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\Phi}) - \sum_{k=1}^{N} \phi_k \delta_k (\bar{\rho}_k - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\Phi})),$$

kde připomeňme, že $\bar{\rho}_i = \rho_i - \rho_f$. Tato rovnice je uvedena na konci předchozí kapitoly s tím rozdílem, že zde píšeme $V(\phi)$ namísto $V(\boldsymbol{\Phi})$, tedy V závisí pouze na $\phi = \phi_1 + \cdots + \phi_N$ (příkladem je tzv. Richardson-Zakiho funkce). Uvažujme případ, kdy $\rho_1 = \cdots = \rho_N$, a tedy $\bar{\rho_1} = \cdots = \bar{\rho_N} =: \rho_s$. Pak výše uvedená rovnice pro rychlost přechází v

$$v_i = \mu \rho_s V(\phi)(1 - \phi) \left(\delta_i - \sum_{k=1}^{N} \phi_k \delta_k \right),$$

protože $\bar{\rho}_i - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\Phi} = \rho_s(1-\phi)$. Jak se píše na začátku této kapitoly, uvažujeme $v_i = v_i(p_1, \ldots, p_m)$ pro nějaké m. Položme $p_1 := \phi(= \phi_1 + \cdots + \phi_N)$, $p_2 := \sum_{k=1}^{N} \delta_k \phi_k$, pak

$$v_i = W(p_1)(\delta_i - p_2), \text{ kde } W(p_1) := \mu \rho_s V(p_1)(1 - p_1).$$

Nyní můžeme vyjádřit matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ pro $m = 2$ definované pomocí (2.2), přímým výpočtem získáme

$$\begin{aligned}
a_{i,1} &= \frac{\partial p_1}{\partial \phi_i} = \frac{\partial(\phi_1 + \cdots + \phi_N)}{\partial \phi_i} = 1, \\
a_{i,2} &= \frac{\partial p_2}{\partial \phi_i} = \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{N} \delta_k \phi_k \right)}{\partial \phi_i} = \delta_i, \\
b_{i,1} &= \phi_i \frac{\partial v_i}{\partial p_1} = \phi_i \frac{\partial(W(p_1)(\delta_i - p_2))}{\partial p_1} = \phi_i W'(p_1)(\delta_i - p_2), \\
b_{i,2} &= \phi_i \frac{\partial v_i}{\partial p_2} = \phi_i \frac{\partial(W(p_1)(\delta_i - p_2))}{\partial p_2} = -\phi_i W(p_1),
\end{aligned}$$

zapsáno pomocí matic

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1, & \delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1, & \delta_N \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} W'(p_1)(\delta_1 - p_2)\phi_1, & -W(p_1)\phi_1 \\ \vdots & \vdots \\ W'(p_1)(\delta_N - p_2)\phi_N, & -W(p_1)\phi_N \end{pmatrix}.$$

Označme $\alpha_J^I := \det \boldsymbol{A}^{J,I}$, $\beta_J^I := \det \boldsymbol{B}^{J,I}$. Pak můžeme vyjádřit

$$\begin{array}{ll} \alpha_{\{i\}}^{\{1\}} = 1, & \alpha_{\{i\}}^{\{2\}} = \delta_i, \\ \beta_{\{i\}}^{\{1\}} = W'(p_1)(\delta_i - p_2)\phi_i, & \beta_{\{i\}}^{\{2\}} = -W(p_1)\phi_i, \\ \alpha_{\{i,j\}}^{\{1,2\}} = \delta_j - \delta_i, & \beta_{\{i,j\}}^{\{1,2\}} = W(p_1)W'(p_1)(\delta_j - \delta_i)\phi_i\phi_j. \end{array} \tag{2.16}$$

Navíc si uvědomme, že

$$v_j - v_i = W(p_1)(\delta_j - p_2) - W(p_1)(\delta_i - p_2) = W(p_1)(\delta_j - \delta_i). \tag{2.17}$$

