Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Kosina

Kvaterniony a Möbiovy transformace v dimenzi 4

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce:	Doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2012

Na tomto místě bych chtěl poděkovat všem, kteří mne podporovali při psaní mé bakalářské práce.
Především děkuji Doc. RNDr. Romanu Lávičkovi, Ph.D. za vedení, konzultace a pomoc při psaní této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Kvaterniony a Möbiovy transformace v dimenzi 4

Autor: Jan Kosina

Katedra: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: V této práci popisujeme transformace 3-rozměrného a 4-rozměrného Eukleidovského prostoru. Nejprve ukážeme, jak lze pomocí kvaternionů v těchto dimenzích elegantně popsat reflexe a rotace a dokážeme 2 strukturní věty o souvislosti grupy jednotkových kvaternionů a speciálních ortogonálních grup SO(3) a SO(4). Dále je vyložena část teorie konformních zobrazení, kterou později využíváme v popisu Möbiových transformací. Möbiovy transformace v dimenzi 4 definujeme jako zobrazení vzniklá složením sudého počtu sférických inverzí a reflexí. Ukážeme, že je lze i v dimenzi 4 popsat jako lineární lomená zobrazení, podobně jako v dimenzi 2, pokud místo komplexních čísel užíváme kvaterniony. Naznačíme i klasifikaci Möbiových transformací na eliptické, loxodromické a parabolické a v dimenzi 4 popíšeme, jak jednotlivé třídy vypadají.

Klíčová slova: Kvaterniony, Möbiovy transformace, SO(4), SO(3)

Title: Quaternions and Möbius transformations in dimension 4

Author: Jan Kosina

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: Doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: In this work we describe transformations of the 3-dimensional and the 4-dimensional Euclidean space. First we show how one can elegantly describe reflections and rotations in these dimensions using quaternions and we prove 2 structural theorems concerning the connection between the group of unit quaternions and the special orthogonal groups SO(3) and SO(4). Next we recall a part of the conformal mapping theory, which we use later in the description of the Möbius transformations. We define the Möbius transformations in dimension 4 as compositions of an even number of spherical inversions and reflections. We show that one can describe them also in dimension 4 as linear fractional transformations in an analogous way as in dimension 2, if we use quaternions instead of complex numbers. We then outline a classification of Möbius transformations into elliptic, loxodromic and parabolic classes and in dimension 4, we describe what each class looks like.

Keywords: Quaternions, Möbius transformations, SO(4), SO(3)

Obsah

Úvod

Hlavním cílem této bakalářské práce je vysvětlit, jak lze pomocí kvaternionů popsat grupy rotací v dimenzích 3 a 4 a následně všechny Möbiovy transformace Eukleidovského prostoru dimenze 4.

Nejprve popíšeme rotace v dimenzích 3 a 4. Výhody popisu rotací pomocí kvaternionů jsou mnohé. Nejenže nám tento popis následně usnadní studium Möbiových transformací, ale ukazuje se jako užitečný například i v oblastech počítačové grafiky a robotiky, nebo aviatiky. V dimenzi 3 nám totiž stačí pro popis rotace 1 kvaternion, a tedy 4 reálné parametry. Kdybychom však rotaci reprezentovali pomocí ortogonální matice, potřebujeme zadat reálných parametrů 9. Navíc pro danou osu a úhel je snadné nálézt kvaternion příslušný této rotaci a naopak pro daný kvaternion lze snadno odvodit osu a úhel rotace, kterou zadává. Výhoda tohoto popisu se také ukazuje při skládání rotací. Vynásobit 2 kvaterniony je mnohem snažší nežli násobit 2 ortogonální matice. Podrobnějšímu srovnání výhod tohoto popisu rotací s ostatními metodami se však zabývat nebudeme a využijeme ho pouze jako stavební kámen při následném popisu Möbiových transformací. Navážeme na myšlenky Sira Williama Rowana Hamiltona z první poloviny 19. století. Hamilton byl jedním z těch, kdo si uvědomili možnost popisovat komplexní čísla jako dvojice čísel reálných. To přesně odpovídá našemu modernímu chápání komplexní roviny $\mathbb{C}$ jako prostoru $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$ s vhodně definovaným násobením. Již také věděl, že rotace v rovině lze reprezentovat pomocí násobení komplexní jednotkou, a tak si kladl otázku, zda je možné vytvořit analogickou "teorii trojic", která by dobře popisovala rotace v dimenzi 3. Jeho snaha se však po 10 let potýkala s neúspěchem, než konečně v roce 1843 učinil svůj zásadní objev, "teorii čtveřic", které nazval kvaterniony. My kvaterniony definujeme jako prostor $\mathbb{R}^4$ s vhodně definovaným násobením. Pomocí kvaternionů pak popíšeme rotace v dimenzích 3 a 4, což bude obsahem první kapitoly. Rotace vybudujeme jako složení reflexí a ukážeme, že grupa jednotkových kvaternionů S^3 je dvojnásobné nakrytí grupy rotací 3-dimenzionálního prostoru $\mathrm{SO}(3)$ a grupa $\mathrm{S}^3 \times \mathrm{S}^3$ je dvojnásobné nakrytí grupy 4-dimenzionálních rotací $\mathrm{SO}(4)$. V této kapitole se budeme držet zejména klasického článku od H. S. M. Coxetera [3] a nedávného článku [2].

Ve druhé kapitole následně připomeneme některé základní poznatky z teorie konformních zobrazení, které budou nezbytné k pochopení následující části o Möbiových transformacích. Kapitola obsahuje základní definice a zavádíme zde důležité zobrazení, sférickou inverzi.

Třetí a závěrečná kapitola pak pojednává o Möbiových transformacích. Möbiovy transformace například sehrály důležitou roli ke konci 19. století, když Felix Klein a Henri Poincaré pracovali s hyperbolickou geometrií, neboť s jejich pomocí lze popsat izometrie hyperbolického prostoru. Dalším, kdo s Möbiovými transformacemi pracoval byl například M. C. Escher při tvorbě svých fascinujících fraktálů. Nás však budou Möbiovy transformace zajímat hlavně jako všechna konformní zobrazení v dimenzi 4. Nejprve připomeneme Möbiovy transformace v dimenzi 2, které definujeme na Riemannově sféře $\mathbb{S}$ jako lineární lomená zobrazení určená 2×2 maticemi komplexních čísel a poté se přesuneme do dimenze 4. V dimenzi 4 definujeme Möbiovu grupu $\mathcal{M}_4$ jako grupu zobrazení vzniklých složením konečného počtu reflexí a sférických inverzí. Möbiovy transformace pak definujeme jako podgrupu Möbiovy grupy obsahující pouze zobrazení, která lze zapsat pomocí sudého počtu generátorů. Ukážeme, že jde o konformní zobrazení, a že je lze popsat pomocí matic podobně jako v dimenzi 2, nahradíme-li komplexní čísla kvaterniony. Připomeneme i Liouvilleovu větu, která říká, že jiná konformní zobrazení v dimenzi 4 nejsou. V posledním oddílu pak naznačíme klasifikaci Möbiových transformací na třídy eliptických, parabolických a loxodromických transformací, které jsou invariantní vůči konjugaci a popíšeme, jak jednotlivé třídy vypadají. V této sekci se držíme hlavně článků [4] a [2].

1. Kvaterniony a rotace

1.1 Kvaterniony a jejich vlastnosti

Jedním z hlavních cílů této práce je popis Möbiových transformací v dimenzi 3 a 4. Vhodnou metodou je reprezentace těchto prostorů pomocí kvaternionů, podobně jako nám komplexní čísla umožňují popis transformací v dimenzi dvě. Budeme se tedy dívat na kvaterniony jako na vektory z Eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ s vhodným násobením. Připomeňme nejprve základní definice.

Definice 1.1 (Eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$) Definujme standardně $\mathbb{R}^n$ jako direktní součin n kopií $\mathbb{R}$. Jde tedy o lineární prostor nad $\mathbb{R}$ a jeho prvky jsou tvaru $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, kde $x_i \in \mathbb{R}$ pro všechna $i = 0, \ldots, n-1$.
Na $\mathbb{R}^n$ pak zaveďme skalární součin předpisem $x \cdot y = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i$.
Skalární součin pak indukuje Eukleidovskou normu $|x| = \sqrt{x \cdot x} = (\sum x_j^2)^{1/2}$.
Dále máme díky skalárnímu součinu možnost měřit úhly mezi dvěma nenulovými vektory. Definujme úhel θ mezi $x \neq 0$ a $y \neq 0$ předpisem

$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{|x||y|}.$$

Tento úhel budeme značit $\angle(x, y)$.

Kvaterniony, $\mathbb{H}$, definujeme jako algebru $(\mathbb{R}^4, \odot)$ následujícím způsobem: Myšlenka je analogická případu komplexní roviny, kde imaginární jednotka i reprezentuje prvek $(0, 1)$ kanonické báze $\mathbb{R}^2$ a můžeme pak psát $z = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ pro každé komplexní číslo z. Označme tedy prvky kanonické ortonormální báze $\mathbb{R}^4$, tj. vektory e_0, e_1, e_2, e_3, jako $1, i, j, k$. Pro prvek $a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ pak můžeme psát $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$. Násobení dvou kvaternionů $\odot$ definujeme jako bilineární operaci, a tak nám pro úplnou definici stačí určit pravidla pro násobení prvků báze. Znaménko $\odot$ mezi činiteli přitom v dalším vynecháváme, neboť nehrozí nedorozumnění. Prvek 1 je vůči operaci kvaternionového násobení jednotkou a pro prvky i, j, k definujeme:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik.$$

Prvky i, j, k se nazýváme zobecněné imaginární jednotky.

Všimněme si, že z definice vyplývá, že násobení kvaternionů je asociativní, což je zdlouhavým, ale triviálním pozorováním. Tedy $\mathbb{H}$ je asociativní algebra nad $\mathbb{R}$. Dále pak, že je toto násobení nekomutativní. To je jedním z důvodů proč, jak se ukáže, lze pomocí kvaternionů elegantně popsat rotace v dimenzi 3 a 4. Skládání takových rotací je obecně nekomutativní, neboť každá rotace je lineární transformací Eukleidovského prostoru a lze ji tedy popsat maticí $n \times n$. Pro $n > 2$ je však násobení matic obecně nekomutativní.

