Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kristýna Podhajská

Webová aplikace pro výuku algebraických rovnic vyšších stupňů na střední škole

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika zaměřená na vzdělávání v kombinaci s deskriptivní geometrií

Praha 2012

Ráda bych poděkovala zejména své vedoucí práce, paní RNDr. Jarmile Robové, CSc., za vstřícný přístup, užitečné rady a za čas, který mi věnovala. Děkuji všem, kteří mi pomáhali s technickou stránkou práce. Nemalé díky také patří rodině a příteli, kteří mě velmi podporovali hlavně po psychické stránce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 23. května Kristýna Podhajská

Abstrakt

Název práce: Webová aplikace pro výuku algebraických rovnic vyšších stupňů na střední škole
Autor: Kristýna Podhajská
Katedra: Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jarmila Robová, CSc.
E-mail vedoucího: robova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Bakalářská práce je věnována algebraickým rovnicím vyšších stupňů. Práce by měla sloužit zejména jako rozšiřující výukový materiál pro žáky středních škol či jako doprovodný učební text pro učitele v matematickém semináři na střední škole. První část se věnuje opakování mnohočlenů, lineárních a kvadratických rovnic. Hlavní kapitoly tvoří kubické, binomické, trinomické a reciproké rovnice. U každého typu rovnic je uvedena stručná teorie a řešené příklady. Na závěr každé kapitoly jsou zařazeny neřešené úlohy a cvičení, které jsou určeny k ověření nabytých znalostí. Práce je zpracovaná ve formě webových stránek, které jsou k dispozici na internetu. Díky tomu je práce dostupná každému a také umožňuje použití interaktivních prvků, jako jsou applety z programu GeoGebra, krokování či skrytí řešení úlohy.

Klíčová slova: internet, algebraické rovnice vyšších řádů, střední škola

Abstract

Title: Web application for teaching of higher degree algebraic equations at secondary school
Author: Kristýna Podhajská
Department: Department of Mathematics Education
Supervisor: RNDr. Jarmila Robová, CSc.
E-mail supervisor: robova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: Bachelor thesis is devoted to the subject of algebraic equations of higher degrees. The work should serve mainly as an extension teaching material for secondary school students or as an accompanying textbook for teachers of mathematics in high school seminary. The first part deals with the repetition of polynomials, linear and quadratic equations. The main chapters are cubic, binomial, trinomial and reciprocal equation. For each type of equations is given short theory and solved examples. At the end of each chapter are unresolved tasks and exercises that are designed to verify the acquired knowledge. The work is processed in the form of Web pages that are available on the Internet. It makes the work available to everyone and also allows the use of interactive elements such as GeoGebra applets, solve the tasks step-by-step or hide the solutions.

Keywords: internet, algebraic equations of higher degree, secondary school

Obsah

Úvod 7

Uživatelská dokumentace 8

Mnohočleny... 9

Binomické vzorce 10

Dělení mnohočlenů 12

Rozklad mnohočlenů na součin 14

Kořeny mnohočlenů a Hornerovo schéma 19

Algebraické rovnice – opakování 25

Lineární rovnice 27

Kvadratické rovnice 32

Algebraické rovnice n-tého stupně 41

Cardanovy vzorce 45

Substituce 46

Kubické rovnice 48

Úlohy – početní řešení 50

Grafické řešení kubických rovnic 52

Úlohy – grafické řešení 55

Binomické rovnice – opakování pojmů 58

Binomické rovnice 59

Úlohy 60

Trinomické rovnice 63

Úlohy 64

Reciproké rovnice 66

Úlohy 70

Značení a symboly 72

Závěr 74

Literatura ....,.. 75

Nakládání s prací ....,.. 76

Úvod

Hlavním cílem bakalářské práce je vytvoření webových stránek na téma **Algebraické rovnice vyšších stupňů**. Webové stránky budou k dispozici nejen žákům ale i učitelům, protože budou obsahovat nejen stručnou teorii, která je doprovázena řešenými příklady, ale i neřešené úlohy a cvičení.

Na střední škole jsou běžně probírány zejména algebraické rovnice prvního a druhého stupně. Algebraické rovnice třetího a vyššího stupně jsou rozšiřujícím učivem, proto se s nimi na střední škole můžeme setkat až v matematickém semináři.

Celá práce je rozdělena do několika kapitol. V první kapitole je zopakována část učiva, která patří k základním poznatkům matematiky, a to mnohočleny. Pro řešení algebraických rovnic vyšších stupňů je potřeba zejména dělení mnohočlenu mnohočlenem a rozklad mnohočlenu na součin. Velice užitečnou znalostí je také Hornerovo schéma.

V druhé kapitole jsou připomenuty lineární a kvadratické rovnice, kde nechybí ani grafické řešení těchto rovnic. V dalších kapitolách je učivo postupně rozšiřováno. Je zde uvedeno několik užitečných vět, které usnadní hledání kořenů rovnic.

Hlavní část práce se věnuje algebraickým rovnicím se stupněm vyšším než dva. Mezi takové rovnice patří **kubické**, **binomické**, **trinomické** a **reciproké rovnice**. Ke každému typu rovnic je uvedena stručně teorie, řešené příklady a neřešené úlohy.

Teorie byla čerpána ze středoškolských učebnic a přehledů středoškolské matematiky. Pro rozšiřující učivo byla použita vysokoškolská literatura, a to Základy algebry (Kořínek, V.) a Základy náuky o riešení rovníc (Schwarz, Š.). Věty a definice jsou mírně modifikovány a také značení se může místy lišit od uvedené literatury.

Pro zápis a zobrazení matematických výrazů na webových stránkách je použita technologie jsMath. Druhou technologií, kterou stránky využívají, je program GeoGebra. Tento program umožňuje interaktivní výstupy v podobě appletů, ve kterých je znázorněno grafické řešení rovnic a grafy funkcí.

Tištěná bakalářské práce má podobu okopírovaných stránek z internetové verze této práce. Proto nebylo možné ve větší míře ovlivnit formátování textu a výslednou podobu práce.

Toto téma jsem si vybrala nejen proto, že mě samotnou rovnice na střední škole zajímaly, ale zejména proto, že stránky budou vystaveny na internetu, kde je každý může navštívit a používat.

Uživatelská dokumentace

Ovládací prvky

V textu se můžete setkat s následujícími aktivními prvky:

- Obrázek hvězdičky v sobě skrývá rozšiřující učivo. Pokud na obrázek klikneme, zobrazí se ukrytý obsah.
- Po kliknutí na obrázek otazníku se zobrazí stručný postup řešení a výsledek, v některých cvičeních pouze výsledek.
- Poslední obrázek je symbol pro krokování úlohy. Pokud klikneme na obrázek , odkryje se nám pouze první krok řešení. Takto si klikáním na obrázek můžeme postupně zobrazit celé řešení úlohy. V případě, že klikneme na obrázek , zobrazí se nám celé řešení úlohy najednou. Pro skrytí řešení úlohy klikneme na obrázek .
    - První krok řešení.
    - Druhý krok řešení.

Ovládání appletů

Hlavním ovlacím prvkem v každém appletu je posuvník $a = 0.8$. Posuvník ovládáme pomocí kurzoru myši. Hodnoty v posuvníku se mění po kroku 0.1. Se změnou hodnoty v posuvníku se mění i graf funkce v appletu. Pro vrácení appletu do původní podoby slouží obrázek , který se nachází v okně appletu vpravo nahoře.

Mnohočleny

Definice

Výraz ve tvaru $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$kde $a_n, a_{n-1}, .., a_0 \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$ a $n \in \mathbf{N_0}$, nazýváme **mnohočlenem (polynomem)** n**-tého stupně** s jednou neznámou $x \in \mathbf{R}$.

Mnohočlen n-tého stupně s neznámou x značíme $P_n(x)$, respektive $P(x)$.

Čísla $a_n, a_{n-1}, .., a_0$nazýváme **koeficienty mnohočlenu**.

Jednotlivé sčítance mnohočlenu $a_k x^k$, kde $0 \leq k \leq n$, $k \in \mathbf{N_0}$, nazýváme **členy mnohočlenu**.

Číslo a_0 se nazývá **absolutní člen**, člen a_1x **lineární člen** a člen a_2x^2 **kvadratický člen**.

$$P(x) = \overbrace{a_2x^2}^{\textit{kvadratický člen}} + \overbrace{a_1x}^{\textit{lineární člen}} + \overbrace{a_0}^{\textit{absolutní člen}}$$

Koeficient a_n, tj. koeficient u nejvyšší mocniny x, nazýváme **vedoucí koeficient** mnohočlenu. Pokud je $a_n = 1$, říkáme, že je mnohočlen v **normovaném tvaru**.

Podle počtu členů v mnohočlenu nazýváme mnohočlen s jedním členem **jednočlen**, mnohočlen se dvěma členy **dvojčlen** atd.

Příklad

- jednočlen: $6x^2$
- dvojčlen: $2x + 5$

Mnohočlen prvního stupně $a_1x^1 + a_0$ (obvykle píšeme $ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$) nazýváme **lineární**.

Příklad

- lineární dvojčlen: $4x + 5$
- lineární jednočlen: $-2x$

  Vidíme, že a musí být různé od nuly, aby se jednalo o linární mnohočlen. Ale b může být rovno nule.

Mnohočlen druhého stupně $a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$(tj. $ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$) nazýváme **kvadratický**.

Příklad

- kvadratický jednočlen: $6x^2$
- kvadratický dvojčlen: $2x^2 - 8$
- kvadratický trojčlen: $3x^2 + 2x - 1$

  Opět platí, že $a \neq 0$, ale b i c může být rovno nule.

Mnohočlen třetího stupně $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ (tj. $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$) nazýváme **kubický**.

Příklad

- kubický jednočlen: $-2x^3$
- kubický dvojčlen: $8x^3 + 2x^2$
- kubický trojčlen: $3x^3 - x + 5$

Poznámka

Libovolné číslo $a_0 \in \mathbf{R}$ nazýváme mnohočlenem **nultého stupně**.
Mnohočlen s koeficienty $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$nazýváme **nulovým mnohočlenem**.

Připomenuli jsme si pouze definici mnohočlenu a základní pojmy, ale s mnohočleny jsou také spojeny různé početní operace. Můžeme je mezi sebou sčítat, odčítat násobit i dělit. Na těchto stránkách je uvedeno pouze dělení mnohočlenů. Ostatní operace jsou uvedeny na stránkách Vladimíry Pavlicové, která se ve své bakalářské práci věnuje základním poznatkům z matematiky.

Binomické vzorce

Pro počítání s mnohočleny jsou velice užitečné následující vzorce, a proto je dobré si je zapamatovat. Díky nim rychle získáme druhou a třetí mocninu dvojčlenu. Nemusíme tedy mnohočleny mezi sebou pracně roznásobovat.

Vzorce nazýváme binomické, protože v latině slovo *binom* znamená dvojčlen.

Věta

Pro všechna a, $b \in \mathbf{R}$ platí:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Důkaz

Důkaz spočívá v roznásobením mnohočlenů:

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) =$$
$$= a^3 + ba^2 + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) =$$
$$= a^3 - ba^2 - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Obecný binomický vzorec $(a+b)^n$, kde $n > 1$, $n \in \mathbf{N}$ udává **binomická věta**:

Věta

Pro všechna a, $b \in \mathbf{R}$ a každé $n \in \mathbf{N}$ a $k \in \mathbf{N_0}$platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Zkráceně zapisujeme: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Symbol $\sum_{k=0}^{n}$ označuje součet členů $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, kde za k dosazujeme postupně čísla od 0 do n.

Důkaz a podrobnější informace o binomické větě a kombinačních číslech lze nalézt na stánkách, které se věnují kombinatorice.

Poznámka

Připomeneme si, že $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo. Pro jistotu si uvedeme základní vlastnosti kombinačních čísel.

$\forall n, k \in N_0$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ k \leq n$
$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},\ k \leq n$
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},\ k < n$

Úlohy

Upravte výrazy použitím binomických vzorců.

1. $x^2 - 8x + 16$ (V některých případech je potřeba mnohočlen "složit".)
   Řešení
   - Když rozložíme jednotlivé koeficienty mnohočlenu, objevíme ukrytý vzorec:
     $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 * 4x + 4 * 4 = (x-4)^2$

2. $(2x-3)^3 - (3x+5)^2$
   Řešení
   - Jednotlivé závorky rozložíme podle vzorců výše:
     $(2x-3)^3 - (3x+5)^2 =$
     $= [(2x)^3 - 3 * (2x)^2 * 3 + 3 * 2x * 3^2 - 3^3] - [(3x)^2 + 2 * 3x * 5 + 5^2] =$
   - Upravíme:
     $= [8x^3 - 36x^2 + 54x - 27] - [9x^2 + 30x + 25] =$
   - Sečteme koeficienty u členů se stejnou mocninou u x:
     $= 8x^3 - 45x^2 + 24x - 52$

3. $(2x+3)^4$
   Řešení
   - Použijeme binomickou větu:
     $(2x+3)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3 * 3 + \binom{4}{2}(2x)^2 * 3^2 + \binom{4}{3}(2x) * 3^3 + \binom{4}{4}3^4 =$
   - Upravíme kombinační čísla:
     $= 1 * 16x^4 + 4 * 8x^3 * 3 + 6 * 4x^2 * 9 + 4 * 2x * 27 + 1 * 81 =$
     $= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$
   - Také bychom příklad mohli řešit bez použití binomické věty:
     $(2x+3)^4 = \left((2x+3)^2\right)^2 = (2x+3)^2(2x+3)^2$
     Dalšími úpravami dojdeme ke stejnému výsledku jako při použití binomické věty.

Dělení mnohočlenů

Podrobnější informace ohledně počítaní s mnohočleny, a tedy i dělení mnohočlenů, naleznate na stránkách Vladimíry Pavlicové.

V této části se zaměříme na mnohočleny s jednou reálnou proměnnou.

Nejdříve si v úloze připomeneme **dělení mnohočlenu jednočlenem**. To znamená, že každý člen mnohočlenu vydělíme tímto jednočlenem.

Úloha

1. Vydělte mnohočlen $5a^3+10a^2+25a$ jednočlenem $5a$.
   Řešení
   - $(5a^3+10a^2+25a):5a$
   - Nesmíme zapomenout podmínku $a \neq 0$, protože dělení nulou není definováno.
   - Jednotlivé členy mnohočlenu vydělíme jednočlenem:
     $(5a^3+10a^2+25a):5a=(5a^3:5a)+(10a^2:5a)+(25a:5a)=a^2+2a+5$

V následující části budeme používat pojmy **dělenec, dělitel a podíl**, které se často pletou, a tak je zopakujeme v následujícím schématu.

$$\overbrace{(2x^3+x^2)}^{dělenec}:\overbrace{x}^{dělitel}=\overbrace{2x^2+x}^{podíl}$$

Nyní přistoupíme k **dělení mnohočlenu mnohočlenem**, který není jenočlen. Je důležité, aby jednotlivé sčítance mnohočlenů byly uspořádány od nejvyšší mocniny u x až po nejnižší mocninu u x. Postup si opět připomeneme v úlohách.

Úlohy

1. Určete podíl $(2x^7+3x^6+14x^5+10x^4-7x^3-32x^2+15x-5):(x^4+7x^2-3x+1)$
   Řešení
   - Dělení nulou není definováno, proto $x^4+7x^2-3x+1 \neq 0$
   - **1.krok:** První člen dělence vydělíme prvním členem dělitele:
     $2x^7:x^4=2x^3$
   - **2.krok:** Získaným podílem vynásobíme všechny členy dělitele:
     $2x^3*(x^4+7x^2-3x+1)=2x^7+14x^5-6x^4+2x^3$
   - **3.krok:** Vzniklý mnohočlen odečteme od dělence, čímž vznikne nový dělenec (dělitel zůstává stejný):
     $(2x^7+3x^6+14x^5+10x^4-7x^3-32x^2+15x-5)-(2x^7+14x^5-6x^4+2x^3)=$
     $=3x^6+16x^4-9x^3-32x^2+15x-5$

- Kroky 1. až 3. opakujeme, dokud nedojdeme k nulovému mnohočlenu, nebo k mnohočlenu, jehož stupeň je menší než stupeň dělitele:
  1. $3x^6 : x^4 = 3x^2$
  2. $3x^2 * (x^4 + 7x^2 - 3x + 1) = 3x^6 + 21x^4 - 9x^3 + 3x^2$
  3. $(3x^6 + 16x^4 - 9x^3 - 32x^2 + 15x - 5) - (3x^6 + 21x^4 - 9x^3 + 3x^2) =$
  $-5x^4 - 35x^2 + 15x - 5$

- **1.** $(-5x^4) : x^4 = -5$
  2. $(-5) * (x^4 + 7x^2 - 3x + 1) = -5x^4 - 35x^2 + 15x - 5$
  3. $(-5x^4 - 35x^2 + 15x - 5) - (-5x^4 - 35x^2 + 15x - 5) = 0$

- Předchozí postup pro přehlednost **zapisujeme ve tvaru**:

$$(2x^7 + 3x^6 + 14x^5 + 10x^4 - 7x^3 - 32x^2 + 15x - 5) : (x^4 + 7x^2 - 3x + 1) = 2x^3 + 3x^2 - 5$$
$$-(2x^7 \quad + 14x^5 - 6x^4 + 2x^3)$$

$$3x^6 \quad + 16x^4 - 9x^3 - 32x^2 + 15x - 5$$
$$-(3x^6 \quad + 21x^4 - 9x^3 + 3x^2)$$

$$-5x^4 \quad - 35x^2 + 15x - 5$$
$$-(-5x^4 \quad - 35x^2 + 15x - 5)$$

$$0$$

- Řešením, tj. podílem, je tedy mnohočlen $2x^3 + 3x^2 - 5$.

2. Určete podíl $(2x^3 + 7x^2 + 8x + 7) : (x + 2)$.
   Řešení

- $(2x^3 + 7x^2 + 8x + 7) : (x + 2) = 2x^2 + 3x + 2 + \frac{3}{x+2}$, kde $x + 2 \neq 0$

$$-(2x^3 + 4x^2)$$

$$3x^2 + 8x + 7$$
$$-(3x^2 + 6x)$$

$$2x + 7$$
$$-(2x + 4)$$

$$3$$

- Dále už nedělíme, protože jsme došli k jednočlenu, který má stupeň menší, než je stupeň dělitele.
  Jednočlen 3 nazýváme **zbytek** a mnohočlen $2x^2 + 3x + 2$ **neúplným podílem**.

Poznámka

V druhém příkladu vidíme, že podíl dvou mnohočlenů **nemusí být mnohočlen**.

Rozklad mnohočlenu na součin v množině reálných čísel

Rozložit mnohočlen na součin znamená, vyjádřit ho jako **součin několika jednodušších mnohočlenů**, tj. součin mnohočlenů nižších stupňů, v optimálním případě součin lineárních mnohočlenů.

Je důležité poznamenat, že ne vždy lze mnohočlen v množině reálných čísel takto rozložit na součin. Proto je na konci této stránky uveden postup rozkladu mnohočlenu na součin v množině komplexních čísel, kde lze mnohočlen rozložit na součin vždy.

Při rozkladu mnohočlenu na součin využíváme:

1. Vytýkání před závorku

Postup je založen na vytknutí společných členů mnohočlenu, jak je ukázáno v úloze.

Úloha

1. Rozložte mnohočlen $5cm+3dn-15dm-cn$ na součin.
   Řešení

   - **1. možnost řešení:** Pro přehlednost uspořádáme mnohočlen tak, aby byly pohromadě členy se stejnou proměnnou:
     $5cm+3dn-15dm-cn=5cm-15dm+3dn-cn=$
   - Nyní stejnou proměnnou vytkneme:
     $=5m(c-3d)+n(3d-c)=$
   - Členy v závorkách se až na znaménko rovnají, proto můžeme vytknout:
     $=5m(c-3d)-n(c-3d)=(c-3d)(5m-n)$
   - **2. možnost řešení:** Mnohočlen jsme si mohli uspořádat i následovně:
     $5cm+3dn-15dm-cn=5cm-cn-15dm+3dn=$
   - Dále postupujeme analogicky:
     $=c(5m-n)+3d(-5m+n)=$
     $=c(5m-n)-3d(5m-n)=(5m-n)(c-3d)$
   - **Důležité je, že ať postupujeme prvním či druhým způsobem řešení, vždy musíme dojít ke stejnému výsledku!**

2. Rozklad pomocí vzorců

Využíváme binomické vzorce, které jsme již zavedli, a dále následující vzorce tvaru $a^n \pm b^n$, kde $n \in \mathbf{N}$.

