Bakalárska práca - opravy

Názov práce: Sekvenční intervalové odhady dané délky
Autor: Alica Lapšanská
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedúci bakalárskej práce: prof. RNDr. Marie Hušková, DrSc.

Vzorec (1.4):

$$\mathsf{P}_{\mu_1,\sigma^2}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{E}_i) > \frac{1}{2}(1-\alpha), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Strana 11-13:

2.1 Modifikovaný Steinov postup

Steinov postup môžeme použiť aj v prípade, že nemáme zaručené normálne rozdelenie, ale n je dosť veľké. Plynie to z *centrálnej limitnej vety (CLV)*, viď Dupač (2005, Věta 4.12.). Nech Φ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia. Potom platí

$$\mathsf{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{CLV} \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Podľa výsledkov z kapitoly 1.3 zvoľme rozsah prvého výberu v závislosti na d, teda $n = n(d)$, a predpokladajme $d \to 0$. Zostrojme intervalový odhad danej dĺžky $2d$ o asymptotickej spoľahlivosti $1 - \frac{\alpha}{2}$.

Krok I Pre $n(d) = \left[\frac{1}{d}\right]$ spravíme prvý výber $X_1, \ldots, X_{n(d)}$ z rozdelenia s hustotou $f(x; \mu, \sigma^2)$, kde μ, σ^2 sú neznáme parametre. Vypočítame $S^2_{n(d)}$ a určíme najmenšie prirodzené číslo $N(d)$ tak, že

$$N(d) = max\left\{n(d)+1, \left\lfloor \frac{S^2_{n(d)} u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d^2} \right\rfloor + 1\right\}, \tag{1}$$

kde $\lfloor x \rfloor$ je dolná celá časť čísla x.

Krok II Ďalej spravíme druhý výber $X_{n(d)+1}, \dots, X_{N(d)}$ o veľkosti $N(d)-n(d)$. Potom platí

$$\mathsf{P}\left(|\overline{X}_{N(d)} - \mu| \leq d\right) \xrightarrow[d\to 0]{} 1-\alpha. \tag{2}$$

Odtiaľ $\mathsf{P}(\overline{X}_{N(d)} - d < \mu < \overline{X}_{N(d)} + d) \xrightarrow[d\to 0]{} 1-\alpha \quad \forall(\mu,\sigma^2) \in (\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$.
Interval $(\overline{X}_{N(d)} - d, \overline{X}_{N(d)} + d)$ je intervalový odhad o asymptotickej spoľahlivosti $1-\alpha$ a dĺžky $2d$ pre parameter μ.

Dokážme platnosť (2). Pre d dosť malé je

$$N(d) = \left\lfloor \frac{S^2_{n(d)} u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d^2} \right\rfloor + 1 \quad s.i.,$$

$$S^2_{n(d)} u^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq d^2 N(d) \leq S^2_{n(d)} u^2_{1-\frac{\alpha}{2}} + d^2 \quad s.i.$$

Z vety uvedenej v knihe Dupač (2005, Věta 5.1.) plynie

$$S^2_{n(d)} u^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \xrightarrow[d\to 0]{s.i.} \sigma^2 u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Teda platí

$$lim_{d\to 0} d^2 N(d) = \sigma^2 u^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \ s.i. \tag{3}$$

Použijeme vetu z knihy Rényi (1972, Věta 2).

Veta 0.1. *Nech $X_1, \dots, X_i, \dots$ sú náhodné veličiny s rovnakým rozdelením, pre ktoré platí $\mathsf{E}X_i = 0$ a $\mathsf{var}X_i = 1$. Nech pre náhodné veličiny*

$$Z_m = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m} X_i$$

platí vzťah $\lim_{m\to\infty} P(Z_m \leq x) = \Phi(x)$. Predpokladajme, že $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť náhodných veličín nadobúdajúcich za svoje hodnoty iba prirodzené čísla a platí

$$\frac{N_i}{i} \xrightarrow[i\to\infty]{P} c,$$

tj. $\lim_{i\to\infty} P\left(\frac{N_i}{i} = c\right) = 1$, kde c je kladná konštanta. Potom platí

$$\lim_{i\to\infty} P(Z_{N_i} \leq x) = \Phi(x).$$

Vo vete vezmeme $Z_m = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m} \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ a použijeme vzťah (3) a dostaneme

$$\mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{N(d)}} \sum_{i=1}^{N(d)} \frac{X_i - \mu}{\sigma} \leq x \right) \xrightarrow[d\to 0]{} \Phi(x) \quad \forall x.$$

Potom z toho, že $S^2_{n(d)} \xrightarrow[d\to 0]{s.i.} \sigma^2$ a tvrdenia zo skrípt Dupač (2005, Věta 4.14), kde vezmeme $Y_n = \frac{1}{S_{n(d)}}$, dostávame

$$\mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{N(d)}} \sum_{i=1}^{N(d)} \frac{X_i - \mu}{S_{n(d)}} \leq x\right) \xrightarrow[d\to 0]{} \Phi(x) \quad \forall x.$$