Prozkoumejme nyní strukturu algebry kvaternionů $\mathbb{H}$. Pro každý kvaternion $a \in \mathbb{H}$, $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$ definujeme *reálnou část a*, $\mathrm{Re}(a) := a_0 \in \mathbb{R}$

a *ryzí část* a, $\mathrm{Pu}(a) := a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{R}^3$. Jak rozklad naznačuje, kvaterniony budeme vnímat jako direktní součet dvou částí, které se chovají podstatně odlišným způsobem. Přesněji $\mathbb{H}$ obsahuje reálnou přímku $\mathbb{R}$ a 3-dimenzionální reálný lineární prostor $\mathbb{R}^3$ jako podprostory tak, že $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$. Budeme tedy vnímat ryzí část kvaternionu jako vektor z $\mathbb{R}^3$. Označíme-li $\mathrm{Pu}(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \restriction_{a_0=0}$, tedy množinu ryzích kvaternionů, máme $\mathrm{Pu}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{R}^3$. Pro libovolný kvaternion pak $q \in \mathbb{H}$ můžeme psát $q = q_0 + \mathbf{q}$, kde $q_0 \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{R}^3$.

Pak máme $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ a označíme-li $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ standadní vektorový součin v $\mathbb{R}^3$, je $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = i(a_2 b_3 - a_3 b_2) + j(a_3 b_1 - a_1 b_3) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1)$. Součin dvou kvaternionů $a = a_0 + \mathbf{a}$, $b = b_0 + \mathbf{b}$ pak můžeme zapsat ve tvaru:

$$ab = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + a_0 \mathbf{b} + \mathbf{a} b_0 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Důležitým speciálním případem jsou ryzí kvaterniony. Kvaternion $q = q_0 + \mathbf{q}$ je *ryzí*, pokud jeho reálná část je nulová, $q_0 = 0$, speciálně $q = \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$. Součin dvou ryzích kvaternionů $\mathbf{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ a $\mathbf{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ je pak součtem reálného čísla a ryzího kvaternionu:

$$\mathbf{ab} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Tento speciální případ pro nás bude zajímavý hlavně pro popis transformací v $\mathbb{R}^3$.

V dalším budeme potřebovat ještě několik pojmů. Ke kvaternionu $q = q_0 + \mathbf{q}$ definujme *konjugovaný kvaternion* $\overline{q}$, jako kvaternion s opačnou ryzí částí:

$$\bar{q} = q_0 - \mathbf{q}.$$

Snadno se ověří, že kvaternionová konjugace je anti-automorfismus $\mathbb{H}$.

$$\overline{ab} = \overline{b}\overline{a} \ \forall a, b \in \mathbb{H}.$$

Dále na prostoru $\mathbb{H}$ máme díky ztotožnění s $\mathbb{R}^4$ k dispozici Eukleidovskou normu $|\cdot|$. Pro nás je pak zajímavý hlavně fakt, že pro $a \in \mathbb{H} : |a| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a\bar{a}}$, což lze snadno ověřit přímým výpočtem.

Lemma 1.1 (Existence inverzního elementu)**.** *Pro každý nenulový kvaternion a existuje právě jeden kvaternion b takový, že $ab = ba = 1$.*

Důkaz. Dokažme nejprve existenci. Nechť $c = \frac{\bar{a}}{|a|^2}$, explicitně

$$c = \frac{a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Pak z předchozího pozorování o normě vidíme, že $ac = ca = 1$.
Zbývá nám tedy dokázat jednoznačnost. Nechť $c, d \in \mathbb{H}$ splňují $ad = da = 1 = ac = ca$. Pak z $ad = 1$ dostáváme po přenásobení prvkem c zleva $d = c$. $\square$

Můžeme tedy označit b z lemmatu jako a^{-1}.

Lemma 1.2. *Norma součinu kvaternionů je součinem jejich norem, tj.*

$$\forall p, q \in \mathbb{H} : |pq| = |p||q|.$$

Důkaz. Máme $|pq|^2 = \overline{(pq)}pq = \overline{q}\,\overline{p}pq = \overline{q}|p|^2q = |p|^2|q|^2$. $\square$

Již jsme si ukázali, že $\mathbb{H}$ je asociativní algebra, nyní vidíme, že $\mathbb{H}$ je navíc normovaná asociativní algebra. Také již víme, že v $\mathbb{H}$ existuje nenulový jednotkový element $1 \neq 0$ a každý nenulový kvaternion má multiplikativní inverz. Tedy dokonce $\mathbb{H}$ je normovaná asociativní algebra s dělením. Z lemmatu 1.2 o normě součinu dále vyplývá, že pokud pro dva kvaterniony a, b platí $ab = 0$, pak nutně $a = 0$ nebo $b = 0$.

Dalším důležitým pojmem jsou *jednotkové kvaterniony.* Kvaternion a je jednotkový, pokud $|a| = 1$. Každému nenulovému kvaternionu a pak přiřadíme jednotkový kvaternion $\mathrm{U}(a) = a/|a|$.
Označíme-li nyní S^n jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^{n+1}$, pak díky našemu ztotožnění, jednotkové sféry S^2 a S^3 budeme chápat jako podgrupy $\mathbb{H}$, tj.

$$\mathrm{S}^2 := \{a \in \mathbb{H}; |a| = 1, \mathrm{Re}(a) = 0\} \text{ a } \mathrm{S}^3 := \{a \in \mathbb{H}; |a| = 1\}.$$

Platí důležité lemma, že sféra S^2 je grupou "imaginárních jednotek" v $\mathbb{H}$.

Lemma 1.3. $\mathrm{S}^2 = \{a \in \mathbb{H}; a^2 = -1\}$

Důkaz. Pokud a je ryzí kvaternion, tj. $\mathrm{Re}(a) = 0$, dostáváme $\overline{a} = -a$ takže $|a|^2 = -a^2$. Odtud vidíme, že ryzí jednotkový kvaternion je druhá odmocnina z -1.
Nechť nyní máme kvaternion a takový, že $a^2 = -1$. Pak $a = -a^{-1}$, tedy $a_0 + \mathbf{a} = -\frac{a_0 - \mathbf{a}}{|a|} = -\frac{a_0}{|a|} + \frac{\mathbf{a}}{|a|}$. Odtud ale nutně $a_0 = 0$ a $|a| = 1$. $\square$

Pozn: Přímým důsledkem přechozího lemmatu pak je, že pro každé $a \in \mathrm{S}^2$ platí, že pokud ztotožníme a a komplexní imaginární jednotku i, dostáváme

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}a.$$

Tedy že v $\mathbb{H}$ existuje mnoho izomorfních realizací komplexní roviny $\mathbb{C}$.

Než přikročíme k popisu rotací, budeme potřebovat ještě několik užitečných lemmat. Nejdříve se podívejme na několik základních myšlenek, které plynou přímo z geometrie $\mathbb{R}^3$. Z vlastností Eukleidovské normy na $\mathbb{R}^3$ je jasné, jak změříme vzdálenost ryzích kvaternionů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Tedy jako hodnotu $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$. Pokud jsou dále $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ ryzí jednotkové, pak leží na jednotkové sféře okolo počátku souřadnic a pro úhel, který svírají, platí $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \theta$, kde

$$\cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}).$$

Vidíme tedy, že takové $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ jsou na sebe kolmé, právě když antikomutují, tj.

$$\mathbf{ab} + \mathbf{ba} = 0.$$

Lemma 1.4. *Ke každému kvaternionu $a = a_0 + \mathbf{a}$ existuje ryzí jednotkový kvaternion $\mathbf{b}$ tak, že $a\mathbf{b} = \mathbf{b}\overline{a}$.*

Důkaz. K vektoru $\mathbf{a}$ v $\mathbb{R}^3$ můžeme lehce najít nějaký kolmý vektor. Podle předchozích úvah je takový vektor reprezentovaný ryzím jednotkovým kvaternionem $\mathbf{b}$, který splňuje

$$\mathbf{ab} + \mathbf{ba} = 0.$$

Protože $\operatorname{Re}(a) = a_0 \in \mathbb{R}$, platí:

$$\operatorname{Re}(a)\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{Re}(a) = 0.$$

Pokud obě rovnice sečteme, dostáváme:

$$a\mathbf{b} - \mathbf{b}\overline{a} = 0.$$

□

Lemma 1.5. *Pro každé dva nenulové kvaterniony a, b takové, že $|a| = |b|$ a $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(b)$ existuje jednotkový kvaternion y takový, že $ay = yb$.*

Důkaz. Případ $b = \overline{a}$ je vyřešen v lemmatu 1.4. Pro $b \neq \overline{a}$ pak z $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(b)$ dostáváme následující rovnosti:

$$a + \overline{a} = b + \overline{b}$$

$$a - \overline{b} = b - \overline{a}$$

$$a(a - \overline{b})b = a(b - \overline{a})b$$

$$a(ab - |b|^2) = (ab - |a|^2)b,$$

Máme tedy $ac = cb$, kde $c = ab - |b|^2 = ab - |a|^2 = a(b - \overline{a})$. Je ale $b \neq \overline{a}$, tedy i $c \neq 0$ a můžeme za požadovaný kvaternion vzít $y = \mathrm{U}(c)$. □

K dalšímu lemmatu budeme potřebovat umocňování kvaternionů. Celou mocninu kvaternionu definujeme klasickým způsobem, tedy pro $a \in \mathbb{H}$ máme:

$$a^0 = 1,$$

$$a^n = \underbrace{a \odot \cdots \odot a}_{\text{n-krát}} \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N},$$

$$a^{-n} = \underbrace{a^{-1} \odot \cdots \odot a^{-1}}_{\text{n-krát}} \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Na definici obecné mocniny budeme potřebovat exponenciální funkci.
Neboť kvaterniony tvoří konečnědimenzionální vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, platí, že kvaterniony jsou Banachův prostor. Tudíž $(\mathbb{H}, \odot)$ je Banachova algebra a můžeme exponenciálu definovat klasickým způsobem pomocí mocninné řady.