Věta

Pro všechna $a, b \in \mathbf{R}$ platí:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Důkaz

Důkaz spočívá v roznásobení mnohočlenů:
$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$
$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$
$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

Poznámka

Mnohočleny $a^2 + b^2$, $(a^2 - ab + b^2)$, $(a^2 + ab + b^2)$ jsou **v množině reálných čísel dále nerozložitelné**.

Úloha

1. Rozložte mnohočlen $a^5 - a^3 + a^2 - 1$ na součin.
   Řešení
   - Nejprve použijeme vytýkání před závorku:
     $a^5 - a^3 + a^2 - 1 = a^3(a^2-1) + (a^2-1) =$
   - Vytkneme shodné členy v závorce:
     $= (a^2-1)(a^3+1) =$
   - Rozložíme podle vzorců výše:
     $= [(a-1)(a+1)][(a+1)(a^2-ab+b^2)] = (a-1)(a+1)^2(a^2-ab+b^2)$

3. Rozklad kvadratického trojčlenu

K rozkladu kvadratického trojčlenu na součin lze dojít třemi základními způsoby:

1. způsob: Vietovy vzorce

V následující větě předpokládáme, že daný kvadratický trojčlen lze rozložit na součin. Už ale víme, že ne vždy umíme mnohočlen rozložit na součin.

Je dán mnohočlen $x^2 + px + q$, kde $p, q \in \mathbf{R}$. Pokud existují taková čísla $r, s \in \mathbf{R}$, že daný mnohočlen lze rozložit na součin ve tvaru $(x-r)(x-s)$, tak platí:
$-p = r + s$
$q = r * s$

Důkaz

Předpokládáme, že existují čísla r, s taková, že mnohočlen $x^2 + px + q$ lze rozložit na součin

$(x - r)(x - s)$.
Roznásobíme: $(x - r)(x - s) = x^{2} - (r + s)x + rs$
a protože $x^{2} + px + q = (x - r)(x - s)$,
platí rovnost: $x^{2} + px + q = x^{2} - (r + s)x + rs$

Z rovnosti mnohočlenů vyplývá: $-p = r + s$
$q = r * s$

Poznámka

Vietovy vzorce většinou používáme v případě, že p, q a r, s jsou **celá čísla**. Pokud jsou p, q celá čísla, snadno zpaměti určíme čísla r, s. Ale ne každý mnohočlen lze takto rozložit, protože čísla r, s nemusí vždy existovat.

Úloha

1. Rozložte kvadratický trojčlen $x^2 - 2x - 35$ na součin.
   Řešení
   - $x^{2} + px + q = x^2 - 2x - 35$
     $p = -2 \qquad 2 = r + s$
     $q = -35 \qquad -35 = r * s$
   - Je zřejmé, že $35 = 7 * 5$.
     Protože je číslo 35 záporné, máme dvě možnosti: $(-7) * 5$, nebo $7 * (-5)$
     Aby platila též rovnost $2 = r + s$, musí být $r = -5$ a $s = 7$.
   - Mnohočlen jsme rozložili na součin dvou lineárních dvojčlenů:
     $x^2 - 2x - 35 = (x + 5)(x - 7)$

2. způsob: Vzorec pro řešení kvadratické rovnice

Pokud r, s neumíme určit zpaměti, ať už z důvodu, že to nejsou celá čísla, nebo že koeficienty p, q jsou příliš velká čísla, lze použít vzorec pro řešení kvadratické rovnice, kde $r = x_1$ a $s = x_2$

3. způsob: Doplnění kvadratického trojčlenu na druhou mocninu lineárního dvojčlenu

Kvadratický trojčlen lze upravit též doplněním na druhou mocninu lineárního dvojčlenu,
tj. **"doplněním na úplný čtverec"**.

Obecný postup je následující:

- Máme kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$.
- Z mnohočlenu vytkneme koeficient a, aby byl trojčlen v normovaném tvaru:
  $ax^2 + bx + c = a\,(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) =$
- Abychom část mnohočlenu mohli upravit podle vzorce $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, vložíme do mnohočlenu polovinu koeficientu lineárního členu umocněnou na druhou:
  $= a[\,(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2) - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}\,] =$
- Nyní mnohočlen upravíme:
  $= a[\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\,] = a[\,(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})\,]$

Výraz $a[\ (x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a^2})\ ]$ lze vyjádřit ve tvaru $a[\ (x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})^2\ ]$. Pokud je výraz pod odmocninou b^2-4ac **kladný, je možné mnohočlen** $a[\ (x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})^2\ ]$ **rozložit na součin** podle vzorce (A^2-B^2). V případě, že je výraz pod odmocninou b^2-4ac **záporný, nelze mnohočlen** $a[\ (x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})^2\ ]$ **rozložit na součin v množině reálných čísel**. V tomto případě lze mnohočlen rozložit pouze v [množině komplexních čísel](#).

Úlohy

Doplňte kvadratický trojčlen na "úplný čtverec" a pokud to jde, rozložte ho na součin.

1. x^2-x-2
   Řešení
   - Mnohočlen je již v normovaném tvaru, tj. koeficient u členu x^2 se rovná jedné.
   - Stačí tedy vložit polovinu koeficientu lineárního členu umocněnou na druhou :
     $(x^2-x+(-\frac{1}{2})^2)-(-\frac{1}{2})^2-2=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1+8}{4}=(x-\frac{1}{2})^2-(\frac{3}{2})^2=$
   - $=(x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2})=(x-2)(x+1)$

2. $2x^2-3x+8$
   Řešení
   - Mnohočlen není v normovaném tvaru, vytkneme dvojku:
     $2(x^2-\frac{3}{2}x+4)=$
   - Vložíme polovinu koeficientu lineárního členu umocněnou na druhou:
     $=2[(x^2-\frac{3}{2}x+(-\frac{3}{4})^2)-(-\frac{3}{4})^2+4]=2[(x-\frac{3}{4})^2+(\frac{-9+64}{16})]$
     $=2[(x-\frac{3}{4})^2+\frac{55}{16}]=$
   - Upravíme na tvar $a[\ (x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})^2\ ]$:
     $=2[(x-\frac{3}{4})^2-(\frac{\sqrt{-55}}{4})^2]$
   - Výraz pod odmocninou je záporný, tudíž mnohočlen nelze rozložit na součin v $\mathbf{R}$.

     Kdybychom chtěli rozložit na součin již mnohočlen $2[(x-\frac{3}{4})^2+\frac{55}{16}]$, vyjádřili bychom ho ve tvaru $2[(x-\frac{3}{4})^2+(\frac{\sqrt{55}}{4})^2]$. Mnohočlen je tvaru $a[(A^2+B^2)]$, kde (A^2+B^2) je v množině reálných čísel nerozložitelný dvojčlen.

Rozklad mnohočlenu v množině komplexních čísel

V množině reálných čísel nelze některé mnohočleny rozložit na součin, a proto si ukážeme jejich rozklad v množině komplexních čísel. Díky imaginární jednotce $i \in \mathbf{C}$ budeme moci rozklad uskutečnit.

> **Poznámka**
>
> To nejdůležitější, co z komplexních čísel budeme pro rozklad na součin potřebovat, je vlastnost imaginární jednotky $i \in \mathbf{C}$, a to $i^2=-1$.

V množině komplexních čísel platí též binomické vzorce a vzorce tvaru $a^n \pm b^n$, kde $n \in \mathbf{N}$.

Navíc můžeme rozložit i mnohočleny $a^2 + b^2$, $(a^2 - ab + b^2)$, $(a^2 + ab + b^2)$.

Úlohy

Rozložte mnohočleny v $\mathbf{C}$, kde $a, b \in \mathbf{R}$ a i je imaginární jednotka.

1. $a^2 + b^2$
   Řešení
   - Dvojčlen $a^2 + b^2$ lze zapsat ve tvaru $a^2 - (bi)^2$.
     Potom je už rozklad jednoduchý.
   - $a^2 - (bi)^2 = (a - bi)(a + bi)$
2. $(a^2 - ab + b^2)$
   Řešení
   - Použijeme metodu "doplnění na úplný čtverec":
     $(a^2 - ab + b^2) = (a^2 - ab + (-\frac{b}{2})^2) - (-\frac{b}{2})^2 + b^2 = (a - \frac{b}{2})^2 + (\frac{-b^2+4b^2}{4}) =$
   - $= (a - \frac{b}{2})^2 + (\frac{3b^2}{4}) = (a - \frac{b}{2})^2 - (\frac{3}{4}(ib)^2) = (a - \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ib)(a - \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ib) =$
   - $= \big(a - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\ )b\ \big)\big(a - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\ )b\ \big)$
3. $(a^2 + ab + b^2)$
   Řešení
   - Postup bude analogický jako v předchozím příkladě.
   - Použijeme metodu "doplnění na úplný čtverec":
     $(a^2 + ab + b^2) = (a^2 + ab + (\frac{b}{2})^2) - (\frac{b}{2})^2 + b^2 = (a + \frac{b}{2})^2 + (\frac{-b^2+4b^2}{4}) =$
   - $(a + \frac{b}{2})^2 + (\frac{3b^2}{4}) = (a + \frac{b}{2})^2 - (\frac{3}{4}(ib)^2) = (a + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ib)(a + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ib) =$
   - $= \big(a + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\ )b\ \big)\big(a + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\ )b\ \big)$

Věta

Pro všechna $a, b \in \mathbf{C}$ a imaginární jednotku i platí:

$a^2 + b^2 = (a - bi)(a + bi)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)(a - \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ib)(a - \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ib)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ib)(a + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ib)$

Kořeny mnohočlenu

Definice

Je dán mnohočlen $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$
kde $a_n, a_{n-1}, .., a_0 \in \mathbf{R}$ $a_n \neq 0$ a $n \in \mathbf{N_0}$.

Kořenem mnohočlenu $P_n(x)$ je takové číslo $b \in \mathbf{R}$, pro které platí
$P_n(b) = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_2b^2 + a_1b + a_0 = .0$

Pokud tedy do mnohočlenu $P_n(x)$ dosadíme $x = b$ a vyjde $P_n(b) = 0$, je toto číslo b **kořenem mnohočlenu.**

Úloha

1. Zjistěte, které z čísel $1, -1$ je kořenem mnohočlenu $P(x) = x^4 - 8x^3 + 3x + 4$
   Řešení
   - Nejprve dosadíme číslo 1 do mnohočlenu $P(x)$:
     $P(1) = 1^4 - 8 * 1^3 + 3 * 1 + 4 = 1 - 8 + 3 + 4 = 0$
     Číslo 1 je tedy kořenem mnohočlenu $P(x)$.
   - Nyní zkusíme dosadit číslo -1:
     $P(-1) = (-1)^4 - 8 * (-1)^3 + 3 * (-1) + 4 = 1 + 8 - 3 + 4 \neq 0$
     Číslo -1 tedy není kořenem mnohočlenu $P(x)$.

Věta

Pokud je $b \in \mathbf{R}$ kořenem mnohočlenu $P_n(x)$, kde $n \in \mathbf{N}$, lze mnohočlen $P_n(x)$ **rozložit na součin** $P_n(x) = (x - b) * Q_{n-1}(x)$, kde $Q_{n-1}(x)$ je mnohočlen nižšího stupně, a to stupně $n - 1$.

Úloha

1. Určete mnohočlen $Q_3(x)$, jestliže je dán mnohočlen $P_4(x) = x^4 - 8x^3 + 3x + 4$ a kořen $b = 1$.
   Řešení
   - Mnohočlen $Q_3(x)$ určíme tak, že $P_4(x)$ vydělíme dvojčlenem $(x - 1)$.

- $(x^4 - 8x^3 + 3x + 4) : (x - 1) = x^3 - 7x^2 - 7x - 4$
  $-(x^4 - x^3)$

  $-7x^3 \quad + 3x + 4$
  $-(-7x^3 + 7x^2)$

  $-7x^2 + 3x + 4$
  $-(-7x^2 + 7x)$

  $-4x + 4$
  $-(-4x + 4)$

  0

- $P_4(x) = (x-1) * Q_3(x) = (x-1)(x^3 - 7x^2 - 7x - 4)$

Čísla, která by mohla být kořeny, můžeme zjistit z absolutního členu a_0 mnohočlenu $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Věta

Je dán mnohočlen $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ kde $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, .., a_0 \in \mathbf{Z}$ a $n \in \mathbf{N}$.

Je-li číslo $b \in \mathbf{Z}$ **kořenem** mnohočlenu, potom je **dělitelem absolutního členu** a_0.

Důkaz věty lze najít v knize E. Caldy.

Úloha

1. Rozložte mnohočlen $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ na součin.
   Řešení

   - Absolutní člen a_0 je číslo -6. Množinu dělitelů absolutního členu tvoří čísla $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

   - Postupně dosazujeme čísla z množiny dělitelů do mnohočlenu $P(x)$ a zjišťujeme, pro která čísla je $P(x) = 0$.
     $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$

   - Našli jsme kořen mnohočlenu $x_1 = 1$. Abychom našli mnohočlen nižšího stupně $Q(x)$, vydělíme mnohočlen $P(x)$ dvojčlenem $(x - 1)$.

   - $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6$
     $-(x^3 - x^2)$

     $-5x^2 + 11x - 6$
     $-(-5x^2 + 5x)$

$$6x-6$$
$$-(6x-6)$$

$$0$$

- Získali jsme kvadratický trojčlen x^2-5x+6, který již rozložit na součin umíme:
  $-5=r+s \quad -5=(-2)+(-3)$
  $6=r*s \quad 6=(-2)*(-3)$
  Mnohočlen lze tedy rozložit $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$.

- Všimněme si, že i kořeny $2, 3$ jsou z množiny dělitelů absolutního členu.
  Rozklad na součin je tedy $P(x)=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-3)(x-2)$.

U mnohočlenu třetího stupně byl rozklad poměrně jednoduchý. Představme si mnohočlen sedmého stupně např. $P(x)=2x^7-3x^6-8x^5+6x^4+10x^3+x^2+4x+4$
To už bychom se mírně zapotili jen při dosazování čísel z množiny dělitelů absolutního členu, natož pak několikrát mnohočlen dělit dvojčlenem $(x-b)$. (V "nejhorším" případě bychom dělili šestkrát!). Proto je dobré znát **Hornerovo schéma**.

Hornerovo schéma

Hornerovo schéma nám umožní snadno a rychle rozkládat mnohočleny. Uvažujme mnohočlen $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ kde $a_n, a_{n-1}, .., a_0 \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$ a $n \in \mathbf{N_0}$.

Mnohočlen $P_n(x)$ upravíme na tvar
$$P_n(x)=\Bigg(\bigg(\ldots((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\ldots+a_2\bigg)x+a_1\Bigg)x+a_0$$

Cílem je zjistit, zda je číslo $b_0 \in \mathbf{R}$ kořenem mnohočlenu $P_n(x)$, kde $P_n(x)$ má tvar uvedený výše.

1. Vytvoříme si následující tabulku, kterou nazýváme **Hornerovo schéma**.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_0
b_0		$+b_0a_n$	$+b_0(a_{n-1}+b_0a_n)$	...	$+b_0(a_1+b_0a_2+\ldots+b_0^{n-1}a_n)$
	a_n	$(a_{n-1}+b_0a_n)$	$(a_{n-2}+b_0a_{n-1}+b_0^2a_n)$	...	$(a_0+b_0a_1+b_0^2a_2+\ldots+b_0^na_n)$

2. Vidíme, že první řádek schématu je tvořen koeficienty mnohočlenu $P_n(x)$.

3. V druhém řádku a v prvním sloupci se nachází číslo b_0. Do třetího řádku a druhého sloupce sepíšeme číslo a_n. Nyní vynásobíme $b_0 * a_n$ a výsledek zapíšeme do druhého řádku a třetího sloupce. Dále sečteme číslo a_{n-1} z třetího sloupce a prvního řádku s číslem $b_0 * a_n$ z druhého řádku a třetího sloupce a výsledek zapíšeme do třetího řádku třetího sloupce. Takto postupujeme až vyplníme celou tabulku.

4. Pokud je poslední součet ve třetím řádku $(a_0+b_0a_1+b_0^2a_2+\ldots+b_0^na_n)$ roven **nule**, dané číslo b_0 je kořenem mnohočlenu $P_n(x)$. Vyplývá z definice kořenu mnohočlenu.

5. Výrazy ve třetím řádku jsou koeficienty mnohočlenu $Q_{n-1}(x)$, který vznikne vydělením mnohočlenu $P_n(x)$ výrazem $(x-b_o)$.

Pro názornost si celý postup ukážeme na příkladu.

Úloha

1. Rozložte mnohočlen $P(x) = 2x^7 - 3x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 10x^3 + x^2 + 4x + 4$ na součin.

   Řešení

   Absolutní člen je $a_0 = 4$, proto množina dělitelů a_0 je $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.

   Ověřujeme zda je číslo 1 kořenem mnohočlenu.

   - Do prvního řádku, počínaje druhým sloupcem, napíšeme koeficienty mnohočlenu $P(x) = 2x^7 - 3x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 10x^3 + x^2 + 4x + 4$
     Do druhého řádku a prvního sloupce napíšeme číslo, které ověřujeme. Nyní číslo 1 .
   -

	2	-3	-8	6	10	1	4	4
1								

   - Číslo 2 napíšeme do třetího řádku a druhého sloupce.

	2	-3	-8	6	10	1	4	4
1								
	2							

   - Nyní počítáme $b_0 * a_n = 1 * 2$ a výsledek napíšeme do druhého řádku pod -3.

	2	-3	-8	6	10	1	4	4
1		2						
	2							

   - Sečteme $a_{n-1} + b_0 * a_n = -3 + 1 * 2 = -1$

	2	-3	-8	6	10	1	4	4
1		2						
	2	-1						

   - Dále přechozí sčítanec vynásobíme b_0, tj. $(a_{n-1} + b_0 * a_n) * b_0 = (-1) * 1 = -1$

	2	-3	-8	6	10	1	4	4
1		2	-1					
	2	-1						

   - Sečteme ve čtvrtém sloupci.

	2	-3	-8	6	10	1	4	4
1		2	-1					
	2	-1	-9					

   - Tímto způsobem postupně vyplňujeme tabulku, dokud nedojdeme k poslednímu sčítanci.

	2	-3	-8	6	10	1	4	4
1		2	-1	-9	-3	7	8	12
	2	-1	-9	-3	7	8	12	16

- Protože poslední sčítanec se nerovná nule, ale číslu 16, číslo $b_0 = 1$ není kořenem mnohočlenu $P(x)$.

Ověřujeme zda je číslo -1 kořenem mnohočlenu.

- Číslo -1 je kořenem mnohočlenu $P(x)$.

	2	-3	-8	6	10	1	4	4
-1		-2	5	3	-9	-1	0	-4
	2	-5	-3	9	1	0	4	0

- Čísla ve třetím řádku jsou koeficienty mnohočlenu
$Q(x) = 2x^6 - 5x^5 - 3x^4 + 9x^3 + x^2 + 4$který má stupeň o jedna nižší.

- Kořen -1 může být vícenásobným kořenem mnohočlenu $P(x)$, proto ověříme, zda je kořenem mnohočlenu $Q(x)$.

	2	-5	-3	9	1	0	4
-1		-2	7	-4	-5	4	-4
	2	-7	4	5	-4	4	0

$R(x) = 2x^5 - 7x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$

- Číslo -1 opět zkusíme zda je kořen mnohočlenu $R(x)$.

	2	-7	4	5	-4	4
-1		-2	9	-13	8	-4
	2	-9	13	-8	4	0

$S(x) = 2x^4 - 9x^3 + 13x^2 - 8x + 4$

- Nyní již číslo -1 není kořenem mnohočlenu $S(x)$.

	2	-9	13	-8	4
-1		-2	11	-24	32
	2	-11	24	-32	36

Zatím jsme mnohočlen $P(x)$ rozložili:
$P(x) = (x+1)^3 * S(x) = (x+1)^3 * (2x^4 - 9x^3 + 13x^2 - 8x + 4)$

Ověřujeme zda je číslo 2 kořenem mnohočlenu.

- Stačí zjistit zda je číslo 2 kořenem mnohočlenu $S(x)$.

	2	-9	13	-8	4
2		4	-10	6	-4
	2	-5	3	-2	0

$T(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$

- Číslo 2 ověříme ještě jednou.

	2	-5	3	-2
2		4	-2	2
	2	-1	1	0

$U(x) = 2x^2 - x + 1$

- Získali jsme kvadratický trojčlen $U(x) = 2x^2 - x + 1$. Trojčlen není v množině reálných čísel dále rozložitelný (ověřte).

  Řešením v $\mathbf{R}$ je tedy rozklad $P(x) = (x+1)^3 * (x-2)^2 * (2x^2 - x + 1)$.