Nyní můžeme spočíst koeficienty γ_i příslušné sekulární rovnice. Připomeňme vztah (2.12)

$$\gamma_i = \sum_{k=1}^{m} \sum_{J \in S_k^N, J \ni i} \frac{1}{\prod_{j \in J, j \neq i}(d_j - d_i)} \sum_{I \in S_k^m} \det \boldsymbol{A}^{J,I} \det \boldsymbol{B}^{J,I}.$$

V našem případě do tohoto vztahu dosaďme $m := 2$, $d_i := v_i$, $i = 1, \ldots, N$. Pak získáme

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{J \in S_k^N, J \ni i} \frac{1}{\prod_{j \in J, j \neq i}(v_j - v_i)} \sum_{I \in S_k^2} \alpha_J^I \beta_J^I \\ &= \alpha_{\{i\}}^{\{1\}} \beta_{\{i\}}^{\{1\}} + \alpha_{\{i\}}^{\{2\}} \beta_{\{i\}}^{\{2\}} + \sum_{J \in S_2^N, i \in J} \frac{1}{\prod_{j \in J, j \neq i}(v_j - v_i)} \sum_{I \in S_2^2} \alpha_J^I \beta_J^I \\ &= \alpha_{\{i\}}^{\{1\}} \beta_{\{i\}}^{\{1\}} + \alpha_{\{i\}}^{\{2\}} \beta_{\{i\}}^{\{2\}} + \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \frac{1}{v_j - v_i} \alpha_{\{i,j\}}^{\{1,2\}} \beta_{\{i,j\}}^{\{1,2\}}. \end{aligned}$$

Užili jsme, že prázdný součin je roven 1. V dalším kroku do posledního řádku dosadíme vyjádření pro α_J^I, β_J^I z (2.16), navíc za jmenovatele $v_j - v_i$ v sumě dosadíme pravou stranu rovnice (2.17). Dostaneme tak

$$\gamma_i = W'(p_1)(\delta_i - p_2)\phi_i - W\phi_i\delta_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \frac{W(p_1)W'(p_1)(\delta_j - \delta_i)\phi_i\phi_j(\delta_j - \delta_i)}{W(p_1)(\delta_j - \delta_i)}.$$

Drobnou úpravou sumy v poslední rovnici získáme

$$\gamma_i = W'(p_1)(\delta_i - p_2)\phi_i - W\phi_i\delta_i + \phi_i W'(p_1) \sum_{j=1, j \neq i}^{N} (\delta_j - \delta_i)\phi_j. \tag{2.18}$$

Všimněme si, že

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{N} (\delta_j - \delta_i)\phi_j = \sum_{j=1}^{N} (\delta_j - \delta_i)\phi_j.$$

Protože $p_1 = \sum_{j=1}^{N} \phi_j$, $p_2 = \sum_{j=1}^{N} \delta_j \phi_j$, je

$$\sum_{j=1}^{N}(\delta_j - \delta_i)\phi_j = \sum_{j=1}^{N}\delta_j\phi_j - \sum_{j=1}^{N}\delta_i\phi_j = p_2 - \delta_i p_1,$$

celkem tak dostáváme

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{N}(\delta_j - \delta_i)\phi_j = p_2 - \delta_i p_1. \tag{2.19}$$

Dosazením pravé strany (2.19) do (2.18) získáme

$$\gamma_i = W'(p_1)(\delta_i - p_2)\phi_i - W(p_1)\phi_i\delta_i + \phi_i W'(p_1)(p_2 - \delta_i p_1),$$

což drobnou úpravou přejde v

$$\gamma_i = \phi_i\delta_i(W'(p_1)(1 - p_1) - W(p_1)). \tag{2.20}$$

Podívejme se, co můžeme usoudit o znaménku γ_i. Vzpomeňme si na symbol $\phi = \phi_1 + \cdots + \phi_N$. Pak $\phi = p_1$. Dle článku [6] klademe na funkci $V(\phi)$ požadavek, aby