Definice 1.2 (Kvaternionová exponenciála) Exponenciálu $\exp : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definujeme rovností

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

pro všechna $a \in \mathbb{H}$.

Víme, že pro komplexní číslo $z = x + iy$ můžeme ukázat, že $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Podobnou úvahu můžeme provézt i v případě kvaternionů, nahradíme-li imaginární jednotku i vhodným jednotkovým kvaternionem. Myšlenka se liší jen v tom, že rovina, ve které se pohybujeme, není definována vektory e_0, e_1, ale jde o rovinu v prostoru $\mathbb{R}^4$ definovanou vektorem e_0 a nějakým jednotkovým kvaternionem, jako jsme viděli v poznámce po lemmatu 1.3. Skutečně pro $a \in \mathbb{H}$ máme $a = a_0 + \mathbf{a} = a_0 + \mathrm{U}(\mathbf{a})|\mathbf{a}|$ a snadno dostaneme rovnost

$$\exp(a) = \exp(a_0) \cdot (\cos|\mathbf{a}| + \mathrm{U}(\mathbf{a}) \sin|\mathbf{a}|).$$

Dále podobně jako v komplexním případě můžeme odvodit i pro kvaterniony polární tvar. Nechť $a = a_0 + \mathbf{a}$ je kvaternion. Pak, ztotožníme-li komplexní rovinu $\mathbb{C}$ s rovinou $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{U}(\mathbf{a})$, dostáváme:

$$a = |a| e^{\theta\,\mathrm{U}(\mathbf{a})},$$

kde θ je argument.

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{H}$ definujeme:

$$a^x = |a|^x e^{x\theta\,\mathrm{U}(\mathbf{a})}.$$

Odtud je pak konečně získáváme důležitou vlastnost, že pro $a \in \mathbb{H}$ a $x \in \mathbb{R}$ je $|a|^x = |a^x|$. Poslední důležité pozorování k exponenciále je, že podobně jako v komplexní rovině tak máme $a = |a|(\cos\theta + \mathrm{U}(\mathbf{a}) \sin\theta)$. Detaily předchozích úvah o exponenciále a mocninách se nebudeme zabývat, neboť nejsou pro pochopení hlavních výsledků práce klíčové a lze je případně najít v [9]. Místo toho můžeme konečně přikročit k popisu rotací.

1.2 Rotace v dimenzi 3

Popsat rotace v dimenzi 3 pomocí kvaternionů se ukáže jako velmi elegantní přístup. Začneme popisem reflexí a poté vybudujeme rotace jako složení 2 reflexí.

Definice 1.3 (Reflexe) Nechť V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem konečné dimenze alespoň 2. Pak lineární zobrazení $L : V \to V$ je *reflexe* ve V, pokud existuje jednodimenzionální podprostor U prostoru V, takový, že $L(x) = -x$ pro všechny vektory $x \in U$ a zároveň $L(x) = x$ pro všechna $x \in U^\perp$, kde $U^\perp$ je ortogonální doplňek U, tj. $U^\perp = \{x \in V; \forall y \in U : x \cdot y = 0\}$.

Reflexe můžeme jednoduše explicitně popsat pomocí skalárního součinu. Reflexí podle nadroviny přitom budeme rozumět takovou reflexi, pro kterou je daná nadrovina množinou pevných bodů této transformace. Nechť $0 \neq a$ je vektor v $\mathbb{R}^n$. Pak reflexi podle nadroviny ρ kolmé na a, procházející počátkem definujeme jako:

$$\mathrm{Ref}_a(u) = u - 2\frac{u \cdot a}{a \cdot a} a.$$

Z vlastností skalárního součinu hned vidíme, že platí:

$\mathrm{Ref}_a(u) = u$, pokud $u \in \rho$ (tj. vektory a a u jsou kolmé);

$\mathrm{Ref}_a(u) = -u$, pokud $u \in \rho^\perp$ (tj. vektory a a u jsou rovnoběžné).

Tedy zřejmě zobrazení Ref je opravdu reflexe.

Podívejme se nyní, jak tedy reprezentovat reflexe pomocí kvaternionů.

Tvrzení 1.6. *Nechť* $\mathbf{y}$ *je ryzí jednotkový kvaternion. Pak reflexe v* $\mathbb{R}^3 \cong \mathrm{Pu}(\mathbb{H})$ *podle roviny* $\sum_{i=1}^{3} y_i x_i = 0$ *je reprezentována transformací*

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{yxy}, \mathbf{x} \in \mathrm{Pu}(\mathbb{H}).$$

Důkaz. Označme L transformaci $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{yxy}$. Protože $\overline{\mathbf{yxy}} = \bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}} = -\mathbf{yxy}$, je $\mathbf{yxy}$ je ryzí kvaternion a to pro každý bod $\mathbf{x}$. Tedy L je skutečně zobrazení z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$. Jeho linearita plyne z vlastností kvaternionového násobení.
Viděli jsme, že vektory reprezentované ryzími kvaterniony $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou kolmé, právě když tyto kvaterniony splňují

$$\mathbf{xy} + \mathbf{yx} = 0,$$

tedy antikomutují. Pokud navíc $|\mathbf{y}| = 1$, tedy $\mathbf{y}^2 = -|\mathbf{y}|^2 = -1$, dostáváme

$$\mathbf{x} = \mathbf{yxy}.$$

Vidíme, že L tedy zachovává všechny body $\mathbf{x}$ v rovině kolmé na $\mathbf{y}$ procházející bodem $\mathbf{0}$. Navíc L invertuje vektor reprezentovaný $\mathbf{y}$:

$$L(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^3 = -\mathbf{y}.$$

To ale znamená, že zobrazení L je právě hledaná reflexe. □

Než vybudujeme rotace, připomeňme nejprve důležité pojmy.

Definice 1.4 (Ortogonální grupa) Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme $\mathrm{O}(n)$ *ortogonální grupu* dimenze n a definujeme:

$$\mathrm{O}(n) := \{L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \text{ lineární; } \forall x, y \in \mathbb{R}^n : (Lx, Ly) = (x, y)\}.$$

Dále definujeme $\mathrm{SO}(n)$, *speciální ortogonální grupu* dimenze n, jako podgrupu $\mathrm{O}(n)$ následovně:

$$\mathrm{SO}(n) := \{L \in \mathrm{O}(n);\ \det L = 1\}.$$

Jinými slovy $\mathrm{O}(n)$ je grupa všech izometrií Eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, které zachovávají počátek, přičemž grupová operace je skládání zobrazení. Jako taková tedy jde popsat ortogonálními maticemi. Zobrazení z grupy $\mathrm{SO}(n)$, které nazýváme rotace, pak navíc zachovávají i orientaci.

Následující lemma ukazuje, že $\mathrm{O}(n)$ je generována reflexemi.

Lemma 1.7. *Každý prvek* $\alpha \in \mathrm{O}(n)$*, který zachovává* k*-dimenzionální podprostor, lze zapsat jako kompozice nejvýše* $n - k$ *reflexí.*

Důkaz. Postupujme indukcí podle počtu volných dimenzí $n - k$.
Případy $n - k = 0$ a $n - k = 1$ jsou zřejmé. Pro indukční krok vezměme vektor v, který není fixován α. Nechť například $v \mapsto w$. Pak reflexe podle osy vektoru $v - w$ zobrazuje w na v a přitom fixuje všechny vektory u, které jsou fixovány α. To vyplývá z linearity skalárního součinu: Z $(u, v) = (u, w)$ máme, že $v - w$ je kolmý k u. Tato reflexe tedy fixuje nadrovinu v podprostoru fixovaném α a z indukčního předpokladu dostáváme závěr. □

Zapíšeme-li reflexi ve vhodné ortonormální bázi, bude mít její reprezentující matice na diagonále prvek -1 a jinak samé 1. Odtud pak dostáváme, že reflexe má determinant -1. Důkaz tohoto tvrzení lze najít v [5] nebo [6]. Důsledkem lemmatu 1.7 tedy je následující důležitá věta pocházející od Carathéodoryho.

Tvrzení 1.8 (Carathéodory). *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak platí:*

$$\mathrm{O}(n) = \{R_1 \circ \cdots \circ R_m;\ R_j \text{ reflexe, } m \leq n\},$$

$$\mathrm{SO}(n) = \{R_1 \circ \cdots \circ R_{2m};\ R_j \text{ reflexe, } 2m \leq n\}.$$

Vidíme tedy, že rotace jsou vždy složením sudého počtu reflexí. Abychom ale trochu více nahlédli do způsobu, jak rotace fungují, definujeme si pojem jednoduché rotace a ukážeme, jak z nich skládat rotace obecné.

Definice 1.5 (Jednoduché rotace) Nechť V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem konečné dimenze alespoň 2. Pak lineární zobrazení $L : V \to V$ se nazývá *jednoduchá rotace* ve V, pokud L je identické zobrazení, nebo je složením dvou reflexí.