- V množině komplexních čísel lze mnohočlen $U(x) = 2x^2 - x + 1$ rozložit. Pomůžeme si imaginární jednotkou i a její vlastnost $i^2 = -1$. Kvadratický trojčlen budeme rozládat pomocí doplnění na "úplný čtverec" .

  $U(x) = 2x^2 - x + 1 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) = 2[(x^2 - \frac{1}{2}x + (-\frac{1}{4})^2) - (-\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{2}] =$
  $= 2 * [(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16}] = 2 * [(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{7}{16} i^{\ 2}] = 2 * [(x - \frac{1}{4})^2 - (\frac{\sqrt{7}}{4} i\ )^{\ 2}] =$
  $= 2 * [(x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} i\ )(x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} i\ )]$

  Řešením v $\mathbf{C}$ je tedy rozklad
  $P(x) = (x+1)^3 * (x-2)^2 * 2 * [(x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} i\ )(x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} i\ )]$

Algebraické rovnice - opakování

S pojmem *rovnice* se každý setkal již na základní škole. Pro jistotu si zopakujeme alespoň pojmy, které budeme v dalších kapitolách používat.

Podrobně se rovnicím a nerovnicím věnuje stránka Jaromíra Gloce, na které naleznete teorii, řešené úlohy i neřešené příklady.

Definice

Jsou dány dva výrazy s jednou neznámou $x \in \mathbf{M}$, které označíme $P(x)$ a $L(x)$.

Potom zápis těchto výrazů ve tvaru $L(x) = P(x)$ nazýváme **rovnice** s neznámou $x \in \mathbf{M}$, kde výraz $L(x)$ nazýváme **levou stranou rovnice** a výraz $P(x)$ **pravou stranou rovnice**.

Kořenem rovnice je každé číslo $b \in \mathbf{M}$, pro které platí rovnost obou výrazů $L(b) = P(b)$.

Poznámka

Pojem **řešení rovnice** je v textu použit ve třech významech, a to pro kořen rovnice, pro množinu všech kořenů rovnice a také pro postup, kterým zjistíme kořeny rovnice. Konkrétní význam vyplyne ze souvislosti.

$\mathbf{M}$ je množina čísel, ve které hledáme kořeny rovnice (např. $\mathbf{M} = \mathbf{Z}, \mathbf{M} = \mathbf{R}, ..$). Neznámá x tedy nabývá hodnot právě z množiny $\mathbf{M}$. Množinu $\mathbf{M}$ nazýváme **obor řešení rovnice**.

Výraz $P(x)$ je definován v množině čísel D_P a výraz $L(x)$ v množině D_L. Průnikem množin D_P a D_L vznikne množina čísel $\mathbf{D}$, kterou nazýváme **definičním oborem rovnice**.

Všechna čísla, která jsou kořenem (řešením) rovnice, tvoří **množinu všech řešení (kořenů) rovnice**. Tuto množinu obvykle značíme velkým písmenem $\mathbf{K}$.

Důležitý je vztah mezi množinami výše. Platí $\mathbf{K} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{M}$ Tyto množiny budeme uvádět u každého řešení rovnice.

Řešit rovnici znamená nalézt množinu všech řešení (kořenů) $\mathbf{K}$ dané rovnice. Postup, jak řešit rovnici, je založen na tzv. **ekvivalentních úpravách**. Tyto úpravy převádějí původní rovnici na jednodušší tvar, z kterého lze snadněji určit množinu všech řešení (kořenů). Důležité je, že **ekvivalentní úpravy nemění množinu řešení původní rovnice**.

Rovnici, která vznikne z původní rovnice použitím ekvivaletních úprav, nazýváme **ekvivalentní rovnicí**. Ekvivalentní rovnice má s původní rovnicí **stejnou množinu řešení (kořenů)**.

Příklad

Je dána rovnice $\overbrace{2x+7}^{L(x)} = \overbrace{4+5x}^{P(x)}$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
Zjistěte, zda je číslo 1 kořenem rovnice.

- $\mathbf{M} = \mathbf{R}, \mathbf{D} = \mathbf{R}$
- Dosadíme za x číslo 1:
  $L(1) = 2 * 1 + 7 = 9$
  $P(1) = 4 + 5 * 1 = 9$
- Platí, že $L(1) = P(1)$.
  Číslo 1 je prvkem množin $\mathbf{M}$ i $\mathbf{D}$, proto je $x = 1$ kořenem rovnice.

Ekvivalentní úpravy

1. Záměna levé a pravé strany rovnice.
2. K oběma stranám rovnice lze přičíst (odečíst) stejné číslo nebo výraz obsahující neznámou, pokud je toto číslo nebo výraz definován v celém oboru řešení $\mathbf{M}$.
3. Obě strany rovnice lze vynásobit (vydělit) stejným nenulovým číslem nebo výrazem obsahující neznámou, je-li toto číslo nebo výraz definován v celém oboru řešení $\mathbf{M}$.
4. Obě strany rovnice lze umocnit přirozeným mocnitelem, jestliže obě strany rovnice nabývají jen nezáporných hodnot v celém oboru řešení $\mathbf{M}$.

Úmluva: Zkratka pro ekvivalentní úpravu číslo 1 je (EU1), atd.

Pokud při řešení rovnic využíváme pouze ekvivalentní úpravy výše, není třeba provádět zkoušku. Zkouška se dělá tak, že všechna řešení rovnice, která vyhovují oboru řešení $\mathbf{M}$, postupně dosazujeme do levé $L(x)$ a pravé $P(x)$ strany rovnice. Pokud se obě strany $L(x)$ a $P(x)$ rovnají, číslo je kořenem rovnice.

Zkoušku lze provézt i v případě, že si nejsme jisti, zda úprava byla ekvivalentní. Zkouškou si také ověříme, jestli jsme se nedopustili numerické chyby.

.

Lineární rovnice

Stručně zopakujeme početní řešení lineárních rovnic, pro podrobnější informace navštivte stránku Jaromíra Gloce. Soustředit se budeme spíše na grafické řešení lineárních rovnic.

Definice

Nechť a, b jsou reálná čísla a $a \neq 0$. Potom rovnici ve tvaru $ax + b = 0$ nazýváme **lineární rovnicí** s neznámou $x \in \mathbf{M}$.

Početní řešení

Při řešení lineárních rovnic používáme ekvivalentní úpravy.

Množina všech řešení lineární rovnice $ax + b = 0$ v $\mathbf{M}$, kde $a \neq 0$, je $\mathbf{K} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

Pokud budeme řešit rovnici např. v množině celých čísel a číslo $-\frac{b}{a}$ není celé číslo, množina všech řešení je $\mathbf{K} = \emptyset$. Proto je důležité dávat pozor na to, v jaké množině čísel $\mathbf{M}$ danou rovnici řešíme.

Pokud bychom uvažovali $a = 0$, tak v případě, že $b \neq 0$ nemá rovnice smysl a $\mathbf{K} = \emptyset$. V případě, že i $b = 0$ je řešením rovnice $\mathbf{K} = \mathbf{M}$.

Úloha

Řešte rovnici $\frac{x-2}{3} = \frac{3x+1}{2}$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{R}, \mathbf{D} = \mathbf{R}$
- Na první pohled možná není zřejmé, že rovnice je lineární. Proto pomocí ekvivaletních úprav rovnici zjednodušíme.
  $\frac{x-2}{3} = \frac{3x+1}{2} \quad / * 6$ (EU3)
  $2 * (x-2) = 3 * (3x+1)$
- $2x - 4 = 9x + 3 \quad / -2x$ (EU2)
- $-4 = 7x + 3 \quad / +4$ (EU2)
  $0 = 7x + 7$
- Vidíme, že ekvivalentní úpravy původní rovnici převedly na známý tvar lineární rovnice , který už řešit umíme.
  $x = -1$
- Množina řešení je $\mathbf{K} = \{-1\}$.

Speciální způsob řešení mají **rovnice v součinovém tvaru**. Jde o tvar rovnice, kde se součin dvou nebo více lineárních dvojčlenů rovná nule:

$$(ax+b).(cx+d)=0$$

Postup řešení takové rovnice je založen na tvrzení:

Součin dvou a více výrazů je roven nule právě tehdy, když je alespoň jeden z výrazů roven nule.

Úloha

Řešte rovnici $(x-5)*(x+1)=(x-5)$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

Řešení

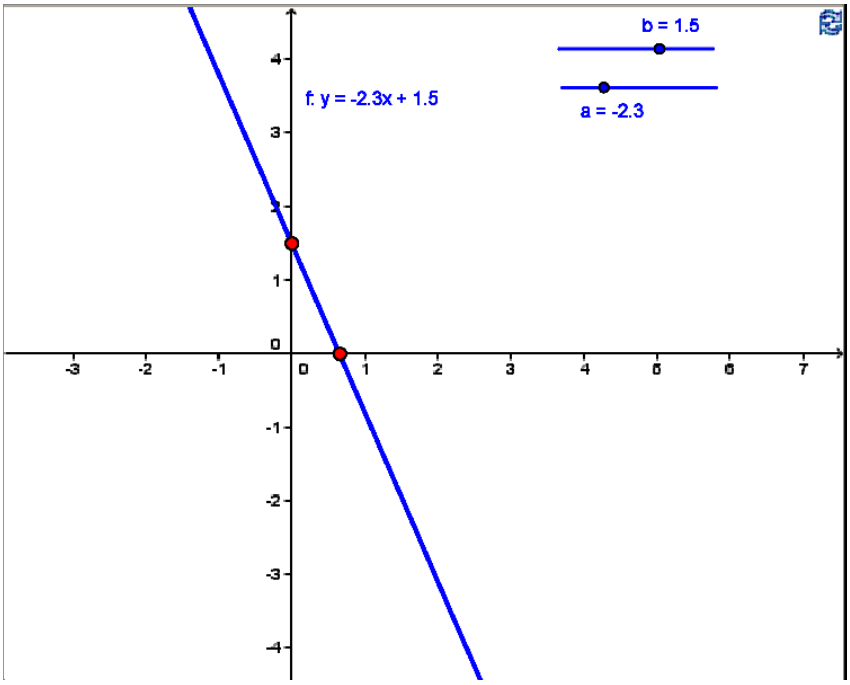
- $\mathbf{M}=\mathbf{R}, \mathbf{D}=\mathbf{R}$
- $(x-5)*(x+1)=x-5 \quad / -(x-5)$ (EU2)
  $(x-5)*(x+1)-(x-5)=0$
- Vytkneme společné členy v závorce a upravíme:
  $(x-5)*[(x+1)-1]=0$
  $(x-5)*x=0$
- $x-5=0 \wedge x=0$
  $x=5$
  $\mathbf{K}=\{0;5\}$

- Někoho by mohlo napadnout vydělit obě strany původní rovnice výrazem $x-5$:
  $(x-5)*(x+1)=x-5 \quad / :(x-5)$
  $(x+1)=1 \quad / -1$
  $x=0$
  Vyšel nám kořen $x=0$. Musíme dát ale pozor na to, že výraz, kterým dělíme, musí být nenulový.
  Proto $(x-5) \neq 0 \rightarrow x \neq 5$.
  Problém je v tom, že $x=5$ je kořenem rovnice.

  Postupujeme tedy následovně:
  1. Vyřešíme nejdříve rovnici $x-5=0 \quad /+5$ (EU2)
  Ověříme zda je číslo $x_1=5$ kořenem původní rovnice. Zjistíme, že ano.
  2. Dále můžeme řešit rovnici $(x-5)*(x+1)-(x-5)=0$ v $\mathbf{R} \setminus \{\mathbf{5}\}$ vydělením výrazu $(x-5)$. Tím získáme druhý kořen $x_2=0$.
  $\mathbf{K}=\{0;5\}$

Grafické řešení

Lineární rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$ lze řešit i **graficky**. Grafem funkce $f: y=ax+b$je **přímka**. Funkce f se nazývá lineární funkce. V následujícím appletu můžete pomocí změny posuvníků pozorovat, jak vypadá graf funkce $f: y=ax+b$při změně parametrů $a, b \in \mathbf{R}$.

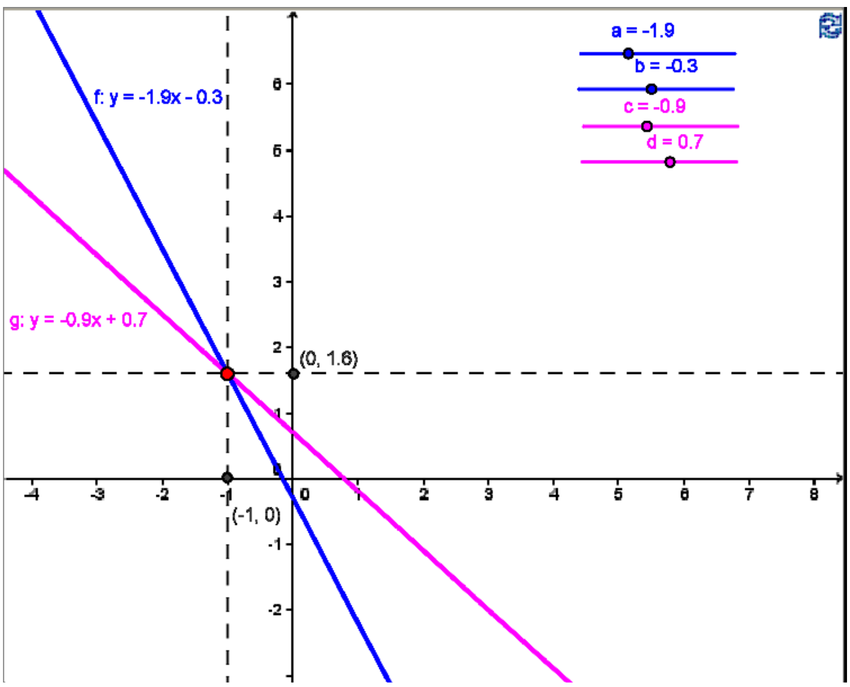


Postup při grafickém řešení lineární rovnice ve tvaru $ax + b = cx + d$ kde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ a $x \in \mathbf{R}$ je neznámá:

1. Levou stranu rovnice chápeme jako předpis funkce $f: y = ax + b$a pravou stranu jako předpis funkce $g: y = cx + d$

2. Grafem funkcí f, g jsou **přímky**. Hledané kořeny lineární rovnice získáme sestrojením obou grafů funkcí f a g.

3. **Řešením lineární rovnice jsou x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí f, g.** Pro názornost se podívejme na následující applet, kde se opět dají měnit koeficienty v předpisu funkcí pomocí změny posuvníků.



Množinou všech řešení lineární rovnice je:

- x-ová souřadnice průsečíku $P = [x_P, y_P]$, $\mathbf{K} = \{x_P\}$, a to pokud jsou přímky **různoběžné**.
- prázdná množina $\mathbf{K} = \emptyset$, pokud jsou přímky **rovnoběžné různé**.
- množina $\mathbf{K} = \mathbf{M}$, pokud přímky **splývají**.

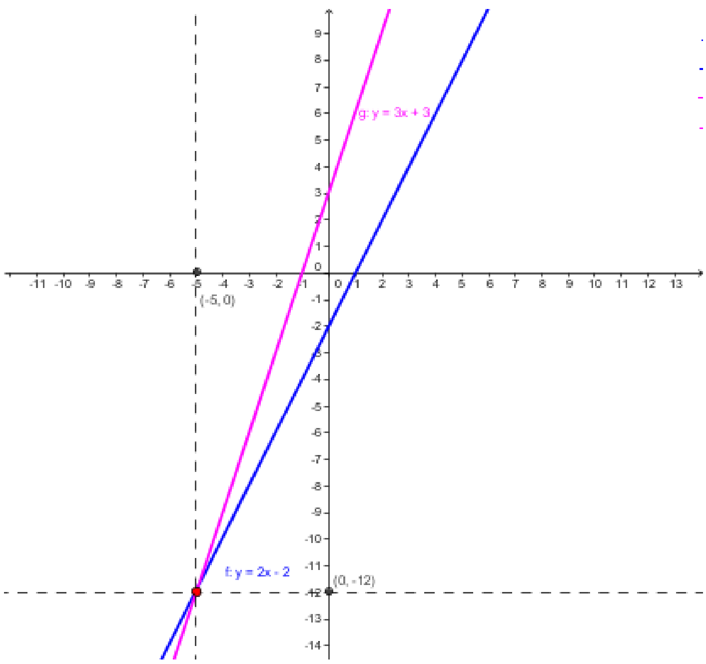
Poznámka

Grafické řešení lineární rovnice ve tvaru $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathbf{R}$ a $x \in \mathbf{R}$ je neznámá, je shodné s předešlým postupem. Uvědomíme-li si, že nulu na pravé straně rovnice lze chápat jako předpis funkce $g : y = 0$, jejíž graf je přímka splývající s osou x.

V appletu výše nastavte parametry c, d na nulu a pozorujte polohu přímky $ax + b = y$ vzhledem k ose x.

Úlohy

1. Řešte graficky rovnici $2x - 2 = 3x + 3$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
   Řešení

   - Sestrojíme grafy lineárních funkcí, tj. dvě přímky.
     $f : y = 2x - 2$, přímka f prochází body $[0, -2]$, $[1, 0]$
     $g : y = 3x + 3$, přímka g prochází body $[0, 3]$, $[-1, 0]$
   - Určíme společné body přímek, pokud existují.
   - 

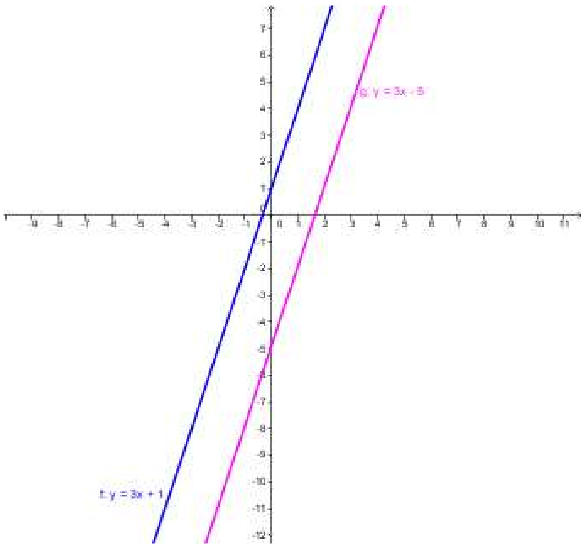
   - Množina všech řešení rovnice je $\mathbf{K} = \{-5\}$.

2. Řešte graficky rovnici $3x + 1 = 3x - 5$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

Řešení

- Sestrojíme graf lineárních funkcí, tj. dvě přímky.
  $\boldsymbol{f : y = 3x + 1}$, přímka f prochází body $[0, 1], [-\frac{1}{3}, 0]$
  $g : y = 3x - 5$, přímka g prochází body $[0, -5], [\frac{5}{3}, 0]$

- Určíme společné body přímek, pokud existují.

- 

- Množina řešení rovnice je $\mathbf{K} = \emptyset$.

Kvadratické rovnice

Stejně jako u lineárních rovnic si stručně zopakujeme početní řešení kvadratické rovnice (podrobněji viz stránka rovnice a nerovnice) a větší pozornost budeme věnovat grafickému řešení kvadratické rovnice.

Definice

Nechť a, b, c jsou reálná čísla, kde $a \neq 0$. Potom rovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ nazýváme **kvadratickou rovnicí** s neznámou $x \in \mathbf{M}$.

Pokud by byl vedoucí koeficient $a = 0$, získali bychom lineární rovnici.

Početní řešení kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice může být neúplného tvaru, pokud je některý z koeficientů b, c roven nule, nebo tvaru úplného v případě $b, c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Neúplný tvar kvadratické rovnice

Jak již bylo zmíněno, jde pouze o speciální případ kvadratické rovnice, kde je některý z koeficientů b, c nulový.