Napokon pre špeciálnu voľbu $x = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dostávame

$$\mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{N(d)S^2_{n(d)}}} \left|\sum_{i=1}^{N(d)} (X_i - \mu)\right| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \xrightarrow[d\to 0]{} 1-\alpha,$$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{N(d)} \sum_{i=1}^{N(d)} (X_i - \mu)\right| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_{n(d)}}{\sqrt{N(d)}}\right) \xrightarrow[d\to 0]{} 1-\alpha.$$

Dosadíme za $N(d)$ výraz $\frac{S^2_{n(d)} u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d^2}$ a po vykrátení máme

$$\mathsf{P}\left(|\overline{X}_{N(d)} - \mu| \leq d\right) \xrightarrow[d\to 0]{} 1-\alpha,$$

čím je tvrdenie (2) dokázané.

Strana 15:
Voľme $Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$. Potom je výraz v predpoklade (iii) rovný výrazu:

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(U_n - \mu) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)\ \sigma - \sigma u_{1-\frac{\alpha}{2}} &= \\ &= (\overline{X}_n - \mu)(\sqrt{n} - \sqrt{n}) + u_{1-\frac{\alpha}{2}}(S_n - \sigma) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{SZVČ}, s.i.} 0.\end{aligned}$$

Strana 16:
Predpokladajme, že $X_1, \dots, X_n$ majú konečné štvrté momenty. Teda $\mathsf{E}\, X_i^4 < \infty$. Z definície $N(d)$ a z Čebyševovej nerovnosti platí:

$$\mathsf{P}(N(d) > k) = \mathsf{P}(S_k u_{1-\frac{\alpha}{2}} > d\sqrt{k}) \leq \frac{\mathsf{E}\, S_k^4 u^4_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d^4 k^2} \leq \frac{C}{d^4 k^2},$$

kde C je konštanta nezávislá na d ani k. Ukážeme existenciu konštanty C.

$$\begin{aligned} S_k^2 &= \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (X_i - \overline{X}_k)^2 \\ &= \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (X_i - \mu)^2 - \frac{2}{k-1} \sum_{i=1}^k (X_i - \mu)(\overline{X}_k - \mu) + \frac{k}{k-1}(\overline{X}_k - \mu)^2 \\ &= \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (X_i - \mu)^2 - \frac{k}{k-1}(\overline{X}_k - \mu)^2 \end{aligned}$$

Keďže $u^4_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je konštanta, stačí ukázať, že

$$\mathsf{E}\, S_k^4 = \left(\frac{1}{k-1}\right)^2 \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{k}(X_i-\mu)^2\right)^2 - \frac{2k}{(k-1)^2}\,\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k}(X_i-\mu)^2(\overline{X}_k-\mu)^2 + \\ + \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \mathsf{E}(\overline{X}_k-\mu)^4 < C^*.$$

Pre prvý člen platí z konečnosti štvrtého momentu

$$\left(\frac{1}{k-1}\right)^2 \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{k}(X_i-\mu)^2\right)^2 = \left(\frac{1}{k-1}\right)^2 \left(\mathsf{E}\sum_{i\neq}^{k}\sum_{j}^{k}(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)^2 + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}(X_i-\mu)^4\right) = \frac{k}{k-1}\sigma^4 + \frac{k}{(k-1)^2}\,\mathsf{E}(X_i-\mu)^4 \le C_1.$$

Ďalej $\left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \le 2$, $k \ge 2$ a

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\overline{X}_k-\mu)^4 &= \frac{1}{k^4}\,\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{k}(X_i-\mu)\right)^4 \\
&= \frac{1}{k^4}\,\mathsf{E}\left\{\sum_{i=1}^{k}(X_i-\mu)^4 + 4\sum_{i\neq}^{k}\sum_{j}^{k}(X_i-\mu)^3(X_j-\mu) + \right. \\
&\left. +3\sum_{i\neq}^{k}\sum_{j}^{k}(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)^2\right\} \\
&= \frac{1}{k^4}\left\{k\,\mathsf{E}(X_i-\mu)^4 + 3k(k-1)\sigma^4\right\} \le C_2.
\end{aligned}$$

Nakoniec $\frac{2k}{(k-1)^2} \le 2$, $k \ge 2$ a z predošlého máme

$$\mathsf{E}\sum_{i=1}^{k}(X_i-\mu)^2(\overline{X}_k-\mu)^2 = \frac{1}{k^2}\left\{\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{k}(X_i-\mu)^2\right)^2 + \right. \\ \left. + \mathsf{E}\sum_{i\neq}^{k}\sum_{j}^{k}(X_i-\mu)^3(X_j-\mu)\right\} \le C_3.$$

Voľme $C^* = C_1 - 2C_3 + 2C_2 < \infty$. Teda

$$\mathsf{E}\, S_k^4 u^4_{1-\frac{\alpha}{2}} = u^4_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\mathsf{E}\, S_k^4 \le u^4_{1-\frac{\alpha}{2}} C^* = C.$$