K popisu jednoduchých rotací pomocí kvaternionů budeme potřebovat následující lemma. Nejprve však označme $\mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$ lineární obal množiny vektorů $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Lemma 1.9. *Nechť $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathrm{Pu}(\mathbb{H})$, $|\mathbf{y}| = |\mathbf{z}| = 1$. Pak složení reflexí v rovinách určených vektory $\mathbf{y}, \mathbf{z}$, tj. transformace $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{zyxyz}$ je jednoduchá rotace. Navíc platí $L(x) = x$ pro všechna $x \in (\mathrm{span}\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\})^{\perp}$ a všechny vektory x v rovině $\mathrm{span}\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ transformace L otáčí o úhel $2\angle(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ proti směru hodinových ručiček.*

Důkaz. Zaprvé nechť $\mathbf{x}$ je kolmé k $\mathbf{y}$ i k $\mathbf{z}$. Pak jak víme $\mathbf{yxy} = \mathbf{x}$ a zároveň $\mathbf{zxz} = \mathbf{x}$. Máme tedy $\mathbf{zyxyz} = \mathbf{zxz} = \mathbf{x}$. Tedy všechna taková $\mathbf{x}$ jsou pevné body L.
Nechť nyní $\mathbf{x}$ leží v rovině $\mathrm{span}\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. Označme $\mathbf{w}$ jednotkový vektor takový, že $\{\mathbf{y}, \mathbf{w}\}$ je ortonormální báze této roviny. Dostáváme tak polární tvar

$$z = (\cos\theta)\mathbf{y} + (\sin\theta)\mathbf{w},$$

$$x = (\cos\alpha)\mathbf{y} + (\sin\alpha)\mathbf{w},$$

kde $\theta = \angle(z, \mathbf{y})$ a $\alpha = \angle(x, \mathbf{y})$. Protože $\mathbf{ywy} = \mathbf{w}$ dostáváme z předchozího:

$$\mathbf{yxy} = -(\cos\alpha)\mathbf{y} + (\sin\alpha)\mathbf{w}.$$

Protože

$$\mathbf{zwz} = \cos(2\theta)\mathbf{w} - \sin(2\theta)\mathbf{y}$$

a dále

$$\mathbf{zyz} = -\cos(2\theta)\mathbf{y} - \sin(2\theta)\mathbf{w},$$

dostáváme, že

$$\mathbf{zyxyz} = \cos(2\theta + \alpha)\mathbf{y} + \sin(2\theta + \alpha)\mathbf{w}.$$

Všechny tyto rovnosti přitom snadno ověříme přímým výpočtem s využitím standardních goniometrických identit. Jak vidíme, transformace L je skutečně jednoduchá rotace v rovině $\mathrm{span}\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. □

Zobrazení L z minulého lemmatu tedy můžeme nazývat jednoduchá rotace v rovině span$\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ o úhel $2\angle(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Než pokročíme dále, je vhodné si uvědomit, že jednoduché rotace tedy v lineárním prostoru dimenze $n \geq 2$ zachovávají $(n-2)$-dimenzionální podprostor. Vzpomeneme-li si na Carathéodoryho větu, pak je zřejmé, že pokud jsou obecné rotace produktem nezávislých jednoduchých rotací, pak pro $n < 4$ ani jiné rotace než jednoduché neexistují. Proto v případě $n < 4$ přívlastek jednoduchá vynecháváme a termínem rotace myslíme právě jednoduchou rotaci. V dalším pro nás bude výhodné, abychom pozměnili naše běžné chápání, jak rotace fungují. Jsme zvyklí si "rotace" představovat jako obíhání okolo nějaké osy představované přímkou. To je však pravda pouze v dimenzi 3. Místo toho si uvědomme, že jednoduchá rotace vlastně probíhá vždy v nějaké rovině a ortogonální doplněk zachovává. Jde tedy vlastně o "rovinný jev" a obecná rotace není nic jiného, než složení jednoduchých rotací v navzájem ortogonálních rovinách. Tento náhled se nám později bude hodit v dimenzi 4. Než však přistoupíme k popisu vyšších dimenzí, popíšeme nejdříve rotace v dimenzi 3, což, jak jsme zmínili, není nic jiného než jednoduché rotace.

Tvrzení 1.10. *Nechť* $\mathbf{p} \in \mathrm{Pu}(\mathbb{H})$, $|\mathbf{p}| = 1$. *Pak rotace v* $\mathbb{R}^3$ *o úhel* θ *v rovině kolmé k* $\mathbf{p}$ *je reprezentovaná tranformací* $\mathbf{x} \mapsto a\mathbf{x}\bar{a}$, *kde:*

$$a = \cos\frac{1}{2}\theta + \mathbf{p}\sin\frac{1}{2}\theta.$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathrm{Pu}(\mathbb{H})$. Pak z lemmatu 1.9 víme, že transformace $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{zyxyz}$ je rotace v rovině span$\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ o dvojnásobek úhlu $\angle(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Jinak řečeno jedná se o rotaci o úhel θ v rovině kolmé na $\mathrm{Pu}(\mathbf{yz})$, přičemž

$$\cos\frac{1}{2}\theta = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}.$$

Dále víme podle lemmatu 1.4, že každý jednotkový kvaternion a může být vyjádřen jako $-z\mathbf{y}$, kde $a\mathbf{y} = \mathbf{y}\bar{a} = z$ a $\mathbf{y}$ je ryzí jednotkový kvaternion. Odtud ale plyne, že $\bar{z} = \overline{a\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}\bar{a} = -\mathbf{y}\bar{a}$. Tedy $z + \bar{z} = a\mathbf{y} - \mathbf{y}\bar{a} = 0$, a tudíž $\bar{z} = -z$. Navíc $|z| = |a||\mathbf{y}| = 1$. Dohromady máme, že $z = z_0 + \mathbf{z}$ je stejně jako $\mathbf{y}$ ryzí jednotkový kvaternion, a tedy $z = \mathbf{z}$.
Poslední, čeho je třeba si všimnout, je, že $a = z(-y)$ a $\bar{a} = -yz$. Tudíž transformace

$$\mathbf{x} \mapsto a\mathbf{x}\bar{a} = \mathbf{zyxyz}$$

je právě rotace o úhel θ okolo osy $\mathrm{Pu}(a) = \mathbf{a}$ kde $\cos\frac{1}{2}\theta = \mathrm{Re}(a)$. Neboť a je jednotkový kvaternion, máme, že $(\mathrm{Re}(a))^2 - (\mathrm{Pu}(a))^2 = |a|^2 = 1$. Můžeme tak a vyjádřit v "goniometrickém tvaru" rovností

$$a = \cos\alpha + \mathbf{p}\sin\alpha,$$

kde $\cos\alpha = \mathrm{Re}(a)$ a $\mathbf{p}$ je ryzí jednotkový kvaternion. Protože $\mathrm{Pu}(a) = \mathbf{p}\sin\alpha$ je zřejmě $\mathbf{p} = \mathrm{U}(\mathrm{Pu}(a))$. Tedy $\mathbf{p}$ je jednotkový vektor ve směru osy rotace $\mathrm{Pu}(a)$. Tím jsme získali požadované tvrzení. $\square$

Všimněme si, že úhel α z důkazu tvrzení může nabývat hodnoty $\pm\frac{1}{2}\theta$ a tato volba je záležitost konvence. Vezmeme-li případ $\alpha = \frac{1}{2}\theta$, pak rotace o úhel $\frac{1}{2}\pi$ okolo osy x_3, reprezentované vektorem $(0,0,1)$ transformuje i na j:

$$i \mapsto ai\bar{a} = \frac{1+k}{\sqrt{2}} i \frac{1-k}{\sqrt{2}} = \frac{(i+j)(1-k)}{2} = j.$$

Opačná volba pak zobrazuje i při stejné transformaci na $-j$.

Než pokročíme do dimenze 4, ukážeme ještě zajímavé strukturní tvrzení. Platí, že sféra jednotkových kvaternionů je dvojnásobným nakrytím grupy rotací Eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^3$.

Tvrzení 1.11. *Nechť $\rho : \mathrm{S}^3 \to \mathrm{SO}(3)$ je zobrazení $a \mapsto \rho_a(\mathbf{x}) := a\mathbf{x}\bar{a}$. Pak platí, že $\rho : \mathrm{S}^3 \to \mathrm{SO}(3)$ je homomorfismus grup a jádro zobrazení ρ je rovno* $\ker\rho = \{\pm 1\}$.

Důkaz. Množina S^3 jednotkových kvaternionů tvoří grupu vůči kvaternionovému násobení. Složení dvou rotací $\rho_a : \mathbf{x} \mapsto a\mathbf{x}\bar{a}$ a $\rho_b : \mathbf{x} \mapsto b\mathbf{x}\bar{b}$ je opět rotace, protože $\rho_b \circ \rho_a : \mathbf{x} \mapsto ba\mathbf{x}\bar{a}\bar{b} = ba\mathbf{x}\overline{ba}$ a chování operací odpovídá. Vidíme tedy, že grupa jednotkových kvaternionůje homomorfní s grupou všech rotací. K důkazu zbytku věty se podívejme, jaká $a \in \mathrm{S}^3$ se zobrazí na identitu. Nechť $a \in \mathrm{S}^3$ a $a\mathbf{x}\bar{a} = \mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathrm{Pu}(\mathbb{H})$. Pak máme $a\mathbf{x} = \mathbf{x}a$ a odtud $(a_0 + \mathbf{a})\mathbf{x} = \mathbf{x}(a_0 + \mathbf{a})$. To ale znamená, že $\mathbf{ax} = \mathbf{xa}$, odkud z vlastností vektorového součinu máme $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Nutně tak dostáváme $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ a vrátíme-li se k první rovnosti, máme $a_0^2 x = x$. Odtud už plyne $a_0 = \pm 1$, a tedy $\ker\rho = \{\pm 1\}$. $\square$

Předchozí tvrzení nám vlastně říká, že grupa jednotkových kvaternionů S^3 je jednou z možných realizací grupy Spin(3), viz [1].

1.3 Rotace v dimenzi 4

V popisu rotací budeme postupovat podobně jako v dimenzi 3. Využijeme toho, že jsme ztotožnili kvaterniony a body $\mathbb{R}^4$ a nejprve popíšeme reflexe. Poté ukážeme, že rotace v $\mathbb{R}^4$ lze získat složením reflexí.