- $b = 0$ ..... $ax^2 + c = 0$..... **ryze kvadratická rovnice**

$$ax^2 + c = 0 \quad / - c \text{ (EU2)}$$
$$ax^2 = -c \quad / : a \text{ (EU3)}$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Množina $\mathbf{M}$, ve které rovnici řešíme	$(-\frac{c}{a})$	Kořeny
$\mathbf{R}$	$(-\frac{c}{a}) = 0$	$x_1 = x_2 = 0$
	$(-\frac{c}{a}) > 0$	$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
	$(-\frac{c}{a}) < 0$	$\emptyset$
$\mathbf{C}$	$(-\frac{c}{a}) \geq 0$	$x_{1,2}$ stejné jako v $\mathbf{R}$
	$(-\frac{c}{a}) < 0$	$x_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{c}{a}}, i \in \mathbf{C}$

- $c = 0$ ..... $ax^2 + bx = 0$

Jde o kvadratickou rovnici bez absolutního členu. Levou stranu rovnice rozložíme na součin a řešíme rovnici v součinovém tvaru.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x * (ax + b) &= 0 \\ ax + b = 0 &\wedge x = 0 \\ ax &= -b \\ x &= -\tfrac{b}{a} \end{aligned}$$

Množina řešení je $\mathbf{K} = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$

Úplný tvar kvadratické rovnice

Předpokládáme tedy, že koeficienty b, c jsou nenulové a rovnice má tvar $ax^2 + bx + c = 0$

Pokud rovnici vydělíme koeficientem a, získáme **normovaný tvar** kvadratické rovnice $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Již víme, že levá strana rovnice je kvadratický trojčlen. Proto kvadratickou rovnici můžeme řešit tak, že kvadratický trojčlen rozložíme na součin a dále rovnici řešíme jako rovnici v součinovém tvaru.

- Rozklad na součin pomocí Vietových vzorců.
  Úloha
  Řešte rovnici $x^2 - 17x + 72 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
  Řešení
  - $\mathbf{M} = \mathbf{R}, \mathbf{D} = \mathbf{R}$
  - $x^2 - 17x + 72 = 0$
    $x_1 + x_2 = 17$
    $x_1 * x_2 = 72$
  - Číslo 72 lze rozložit na $8 * 9$ a 17 na $8 + 9$.
  - Kvadratický trojčlen rozložíme na součin: $(x - 8) * (x - 9) = 0$
    $(x - 8) = 0 \wedge (x - 9) = 0$
  - Množina řešení je $\mathbf{K} = \{8, 9\}$.
- Doplnění na "úplný čverec" a následný rozklad na součin (pokud mnohočlen s proměnnou $x \in \mathbf{M}$ lze rozložit na součin).
  Úloha
  Řešte rovnici $x^2 - 17x + 72 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
  Řešení
  - $\mathbf{M} = \mathbf{R}, \mathbf{D} = \mathbf{R}$
  - $x^2 - 17x + 72 = 0$
    $x^2 - 17x + (-\frac{17}{2})^2 - (-\frac{17}{2})^2 + 72 = 0$
    $(x - \frac{17}{2})^2 + (\frac{-17^2 + 4*72}{4}) = 0$
  - $(x - \frac{17}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0$
    $(x - \frac{17}{2} - \frac{1}{2})(x - \frac{17}{2} + \frac{1}{2}) = 0$
  - Kvadratický trojčlen rozložíme na součin: $(x - 8) * (x - 9) = 0$
    $(x - 8) = 0 \wedge (x - 9) = 0$
  - Množina řešení je $\mathbf{K} = \{8, 9\}$.

Při řešení složitějších kvadratických rovnic, kde kořeny nejsou například celá čísla, se pro výpočet kořenů využívají níže odvozené **vzorce**.

V kapitole rozklad kvadratického trojčlenu jsme pomocí úpravy "doplnění na čtverec" došli ke tvaru kvadratického trojčlenu $ax^2+bx+c=a[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b^2-4ac}{4a^2})]$ Dalšími úpravami tohoto tvaru lze dojít k následující tabulce, kde výraz $D=b^2-4ac$ nazýváme **diskriminant kvadratické rovnice**.

Vyplnění tabulky :

$a[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b^2-4ac}{4a^2})]=0 \quad / : a$
$(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b^2-4ac}{4a^2})=0$
Řekli jsme si, že výraz $b^2-4ac=D$ je **diskriminant kvadratické rovnice**.

Pokud je $D\geq 0$ můžeme levou stranu rovnice rozložit na součin:
$(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})^2=0$
$(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})*(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})=0$
Rovnice má **právě dva kořeny** $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Pokud je $D=0$ řešením rovnice je **dvojnásobný kořen** $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ (O násobnosti kořenů se dozvíme více v další kapitole.)

Pokud je $D<0$ **nemá rovnice v $\mathbf{R}$ řešení**.
V množině všech **komplexních čísel $\mathbf{C}$ má právě dvě řešení** $x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a}$, kde i je imaginární jednotka.

Množina, ve které rovnici řešíme	$D=b^2-4ac$	Kořeny	Počet kořenů
$\mathbf{R}$	$D=0$	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	jeden dvojnásobný kořen
	$D>0$	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	dva různé kořeny
	$D<0$	$\emptyset$	žádný kořen
$\mathbf{C}$	$D\geq 0$	$x_{1,2}$ stejné jako v $\mathbf{R}$	$x_{1,2}$ stejné jako v $\mathbf{R}$
	$D<0$	$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a}$	dva různé komplexní kořeny

Úlohy

1. Řešte rovnici $x^2-17x+72=0$ s neznámou $x\in\mathbf{R}$.
   Řešení

   - $\mathbf{M}=\mathbf{R},\mathbf{D}=\mathbf{R}$
   - $x^2-17x+72=0$
     $a=1, b=-17, c=72$
     $D=(-17)^2-4*1*72=298-288=1>0$
   - $x_1=\frac{17+1}{2}=9$
     $x_2=\frac{17-1}{2}=8$
   - Množina řešení je $\mathbf{K}=\{8,9\}$.

2. Řešte rovnici $3x^2 - 7x + 5 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$.

   Řešení

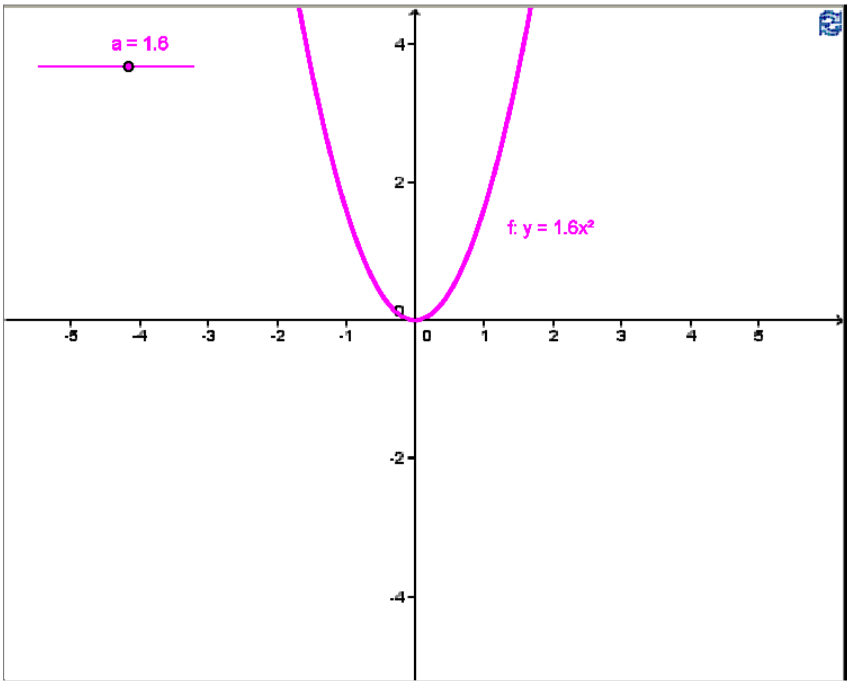
   - $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
   - $3x^2 - 7x + 5 = 0$
     $a = 3, b = -7, c = 5$
     $D = (-7)^2 - 4 * 3 * 5 = 49 - 60 = -11 < 0$
   - $x_1 = \frac{7+\sqrt{i^2*11}}{6} = \frac{7+i\sqrt{11}}{6}$
     $x_2 = \frac{7-\sqrt{i^2*11}}{6} = \frac{7-i\sqrt{11}}{6}$
   - Množina řešení je $\mathbf{K} = \left\{ \frac{7 \pm i\sqrt{11}}{6} \right\}$.

Grafické řešení kvadratické rovnice

Kvadratickou rovnici s neznámou $x \in \mathbf{R}$ můžeme řešit také **graficky**. Máme rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$ a a, b, c jsou reálná čísla. Kvadratickou rovnici lze řešit graficky dvěma způsoby.

1. způsob řešení

Řešení spočívá v hledání průsečíků **paraboly a přímky**. Budeme vycházet z toho, že grafem funkce $f : y = ax^2$ je parabola s vrcholem v počátku $[0, 0]$. V následujícím appletu můžete pomocí změny posuvníků pozorovat, jak vypadá graf funkce $f : y = ax^2$ při změně parametru a.



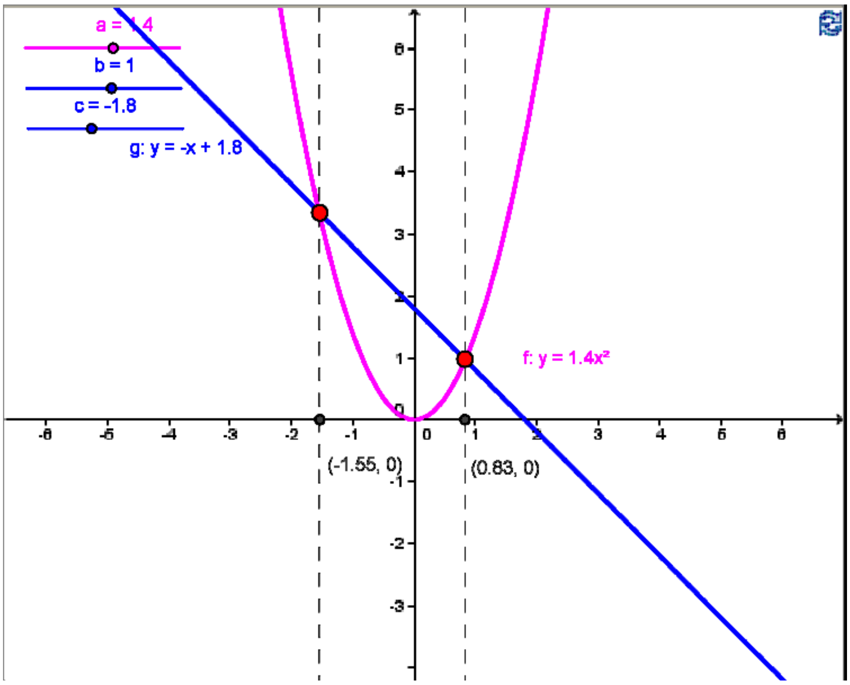
Postup při grafickém řešení kvadratické rovnice:

1. Rovnici upravíme na tvar $ax^2 = -bx - c$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}$ a $x \in \mathbf{R}$ je neznámá.

2. Levou stranu rovnice chápeme jako předpis funkce $f: y = ax^2$ a pravou stranu jako předpis funkce $g: y = -bx - c$

3. Sestojíme grafy funkcí f, g. Grafem funkce $f: y = ax^2$ je parabola s vrcholem v počátku $[0, 0]$ a grafem funkce g je přímka, jak jsme si řekli již u lineárních rovnic. Přímka prochází body $[0, -c], [-\frac{c}{b}, 0]$.

4. **Řešením kvadratické rovnice jsou x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí f, g.** Pro názornost se podívejme na následující applet, kde se opět dají měnit koeficienty v předpisu funkcí pomocí změny posuvníků.



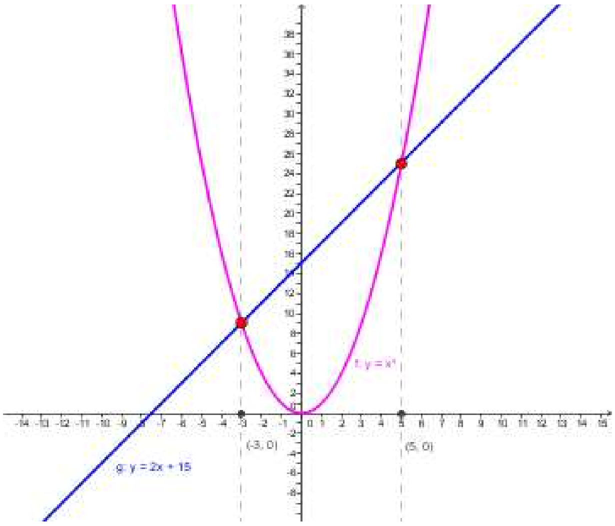
Množinou všech řešení kvadratické rovnice jsou:
- dva kořeny $\mathbf{K} = \{x_1, x_2\}$, a to x-ové souřadnice průsečíků přímky a paraboly, pokud **přímka protíná parabolu ve dvou bodech**.
- jeden dvojnásobný kořen $\mathbf{K} = \{x_1 = x_2\}$, a to x-ová souřadnice průsečíku přímky a paraboly, pokud je **přímka tečnou paraboly**.
- žádný bod $\mathbf{K} = \emptyset$, pokud **přímka nemá s parabolou společný bod**.

Úloha

Řešte rovnici $x^2 - 2x - 15 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$ graficky.

Řešení

- Upravíme rovnici na tvar $x^2 = 2x + 15$ a sestrojíme grafy funkcí.
  $f: y = x^2$, parabola s vrcholem v počátku
  $g: y = 2x + 15$, přímka procházející body $[0, 15], [-\frac{15}{2}, 0]$
- Určíme společné body přímky a paraboly, pokud existují.

- 

- Množina řešení je $\mathbf{K} = \{-3, 5\}$.

2. způsob řešení

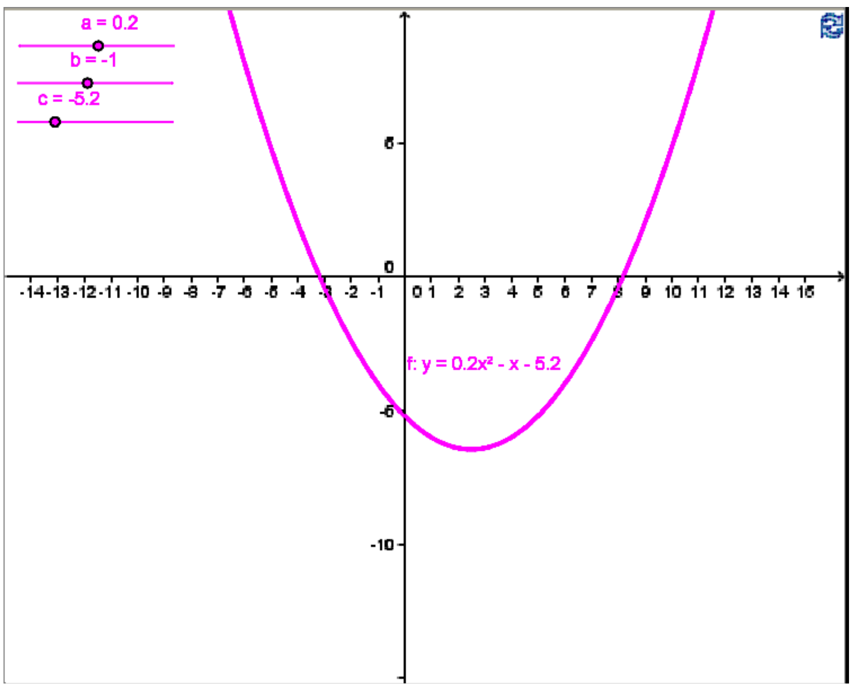
Tento způsob grafického řešení kvadratické rovnice je založen na hledání průsečíků **paraboly a osy** x. Graf funkce f ve tvaru $f : y = ax^2 + bx + c$má také tvar paraboly. Tato parabola ale nemá v obecném případě vrchol v počátku.

Doplněním kvadratického trojčlenu na levé straně rovnice na čtverec zjistíme souřadnice vrcholu paraboly:

$y = ax^2 + bx + c$
$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a}$

$V = [-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}]$

V následujícím appletu můžete pomocí změny posuvníků pozorovat, jak vypadá graf funkce $f : y = ax^2 + bx + c$při změně parametrů a, b, c.

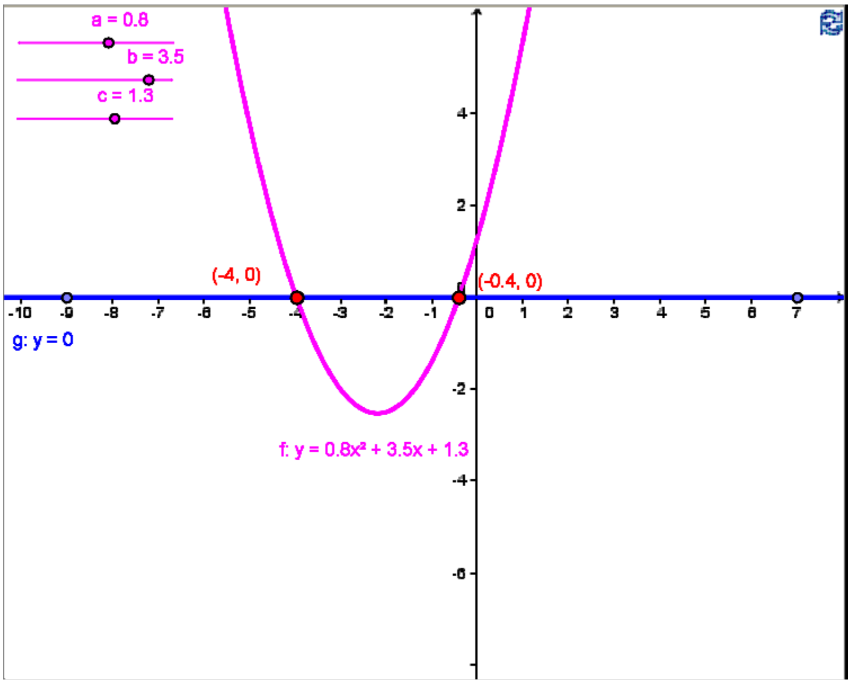


Postup při grafickém řešení kvadratické rovnice ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}$ a $x \in \mathbf{R}$ je neznámá :

1. Levou stranu rovnice chápeme jako předpis funkce $f : y = ax^2 + bx + c$ a pravou stranu jako $g : y = 0$.

2. Sestojíme grafy funkcí f, g, kde grafem funkce $f : y = ax^2 + bx + c$ je parabola s vrcholem $V = [-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}]$ a grafem funkce g je přímka splývající s osou x.

3. **Řešením kvadratické rovnice jsou x-ové souřadnice průsečíků grafu funkce f s osou x.** Pro názornost se podívejme na následující applet, kde se opět dají měnit koeficienty v předpisu funkce pomocí změny posuvníků.



Množinou všech řešení kvadratické rovnice jsou:

- dva kořeny $\mathbf{K} = \{x_1, x_2\}$, a to x-ové souřadnice průsečíků osy x a paraboly, pokud **parabola protíná osu** x.
- jeden dvojnásobný kořen $\mathbf{K} = \{x_1 = x_2\}$, a to x-ová souřadnice průsečíku osy x a paraboly, pokud se **parabola osy** x **dotýká**.
- žádný bod $\mathbf{K} = \emptyset$, pokud **parabola nemá s osou** x **společný bod**.

Úloha

Řešte rovnici $x^2 - 2x - 15 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$ graficky.

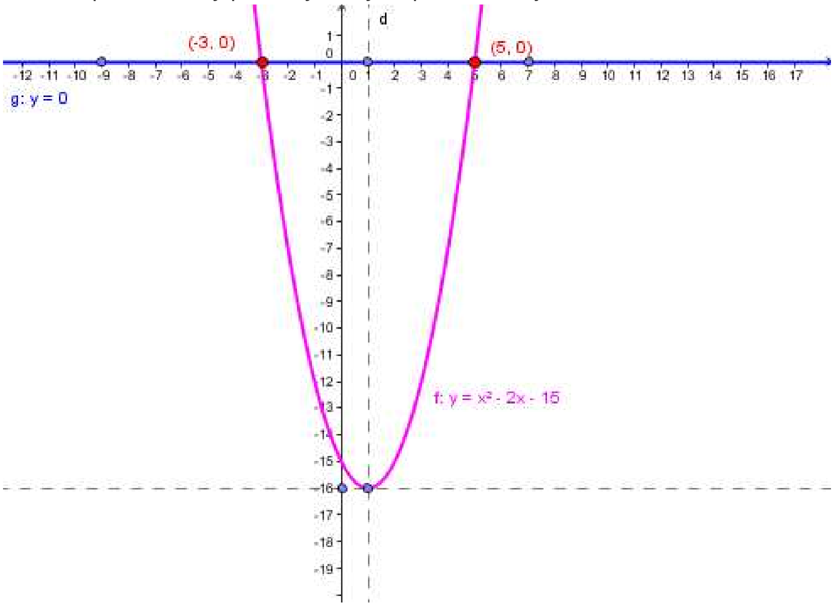
Řešení

- Doplněním levé strany rovnice na čtverec zjistíme vrchol paraboly.