$$V(\phi) > 0, \quad V'(\phi) < 0, \quad 0 < \phi < \phi_{\max},$$

kde $\phi_{\max}$ je nějaká známá konstanta. Typickou volbou funkce $V(\phi)$ je následující funkce pocházející od Richardsona a Zakiho [9]:

$$V(\phi) = \begin{cases} (1-\phi)^{C-2}, & 0 \le \phi < \phi_{\max}, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde volíme $C > 2$. Dle článku [10] se $C - 2$ určuje experimentálně. Závisí na Reynoldsovu číslu, nejčastější experimentální hodnoty jsou od 4.6 do 5.5, ale v článku [11] se doporučuje hodnota 4.7. Číslu $C - 2$ se někdy říká Richardson-Zakiho exponent, předpisu této funkce ($V(\phi)$) Richardson-Zakiho rovnice. Pro $\phi_i > 0$ je $\phi_i\delta_i > 0$, takže v předpisu pro γ_i (2.20) zbývá rozhodnout o znaménku $W'(p_1)(1 - p_1) - W(p_1)$. Dle definice $W(p_1) = \mu\rho_s V(p_1)(1 - p_1)$. Jak je zmíněno výše, $V(p_1) > 0$, $V'(p_1) < 0$ pro $\phi_i > 0$ a $p_1 = \phi < 1$, proto také $W(p_1) > 0$. Spočtěme derivaci (podle p_1): $W'(p_1) = \mu\rho_s(V'(p_1)(1-p_1) - V(p_1)) < 0$. Odtud už vidíme, že $\gamma_i = \phi_i\delta_i(W'(p_1)(1-p_1) - W(p_1)) < 0$, protože $1 - p_1 > 0$, $W'(p_1) < 0$, $W(p_1) > 0$. Tedy konkrétně také pro Zakiho-Richardsonovu rovnici platí (za předpokladu shodných hustot částic) $\gamma_i < 0$, $i = 1, \ldots, N$. Dle Věty 4 má pak Jacobiho matice $\left(\frac{\partial\phi_i v_i}{\partial\phi_j}\right)_{i,j=1}^{N}$ N reálných vlastních čísel, která jsou jednoduchá a podle definice je systém rovnic

$$\partial_t\phi_i + \partial_x(\phi_i v_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

$$v_i = \mu V(\phi)(\delta_i(\bar{\rho}_i - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T\boldsymbol{\Phi}) - \sum_{k=1}^{N}\phi_k\delta_k(\bar{\rho}_k - \bar{\boldsymbol{\rho}}^T\boldsymbol{\Phi})),$$

při $\rho_1 = \cdots = \rho_N$ silně hyperbolický pro $\boldsymbol{\Phi}$ splňující $\phi_1 > 0, \ldots, \phi_N > 0$, $\phi_1 + \cdots + \phi_N < 1$.