Tvrzení 1.12. *Nechť y je jednotkový kvaternion. Pak reflexe v $\mathbb{R}^4$ podle nadroviny $\sum_{i=0}^{3} y_i x_i = 0$ je reprezentována transformací*

$$\varphi : x \mapsto -y\bar{x}y.$$

Důkaz. Důkaz je úplně analogický jako jsme již viděli, jen o dimenzi výš. Pokud x, y jsou jednotkové kvaterniony, tak leží na jednotkové hypersféře se středem v počátku $\mathbf{0}$. Pak z poznatků o lineárních prostorech a dřívějších pozorování o kvaternionech máme, že pro ně platí $\angle(x,y) = \theta$, právě když

$$\cos\theta = a \cdot b = \mathrm{Re}(x\bar{y}) = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}).$$

Odtud pak máme podmínku pro kolmost: x a y leží vzájemně kolmo vzhledem k počátku $\mathbf{0}$, právě když platí $x\bar{y} + y\bar{x} = 0$. Odtud $x\bar{y} = -y\bar{x}$, a tedy $x = -y\bar{x}y$, pokud y je jednotkový. Ukažme, že lineární transformace $\varphi : x \mapsto -y\bar{x}y$ kde $|y| = 1$ má požadované vlastnosti. Body nadroviny $x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$, tj. nadroviny kolmé k y, jsou při zobrazení φ invariantní a $\varphi(y) = -y\bar{y}y = -y$. □

Tvrzení 1.13 (Jednoduché rotace v dimenzi 4)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{H}, |a| = |b| = 1$. Pak zobrazení*

$$x \mapsto axb$$

je jednoduchá rotace v $\mathbb{R}^4$ o úhel ϕ, právě když $\mathrm{Re}(a) = \mathrm{Re}(b) = \cos \frac{1}{2}\phi$.

Důkaz. Vyjdeme opět z popisu reflexí. Nechť tedy $y, z \in \mathbb{H}, |y| = |z| = 1$. Pak složením reflexí $x \mapsto -y\bar{x}y$ a $x \mapsto -z\bar{x}z$ dostáváme zobrazení

$$x \mapsto z\overline{y\bar{x}y}z = z\bar{y}x\bar{y}z.$$

Důkaz, že jde o jednoduchou rotaci v rovině generované y a z o dvojnásobek úhlu $\angle(y, z)$, je analogický důkazu lemmatu 1.9. Označíme-li tento úhel $\phi/2$, pak z předchozího víme, že $\cos \frac{1}{2}\phi = \mathrm{Re}(y\bar{z})$. Ale $\mathrm{Re}(y\bar{z}) = \mathrm{Re}(z\bar{y}) = \mathrm{Re}(\bar{y}z)$, přičemž poslední 2 rovnosti plynou z definice kvaternionového násobení. Dále je zřejmě $|z\bar{y}| = |\bar{y}z| = 1$ a označíme-li $a := z\bar{y}$ a $b := \bar{y}z$, dostáváme požadované a, b.
Naopak nechť $x \mapsto axb$ je lineární zobrazení a $|a| = |b| = 1$. Pak dle lemmatu 1.5 lze najít jednotkové kvaterniony y, z takové, že $ay = yb = z$. Odtud ale $a = z\bar{y}$ a $b = \bar{y}z$, a tedy, dle výše zmíněného skládání reflexí, je $x \mapsto axb$ rotace. □

V $\mathbb{R}^4$ je ale obecná rotace součinem dvou jednoduchých rotací kolem dvou navzájem ortogonálních rovin. Obecný popis rotací v $\mathbb{R}^4$ je obsahem následující věty.

Tvrzení 1.14 (Rotace v dimenzi 4)**.** *Nechť a, b jsou jednotkové kvaterniony. Definujme zobrazení $\phi_{a,b}(x) := axb$ a $\psi_{a,b}(x) := a\bar{x}b$. Pak platí:*

$$\mathrm{SO}(4) = \{\phi_{a,b};\ a, b \in \mathbb{H}, |a| = |b| = 1\},$$

$$\mathrm{O}(4) = \mathrm{SO}(4) \cup \{\psi_{a,b};\ a, b \in \mathbb{H}, |a| = |b| = 1\}.$$

Důkaz. Složením sudého počtu reflexí zřejmě dostaneme zobrazení typu $\phi_{a,b}$. Složením lichého počtu reflexí pak zobrazení typu $\psi_{a,b}$.
Pro důkaz opačných inkluzí ukažme nejprve, že pro všechny jednotkové kvaterniony a, b, c, d platí $\phi_{a,b} \neq \psi_{c,d}$. Pro spor předpokládejme, že $axb = c\bar{x}d$ pro všechna $x \in \mathbb{H}$. Pak máme $c^{-1}axbd^{-1} = \bar{x}$. Označíme-li $\alpha := c^{-1}a$, $\beta := bd^{-1}$, pak pro $x = 1$ dostáváme $\alpha = \beta^{-1}$, a tedy $\alpha x = \bar{x}\alpha$. Pro x ryzí, tj. $x = \mathrm{Pu}(x)$ pak dostáváme $\mathrm{Pu}(\alpha)\,\mathrm{Pu}(x) = -\mathrm{Pu}(x)\,\mathrm{Pu}(\alpha)$, a tedy $\mathrm{Pu}(\alpha)$ je kolmý k x. Odtud již plyne, že $\mathrm{Pu}(\alpha) = 0$. Návratem k předchozí rovnosti $\alpha x = \bar{x}\alpha$ bychom tak dostali $x = \bar{x}$ pro všechna x, což je zřejmě spor.
Nyní si všimněme, že všechna zobrazení $\phi_{a,b}$ a $\psi_{c,d}$ patří do $\mathrm{O}(4)$, neboť $|axb| = |c\bar{x}d| = |x|$, jsou-li a, b, c, d jednotkové.
Dále platí, že každé zobrazení $\phi_{a,b}$ patří do $\mathrm{SO}(4)$. Kdyby tomu tak nebylo, pak dle Carathéodoryho věty je $\phi_{a,b}$ reflexe, nebo složením 3 reflexí. Existovaly by tedy jednotkové kvaterniony c, d takové, že $\phi_{a,b} = \psi_{c,d}$, což by byl spor. Analogicky pro každé zobrazení $\psi_{a,b}$ platí, že $\psi_{a,b}$ patří do $\mathrm{O}(4) \setminus \mathrm{SO}(4)$. Kdyby ne, tak je $\psi_{a,b}$ dle Carathéodoryho věty složením 2, nebo 4 reflexí. Tudíž by existovaly jednotkové kvaterniony c, d takové, že $\psi_{a,b} = \phi_{c,d}$, což by opět byl spor. □

Dostáváme tedy důležitý výsledek, že pro libovolný prvek grupy $\mathrm{SO}(4)$ máme reprezentaci ve tvaru zobrazení $\phi_{a,b} : x \mapsto axb$, kde a, b jsou jednotkové kvaterniony. Platí ale stejně tak, že $\phi'_{a,b} : x \mapsto (-a)x(-b)$ reprezentuje totožnou rotaci. Dostáváme tak podobnou větu jako v dimenzi 3.

Tvrzení 1.15. *Nechť* $\phi : \mathrm{S}^3 \times \mathrm{S}^3 \to \mathrm{SO}(4)$ *je zobrazení* $(a, b) \mapsto \phi_{a,b}(x) := axb$. *Pak* ϕ *je homomorfismus grup a* $\ker \phi = \{\pm(1, 1)\}$.

Důkaz. Tvrzení o homomorfismu je opět přímým ověřením definice, stačí zohlednit konvenci násobení zprava a zleva.
Dokažme, že $\ker \phi = \{\pm(1, 1)\}$ analogicky jako v dimenzi 3. Hledáme (a, b) taková, že $\phi_{a,b}$ je identita. Tedy nechť $axb = x$, pro každé $x \in \mathbb{H}$. Pak $ax = x\bar{b}$, a tedy $\mathbf{a}x = -x\mathbf{b}$. Nechť nyní speciálně $x \in \mathrm{Pu}(\mathbb{H})$, tj. $x = \mathbf{x}$. Pak máme $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = -\mathbf{x} \times \mathbf{a} = -\mathbf{x} \times \mathbf{b}$, odkud dostáváme $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Zároveň však z $-\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}$ máme $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ a dohromady tak $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 0$.
Vrátíme-li se k první rovnosti, dostáváme $a_0 x b_0 = x$, a tedy $a_0 = b_0^{-1}$. Neboť ale $a, b \in \mathrm{S}^3$, máme že dvojice $(a, b) = \pm(1, 1)$ tvoří jádro ϕ. $\square$

Toto tvrzení nám tedy ukazuje podobný strukturní výsledek jako v dimenzi 3. Dostáváme, že grupa $\mathrm{S}^3 \times \mathrm{S}^3$ je jednou z možných realizací grupy $\mathrm{Spin}(4)$, viz [1].

2. Konformní zobrazení

Tato kapitola má za úkol stručně připomenout některé poznatky z diferenciální geometrie a teorie konformních zobrazení, které v dalším využijeme v kapitolách o Möbiových transformacích. Definujeme některé základní pojmy a připomeneme užitečná tvrzení.

Nechť I je otevřený interval v $\mathbb{R}$. Řekneme, že zobrazení $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ je *křivka* v $\mathbb{R}^n$, pokud ϕ je spojité na I a $\phi'(t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro všechna $t \in I$. Pokud $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ je křivka a t je bod I, pak *tečný vektor ke křivce* ϕ v bodě t definujeme jako $\phi'(t)$. *Úhel mezi dvěma křivkami* ve společném bodě B pak definujeme jako úhel svíraný jejich tečnými vektory v bodě B.

Dále budeme užívat standardní klasifikaci diferencovatelnosti. Ať G je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Funkce $f : G \to \mathbb{R}^m$ je třídy $\mathcal{C}^k$, pokud všechny parciální derivace f řádu k existují a jsou spojité na G. Třída $\mathcal{C}^0$ jsou funkce spojité na G a pokud existují parciální derivace f všech řádů, řekneme, že f je třídy $\mathcal{C}^\infty$, neboli hladká.
Nyní nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}^m$ má všechny parciální derivace prvního řádu. Pak *Jakobiho matice zobrazení* f, df, je definována následovně:

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

V případě, že $m = n$ je df čtvercová a její determinant v bodě a nazýváme *Jakobián* a značíme $\mathrm{J}_f(a)$. Speciálně pro lineární zobrazení, tj. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax$, kde A je reálná $n \times n$ matice, máme $df = A$.