  $f : y = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 15$

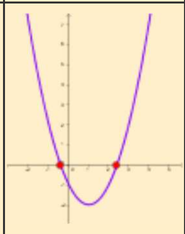
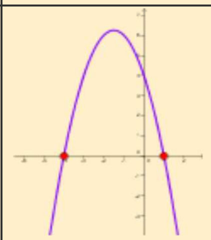
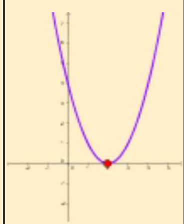
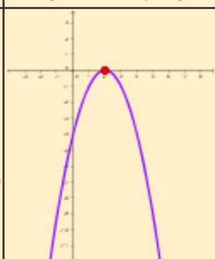
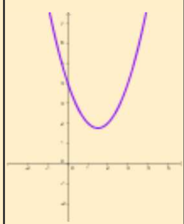
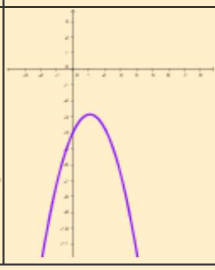
  $y = (x-1)^2 - 16$

$V = [1, -16]$

- Sestrojíme graf funkce $f : y = x^2 - 2x - 15$, tedy parabolu s vrcholem $V = [1, -16]$.
- Určíme společné body paraboly a osy x, pokud existují.
- 

- Množina řešení je $\mathbf{K} = \{-3, 5\}$.

Následující tabulka znázorňuje **vztah grafického řešení kvadratické rovnice a diskriminantu kvadratické rovnice**. Uvažujme kvadratickou rovnici tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$, a diskriminant $D = b^2 - 4ac$ této rovnice.

	$a > 0$	$a < 0$	Počet kořenů
$D > 0$			dva různé kořeny
$D = 0$			jeden dvojnásobný kořen
$D < 0$			žádný kořen

Úloha

Určete počet reálných kořenů následujících rovnic. Využijte znalostí z předchozí tabulky.

1. $3x^2 - 10x - 15 = 0$

   $D = (-10)^2 - 4 * 3 * (-15) = 100 + 180 = 280 > 0$
   Rovnice má **právě dvě řešení**.

2. $-10x^2 + 6x - 3 = 0$

   $D = 6^2 - 4 * (-10) * (-3) = 36 - 120 = -84 < 0$
   Rovnice **nemá řešení v množině všech reálných čísel**.

3. $x^2 - 30x + 225 = 0$

   $D = (-30)^2 - 4 * 225 = 900 - 900 = 0$
   Rovnice má **jeden dvojnásobný kořen**.

Algebraické rovnice n-tého stupně

Na střední škole jsou probírány kromě algebraických rovnic, také rovnice nealgebraické. Nealgebraické rovnice jsou například rovnice iracionální, exponenciální, logaritmické nebo goniometrické. My se ale nadále budeme věnovat pouze algebraickým rovnicím.

Definice

Rovnici ve tvaru $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, kde $a_n \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, .., a_0$ jsou komplexní koeficienty a $n \in \mathbf{N}$, nazýváme **algebraickou rovnicí n-tého stupně** s jednou neznámou $x \in \mathbf{M}$.

Algebraickou rovnici n-tého stupně s jednou neznámou x budeme zapisovat $P_n(x) = 0$.

Pokud $a_n = 1$, je algebraická rovnice v **normovaném tvaru**.

Levá strana rovnice je mnohočlen n-tého stupně s neznámou $x \in \mathbf{M}$. Proto řešení algebraických rovnic úzce souvisí s hledáním kořenů mnohočlenu.

Prozradíme si pár základních vět, které nám budou pomáhat při hledání kořenů algebraických rovnic.

Věta

Každá algebraická rovnice $P_n(x) = 0$ s komplexními koeficienty, kterou **řešíme v množině komplexních čísel**, má **alespoň jeden komplexní kořen**.

Předchozí věta je nazývána základní větou algebry. Důkaz této věty je poměrně zdlouhavý a lze ho najít v například v knize Základy algebry D. Stanovského.

Poznámka

Dále se budeme věnovat pouze rovnicím s **reálnými koeficienty**. Rovnice však budeme řešit v množině $\mathbf{M}$, která bude nejčastěji množinou komplexních čísel.

Věta

Pokud je číslo $b \in \mathbf{M}$ kořenem algebraické rovnice $P_n(x) = 0$, kde $n \in \mathbf{N}$, lze mnohočlen $P_n(x)$ **rozložit na součin** $P_n(x) = (x - b) * Q_{n-1}(x)$, kde $Q_{n-1}(x)$ je mnohočlen nižšího stupně, a to stupně $n - 1$.

Příklad

Je dána rovnice $x^3 + 6x + 11x + 6 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$. Rozložte mnohočlen na levé straně rovnice na součin, jestliže znáte kořen rovnice $x_1 = -1$.

Řešení

- Pro určení rozkladu vydělíme levou stranu rovnice dvojčlenem $(x + 1)$, nebo využijeme Hornerovo schéma, čímž zjistíme mnohočlen Q_{n-1} z předchozí věty.
- $(x^3 + 6x + 11x + 6) : (x + 1) = x^2 + 5x + 6$

	1	6	11	6
-1		-1	-5	-6
	1	5	6	0

- V posledním řádku tabulky vidíme koeficienty mnohočlenu Q_{n-1}. Mnohočlen Q_{n-1} je tedy tvaru $x^2 + 5x + 6$.
- Rozklad $P_n(x) = (x - b) * Q_{n-1}(x)$ je $P_n(x) = (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$.

Při řešení lineárních rovnic v součinovém tvaru jsme si řekli tvrzení, že součin dvou nebo více výrazů je roven nule právě tehdy, když je alespoň jeden z výrazů roven nule. Díky tvrzení jsme snadno rovnice tohoto typu vyřešili. Tvrzení budeme využívat i při řešení rovnic vyšších stupňů.

Věta

Jsou dány mnohočleny $P_n(x), Q_m(x)$, kde $m, n \in \mathbf{N}$. Potom algebraická rovnice v **součinovém tvaru** $P_n(x) * Q_m(x) = 0$ **s neznámou** $x \in \mathbf{M}$ **je ekvivalentní s příslušnou soustavou algebraických rovnic** $P_n(x) = 0, Q_m(x) = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{M}$.

Příklad

Řešte rovnici $(x^2 + 3x + 2)(2x^2 - x - 15) = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{R}, \mathbf{D} = \mathbf{R}$
- Dle věty výše vyřešíme rovnice $(x^2 + 3x + 2) = 0$ a $(2x^2 - x - 15) = 0$.
- První rovnice má řešení: $(x + 1)(x + 2) = 0$ .... $x_1 = -1, x_2 = -2$, $\mathbf{K_1} = \{-1, -2\}$
- Druhá rovnice má řešení: $(x - 3)(2x + 5) = 0$ .... $x_3 = 3, x_4 = -\frac{5}{2}$, $\mathbf{K_2} = \left\{3, -\frac{5}{2}\right\}$
- Řešením původní rovnice $(x^2 + 3x + 2)(2x^2 - x - 15) = 0$ je sjednocení množin řešení první a druhé rovnice.
- $\mathbf{K} = \mathbf{K_1} \cup \mathbf{K_2} = \left\{-1, -2, 3, -\frac{5}{2}\right\}$

Věta

Algebraická rovnice n-tého stupně $P_n(x) = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{M}$ má v množině komplexních čísel **nejvýše n různých kořenů**.

Označme tyto různé kořeny $x_1, x_2, ..., x_j \in \mathbf{M}$, kde $j \leq n$.

Potom lze mohočlen $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ **rozložit na součin**

$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_j)^{k_j}$,

kde $k_1, k_2, ..., k_j \in \mathbf{N}$, a platí $k_1 + k_2 + ... + k_j = n$

Lineární dvojčleny $(x - x_j), j \leq n$, nazýváme **kořenové činitele** mnohočlenu $P_n(x)$.

Číslo k_j určuje **násobnost kořene** a kořen $x_j \in \mathbf{M}$ nazýváme k_j-násobným kořenem rovnice $P_n(x) = 0$.

Příklad

Řešte algebraickou rovnici $x^2 + 2x + 1 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{R}, \mathbf{D} = \mathbf{R}$
- Levou stranu rovnice lze rozložit na součin kořenových činitelů, a to $(x + 1)(x + 1) = 0$.
- Lze psát též ve tvaru $(x + 1)^2 = 0$.
- Kořenem rovnice je číslo $x_{1,2} = 1$ a nazýváme ho **dvojnásobným kořenem**.
- $\mathbf{K} = \{1\}$

Celočíselné kořeny

Věta

Je dána algebraická rovnice $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{M}$, kde $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, .., a_0 \in \mathbf{Z}$ a $n \in \mathbf{N}$.

Je-li číslo $b \in \mathbf{Z}$ **kořenem** rovnice, potom je **dělitelem absolutního členu** a_0.

Věta výše nám dává návod, jak nalézt všechny možné **celočíselné kořeny**. Důkaz lze najít v knize E. Caldy. Toto tvrzení obráceně neplatí! **Číslo, které je dělitelem absolutního členu, nemusí být kořenem rovnice.** Každé číslo z množiny dělitelů musí tedy ještě splňovat vlastnost, že po dosazení čísla do rovnice platí rovnost levé a pravé strany rovnice, což je vlastnost kořene rovnice.

Příklad

Řešte algebraickou rovnici $x + 6 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{Z}$.

Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{Z}, \mathbf{D} = \mathbf{Z}$
- Dělitelé absolutního členu $a_0 = 6$ tvoří množinu $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.
- Pokud dosadíme postupně všechna čísla do rovnice, zjistíme, že pouze číslo -6 je kořenem rovnice, přestože i číslo 2 dělí absolutní člen.
- $\mathbf{K} = \{-6\}$

Příklad

Řešte algebraickou rovnici $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{Z}$.

Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{Z}, \mathbf{D} = \mathbf{Z}$
- Dělitelé absolutního členu $a_0 = -6$ tvoří množinu $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.
- Postupně dosazujeme čísla z množiny dělitelů do rovnice, abychom zjistili, která čísla jsou kořeny rovnice.
- $(-3)^3 + 3 * (-3)^2 - 2 * (-3) - 6 = -27 + 27 + 6 - 6 = 0$
- Řešením rovnice je pouze číslo $x = -3$.
- $\mathbf{K} = \{-3\}$

Racionální kořeny

Pokud rovnice nemá žádné celočíselné kořeny, lze použít následující větu, která nám říká, jak hledat **racionální kořeny**.

Uvažujeme algebraickou rovnici $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{M}$, kde $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, .., a_0$ jsou **racionální koeficienty** a $n \in \mathbf{N}$. Tuto rovnici lze ekvivalentními úpravami, tj. převedením na společného jmenovatele a tímto jmenovatelem rovnici vynásobit, převést na rovnici s celočíselnými koeficienty $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{M}$.

Věta

Je dána algebraická rovnice $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$, kde $b_n \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $b_n, b_{n-1}, .., b_0 \in \mathbf{Z}$ a $n \in \mathbf{N}$.

Nechť r, s jsou celá nesoudělná čísla. Je-li číslo $\frac{r}{s}$ kořenem rovnice, potom platí, že r **dělí absolutní člen** b_0 **a** s **dělí vedoucí koeficient** b_n.

Věta je zobecněním věty o hledání celočíselných kořenů, proto díky této obecnější verzi získáme též celočíselné kořeny, protože $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. Důkaz věty lze opět najít v knize E. Caldy.

Poznámka

Dvě čísla nazýváme **nesoudělná** právě tehdy, když je jejich **největší společný dělitel roven jedné**.

Příklad

Řešte algebraickou rovnici $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{Q}$.

Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{Q}, \mathbf{D} = \mathbf{Q}$
- Množina všech dělitelů $r \in R$ absolutního členu $a_0 = 3$ je $R = \{\pm 1, \pm 3\}$.
- Množina všech dělitelů $s \in S$ vedoucího koeficientu $a_n = 2$ je $S = \{\pm 1, \pm 2\}$.
- Dostáváme množinu, označme ji $\frac{R}{S}$, kde čísla $\frac{r}{s} \in \frac{R}{S}$.
  $\frac{R}{S} = \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}\}$
- Postupně dosazujeme čísla z množiny $\frac{R}{S}$ do rovnice, abychom zjistili, které z čísel vyhovuje rovnici.
- $2 * (\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^2 - 6 * (\frac{1}{2}) + 3 = 0$
- Kořenem rovnice je pouze číslo $x = \frac{1}{2}$.
- $\mathbf{K} = \{\frac{1}{2}\}$

Abychom vždy nemuseli ověřovat všechna čísla $\frac{r}{s} \in \frac{R}{S}$, existuje tvrzení, díky kterému se počet prvků v množině zmenší.

Věta

Předpokládáme, že $\frac{r}{s}$, kde r, s jsou celá nesoudělná čísla, je racionálním kořenem rovnice $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$, kde $b_n \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $b_n, b_{n-1}, .., b_0 \in \mathbf{Z}$ a $n \in \mathbf{N}$. Označme $L(1)$ číslo získané dosazením čísla 1 do levé strany rovnice a $L(-1)$ číslo získané dosazením čísla -1 do levé strany rovnice.

Potom platí, že $(r - s)$ dělí $L(1)$ a $(r + s)$ dělí $L(-1)$.

Příklad

Vrátíme se k předchozímu příkladu a použijeme větu výše. Řešíme tedy algebraickou rovnici $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{Q}$.

Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{Q}, \mathbf{D} = \mathbf{Q}$
- Množina všech dělitelů $r \in R$ absolutního členu $a_0 = 3$ je $R = \{\pm 1, \pm 3\}$.
- Množina všech dělitelů $s \in S$ vedoucího koeficientu $a_n = 2$ je $S = \{\pm 1, \pm 2\}$.
- $L(1) = 2 - 1 - 6 + 3 = -2$
- $L(-1) = -2 - 1 + 6 + 3 = 6$
- Tvrzení, že $(r - s)/L(1)$ a zároveň $(r + s)/L(-1)$ nám zredukuje množinu $\frac{R}{S} = \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}\right\}$na množinu $\frac{\tilde{R}}{\tilde{S}} = \left\{-1, \frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right\}$
- Vidíme, že se nám počet čísel, které musíme ověřit zmenšil na polovinu.
- $\mathbf{K} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Cardanovy vzorce

Cardanovy vzorce jsou **vzorce pro výpočet kořenů algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně**. Také při řešení kvadratických rovnic jsme využívali vzorec pro nalezení kořenů. Na rozdíl od vzorců na výpočet kořenů kvadratických rovnic se Cardanovy vzorce na střední škole běžně nevyučují. Jsou poměrně složité a obtížně zapamatovatelné.

Vzorce lze odvodit pomocí substituce a použitím středoškolských znalostí. V případě vašeho zájmu nahlédněte na stránky korespondenčního semináře či na wikipedii.

Pokud bychom hledali vzorce pro výpočet kořenů algebraických rovnic **pátého a vyššího stupně**, budeme zklamáni. Žádné vzorce využívající pouze základní operace (+, -, *, /) a odmocnin **neexistují**.

Substituce

Substituce je **nahrazení výrazu v mnohočlenu obsahující neznámou.** Tento výraz nahradíme novou neznámou, a tím získáme novou rovnici, kterou následně snadněji vyřešíme. Nesmíme zapomenout, že jsme vlastně řešili jinou rovnici. Proto je důležité dosadit řešení nové rovnice do substitučního vztahu a vypočítat kořeny pro původní neznámou!

Jaký výraz v mnohočlenu nahradit se nedá obecně říci, proto se podívejme na několik řešených příkladů, které nám princip substituce objasní.

Příklady
Řešte rovnice v množině komplexních čísel použitím substituce.

1. $\left(x^2-x+2\right)^2-6\left(x^2-x\right)-4=0$ kde x je neznámá.
   Řešení
   - $\mathbf{M}=\mathbf{C}, \mathbf{D}=\mathbf{C}$
   - Výraz obsahující neznámou, který se v mnohočlenu opakuje je $\left(x^2-x\right)$, proto je subtituce tvaru $x^2-x=y$
   - Dosadíme substituci do mnohočlenu: $(y+2)^2-6y-4=0$
   - Upravíme: $y^2-2y=0$.... $y_1=0, y_2=2$
   - Dosadíme y_1, y_2 do sustitučnho vztahu $x^2-x=y$
   - $x^2-x=0$ .... $x_1=0, x_2=1$
   - $x^2-x=2$ .... $x_3=2, x_4=-1$
   - $\mathbf{K}=\{0, \pm 1, 2\}$
   - Poznámka: Řešení by bylo stejné i v případě substituce $x^2-x+2=y$
2. $\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+2x+1\right)-5=0$ kde x je neznámá.
   Řešení
   - $\mathbf{M}=\mathbf{C}, \mathbf{D}=\mathbf{C}$
   - Výraz obsahující neznámou $\left(x^2+2x-3\right)$ nahradíme: $x^2+2x-3=y$
   - Dosadíme substituci do mnohočlenu: $y(y+4)-5=0$
   - Upravíme: $y^2+4y-5=0$.... $y_1=1, y_2=-5$
   - Dosadíme y_1, y_2 do sustituční rovnice $x^2+2x-3=y$

- $x^2+2x-3=1$.... $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{5}$
- $x^2+2x-3=-5$.... $x_{3,4}=-1\pm i$
- $\mathbf{K}=\left\{-1\pm\sqrt{5},-1\pm i\right\}$
- Poznámka: Řešení by bylo stejné i v případě substitucí $x^2+2x+1=y$ nebo $x^2+2x=y$.

Úloha

1. Řešte rovnici $(y^2-y)^2-y^2+y-30=0$ s neznámou $y\in\mathbf{R}$ použitím substituce.
   Řešení
   - $\mathbf{M}=\mathbf{R},\mathbf{D}=\mathbf{R}$
   - Levou stranu rovnice upravíme na tvar: $(y^2-y)^2-(y^2-y)-30=0$
   - Použijeme substituci: $t=y^2-y$
   - Získáme kvadratickou rovnici $t^2-t-30=0$, kterou snadno vyřešíme.
   - Kořeny kvadratické rovnice $t_1=6,t_2=-5$ dosadíme do substitučního vztahu.
   - Dosazením $t_1=6$ získáme kvadratickou rovnici $0=y^2-y-6$, která má kořeny $y_1=3,y_2=-2$
     Dosazením $t_2=-5$ také získáme kvadratickou rovnici $0=y^2-y+5$, která nemá řešení v množině reálných čísel.
   - $\mathbf{K}=\{\pm 3,-2\}$

Kubické rovnice

Definice

Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla, kde $a \neq 0$. Potom rovnici ve tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ nazýváme **kubickou rovnicí** s neznámou $x \in \mathbf{M}$.

Kubickou rovnicí nazýváme každou **algebraickou rovnici třetího stupně**. Pokud bychom uvažovali nulový vedoucí koeficient a, snížil by se stupeň rovnice a v obecném případě bychom získali rovnici kvadratickou. Dále předpokládejme, že vedoucí koeficient je nenulový.

Speciální tvary kubické rovnice

Jestliže je absolutní člen d nulový, kubická rovnice má tvar $ax^3 + bx^2 + cx = 0$

Postup řešení: Vytkneme neznámou x z mnohočlenu na levé straně rovnice. Tím získáme rovnici v součinovém tvaru $x(ax^2 + bx + c) = 0$ a jedním kořenem rovnice je číslo $x_1 = 0$. Další kořeny získáme vyřešením kvadratické rovnice.

Příklad
Řešte rovnici $x^3 + 4x^2 - 3x = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{R}, \mathbf{D} = \mathbf{R}$
- Mnohočlen na levé straně rovnice upravíme vytknutím x.
  $x(x^2 + 4x - 3) = 0$
- Díky rozkladu levé strany rovnice na součin dále řešíme dvě rovnice ve tvaru $x = 0$ a $x^2 + 4x - 3 = 0$. Z první rovnice získáme kořen $x_1 = 0$.
- Druhá rovnice je kvadratická a můžeme ji řešit například pomocí vzorce pro hledání kořenů kvadratické rovnice.
  $x^2 + 4x - 3 = (x + 2 - \sqrt{7})(x + 2 + \sqrt{7})$
- Množinou všech řešení je $\mathbf{K} = \left\{0, -2 \pm \sqrt{7}\right\}$

Kubická rovnice může být i tvaru $ax^3 + d = 0$, kde jsou **koeficienty** b, c **nulové**.

Postup řešení: Mnohočlen na levé straně rovnice rozložíme na součin pomocí vzorce tvaru $a^3 \pm b^3$.