Závěr

Na základě literatury zabývající se problémem polydisperzní sedimentace jsme odvodili tzv. MLB model. Vyšli jsme ze zákonů zachování - z rovnic kontinuity pro částice a tekutinu (1.1), (1.2) a z momentových rovnic pro částice a tekutinu (1.6), (1.7). Sečtením rovnic (1.6), (1.7) jsme získali rovnici (1.5) pro veličinu $\boldsymbol{q}$. Rovnice (1.6), (1.7) jsme upravili na základě konstitutivních vztahů, fyzikálních úvah a zanedbání jistých členů. Tak jsme z (1.6) získali (1.19) a z (1.7) jsme získali (1.20). Dosazením ∇p z (1.20) do (1.19) jsme získali soustavu rovnic, kterou jsme vyřešili vzhledem k relativním rychlostem částic $\boldsymbol{u}_i$. Výsledek je po zanedbání členu $\nabla \cdot \boldsymbol{T}_f^E$ dán vztahem (1.25). Poznamenejme, že člen $\nabla \cdot \boldsymbol{T}_f^E$ jsme zanedbali pouze zde, v (1.20) ho nezanedbáváme. Užitím empirických vztahů jsme vyjádřili $\boldsymbol{u}_i$ z (1.25) postupně ve tvaru (1.30). Tento tvar je hlavním výsledkem celého odvození. Dále jsme se vrátili k rovnicím kontinuity pro částice(1.1). Užitím $\phi_i \boldsymbol{v}_i$ ve tvaru (1.31) jsme (1.1) převedli do tvaru (1.39). K těmto rovnicím jsme přidali rovnici (1.5) pro veličinu $\boldsymbol{q}$. Nakonec jsme momentovou rovnici pro tekutinu (1.20) užitím výrazu pro relativní rychlost $\boldsymbol{u}_i$ (1.25) přepsali do tvaru (1.34). Pomocí zjednodušující úvahy jsme od třírozměrných rovnic přešli k rovnicím jednorozměrným (závislým na jedné prostorové proměnné). V druhé části této práce jsme se na základě literatury zabývali hyperbolicitou systému (1.40). K tomu jsme užili tzv. sekulární rovnici, která má za kořeny vlastní čísla Jacobiho matice toku zkoumaného systému. Kořeny jsme přímo nenašli, ale zjistili jsme, že je to N po dvou různých reálných čísel. Tím jsme dokázali, že systém (1.40) je silně hyperbolický. Předpokládali jsme ovšem rovnost hustot $\rho_1, \ldots, \rho_N, \rho_f$.

Seznam použité literatury

[1] Lockett, M. J. - Bassoon, K. S. Sedimentation of Binary Particle Mixtures. *Powder Technology*, 1979, vol. 24, no. 1, s. 1-7. ISSN 0032-5910.

[2] Masliyah, J. H. Hindered Settling in a Multi-Species particle System. *Chemical Engineering Science*, 1979, vol. 34, s. 1166-1168. ISSN 0009-2509.

[3] Bürger, R. - Karlsen, K. H. - Tory, E. M. - Wendland W. L. Model Equations and Instability Regions for the Sedimentation of Polydisperse Suspensions of Spheres. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 82, no. 10, s. 699-722. ISSN 0021-8928.

[4] Bürger, R. Phenomenological Foundations and Mathematical Theory of Sedimentation-Consolidation Processes. *Chemical Engineering Journal*, 2000, vol. 80, s. 177-188. ISSN 1385-8947.

[5] Bürger, R. - Wendland, W. L. Entropy Boundary and Jump Conditions in the Theory of Sedimentation with Compression. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1998, vol. 21, s. 865-882. ISSN 0170-4214.

[6] Berres, S. - Bürger, R. - Karlsen, K. H. - Tory, E. M. Strongly Degenerate Parabolic-Hyperbolic Systems Modeling Polydisperse Sedimentation with Compression. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2003, vol. 64, no. 1, s. 41-80. ISSN 0036-1399.

[7] Donat, R. - Mulet, P. A Secular Equation for the Jacobian Matrix of Certain Multispecies Kinematic Flow Models. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2008. ISSN 0749-159X.

[8] Bürger, R. - Donat, R. - Mulet, P. - Vega C. A. Hyperbolicity Analysis of Polydisperse Sedimentation Models via a Secular Equation for the Flux Jacobian. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2010, vol. 70, no. 7, s. 2186-2213. ISSN 0036-1399.

[9] Richardson, J. F. - Zaki, W. N. Sedimentation and Fluidization. *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 1954, vol. 32, s. 35-53.

[10] Berres, S. - Bürger, R. - Tory, E. M. Applications of Polydisperse Sedimentation Models. *Chemical Engineering Journal*, 2005, vol. 111, s. 105-107. ISSN 1385-8947.

[11] Schneider, W. - Anestis, G. - Schaflinger, U. Sediment Composition due to Settling of Particles of Different Sizes. *International Journal of Multiphase Flow*, 1985, vol. 11, s. 419-423. ISSN 0301-9322.