Definujme si nyní důležité speciální vlastnosti zobrazení. Nechť nejprve G je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a zobrazení $f : G \to \mathbb{R}^m$ je třídy $\mathcal{C}^1$. Řekneme, že f *zachovává úhly v bodě* $a \in G$, pokud pro každé dvě křivky $\phi_1 : I_1 \to G$ a $\phi_2 : I_2 \to G$ platí

$$\angle((f \circ \phi_1)'(t_1), (f \circ \phi_2)'(t_2)) = \angle(\phi_1'(t_1), \phi_2'(t_2)),$$

pro každé $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2$ takové, že $\phi_1(t_1) = \phi_2(t_2) = a$. Řekneme, že f *zachovává úhly*, pokud toto platí pro všechny body G.
Dále nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^1$. Řekneme, že f *zachovává orientaci v bodě* $a \in G$, pokud $\mathrm{J}_f(a) > 0$. Je-li $\mathrm{J}_f(a) < 0$, zobrazení f orientaci mění. Zobrazení f *zachovává (mění) orientaci*, pokud toto platí pro každý bod G.
Konečně pro $G \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřenou řekneme, že hladké zobrazení $f : G \to \mathbb{R}^n$ je *konformní v bodě* $a \in G$, pokud f zachovává úhly a orientaci v bodě a. Zobrazení f nazýváme *konformní*, pokud je konformní v každém bodě G. Zobrazení, které zachovává úhly, ale mění orientaci, se nazývá *anti-konformní*.
Užitečnou charakteristiku těchto zobrazení shrnuje následující věta.

Tvrzení 2.1. *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbb{R}^n$ je hladké zobrazení takové, že $\mathrm{J}_f(a) \neq 0$. Pak platí:*

1. *Zobrazení f zachovává úhly v bodě a, právě když $df(a) = \lambda A$, pro nějaké $\lambda > 0$ a $A \in O(n)$.*

2. *Zobrazení f je konformní v bodě a, právě když $df(a) = \lambda A$, pro nějaké $\lambda > 0$ a $A \in SO(n)$.*

Důkaz věty lze najít třeba v [6].

V $\mathbb{R}^n$ definujme n-dimenzionální sféru se středem x_0 a poloměrem $r > 0$, $\mathrm{S}^{n-1}(x_0, r)$, následovně:

$$\mathrm{S}^{n-1}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| = r\}.$$

Sférickou inverzi f v $\mathbb{R}^n$ podle sféry $\mathrm{S}^{n-1}(x_0, r)$ pak definujeme jako

$$f(x) = x_0 + r^2 \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2}, x \neq x_0.$$

Chceme-li definovat toto zobrazení i pro bod $x = x_0$, musíme ho definovat na jednodobové kompaktifikaci $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ a bodu x_0 pak přiřazujeme bod ∞ a naopak. Všimněme si, že $x' = f(x)$, právě když x a x' oba leží na stejné přímce procházející bodem x_0 a zároveň platí $|x - x_0||x' - x_0| = 1$. V dalším bude dobré vědět, že reflexe i sférická inverze jsou antikonformní zobrazení. Důkaz využívá tvrzení 2.1 a lze ho najít v [6] nebo podrobněji v [5, věta 4.1.5.]
Zřejme zobrazení z $O(n)$ zachovávají úhly a rotace jsou příklady konformních zobrazení.
Nyní konečně můžeme pokročit k Möbiovým transformacím.

3. Möbiovy transformace

V této kapitole pojednáme o Möbiových transformacích. Nejprve v dimenzi 2, kde připomeneme hlavně jejich reprezentaci pomocí komplexních čísel. Poté se pokusíme zobecnit naše úvahy do dimenze 4 a naším cílem bude popsat tato zobrazení pomocí kvaternionů.

3.1 Möbiovy transformace v dimenzi 2

Připomeňme nejprve některé pojmy. Písmenem $\mathbb{C}$ značíme rovinu komplexních čísel. K prostoru $\mathbb{C}$ definujeme význačný bod ∞ a metriku na množině $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ standardním způsobem. Tedy tak, aby stereografická projekce ze severního pólu sféry S^2 do prostoru $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ byla izometrie. Tento prostor pak značíme $\mathbb{S}$ a nazýváme *Riemannova sféra.* Möbiovy transformace v dimenzi 2 (dále v této sekci jen "Möbiovy transformace") budeme definovat na právě Riemannově sféře $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Dále označme $\mathrm{GL}(2,\mathrm{T})$ *obecnou lineární grupu* řádu 2 nad tělesem T, tj. grupu 2×2 matic s prvky z tělesa T. Prvky $\mathrm{GL}(2,\mathrm{T})$, jejichž determinant je roven 1, tvoří podgrupu $\mathrm{GL}(2,\mathrm{T})$, kterou nazýváme *speciální lineární grupa* řádu 2 nad tělesem T. Značíme ji $\mathrm{SL}(2,\mathrm{T})$. Označíme-li ještě I jednotkovou matici, definujme *projektivní speciální lineární grupu* řádu 2 nad tělesem T, $\mathrm{PSL}(2,\mathrm{T})$ jako $\mathrm{SL}(2,\mathrm{T})\,/\{\pm I\}$.

Definujme si nyní Möbiovy transformace.

Definice 3.1 (Möbiovy transformace) Každému elementu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ přiřadíme zobrazení $f_A : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$,

$$f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Pokud $c \neq 0$, definujme $f_A(-\frac{d}{c}) = \infty$ a dále $f_A(\infty) = \frac{a}{c}$;
Pokud naopak $c = 0$, nutně $d \neq 0$, a definujeme $f_A(\infty) = \infty$. Tato zobrazení nazýváme *Möbiovy transformace.*

Přitom, kde je to možné, pro jednoduchost zápisu prvek $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ určující danou transformaci vynecháváme a píšeme f místo f_A.

Lemma 3.1. *Möbiovy transformace tvoří grupu vzhledem k operaci skládání zobrazení.*

Důkaz. Toto je zřejmé z toho, že $f_A \circ f_B = f_{AB}$. $\square$

Označme grupu Möbiových transformací se skládáním jako $\mathcal{M}_2^+$. Pokud k této grupě navíc přidáme všechna zobrazení tvaru $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, kde $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ a $ad - bc \neq 0$, dostáváme *dvoudimenzionální Möbiovu grupu*, kterou značíme $\mathcal{M}_2$.

Všimněme si dále, že pro každou matici $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ takovou, že $\det A = ad - bc \neq 0$, existuje $\lambda > 0$ taková, že buďto matice $B = \lambda A$, nebo matice $C = i\lambda A$ mají determinant 1. Proto nám stačí k popisu Möbiových transformací grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Vzorem identické Möbiovy transformace je navíc $\{\pm I\} \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, a tudíž by nám stačila i grupa $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Toho však využijeme až v závěrečném oddíle o klasifikaci Möbiových transformací a zatím se budeme držet popisu pomocí $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Více o tomto přístupu lze najít v [4].

Než přikročíme k popisu vlastností $\mathcal{M}_2^+$, připomeňme, že *dilatací* rozumíme lineární zobrazení tvaru $x \mapsto \lambda x$, kde $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$. Všimněme si, že Jakobiho matice tohoto zobrazení má tvar $\mathrm{d} = \lambda I$, a tedy jde o konformní zobrazení.
Dále si uvědomme že *převrácení*, tj. zobrazení $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ je také konformní, neboť ho získáme jako složení zobrazení $h : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ a $g : z \mapsto \bar{z}$. Přitom vidíme, že g je reflexe podle reálné osy a h je inverze v jednotkové sféře, neboť body z a $\frac{1}{\bar{z}}$ leží na stejné přímce procházející počátkem a součin vzdáleností těchto bodů od počátku je 1. Tedy g a h jsou antikonformní zobrazení, a tudíž f je konformní.

Tvrzení 3.2 (Vlastnosti $\mathcal{M}_2^+$)**.** *Platí:*

1. *$\mathcal{M}_2^+$ je generována zobrazeními tvaru $s_a(z) = z + a, a \in \mathbb{C}$ (translacemi), $t_b(z) = bz, b \in \mathbb{R}, b > 0$ (dilatacemi), $t_c(z) = cz, c \in \mathbb{C}, |c| = 1$ (rotacemi) a zobrazením $f(z) = \frac{1}{z}$ (převrácením);*

2. *Möbiovy transformace jsou určeny třemi body. Přesněji nechť $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{S}$ a $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{S}$ jsou dvě trojice různých bodů z $\mathbb{S}$. Pak existuje právě jedna Möbiova transformace f taková, že $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$ a $f(z_3) = w_3$.*

Důkaz. 1. Nechť f je Möbiova transformace tvaru $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.
Nechť nejprve $c \neq 0$. Pak máme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{z}(cz+d)+b-\frac{a}{z}d}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{a}{c}d}{cz+d}$.
Odtud už je zřejmé, že $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kde f_1, f_4 jsou dilatace, rotace, nebo jejich složení, f_2, f_5 jsou translace a f_3 je převrácení.
Pokud $c = 0$, pak nutně $d \neq 0$ a máme $f(z) = \frac{a}{d}z + b$ a tedy jde zřejmě o složení translace a dilatace, rotace, nebo jejich složení.