Příklad
Řešte rovnici $8x^3 + 1 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$.
Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
- Levou stranu rovnice pro přehlednost upravíme na tvar $8x^3 + 1 = (2x)^3 + (1)^3$.
- Dále mnohočlen na levé straně rovnice rozložíme podle vzorce:
  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)(a - \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ib)(a - \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ib)$
- $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 0$
- $(2x + 1)(2x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(2x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$
- $(2x + 1)(2x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2})(2x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}) = 0$
- Množinou řešení je $\mathbf{K} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}\right\}$

Řešení kubické rovnice

Při řešení kubické rovnice se snažíme odhadnout alespoň jeden kořen rovnice. Díky tomu lze levou stranu rovnice rozložit podle věty na součin lineárního a kvadratického mnohočlenu, kde kořeny kvadratického mnohočlenu nalezneme snadno. Tímto způsobem je řešena úloha 1 v další kapitole.

Kořen můžeme hledat pomocí vět, které jsme si uvedli v úvodu algebraických rovnic n-tého stupně. Pokud máme kubickou rovnici s celočíselnými koeficienty (s takovými rovnicemi se setkáváme nejčastěji), hledáme nejdříve celočíselný kořen, který je z množiny dělitelů absolutního členu rovnice. Pokud žádný z celočíselných kořenů neřeší rovnici, zkusíme hledat kořeny racionální. V případě, že ani racionální kořen není řešením rovnice, má rovnice zřejmě iracionální či komplexní kořeny. Takové kořeny bychom museli vypočítat pomocí Cardanových vzorců .

Zajímavý postup řešení kubické rovnice je uveden v následujícím příkladě.

Příklad

Řešte rovnici $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = 0$s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{R}, \mathbf{D} = \mathbf{R}$
- Hledáme kořen a rovnici chceme upravit na tvar
  $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = (x - a)(x^2 + px + q)$ kde a je kořen a $p, q \in \mathbf{R}$.
- Po roznásobení pravé strany rovnice získáme:
  $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = x^3 + (p - a)x^2 + (q - ap)x - aq$
- Porovnáme koeficienty u stejné mocniny x a tím dostaneme soustavu tří rovnic o třech neznámých p, q, a, kterou vyřešíme.
- $3 = p - a$
  $2 = q - ap$
  $6 = -aq$
  Řešením je $a = -3$, $p = 0$, $q = 2$.
  Řešení soustavy dosadíme do rovnice
  $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = (x - a)(x^2 + px + q) = (x + 3)(x^2 + 2)$
- Kořenem rovnice je pouze číslo $x_1 = -3$, protože kvadratická rovnice $x^2 + 2 = 0$ nemá v $\mathbf{R}$ řešení.
- $\mathbf{K} = \{-3\}$

Úlohy

1. Řešte rovnici $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
   Řešení
   - $\mathbf{M} = \mathbf{R}, \mathbf{D} = \mathbf{R}$
   - Levou stranu rovnice upravíme na součin kořenových činitelů postupným vytýkáním.
   - $x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1) = 0$
   - $(x^2 - 1)(x + 3) = 0$
   - Použijeme známý vzorec: $(x - 1)(x + 1)(x + 3) = 0$
   - $\mathbf{K} = \{\pm 1, -3\}$

2. Řešte rovnici $y^3 + 9y^2 + 19y + 11 = 0$s neznámou $y \in \mathbf{R}$.
   Řešení
   - $\mathbf{M} = \mathbf{R}, \mathbf{D} = \mathbf{R}$
   - Rovnice má celočíselné koeficienty, proto nejdříve hledáme celočíselný kořen.
   - Množina dělitelů absolutního členu $a_0 = 11$ je $\{\pm 1, \pm 11\}$.
   - Postupným dosazením čísel z množiny dělitelů čísla a_0 do rovnice nalezneme vyhovující kořen $y_1 = -1$.
   - Protože již známe jeden kořen rovnice $y_1 = -1$, lze levou stranu rovnice (např. pomocí vydělení mnohočlenu lineárním dvojčlenem $(y + 1)$) rozložit na součin podle věty:
     $(y + 1)(y^2 + 8y + 11) = 0$
   - Dále řešíme kvadratickou rovnici, jak nám radí věta, a hledáme kořeny kvadratického trojčlenu například pomocí vzorce pro řešení kvadratické rovnice:
     $(y^2 + 8y + 11) = (y + 4 - \sqrt{5})(y + 4 + \sqrt{5})$
   - $\mathbf{K} = \left\{-1, -4 + \sqrt{5}, -4 - \sqrt{5}\right\}$

3. Řešte rovnici $20z^3 + 8z^2 - 27z + 9 = 0$ s neznámou $z \in \mathbf{R}$.
Řešení

   - $\mathbf{M} = \mathbf{R}, \mathbf{D} = \mathbf{R}$
   - Rovnice má celočíselné koeficienty, proto nejdříve hledáme celočíselný kořen.
   - Množina dělitelů absolutního členu $a_0 = 9$ je $\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$.
   - Po dosazení všech čísel z množiny dělitelů čísla a_0 zjistíme, že žádné z čísel nevyhovuje rovnici.
   - Hledáme tedy racionální kořeny.
   - $R = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$
     $S = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20\}$
   - Množina čísel, které bychom museli ověřit je poměrně velká, a tak navíc použijeme tvrzení, které množinu zredukuje. Není třeba hledat všechna čísla, která splňují $(R+S)/L(-1) = 24$ a zároveň $(R-S)/L(1) = 10$. Každé číslo z množiny $\frac{R}{S}$ splňující tvrzení hned ověřujeme, dokud nenarazíme na kořen rovnice. V optimálním případě nebudeme muset zkoumat všechna čísla, která mohou být hledaným kořenem.
   - Například číslo $z_1 = \frac{1}{2}$ je řešením rovnice. Levou stranu rovnice vydělíme dvojčlenem $(2z-1)$, který je ekvivalentní s $(z - \frac{1}{2})$.
   - Získáme $(2z-1)(10z^2 + 9z - 9) = 0$, kde kořeny kvadratického trojčlenu jsou čísla $z_2 = \frac{3}{5}$ a $z_3 = -\frac{3}{2}$.
   - $\mathbf{K} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, -\frac{3}{2}\}$

Cvičení

1. Postupným vytýkáním řešte rovnici $2x^3 - 3x^2 + 10x - 15 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$.
2. Řešte rovnici $3y^3 - 10y^2 - 67y - 70 = 0$ s neznámou $y \in \mathbf{R}$.
3. Řešte rovnici $2z^3 + 11z^2 + 18z - 12 = 0$ s neznámou $z \in \mathbf{Q}$.

Grafické řešení kubických rovnic

Každou algebraickou rovnici s neznámou $x \in \mathbf{R}$ lze řešit nejen početně, ale i graficky. Tedy i kubické rovnice lze řešit graficky.

Při grafickém řešení kubických rovnic budeme postupovat podobně, jako při řešení rovnic kvadratických. Kubickou rovnici lze také řešit graficky dvěma způsoby.

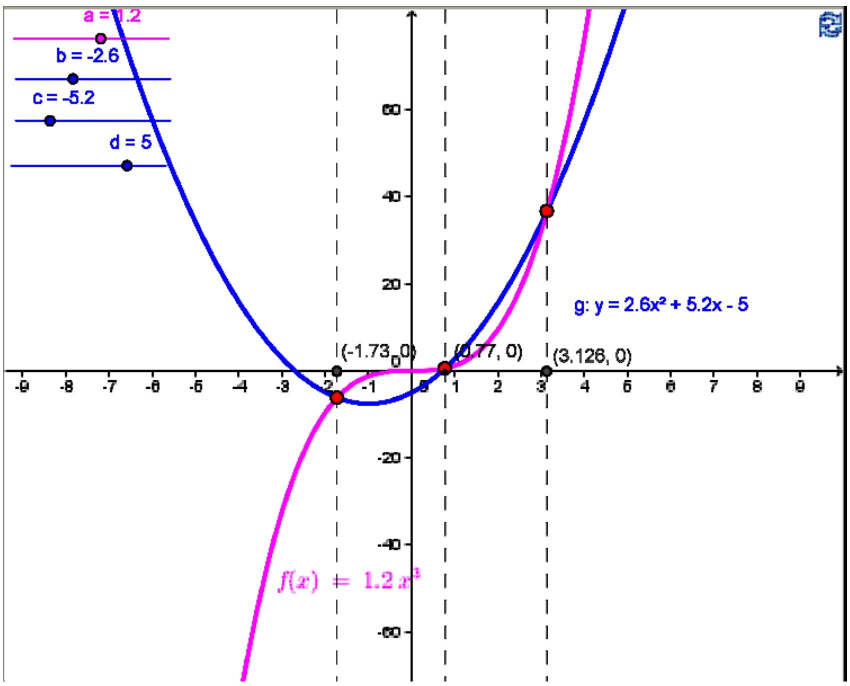
Uvažujme kubickou rovnici tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ a $x \in \mathbf{R}$ je neznámá.

1. způsob řešení

První způsob grafického řešení spočívá v hledání **průsečíků grafu mocninné funkce s lichým exponentem, zvané kubická parabola, a paraboly**.

Postup při grafickém řešení kubické rovnice:

1. Kubickou rovnici $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$upravíme na tvar $ax^3 = -bx^2 - cx - d$
2. Levou stranu rovnice chápeme jako předpis mocninné funkce s lichým exponentem $f : y = ax^3$a pravou stranu jako předpis funkce $g : y = -bx^2 - cx - d$ což je také mocninná funkce (resp. kvadratická), ale se sudým exponentem, jejímž grafem je parabola.
3. Sestojíme grafy funkcí f, g. Graf mocninné funkce $f : y = ax^3$nazýváme **kubickou parabolou**. Kubická parabola prochází počátkem a body $[1, 1]$, $[-1, -1]$. Grafem funkce g je parabola, jak jsme si řekli již u kvadratických rovnic.
4. **Řešením kubické rovnice jsou x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí f, g.** Pro názornost se podívejme na následující applet, kde se dají měnit koeficienty v předpisu funkcí pomocí změny posuvníků.

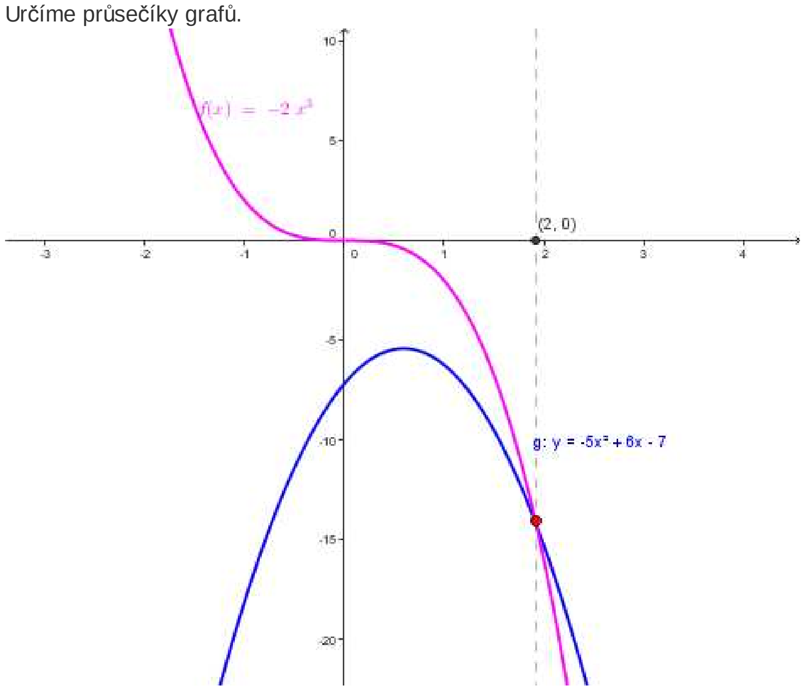


Ve speciálním případě, kdy je koeficient b u kvadratického členu nulový, je grafem funkce g přímka. Hledáme tedy x-ové souřadnice průsečíků mocninné funkce $f: y = ax^3$ a lineární funkce $g: y = -cx - d$

Úloha

Řešte rovnici $-2x^3 + 5x^2 - 6x + 7 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$ graficky.

Řešení

- Upravíme rovnici na tvar $-2x^3 = -5x^2 + 6x - 7$ a sestrojíme grafy funkcí.
  $f: y = -2x^3$, kubická parabola
  $g: y = -5x^2 + 6x - 7$ parabola
- Určíme průsečíky grafů.
- 

- Množina řešení je $\mathbf{K} = \{2\}$.

2. způsob řešení

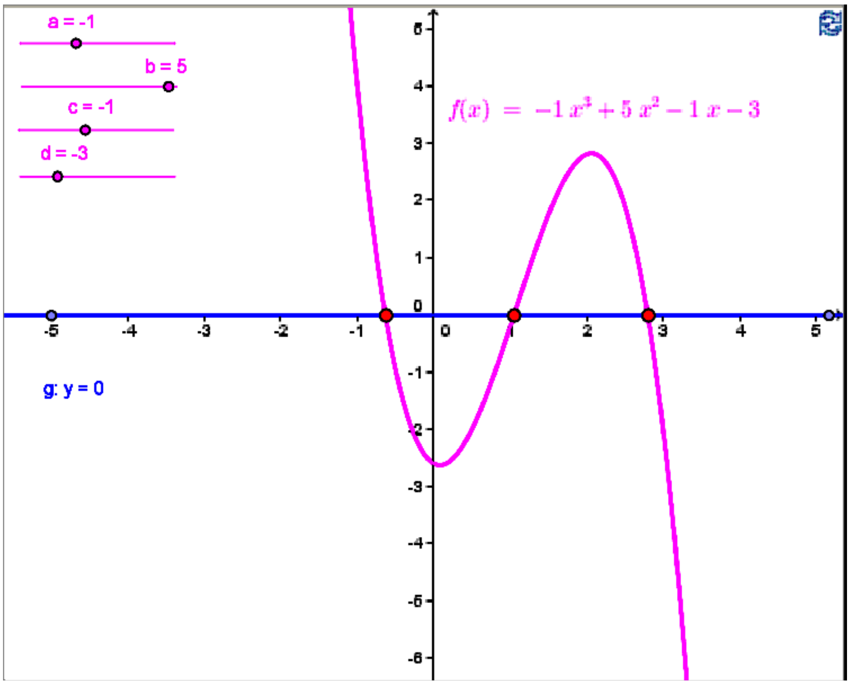
Druhý způsob grafického řešení spočívá v hledání **průsečíků grafu mocninné funkce s lichým exponentem, zvané kubická parabola, a osy x.**

Postup při grafickém řešení kubické rovnice:

1. Levou stranu rovnice chápeme jako předpis mocninné funkce s lichým exponentem $f: y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ a pravou stranu jako předpis funkce $g: y = 0$.

2. Sestrojíme grafy funkcí f, g. Grafem funkce f nazýváme **kubická parabola**. Grafem funkce g je přímka, která splývá s osou x.

3. **Řešením kubické rovnice jsou x-ové souřadnice průsečíků grafu funkce f a osy x.** Pro názornost se podívejme na následující applet, kde se opět dají měnit koeficienty v předpisu funkce pomocí změny posuvníků.

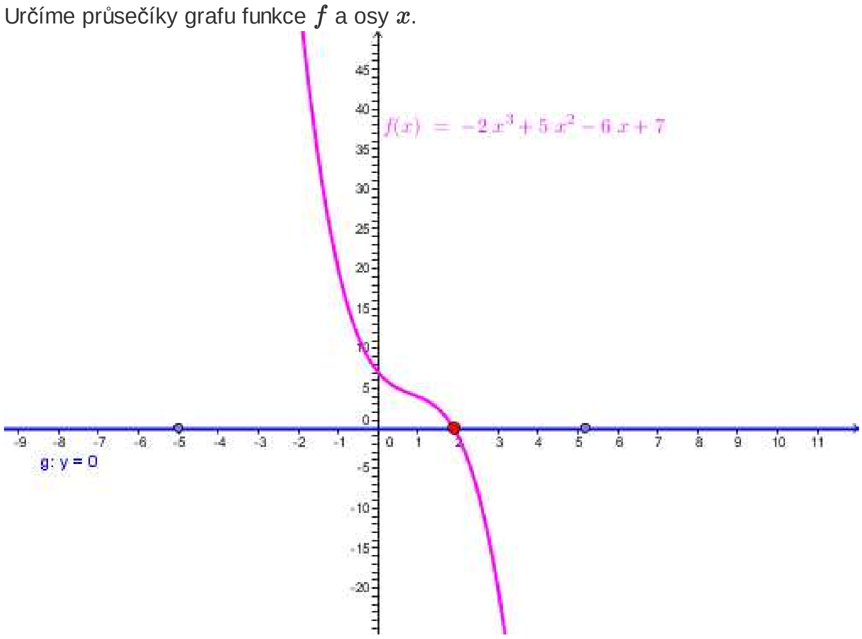


Úloha

Řešte rovnici $-2x^3+5x^2-6x+7=0$s neznámou $x \in \mathbf{R}$ graficky.

Řešení

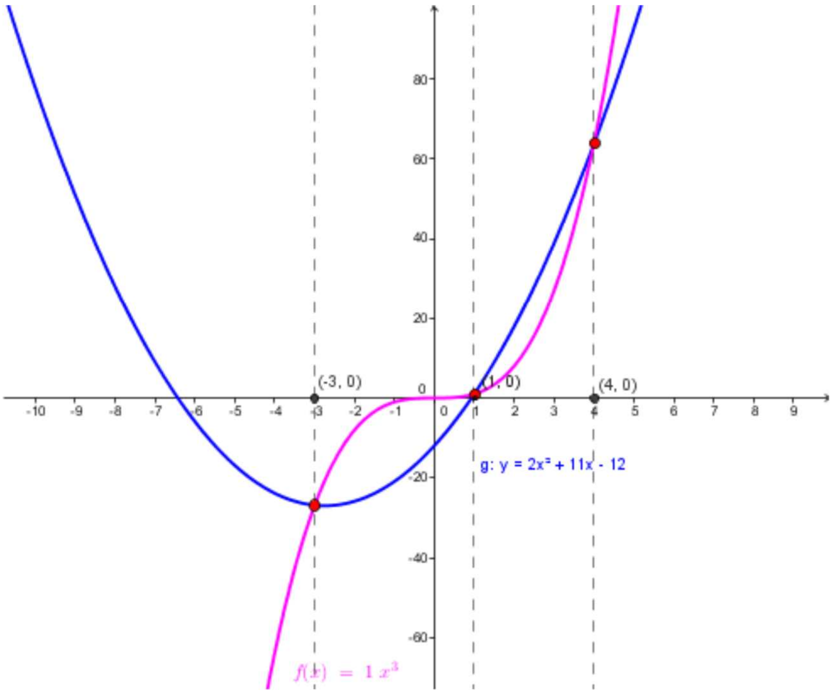
- Sestrojíme graf funkce.
  $f: y=-2x^3+5x^2-6x+7=0$, kubická parabola
- Určíme průsečíky grafu funkce f a osy x.



-
- Množina řešení je $\mathbf{K}=\{2\}$.