2. Nejdříve si všimněme, že $p(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$, kde $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ jsou různé, je Möbiova transformace, pro niž platí $p(z_1) = 0, p(z_2) = 1, p(z_3) = \infty$. Podobně zkonstuujeme Möbiovu transformaci q, která bude analogickým způsobem transformovat body w_1, w_2, w_3. Položíme-li $f := q^{-1} \circ p$, pak f má zřejmě požadovanou vlastnost, že $f(z_i) = w_i, i = 1, 2, 3$.
V případě, že $\infty \in \{z_1, z_2, z_3\}$ budeme postupovat analogicky. Nechť například $\infty = z_1$. Hledáme tedy Möbiovu transformaci p takovou, že pro ni platí $p(\infty) = 0, p(z_2) = 1, p(z_3) = \infty$. Stačí nám uvážit zobrazení

$$z \mapsto \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

Pro důkaz jednoznačnosti f uvažme Möbiovu transformaci r se stejnou vlastností. Pak dostáváme, že qrp^{-1} zobrazí $0, 1, \infty$ na $0, 1, \infty$. Zobrazení qrp^{-1} je Möbiova transformace, a tedy existují $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ takové, že $qrp^{-1}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Pak $0 \mapsto 0$ dává, že $b = 0$. Dále $1 \mapsto 1$ implikuje, že $a + b = c + d$. Konečně z $\infty \mapsto \infty$ dostáváme, že $c = 0$. Odtud $a = d$ a dohromady $qrp^{-1}(z) = z$ pro každé $z \in \mathbb{S}$. Tedy dostáváme $r = q^{-1} \circ p = f$.
□

Definovali jsme si tedy v dimenzi 2 Möbiovy transformace jako lineární lomená zobrazení určená invertibilními 2×2 maticemi komplexních čísel. Podobnou konstrukci se pokusíme vytvořit i v dimenzi 4, pokud těleso komplexních čísel nahradíme právě kvaterniony. Dále jsme z rozkladu v tvrzení 3.2 viděli, že všechny Möbiovy transformace jsou konformní zobrazení. Není ovšem pravda, že by v dimenzi 2 byla všechna konformní zobrazení Möbiovými transformacemi. Naopak struktura konformních zobrazení v dimenzi 2 je velice bohatá, jak plyne z Riemannovy věty. V dimenzi 4 ovšem všechna konformní zobrazení již jsou Möbiovy transformace a jejich restrikce, což také připomeneme v následující sekci.

3.2 Möbiovy transformace v dimenzi 4

Podobně jako v dimenzi 2 si definujme 4-dimenzionální Möbiovou grupu $\mathcal{M}_4$. Označme $\mathbb{R}^4_\infty = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ jednobodovou kompaktifikaci $\mathbb{R}^4$. Pak $\mathcal{M}_4$ definujeme jako grupu transformací $\mathbb{R}^4_\infty$ generovanou sférickými inverzemi a reflexemi. Podgrupu $\mathcal{M}_4^+$ definujeme tak, že obsahuje právě ty transformace, které jsou složením sudého počtu generátorů.

Definice 3.2 (Möbiovy transformace v dimenzi 4) *Möbiovou transformací v dimenzi 4* myslíme každý prvek grupy $\mathcal{M}_4^+$.

Pozn: V této sekci budeme Möbiovou transformací myslet takovou transformaci v dimenzi 4, nebude-li specifikováno jinak.

Podívejme se nyní, jak se věc má s reprezentací těchto zobrazení pomocí kvaternionů. Označme $\mathbb{H}_\infty = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$, jednobodovou kompaktifikaci $\mathbb{H}$.

Tvrzení 3.3 (Reprezentace Möbiových transformací pomocí kvaternionů)**.** *Grupa $\mathcal{M}_4^+$ se skládá ze zobrazení $f : \mathbb{H}_\infty \to \mathbb{H}_\infty$ tvaru*

$$x \mapsto (ax+b)(cx+d)^{-1}, \Delta(f) \neq 0, \tag{3.1}$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{H}$ a $\Delta(f) = |a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2 - 2\,\mathrm{Re}(a\bar{c}d\bar{b})$. Ohledně bodu ∞ zaujímáme obvyklé konvence, jmenovitě:

Pokud $c = 0$, pak $f(\infty) = \infty$;

Pokud $c \neq 0$, pak $f(\infty) = ac^{-1}$ a $f(-c^{-1}d) = \infty$.

Grupa $\mathcal{M}_4$ obsahuje všechna zobrazení $f \in \mathcal{M}_4^+$ a navíc zobrazení $f : \mathbb{H}_\infty \to \mathbb{H}_\infty$ tvaru

$$f : x \mapsto (a\bar{x}+b)(c\bar{x}+d)^{-1}, \Delta(f) \neq 0.$$

I v tomto případě zaujímáme ohledně bodu ∞ obvyklé konvence.

Nejprve si dokážeme 2 pomocná lemmata.

Lemma 3.4. *Nechť f je zobrazení tvaru $f : x \mapsto (ax+b)(cx+d)^{-1}, \Delta(f) \neq 0$. Pak platí:*

1. *Pokud $c = 0$, je nutně $a \neq 0, d \neq 0$ a $f = h_2 \circ h_1$, kde*

$$h_2(x) = axd^{-1}, h_1(x) = x + a^{-1}b.$$

2. *Pokud $c \neq 0$, je $f = g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$, kde*

$$g_4(x) = x + ac^{-1}, g_3(x) = -(b - ac^{-1}d)xc^{-1}, g_2(x) = -x^{-1}, g_1(x) = x + c^{-1}d.$$

Důkaz. Přímým výpočtem dostáváme:

1. $h_2h_1(x) = h_2(x + a^{-1}b) = a(x + a^{-1}b)d^{-1} = (ax + b)d^{-1}$, což je přesně f pro $c = 0$.

2. Jest $g_4g_3g_2g_1(x) = ac^{-1} + (-(b - ac^{-1}d)(-(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1} = (a(x + c^{-1}d)(x + c^{-1}d)^{-1} + (b - ac^{-1}d)(x + c^{-1}d)^{-1})c^{-1} = ((ax + ac^{-1}d + b - ac^{-1}d)(x + c^{-1}d)^{-1})c^{-1} = (ax + b)(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1} = (ax + b)(cx + d)^{-1}$.

□

Lemma 3.5. *Při označení z věty 3.3 platí*

$$\Delta(f) = |b - ac^{-1}d|^2|c|^2.$$

Důkaz. Přímým výpočtem snadno ověříme, že

$$\Delta(f) = |a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2 - a\bar{c}d\bar{b} - \overline{a\bar{c}d\bar{b}} = (b - ac^{-1}d)\overline{(b - ac^{-1}d)}c\bar{c} = |b - ac^{-1}d|^2|c|^2.$$

□

Důkaz reprezentační věty. Nechť $h_i, i = 1, 2$ a $g_i, i = 1 \ldots, 4$ jsou zobrazení z lemmatu 3.4. Pak z formule z lemmatu 3.5 a dekompozice z lemmatu 3.4 vidíme, že zobrazení tvaru $x \mapsto (ax + b)(cx + d)^{-1}$ je bijekce z $\mathbb{H}_\infty$ do $\mathbb{H}_\infty$, právě když $\Delta(f) \neq 0$. Dále si všimněme, že dle kapitoly 1 jsou h_2 a g_3 rotace složené s dilatací, zobrazení g_1, g_4 a h_1 jsou translace a konečně g_2 je inverze v jednotkové sféře S^3 složená s reflexemi podle 3 imaginárních os. Z předchozího již víme, že rotace jsou složením sudého počtu reflexí. Translace jsou zřejmě složením 2 reflexí podle rovnoběžných nadrovin. A konečně dilatace získáme jako složení dvou sférických inverzí podle sfér se společným středem $\mathbf{0}$. Dohromady tedy vidíme, že se jedná vesměs o konformní zobrazení generovaná reflexemi a sférickými inverzemi. Dostáváme tak, že všechna $g_i, h_i \in \mathcal{M}_4^+$, a tedy $f \in \mathcal{M}_4^+$.
Naopak nechť $f \in \mathcal{M}_4^+$. Pak f lze zapsat jako složení translací, dilatací, rotací a zobrazení tvaru g_2. Toto je známé tvrzení, viz například [5, věta 4.4.4.]. Již jsme si rozmysleli, že všechna tato zobrazení lze zapsat ve tvaru (3.1). Ověřit, že složení $h = f \circ g$, kde f, g jsou tvaru (3.1), je opět stejného tvaru lze přímým výpočtem, pokud si uvědomíme, že z lemmatu 3.5 máme, že $\Delta(h) \neq 0$, poněvadž jak f, tak g jsou bijekce a tudíž i h. □

Připomeňme nyní Liouvilleovu větu o souvislosti Möbiových transformací a konformních zobrazení, viz [6].

Tvrzení 3.6. *Nechť $n \geq 3$, U, V jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a $f : U \to V$ je bijekce třídy $\mathcal{C}^4$. Pak f je konformní zobrazení, právě když je restrikcí zobrazení z grupy $\mathcal{M}_n^+$.*

Speciálně pak dostáváme, že v dimenzi 4 jsou všechna konformní zobrazení restrikcemi Möbiových transformací.

Ukázali jsme tedy, že podobně jako v případě dvoudimenzionálních Möbiových transformací, můžeme i v dimenzi 4 Möbiovy transformace charakterizovat pomocí "lomenných zobrazení", nahradíme-li komplexní čísla kvaterniony. Díky předchozí větě tak dostáváme velmi elegantní popis všech konformních zobrazení v dimenzi 4. Podívejme se nyní na různé typy těchto transformací.

3.3 Klasifikace Möbiových transformací

V tomto závěrečném oddíle připomeneme, jak lze Möbiovy transformace v dimenzi 2 klasifikovat do tříd invariantních vůči konjugaci a nastíníme, jak lze totéž provézt i v dimenzi 4. Dostaneme tak transformace eliptické, parabolické a loxodromické a ukážeme, jak v dimenzi 4 jednotlivé třídy vypadají.

Nejprve si definujme několik důležitých pojmů.

Definice 3.3 (Konjugace) Nechť G je grupa a $x \in G$. Řekneme, že množina $C_x := \{gxg^{-1};\, g \in G\}$ je *třída konjugace* x v G. Řekneme, že prvky množiny C_x jsou s x konjugované.

Dále řekneme, že prvek f grupy $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ je *jednoduchý*, pokud je v $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ konjugovaný s nějakým prvkem $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Zobrazení f je pak *k-jednoduché*, pokud lze zapsat jako složení k jednoduchých transformací, ale ne méně. Označíme dále stopu matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ jako $\tau = \tau_A = a + d$. Přímo z definice maticového násobení plyne, že pro matice A, B platí $\tau_{AB} = \tau_{BA}$. Odtud pak máme $\tau_{B(AB^{-1})} = \tau_{AB^{-1}B} = \tau_A$, tj. že stopa je invariantní vůči konjugaci. Každý člen třídy konjugace tak bude mít stejnou stopu. Netriviální Möbiovy transformace pak v dimenzi 2 podle stopy dělíme na 3 typy. Netriviální Möbiova transformace f_A je *eliptická*, pokud $0 \leq \tau_A^2 < 4$. Pokud $\tau_A^2 = 4$ je *parabolická* a je *loxodromická* v ostatních případech. Rozklad na třídy konjugace a dynamiku $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ pak popisuje následující věta, viz [4, Věta 1.1.].