Úlohy

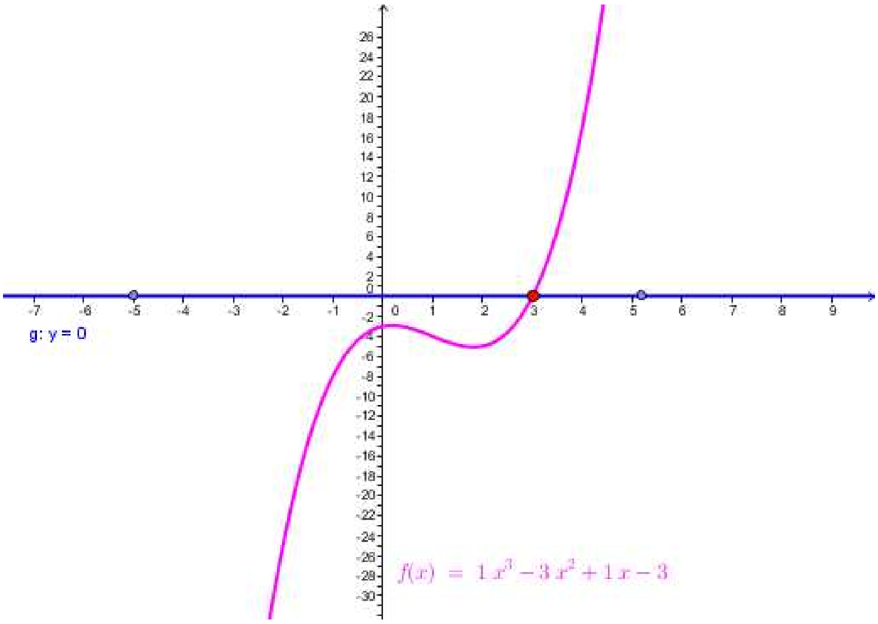
1. Řešte graficky rovnici $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
   Řešení

   - Rovnici upravíme na tvar $x^3 = 2x^2 + 11x - 12$
   - Sestrojíme grafy funkcí $f : y = x^3$ a $g : y = 2x^2 + 11x - 12$, kde vrchol paraboly má souřadnice $V = [-\frac{11}{4}, -27\frac{1}{8}]$
   - 

   - Získali jsme tři průsečíky, které mají x-ové souřadnice rovny číslům $1, 4, -3$.
   - $\mathbf{K} = \{1, 4, -3\}$

2. Řešte graficky rovnici $t^3 - 3t^2 + t - 3 = 0$s neznámou $t \in \mathbf{R}$.
   Řešení

   - Rovnici necháme ve tvaru $t^3 - 3t^2 + t - 3 = 0$a hledáme průsečík s osou x.
   - Sestrojíme graf funkce s předpisem $f : y = t^3 - 3t^2 + t - 3$

- 

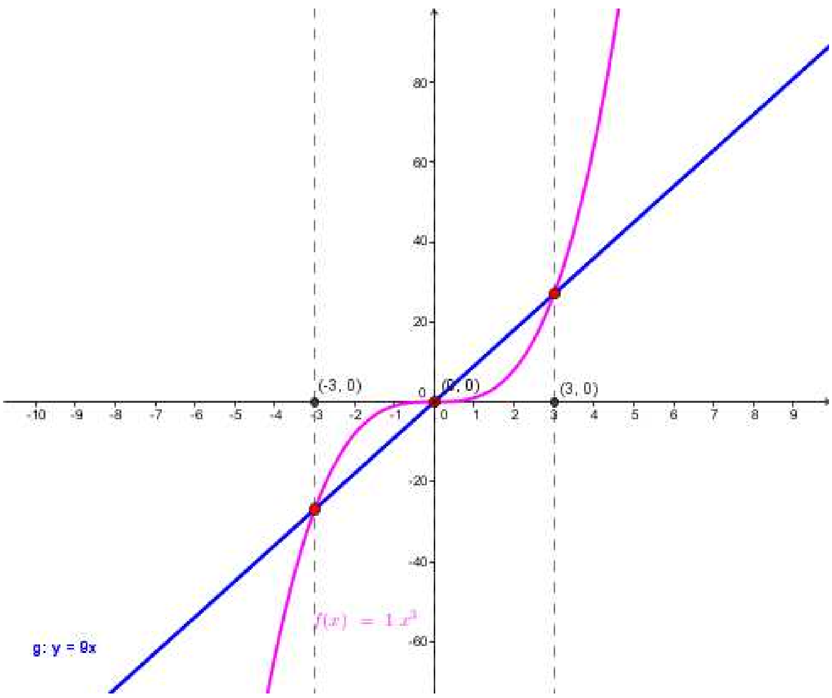
- Získali jsme jeden průsečík, který má x-ovou souřadnici rovnu číslu 3.

- $\mathbf{K} = \{3\}$

3. Řešte graficky rovnici $z^3 - 9z = 0$ s neznámou $z \in \mathbf{R}$.
   Řešení

   - Rovnici upravíme $z^3 = 9z$.

   - Sestrojíme grafy funkcí $f : y = z^3$ a $g : y = 9z$, kde g je lineární funkce.

   - 

   - Získali jsme tři průsečíky, které mají x-ové souřadnice rovny číslům $-3, 0, 3$.

   - $\mathbf{K} = \{-3, 0, 3\}$

Cvičení

Řešte rovnice graficky.

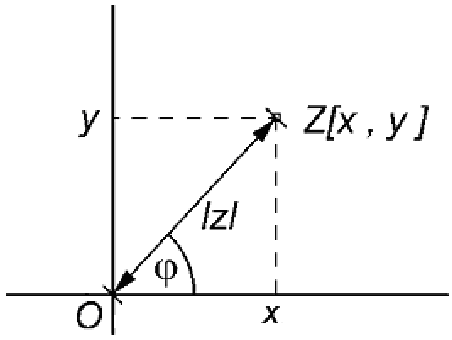
1. Řešte rovnici $x^3 - 19x + 30 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.
2. Řešte rovnici $t^3 - 5t^2 + 4t = 0$s neznámou $t \in \mathbf{R}$.
3. Řešte rovnici $z^3 - z^2 + 7z - 7 = 0$s neznámou $z \in \mathbf{R}$.

Důležité pojmy - opakování

Než si ukážeme, jak řešit binomické rovnice, zopakujeme některé pojmy z učiva o komplexních číslech. Podrobné informace o komlexních číslech a následujících pojmech můžete najít na stránkách Lenky Šilarové.

Goniometrický tvar komplexního čísla

V Gaussově rovině je dán bod $Z = [x, y]$, který je obrazem nenulového komplexního čísla $z = x + iy$, kde i je imaginární jednotka a $x, y \in \mathbf{R}$.



Číslo x je **reálná část** komplexního čísla z a platí $x = |z| cos\ \varphi$.
Číslo y je **imaginární část** komplexního čísla z a platí $y = |z| sin\ \varphi$.

Po dosazení x a y do z získáme **goniometrický tvar komplexního čísla** $z = |z|(cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi)$
Číslo φ nazýváme **argument** komplexního čísla, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
Číslo $|z|$ nazýváme **absolutní hodnota** komplexního čísla a platí $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
$cos\varphi = \frac{x}{|z|}$, $sin\varphi = \frac{y}{|z|}$

N-tá mocnina komplexního čísla

Je dáno nenulové komplexní číslo z v goniometrickém tvaru $z = |z|(cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi)$a přirozené číslo n. Pak n**-tá mocnina** čísla z je tvaru $z^n = |z|^n(cos\ n\varphi + i\ sin\ n\varphi)$

N-tá odmocnina komplexního čísla

Je dáno nenulové komplexní číslo a a přirozené číslo n. Pak číslo $z = |z|(cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi)$je řešením rovnice $z^n = a$, kde $a = |a|(cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha)$. Všechna řešení rovnice lze psát ve tvaru
$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left[cos\ \left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\ sin\ \left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right]$, kde $k = 0, 1, ..., (n-1)$.
Čísla z_k jsou hodnoty komplexní n-té odmocniny čísla a. Značíme: $(\sqrt[n]{a})_c$

> **Poznámka**
>
> Je důležité rozlišovat n-tou odmocninu z reálného čísla a n-tou odmocninu z komplexního čísla. Odmocnina z reálného čísla je jednoznačná, narozdíl od odmocniny z komplexního čísla.

Binomické rovnice

Definice

Nechť a, b jsou komplexní čísla, kde $a \neq 0$ a $n \in \mathbf{N}$. Potom rovnici ve tvaru $ax^n - b = 0$ nazýváme **binomickou rovnicí** s neznámou $x \in \mathbf{C}$.

Rovnici převedeme na **normovaný tvar**, tj. vydělíme ji nenulovým číslem a, a tím získáme rovnici $x^n - c = 0$, kde $c = \frac{b}{a}$, $c \in \mathbf{C}$.

Řešení binomické rovnice

Množinou všech řešení binomické rovnice jsou všechna komplexní čísla, která vyhovují rovnici $x^n - c = 0$.

Tyto kořeny můžeme vypočítat dvěma způsoby. Binomickou rovnici tedy řešíme v množině komplexních čísel buď **algebraicky** nebo **goniometricky**.

Algebraické řešení spočívá v tom, že mnohočlen na levé straně rovnice rozložíme na součin mnohočlenů nižších stupňů. Pokud tento rozklad umíme snadno určit, je výhodné využít algebraické řešení, jinak je výhodnější použít goniometrický způsob řešení.

Řešit binomickou rovnici $x^n - c = 0$ **goniometricky** znamená, že rovnici ekvivalentními úpravami převedeme na tvar $x^n = c$ a vypočítáme všechny hodnoty n-té odmocniny z komplexního čísla c v goniometrickém tvaru.

Věta

Binomická rovnice $x^n - c = 0$, kde $c = |c|(cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha)$, má v **množině komplexních čísel právě n různých kořenů**, a to

$x_k = \sqrt[n]{|c|}\left[cos\ \left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\ sin\ \left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right]$, kde $k = 0, 1, ..., (n-1)$.

Příklad

Řešte rovnici $x^3 + 27 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$.

Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
- **a) Algebraické řešení:** Mnohočlen na levé straně rovnice rozložíme na součin pomocí vzorce $a^{\ 3} + b^{\ 3}$.
  $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9) = (x+3)(x - \frac{3-3i\sqrt{3}}{2})(x - \frac{3+3i\sqrt{3}}{2})$
  Z věty o rovnici v součinovém tvaru má rovnice tři řešení, a to $-3, \frac{3\pm 3i\sqrt{3}}{2}$.
- **b) Goniometrické řešení:** Všechna řešení rovnice jsou třetí odmocniny z komplexního čísla -27, které převedeme na goniometrický tvar.
  $|-27| = 27, cos\ \alpha = -1, sin\ \alpha = 0 \ \Rightarrow \ -27 = 27(cos\pi + isin\pi)$
  Všechna řešení jsou tvaru $x_k = \sqrt[3]{27}\left[cos\ \left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) + i\ sin\ \left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right]$ kde $k = 0, 1, 2$.
  $x_0 = 3\left[cos\ \frac{\pi}{3} + i\ sin\ \frac{\pi}{3}\right] = 3(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$
  $x_1 = 3\left[cos\ \frac{3\pi}{3} + i\ sin\ \frac{3\pi}{3}\right] = -3$
  $x_2 = 3\left[cos\ \frac{5\pi}{3} + i\ sin\ \frac{5\pi}{3}\right] = 3(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$
- Množinou řešení je $\mathbf{K} = \left\{-3, \frac{3\pm i3\sqrt{3}}{2}\right\}$

Úlohy

1. Řešte rovnici $x^4 - 1 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$.
   Řešení
   - $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
   - **a) Algebraické řešení:** Mnohočlen na levé straně rovnice rozložíme na součin pomocí vzorce $a^{\,2} - b^{\,2}$.
   - $x^4 - 1 = [x^2 - 1][x^2 + 1] = (x-1)(x+1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$ kde i je imaginární jednotka.
   - Z věty o rovnici v součinovém tvaru má rovnice čtyři řešení, a to $\pm 1, \pm i$.
   - **b) Goniometrické řešení:** Hledáme všechna řešení rovnice $x^4 = 1$.
   - Číslo 1 napíšeme v goniometrickém tvaru:
     $|1| = 1, cos\ \alpha = 1, sin\ \alpha = 0 \ \Rightarrow \ 1 = cos 0 + i sin 0$
   - Všechna řešení jsou tvaru $x_k = \sqrt[4]{1}\left[cos\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right) + i\ sin\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right)\right]$ kde $k = 0, 1, 2, 3$.
   - $x_0 = \left[cos\left(\frac{0}{4}\right) + i\ sin\left(\frac{0}{4}\right)\right] = 1$
     $x_1 = \left[cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i\ sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right] = i$
     $x_2 = \left[cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + i\ sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)\right] = -1$
     $x_3 = \left[cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) + i\ sin\left(\frac{6\pi}{4}\right)\right] = -i$
   - $\mathbf{K} = \{\pm 1, \pm i\}$

2. Řešte rovnici $8y^3 - 27 = 0$ s neznámou $y \in \mathbf{C}$.
   Řešení
   - $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
   - **a) Algebraické řešení:** Mnohočlen na levé straně rovnice rozložíme na součin pomocí vzorce $a^{\,3} - b^{\,3}$.

- $8y^3 - 27 = (2y)^3 - 3^3 = (2y-3)(4y^2+6y+9) = (2y-3)(y + \frac{3-3\sqrt{3}i}{4})(y + \frac{3+3\sqrt{3}i}{4})$

- Z věty o rovnici v součinovém tvaru má rovnice tři řešení, a to $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}(-1 \pm \sqrt{3}i)$

- **b) Goniometrické řešení:** Hledáme všechna řešení rovnice $y^3 = \frac{27}{8}$.

- Číslo $\frac{27}{8}$ napíšeme v goniometrickém tvaru:
  $|\frac{27}{8}| = \frac{27}{8}, cos\ \alpha = 1, sin\ \alpha = 0 \ \Rightarrow \ \frac{27}{8} = \frac{27}{8}(cos0 + isin0)$

- Všechna řešení jsou tvaru $y_k = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}\left[cos\ (\frac{0+2k\pi}{3}) + i\ sin\ (\frac{0+2k\pi}{3})\right]$kde $k = 0, 1, 2.$

- $y_0 = \frac{3}{2}\left[cos\ \frac{0}{3} + i\ sin\ \frac{0}{3}\right] = \frac{3}{2}$
  $y_1 = \frac{3}{2}\left[cos\ \frac{2\pi}{3} + i\ sin\ \frac{2\pi}{3}\right] = -\frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}$
  $y_2 = \frac{3}{2}\left[cos\ \frac{4\pi}{3} + i\ sin\ \frac{4\pi}{3}\right] = -\frac{3}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4}$

- $\mathbf{K} = \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}(-1 \pm \sqrt{3}i)\right\}$

3. Řešte rovnici $z^2 + 2z + 5 = 0$ s neznámou $z \in \mathbf{C}$.
   Řešení

   - $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$

   - **a) Algebraické řešení:** Řešíme kvadratickou rovnici. Například úpravou mnohočlenu na levé straně rovnice pomocí doplnění na úplný čtverec a následné rozložení na součin podle vzrorce.

   - $(z^2 + 2z + 1) - 1 + 5 = (z+1)^2 + 4 = (z+1)^2 + 2^2 = (z+1+2i)(z+1-2i)$
     Kořeny jsou čísla $-1 \pm 2i$.

   - **b) Goniometrické řešení:** Rovnici si upravíme na tvar $(z+1)^2 + 4 = 0$ a použijeme substituci $t = (z+1)$.

   - Řešíme tedy binomickou rovnici $t^2 + 4 = 0$ s neznámou $t \in \mathbf{C}$.

   - Převedeme číslo -4 na goniometrický tvar : $-4 = 2(cos\pi + isin\pi)$
     Všechna řešení jsou tvaru $t_k = \sqrt{4}\left[cos\ (\frac{\pi+2k\pi}{2}) + i\ sin\ (\frac{\pi+2k\pi}{2})\right]$ kde $k = 0, 1$.

   - $t_0 = 2\left[cos\ (\frac{\pi}{2}) + i\ sin\ (\frac{\pi}{2})\right] = 2i$
     $t_1 = 2\left[cos\ (\frac{3\pi}{2}) + i\ sin\ (\frac{3\pi}{2})\right] = -2i$

   - Nesmíme zapomenout, že rovnici chceme vyřešit pro neznámou z. Proto řešení $t = \pm 2i$ musíme dosadit do vztahu substituce $t = (z+1)$.
     Tedy $z = t - 1$ a řešením rovnice jsou čísla $-1 \pm 2i$.

   - $\mathbf{K} = \{-1 \pm 2i\}$

Cvičení

1. Řešte rovnici $x^2 + 2x + 2 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$.
2. Řešte rovnici $y^3 - 2 = 0$ s neznámou $y \in \mathbf{C}$.
3. Řešte rovnici $z^6 - 1 = 0$ s neznámou $z \in \mathbf{C}$.

Trinomické rovnice

Definice

Nechť a, b, c jsou komplexní čísla, kde $a, b \neq 0$ a $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ Potom rovnici ve tvaru $ax^{2n} + bx^n + c = 0$nazýváme **trinomickou rovnicí** s neznámou $x \in \mathbf{C}$.

Speciální tvary trinomické rovnice

Pokud bychom uvažovali $n = 1$, získáme tvar rovnice $ax^2 + bx + c = 0$a řešíme tedy kvadratickou rovnici.
Speciální název mají rovnice tvaru $ax^4 + bx^2 + c = 0$, kde $n = 2$. Rovnice tohoto tvaru nazýváme **bikvadratické rovnice**.

Řešení trinomické rovnice

Trinomické rovnice ve tvaru $ax^{2n} + bx^n + c = 0$řešíme pomocí substituce.

1. Substitucí $y = x^n$ převedeme rovnici na kvadratickou rovnici $ay^2 + by + c = 0$s neznámou y.

2. Vyřešíme kvadratickou rovnici s neznámou y. Kvadratickou rovnici řešíme ve stejné množině čísel, v jaké máme vyřešit trinomickou rovnici.

3. Kořeny kvadratické rovnice y_1, y_2 dosadíme za y do vztahu vyjadřujícího substituci, tj. $y = x^n$.

4. Získáme dvě binomické rovnice $y_1 = x^n \wedge y_2 = x^n$. Sjednocení množin všech řešení binomických rovnic je množinou všech řešení původní trinomické rovnice.

Příklad
Řešte rovnici $3x^4 + 26x^2 - 9 = 0$s neznámou $x \in \mathbf{C}$.
Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
- Substituce je ve tvaru : $y = x^2, y \in \mathbf{C}$
- Řešíme kvadratickou rovnici $3y^2 + 26y - 9 = 0$a získáme kořeny $y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = -9$
- Kořeny y_1, y_2 dosadíme do vztahu vyjadřujího substituci a řešíme binomické rovnice.
- $x^2 = \frac{1}{3}$..........$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
  $x^2 = -9$........$x_3 = 3i, x_4 = -3i$
- Množinou všech řešení je $\mathbf{K} = \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm 3i\right\}$

Úlohy

1. Řešte rovnici $5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$.
   Řešení

   - $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
   - Substituce: $y = x^2, y \in \mathbf{C}$
   - Řešíme kvadratickou rovnici $5y^2 - 6y + 1 = 0$ a získáme kořeny $y_1 = \frac{1}{5}, y_2 = 1$
   - Kořeny y_1, y_2 dosadíme do vztahu vyjadřujícího substituci a řešíme binomické rovnice.
   - $x^2 = \frac{1}{5}$ .... $x_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
     $x^2 = 1$ .... $x_3 = 1, x_4 = -1$
   - $\mathbf{K} = \left\{\pm\frac{\sqrt{5}}{5}, \pm 1\right\}$

2. Řešte rovnici $y^6 - 9y^3 + 8 = 0$ s neznámou $y \in \mathbf{C}$.
   Řešení

   - $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
   - Substituce: $t = y^3, t \in \mathbf{C}$
   - Řešíme kvadratickou rovnici $t^2 - 9t + 8 = 0$ a získáme kořeny $t_1 = 8, t_2 = 1$
   - Kořeny t_1, t_2 dosadíme do vztahu vyjadřujícího substituci a řešíme binomické rovnice.
   - $y^3 = 8$
     $y^3 - 8 = (y-2)(y^2 + 2y + 4)$
     $y_1 = 2$
     $y_2 = -1 + i\sqrt{3}$
     $y_3 = -1 - i\sqrt{3}$

     $y^3 = 1$
     $y^3 - 1 = (y-1)(y^2 + y + 1)$
     $y_4 = 1$
     $y_5 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
     $y_6 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
   - $\mathbf{K} = \left\{1, 2, -1 \pm i\sqrt{3}, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$

3. Řešte rovnici $z^8 + 3z^4 - 10 = 0$ s neznámou $z \in \mathbf{C}$.
   Řešení

   - $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
   - Substituce: $t = z^4, t \in \mathbf{C}$
   - Řešíme kvadratickou rovnici $t^2 + 3t - 10 = 0$ a získáme kořeny $t_1 = 2, t_2 = -5$
   - Kořeny t_1, t_2 dosadíme do vztahu vyjadřujícího substituci a řešíme binomické rovnice.
   - Řešíme **první binomickou rovnici** $z^4 - 2 = 0$.
     Všechna řešení jsou tvaru $z_k = \sqrt[4]{2}\left[cos\ (\frac{0+2k\pi}{4}) + i\ sin\ (\frac{0+2k\pi}{4})\right]$ kde $k = 0, 1, 2, 3$.
     $z_0 = \sqrt[4]{2}$, $z_1 = i\sqrt[4]{2}$, $z_2 = -\sqrt[4]{2}$, $z_3 = -i\sqrt[4]{2}$
     Řešíme **druhou binomickou rovnici** $z^4 + 5 = 0$.
     Všechna řešení jsou tvaru $z_k = \sqrt[4]{5}\left[cos\ (\frac{\pi+2k\pi}{4}) + i\ sin\ (\frac{\pi+2k\pi}{4})\right]$ kde $k = 0, 1, 2, 3$.
     $z_0 = \frac{\sqrt[4]{5}}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ $z_1 = \frac{\sqrt[4]{5}}{2}(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$
     $z_2 = \frac{\sqrt[4]{5}}{2}(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})$ $z_3 = \frac{\sqrt[4]{5}}{2}(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$
   - $\mathbf{K} = \left\{\pm\sqrt[4]{2}, \pm i\sqrt[4]{2}, \frac{\sqrt[4]{5}}{2}(\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}), \frac{\sqrt[4]{5}}{2}(-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2})\right\}$

Cvičení

Řešte rovnice v množině komplexních čísel.