Tvrzení 3.7. *Dvě netriviální zobrazení f a g z $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ jsou konjugované, právě když $\tau_f^2 = \tau_g^2$. Navíc, pro $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ platí:*

(a) *Pokud $\tau^2 \geq 0$, pak f je 1-jednoduchá a*

1. *je-li $0 \leq \tau^2 < 4$, pak f je eliptická;*
2. *je-li $\tau^2 = 4$, pak f je parabolická;*
3. *je-li $\tau^2 > 4$, pak f je loxodromická.*

(b) *Je-li τ^2 záporné, nebo není reálné, pak f je 2-jednoduchá a loxodromická.*

Vidíme tedy, že tyto třídy jsou invariantní vůči konjugaci, ale také, že není pravda, že každé 2 prvky stejné třídy by byly konjugované. Nejedná se tedy o klasifikaci tříd konjugace.

Nyní naznačíme, jak lze podobnou klasifikaci zavézt pro Möbiovy transformace v dimenzi 4 (dále jen Möbiovy transformace).

Pro 2×2 matici kvaternionů $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ označme

$$\alpha = \alpha_A = \Delta(f) = |a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2 - 2\,\mathrm{Re}(a\bar{c}d\bar{b}).$$

Dle [4] je A invertibilní, právě když $\alpha_A \neq 0$ a definujeme

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{H}) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{H}, \alpha = 1 \}.$$

Analogickou konstrukcí jako v dimenzi 2 pak můžeme sjednotit kvaternionové Möbiovy transformace a $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{H})$. Pro kvaternionovou matici A dále definujeme

$$\beta = \beta_A = \mathrm{Re}((ad - bc)\bar{a} + (da - cb)\bar{d}),$$

$$\gamma = \gamma_A = |a + d|^2 + 2\,\mathrm{Re}(ad - bc),$$

$$\delta = \delta_A = \mathrm{Re}(a + d).$$

Dle [4] jsou funkce β, γ, δ konstantní na třídách konjugace v $\mathrm{SL}(2, \mathbb{H})$. Dále pro $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{H})$ definujeme:

$$\sigma = \sigma_A = \begin{cases} cac^{-1}d - cb & \text{je-li } c \neq 0, \\ bdb^{-1}a & \text{je-li } c = 0, b \neq 0, \\ (d - a)a(d - a)^{-1}d & \text{je-li } b = c = 0, a \neq d, \\ a\bar{a} & \text{je-li } b = c = 0, a = d, \end{cases}$$

$$\tau = \tau_A = \begin{cases} cac^{-1} + d & \text{je-li } c \neq 0, \\ bdb^{-1} + a & \text{je-li } c = 0, b \neq 0, \\ (d - a)a(d - a)^{-1} + d & \text{je-li } b = c = 0, a \neq d, \\ a + \bar{a} & \text{je-li } b = c = 0, a = d. \end{cases}$$

Přímým výpočtem ověříme, že $|\sigma|^2 = \alpha = 1$ ve všech případech. Funkce σ a τ zastávají roli determinantu a stopy v $\mathrm{SL}(2, \mathbb{H})$. Díky nekomutativnosti násobení kvaternionů však nejsou invariantní vůči konjugaci. Zobrazení f nazveme *reálná Möbiova transformace*, pokud je prvkem $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{H})$ s reálnými koeficienty. Všimněme si, že v takovém případě σ splývá s běžným determinantem $ad - bc$. Reálné Möbiovy transformace tvoří podgrupu v $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{H})$ a to sice $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Prvek $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{H})$ nazveme *jednoduchý*, pokud je v grupě $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{H})$ konjugovaný s nějakým prvkem $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Zobrazení f je pak *k-jednoduché*, pokud lze zapsat jako složení k jednoduchých transformací, ale ne méně.
Definujme si nyní třídy, dle kterých budeme klasifikovat. Podle [2] má každé zobrazení $f \in \mathcal{M}_4^+$ pevný bod. Třídy Möbiových transformací pak rozlišujeme podle pevných bodů. Je-li $f \in \mathcal{M}_4^+$, pak f je:

1. *parabolická*, má-li pouze 1 pevný bod,

2. *loxodromická*, má-li 2 pevné body p, q takové, že pro všechna $x \in \mathbb{H}_\infty \setminus \{p, q\}$ posloupnost $f^n(x)$ konverguje k p,

3. *eliptická* jinak.

Pomocí výše definovaných charakteristik se v následujících 3 větách ukazuje dynamika a třídy konjugace pro kvaternionové Möbiovy transformace. Důkazy a detaily lze najít v [4].

Tvrzení 3.8. *Transformace $f \in \mathcal{M}_4^+$ je konjugovaná s reálnou Möbiovou transformací, právě když σ i τ jsou reálné.*

Tvrzení 3.9. *Dvě netriviální Möbiovy transformace f a g jsou konjugované, právě když platí následující 2 podmínky:*

1. *Buď f i g jsou konjugované s reálnou Möbiovou transformací, nebo ani jedna z nich,*

2. $\beta_f \delta_f = \beta_g \delta_g$, $\gamma_f = \gamma_g$, $\delta_f^2 = \delta_g^2$.

Tvrzení 3.10 (Klasifikace Möbiových transformací v dimenzi 4)**.** *Nechť $f \in \mathcal{M}_4^+$ a $\alpha = 1$. Pak platí:*

(a) *Je-li $\sigma = 1$ a $\tau \in \mathbb{R}$, pak f je 1-jednoduchá, $\beta = \delta, \gamma = \delta^2 + 2$ a platí následující trichotomie.*

   1. *Pokud $0 \leq \delta^2 < 4$, pak f je eliptická,*
   2. *Pokud $\delta^2 = 4$, pak f je parabolická,*
   3. *Pokud $\delta^2 > 4$, pak f je loxodromická.*

(b) *Pokud $\beta = \delta$ a buď $\tau \notin \mathbb{R}$, nebo $\sigma \neq 1$, pak f je 2-jednoduchá a platí následující trichotomie.*

   1. *Pokud $\gamma - \delta^2 < 2$, pak f je eliptická,*
   2. *Pokud $\gamma - \delta^2 = 2$, pak f je parabolická,*
   3. *Pokud $\gamma - \delta^2 > 2$, pak f je loxodromická.*

(c) *Pokud $\beta \neq \delta$, pak f je 3-jednoduchá a loxodromická.*

Dostáváme tak různé 3 třídy Möbiových transformací i v dimenzi 4. Všimněme si, že v případě (a) z věty je transformace f reálná a dostáváme již známý případ klasifikace podle stopy. Podívejme se nyní blíže na to, jak transformace v každé třídě vypadají. Nejdřívě uvádíme bez důkazu popis parabolických transformací a pak si dokážeme, jak lze popsat zbývající 2 třídy. Vycházíme přitom z článku [2], kde lze najít důkaz prvního tvrzení i další informace.

Tvrzení 3.11. *Nechť pak $f \in \mathcal{M}_4^+$ je parabolická. Pak f je konjugovaná s transformací tvaru $x \mapsto \bar{a}xa + 1$, kde a je jednotkový kvaternion.*

Tvrzení 3.12. *Nechť transformace $f \in \mathcal{M}_4^+$, která má alespoň 2 pevné body je konjugovaná se transformací tvaru $x \mapsto \lambda axb$, kde a, b jsou jednotkové kvaterniony a $\lambda > 0$. Je-li $\lambda = 1$, pak f je eliptická, jinak je loxodromická.*

Důkaz. Nechť p, q jsou nějaké 2 pevné body f a $p \neq \infty$. Definujme si pomocné zobrazení $h \in \mathcal{M}_4^+$ následovně. Je-li $q \neq \infty$, pak definujme $h(x) = (x-p)(x-q)^{-1}$. Pokud $q = \infty$, položme $h(x) = x - p$. Položme dále $g := h \circ f \circ h^{-1}$. Snadno si rozmyslíme, že g fixuje body 0 a ∞. Pak ale dle tvrzení 3.3 je g ortogonální zobrazení složené s dilatací. Tedy je tvaru $g(x) = \lambda axb$, kde $\lambda > 0$ a a, b jsou jednotkové kvaterniony. Pak zřejmě pokud $\lambda \neq 1$, $g(x)$ konverguje k 0 (pro $\lambda < 1$), nebo k ∞ (pro $\lambda > 1$) pro každé $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Tudíž g a tedy i f jsou loxodromické. Je-li $\lambda = 1$, pak g je ortogonální zobrazení a jeho dynamika je jiná než u loxodromických transformací. Tedy je g a tím pádem i f eliptická transformace. $\square$

Seznam použité literatury

[1] Lounesto P.: *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[2] Lávička R., O'Farrell A. G. and Short I.: *Reversible maps in the group of quaternionic Möbius transformations*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **143** (2007), 57-69.

[3] Coxeter H.S.M.: *Quaternions and Reflections*, Am. Math. Monthly **53** (1946), 136-46.

[4] Parker J. R., Short I.: *Conjugacy classification of quaternionic Möbius transformations*, Computational Methods and Function Theory **9** (2009) (1), 13–25.

[5] Ratcliffe J. G.: *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York Inc., New York, 2006.

[6] Marková L.: *Konformní zobrazení nejen v rovině*, bakalářská práce MFF UK, Praha, 2008.

[7] Brenner J. L.: *Matrices of quaternions*, Pacific J. Maths **1** (1951), 329-335.

[8] Murnaghan F. D.: *The theory of group representations*, The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1938.

[9] Cho E.: *Euler's Formula and De Moivre's Formula for Quaternions*, Missouri Journal of Mathematical Sciences **11** (1999), 87-92.