1. Řešte rovnici $x^4 + 16x^2 + 48 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$.
2. Řešte rovnici $y^6 + 25y^3 + 150 = 0$ s neznámou $y \in \mathbf{C}$.
3. Řešte rovnici $z^{12} - 13z^6 + 42 = 0$ s neznámou $z \in \mathbf{C}$.

Reciproké rovnice

Definice

Je dána algebraická rovnice n-tého stupně $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{M}$, kde $a_n, a_{n-1}, .., a_0 \in \mathbf{C}$, $a_n \neq 0$ a $n \in \mathbf{N}$.

Platí-li pro koeficienty $a_k = a_{n-k}$, kde $k \in \mathbf{N}$, tak rovnici nazýváme **reciprokou rovnicí I. druhu** (resp. kladně reciprokou rovnicí) n-tého stupně s neznámou $x \in \mathbf{M}$, v případě, že platí rovnost koeficientů $a_k = -a_{n-k}$, kde $k \in \mathbf{N}$, rovnici nazýváme **reciprokou rovnicí II. druhu** (resp. záporně reciprokou rovnicí) n-tého stupně s neznámou $x \in \mathbf{M}$.

Výraz na levé straně rovnice nazýváme **reciproký mnohočlen**. Budeme ho značit $R_n(x)$.

Příklad
Zjistěte, zda jsou následující rovnice reciproké. V kladném případě určete druh reciproké rovnice.
Řešení

Porovnáním koeficientů podle definice zjistíme, zda jde o reciprokou rovnici, případně zda je rovnice I. nebo II. druhu.

- $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$
  $a_3 = 2 = a_0$
  $a_2 = 3 = a_1$
  Je to reciproká rovnice I.druhu třetího stupně.

- $3x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 3 = 0$
  $a_4 = \ 3 = a_0$
  $a_3 = -5 = a_1$
  $a_2 = \ 8 = a_2$
  Je to reciproká rovnice I.druhu čtvrtého stupně.

- $12x^4 - 25x^3 + 25x - 12 = 0$
  $a_4 = \ 12 = -a_0$
  $a_3 = -25 = -a_1$
  Je to reciproká rovnice II.druhu čtvrtého stupně.

- $12x^4 - 25x^3 + 5x^2 + 25x - 12 = 0$
  $a_4 = \ 12 = -a_0$
  $a_3 = -25 = -a_1$
  $a_2 = \ 5 \neq -a_2$
  Není to reciproká rovnice.

Poznámka

Uvažujme **reciprokou rovnici sudého stupně**, kde $n = 2m$ a $m \in \mathbf{N}$. Potom je koeficient a_m **libovolný pro reciprokou rovnici I. druhu**, nebo koeficient a_m **musí být roven nule pro reciprokou rovnici II. druhu.**

Kořeny reciproké rovnice

V definici předpokládáme, že koeficient a_n u vedoucího členu je nenulový. Z definice reciproké rovnice je tedy i absolutní člen a_0 nenulový. Z těchto poznatků plyne věta:

Věta

Reciproká rovnice má **všechny kořeny nenulové**.

Věta

Pokud je číslo x_1 kořenem reciproké rovnice, pak je kořenem rovnice i **převrácené (reciproké) číslo** $\frac{1}{x_1}$.

Z této vlastnosti pro kořeny plyne název *reciproká* rovnice .

Věta

Reciproká rovnice **I. druhu lichého stupně má vždy kořen $x_1 = -1$**

Věta

Reciproká rovnice **II. druhu má vždy kořen $x_1 = 1$.**

Poznámka

Je zřejmé, že kořeny $+1, -1$ jsou reciproká čísla. Lze je napsat ve tvaru $\pm 1 = \frac{1}{\pm 1}$.

Důkazy těchto tvrzení lze nalézt v knize Základy algebry (V. Kořínek) v kapitole 9. Tvrzení o kořenech $+1, -1$ plyne z definice reciproké rovnice, a to z rovnosti příslušných koeficientů. Máme-li reciprokou rovnici I. druhu lichého stupně $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, kde $a_k = a_{n-k}$ vytkneme z prvního a posledního členu, druhého a předposledního členu atd. **společný koeficient této dvojice členů**. Tímto získáme tvar rovnice $a_n(x^n + 1) + a_{n-1} x (x^{n-2} + 1) + a_{n-2} x^2 (x^{n-3} + 1) + \ldots = 0$, z kterého dopočítáme kořen -1. Analogicky bychom postupovali i pro kořen $+1$.

Řešení reciproké rovnice

Uvažujeme rovnici ve tvaru $R_n(x) = 0$, kde $R_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $x \in \mathbf{M}$ je neznámá.

Řešení reciproké rovnice I. druhu

- **Řešení reciproké rovnice sudého stupně**, kde $n = 2m, m \in \mathbf{N}$.

  1. Levou stranu rovnice (tj. $R_{2m}(x)$) **vydělíme výrazem** x^m ($x \neq 0$).
     $a_{2m}x^{2m} + a_{2m-1}x^{2m-1} + a_{2m-2}x^{2m-2} + ... + a_mx^m + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \; /x^m$
     $a_{2m}x^m + a_{2m-1}x^{m-1} + a_{2m-2}x^{m-2} + ... + a_m + ... + a_2\frac{1}{x^{m-2}} + a_1\frac{1}{x^{m-1}} + a_0\frac{1}{x^m} = 0$

  2. Mnohočlen $R_{2m}(x)$ má symetricky uspořádané koeficienty podle členu a_mx^m (tj. $a_{2m} = a_0, a_{2m-1} = a_1, ..$). Vytkneme z prvního a posledního členu, druhého a předposledního členu atd. **společný koeficient této dvojice členů**.
     $a_{2m}x^m + a_{2m-1}x^{m-1} + a_{2m-2}x^{m-2} + ... + a_m + ... + a_2\frac{1}{x^{m-2}} + a_1\frac{1}{x^{m-1}} + a_0\frac{1}{x^m} = 0$
     $a_{2m}(x^m + \frac{1}{x^m}) + a_{2m-1}(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}) + a_{2m-2}(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}) + a_m + ... = 0$

  3. Nyní použijeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$. Postupným umocňováním základního vztahu substituce získáme $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3}$ atd.

     $y = x + \frac{1}{x}$ .... $/^2$
     $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$
     $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

     $y = x + \frac{1}{x}$ .... $/^3$
     $y^3 = x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$
     $y^3 = (x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(x + \frac{1}{x})$
     $y^3 = (x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(y)$
     $y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3}$

  4. Vyřešíme rovnici m-tého stupně s neznámou $y \in \mathbf{M}$ a kořeny $y_1, ..., y_m$ dosadíme zpět do základního substitučního vztahu $y = x + \frac{1}{x}$, čímž získáme řešení reciproké rovnice.

- **Řešení reciproké rovnice lichého stupně**, kde $n = 2m + 1, m \in \mathbf{N}$.

  1. Jak víme z předchozí věty, číslo $x_1 = -1$ je kořenem rovnice. Proto vydělíme levou stranu rovnice dvojčlenem $(x + 1)$ (nebo použijeme Hornerovo schéma). Tímto snížíme stupeň mnohočlenu R_{2m+1} a dále řešíme reciprokou rovnici I. druhu sudého stupně, jak se lze přesvědčit pomocí Hornerova schématu.

Příklad
Řešte rovnici $R_5(x) = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$, kde $R_5(x) = 6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + 97x^2 + 41x + 6$.
Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
- Je to reciproká rovnice I. druhu lichého stupně. Víme první kořen $x_1 = -1$ a vydělíme tedy pravou stranu rovnice dvojčlenem $(x + 1)$, nebo použijeme Hornerovo schéma.

a) Dělení:
$(6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + 97x^2 + 41x + 6) : (x + 1) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6$
b) Hornerovo schéma:

	6	41	97	97	41	6
– 1		– 6	– 35	– 62	– 35	– 6
	6	35	62	35	6	0

Získali jsme reciprokou rovnici I. druhu sudého stupně $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$

- Rovnici $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$ vydělíme výrazem x^2, jak nám radí 1. krok v postupu řešení reciproké rovnice I. druhu sudého stupně.
  $6x^2 + 35x + 62 + 35\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2} = 0$
- Upravíme podle 2. kroku v postupu řešení reciproké rovnice I. druhu sudého stupně.
  $6(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 35(x + \frac{1}{x}) + 62 = 0$
- Nyní použijeme substituci $y = x + \frac{1}{x}, y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ a upravíme.
  $6(y^2 - 2) + 35(y) + 62 = 0$
  $6y^2 - 12 + 35y + 62 = 0$
  $6y^2 + 35y + 50 = 0$
- Vyřešíme kvadratickou rovnici.
  $y_1 = -\frac{5}{2}, y_2 = -\frac{10}{3}$
  Dosadíme kořeny y_1, y_2 do substitučního vztahu $y = x + \frac{1}{x}$ a upravíme.
  $-\frac{5}{2} = x + \frac{1}{x}$..... $x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -2$
  $-\frac{10}{3} = x + \frac{1}{x}$..... $x_4 = -\frac{1}{3}, x_5 = -3$
- $\mathbf{K} = \left\{-1, -2, -\frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}\right\}$

Řešení reciproké rovnice II. druhu

1. Jak víme z předchozí věty, číslo $x_1 = 1$ je kořenem rovnice, vydělíme levou stranu rovnice dvojčlenem $(x - 1)$ (nebo použijeme Hornerovo schéma). Dále řešíme reciprokou rovnici I. druhu.

Příklad

Řešte rovnici $5x^4 - 12x^3 + 12x - 5 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$.

Řešení

- $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
- Je to reciproká rovnice II. druhu. Víme první kořen $x_1 = 1$ a vydělíme tedy pravou stranu rovnice dvojčlenem $(x - 1)$, nebo použijeme Hornerovo schéma.

	5	– 12	0	12	– 5
1		5	– 7	– 7	5
	5	– 7	– 7	5	0

Získali jsme reciprokou rovnici I. druhu lichého stupně $5x^3 - 7x^2 - 7x + 5 = 0$

- Víme druhý kořen $x_2 = -1$ a vydělíme tedy pravou stranu rovnice dvojčlenem $(x + 1)$, nebo opět použijeme Hornerovo schéma.

	5	– 7	– 7	5
– 1		– 5	12	– 5
	5	– 12	5	0

- Získali jsme kvadratickou rovnici $5x^2 - 12x + 5 = 0$, kterou vyřešíme.
  $x_3 = \frac{6+\sqrt{11}}{5}, x_4 = \frac{6-\sqrt{11}}{5}$
- $\mathbf{K} = \left\{1, -1, \frac{6+\sqrt{11}}{5}, \frac{6-\sqrt{11}}{5}\right\}$

Úlohy

1. Řešte rovnici $7x^3 + 57x^2 + 57x + 7 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$.
   Řešení

   - $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
   - Řešíme reciprokou rovnici I. druhu lichého stupně. Víme první kořen $x_1 = -1$ a vydělíme tedy pravou stranu rovnice dvojčlenem $(x+1)$, nebo použijeme Hornerovo schéma.

	7	57	57	7
− 1		− 7	− 50	− 7
	7	50	7	0

   - Získali jsme kvadratickou rovnici $7x^2 + 50x + 7 = 0$, kterou vyřešíme.
     $x_2 = -\frac{1}{7}$
     $x_3 = -7$
   - $\mathbf{K} = \left\{-1, -7, -\frac{1}{7}\right\}$

2. Řešte rovnici $8y^4 - 54y^3 + 101y^2 - 54y + 8 = 0$ s neznámou $y \in \mathbf{C}$.
   Řešení

   - $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
   - Řešíme reciprokou rovnici I. druhu sudého stupně. Vydělíme tedy pravou stranu rovnice výrazem y^2 a upravíme.
     $8y^2 - 54y + 101 - 54\frac{1}{y} + 8\frac{1}{y^2} = 0$
     $8(y^2 + \frac{1}{y^2}) - 54(y + \frac{1}{y}) + 101 = 0$
   - Nyní použijeme substituci $t = y + \frac{1}{y}$, $t^2 - 2 = y^2 + \frac{1}{y^2}$ a upravíme.
     $8(t^2 - 2) - 54(t) + 101 = 0$
     $8t^2 - 16 - 54t + 101 = 0$
     $8t^2 - 54t + 85 = 0$
   - Vyřešíme kvadratickou rovnici s neznámou $t \in \mathbf{C}$.
     $t_1 = \frac{17}{4}$, $t_2 = \frac{10}{4}$
   - Dosadíme kořeny t_1, t_2 do substitučního vztahu $t = y + \frac{1}{y}$ a upravíme.
     $\frac{17}{4} = y + \frac{1}{y}$ ..... $y_1 = 4$, $y_2 = \frac{1}{4}$
     $\frac{10}{4} = y + \frac{1}{y}$ ..... $y_3 = 2$, $y_4 = \frac{1}{2}$
   - $\mathbf{K} = \left\{4, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{2}\right\}$

3. Řešte rovnici $6z^6 - 23z^5 + 2z^4 - 2z^2 + 23z - 6 = 0$ s neznámou $z \in \mathbf{C}$.
   Řešení

   - $\mathbf{M} = \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{C}$
   - Je to reciproká rovnice II. druhu. Víme první kořen $z_1 = 1$ a vydělíme tedy pravou stranu rovnice dvojčlenem $(z-1)$, nebo použijeme Hornerovo schéma.

	6	-23	2	0	-2	23	-6
1		6	-17	-15	-15	-17	6
	6	-17	-15	-15	-17	6	0

   Získali jsme reciprokou rovnici I. druhu lichého stupně
   $6z^5 - 17z^4 - 15z^3 - 15z^2 - 17z + 6 = 0$

   - Víme druhý kořen $z_2 = -1$ a vydělíme tedy pravou stranu rovnice dvojčlenem $(z+1)$, nebo opět použijeme Hornerovo schéma.

	6	-17	-15	-15	-17	6
-1		-6	23	-8	23	-6
	6	-23	8	-23	6	0

   Získali jsme reciprokou rovnici I. druhu sudého stupně $6z^4 - 23z^3 + 8z^2 - 23z + 6 = 0$

   - Vydělíme tedy pravou stranu rovnice výrazem z^2 a upravíme.
   $6z^2 - 23z + 8 - 23\frac{1}{z} + 6\frac{1}{z^2} = 0$
   $6(z^2 + \frac{1}{z^2}) - 23(z + \frac{1}{z}) + 8 = 0$
   - Nyní použijeme substituci $t = z + \frac{1}{z}$, $t^2 - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2}$ a upravíme.
   $6(t^2 - 2) - 23(t) + 8 = 0$
   $6t^2 - 12 - 23t + 8 = 0$
   $6t^2 - 23t - 4 = 0$
   - Vyřešíme kvadratickou rovnici s neznámou $t \in \mathbf{C}$.
   $t_1 = 4$, $t_2 = -\frac{1}{6}$
   - Dosadíme kořeny t_1, t_2 do substitučního vztahu $t = z + \frac{1}{z}$ a upravíme.
   $4 = z + \frac{1}{z}$..... $z_3 = 2 + \sqrt{3}$, $z_4 = 2 - \sqrt{3}$
   $-\frac{1}{6} = z + \frac{1}{z}$..... $z_5 = \frac{1+i\sqrt{143}}{12}$, $z_6 = \frac{1-i\sqrt{143}}{12}$
   - $\mathbf{K} = \left\{-1, 1, 2 \pm \sqrt{3}, \frac{1 \pm i\sqrt{143}}{12}\right\}$

Cvičení

1. Řešte rovnici $x^3 + \frac{13}{3}x^2 + \frac{13}{3}x + 1 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$.
2. Řešte rovnici $12y^5 - 16y^4 - 37y^3 + 37y^2 + 16y - 12 = 0$ s neznámou $y \in \mathbf{C}$.
3. Řešte rovnici $-z^6 + z^5 + z^4 - z^2 - z + 1 = 0$ s neznámou $z \in \mathbf{C}$.

Značení a symboly

Značení	**Význam**
$\mathbf{N}$	množina všech přirozených čísel $\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{N}_0$	množina všech přirozených čísel včetně nuly $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{Z}$	množina všech celých čísel $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{Q}$	množina všech racionálních čísel
$\mathbf{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	množina všech reálných čísel bez nuly
$\mathbf{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbf{M}$	obor řešení rovnice
$\mathbf{D}$	definiční obor rovnice
$\mathbf{K}$	množina všech řešení rovnice

Značení	**Význam**
$a = b$	a se rovná b
$a \neq b$	a je různé od b (a se nerovná b)
$a > b$	a je větší než b
$a < b$	a je menší než b
$a \geq b$	a je větší nebo rovno b
$a \leq b$	a je menší nebo rovno b
$a \in \mathbf{A}$	a je prvkem množiny $\mathbf{A}$
$a \notin \mathbf{A}$	a není prvkem množiny $\mathbf{A}$
$\forall a$	pro všechna a
$a \pm b$	zkráceně $a + b$ a zároveň $a - b$

$\emptyset$	prázdná množina
$\{a, b\}$	množina obsahující prvky a, b
$p \wedge q$	konjunkce, p a zároveň q
$p \vee q$	disjunkce, p nebo q
$A \setminus B$	rozdíl množin A a B
$A \cup B$	sjednocení množin A a B
$A \cap B$	průnik množin A a B
$L(x)$	výraz na levé straně rovnice s neznámou x
$P(x)$	výraz na pravé straně rovnice s neznámou x
$P_n(x)$	mnohočlen n-tého stupně s neznámou x
$R_n(x)$	reciproký mnohočlen n-tého stupně s neznámou x
$\sum_{k=0}^{n} a_k$	suma, součet výrazů a_k, kde $k = 0, ..., n$
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo, čteme n nad k
$(\sqrt[n]{a})_c$	n-tá odmocnina z komplexního čísla a

Závěr

Hlavním cílem bakalářské práce bylo vytvoření webových stránek na téma **Algebraické rovnice vyšších stupňů**. Algebraické rovnice vyšších stupňů jsou spíše rozšiřujícím učivem, které je náplní matematického semináře na střední škole. Díky těmto webovým stránkám, může být tato teorie dostupná i pro žáky, kteří tento druh semináře nenavštěvují. Webové stránky mohou využít také učitelé jako doprovodný učební text a zejména jako zdroj řešených příkladů a neřešených úloh.

Uvedené téma může být pro žáky díky internetové verzi atraktivnější, zejména v dnešní době, kdy má téměř každý připojení k internetu. Díky interaktivním appletům z programu GeoGebra, se může stát i grafické řešení algebraických rovnic pro žáky názornější a zajímavější, i když si myslím, že to běžně nebývá oblíbené téma. Interaktivní prvky na webových stránkách považuji za hlavní výhody stránek.

Díky této práci jsem poprvé nahlédla do tajů programování internetových stránek. I když jsem měla k dispozici základní schéma a formátování stránek, nebylo pro mě jednoduché tyto stránky vytvořit. Naučila jsem se také pracovat s programem GeoGebra, který, jak už bylo řečeno, umožňuje interaktivní výstupy.

Literatura

- Bušek I., Calda E. : Matematika pro gymnázia - Základní poznatky z matematiky. Prometheus, 1999
- Charvát J., Zhouf J., Boček L. : Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice. Prometheus, 2001
- Calda, E. : Matematika pro gymnázia - Komplexní čísla. Prometheus, 1994.
- Polák, J. : Přehled středoškolské matematiky. Prometheus, 1972.
- Calda, E. : Rovnice ve škole neřešené. Prometheus, 1995.
- Stanovský, D. : Základy algebry. Matfyzpress, 2010.
- Kořínek, V. : Základy algebry. ČSAV, 1953.
- Schwarz, Š. : Základy náuky o riešení rovníc. ČSAV, 1958.

.

Nakládání s prací

Souhlasím s vystavením své práce na webových stránkách Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze . Dále souhlasím s jejími pozdějšími úpravami za účelem jejího zapojení do struktury matematického portálu, který vznikne z této a podobných bakalářských a diplomových prací. Portál vytvoří a bude spravovat právě a jedině katedra didaktiky matematiky MFF UK, či osoba jí pověřená.

Kristýna Podhajská