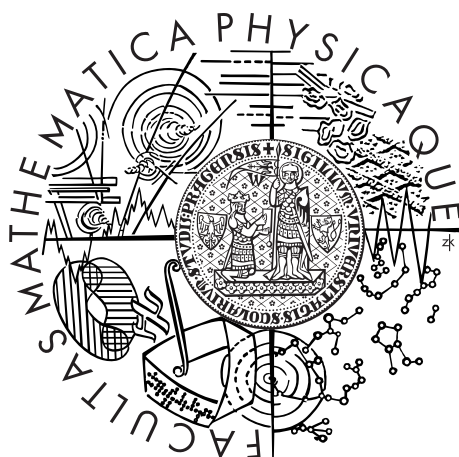


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Květa Cvrčková

Markovské procesy a teorie kreditních rizik

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Michaela Prokešová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: MFAPM

Praha 2012

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí své diplomové práce RNDr. Michaele Prokešové, Ph.D. za její ochotu, odborné vedení, věcné rady a čas strávený při konzultacích.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze, 12.4.2012

Květa Cvrčková

Název práce: Markovské procesy a teorie kreditních rizik
Autor: Květa Cvrčková
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Michaela Prokešová, Ph.D.

Abstrakt: Markovské řetězce začaly být v posledních letech hojně využívány k měření kreditního rizika. S jejich pomocí modelujeme pohyb a rozdělení klientů mezi jednotlivými ratingovými stupni. Využívány jsou však různé typy markovských řetězců. Cílem práce proto bude tyto typy představit spolu s jejich výhodami a nevýhodami. Zaměříme se především na různé metody odhadu parametrů a na testování hypotéz o těchto parametrech. Naše práce by měla čtenáři pomoci v rozhodování, který model markovského řetězce a kterou metodu odhadování použít na jím pozorovaná data.

Naše pozornost je zaměřena především na následující modely: markovský řetězec s diskretním časem, markovský řetězec se spojitým časem (odhadujeme nejen na základě spojitých, ale i diskretních dat) a navíc představujeme možnost využití semimarkovských řetězců a semiparametrického multiplikativního modelu rizika aplikovaného na intenzity přechodu.

V závěrečné části práce představené metody ilustrujeme na simulačních experimentech a studiích.

Klíčová slova: kreditní riziko, markovské řetězce, odhady v markovských řetězcích, pravděpodobnost defaultu

Title: Markov chains and credit risk theory
Author: Květa Cvrčková
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Michaela Prokešová, Ph.D.

Abstract: Markov chains have been widely used to the credit risk measurement in the last years. Using these chains we can model movements and distribution of clients within rating grades. However, various types of markov chains could be used. The goal of the theses is to present these types together with their advantages and disadvantages. We focus our attention primarily on various parameter estimation methods and hypotheses testing about the parameters. The theses should help the reader with a decision, which model of a markov chain and which method of estimation should be used for him observed data.

We focus our attention primarily on the following models: a discrete-time markov chain, a continuous-time markov chain (we estimate based on continuous-time observations even discrete-time observations), moreover we present an eventuality of using semi-markov chains and semiparametric multiplicative hazard model applied on transition intensities.

We illustrate the presented methods on simulation experiments and simulation studies in the concluding part.

Keywords: credit risk, markov chain, estimates in markov chains, probability of default

Obsah

Použité značení	3
Úvod	4
1 Markovské řetězce	6
1.1 Markovské řetězce s diskretním časem	6
1.2 Markovské řetězce se spojitým časem	6
1.2.1 Homogenní markovské řetězce	7
1.2.2 Nehomogenní markovské řetězce	7
2 Odhady	8
2.1 Odhad matice přechodu markovského řetězce s diskretním časem .	8
2.1.1 Homogenní případ	8
2.1.2 Nehomogenní případ	10
2.2 Odhad matice intenzit markovského řetězce se spojitým časem na základě spojitých pozorování	11
2.2.1 Výhody užití řetězce se spojitým časem	11
2.2.2 Homogenní případ	12
2.2.3 Nehomogenní případ	16
2.3 Odhad matice intenzit markovského řetězce se spojitým časem na základě diskretních pozorování	20
2.3.1 EM-algoritmus	21
2.3.2 Aplikace EM-algoritmu	22
2.3.3 Metoda uniformizace	23
2.3.4 Aplikace metody uniformizace	24
2.3.5 Shrnutí	25
2.4 Semimarkovské řetězce	27
2.4.1 Představení semimarkovských řetězců	27
2.4.2 Marginální rozdělení řetězce	28
2.4.3 Exponenciální rozdělení doby do změny	29
2.5 Semiparametrický multiplikativní model rizika	30
3 Testování hypotéz	34
3.1 Markovské řetězce s diskretním časem	34
3.1.1 Obecný χ^2 test	34
3.1.2 χ^2 test pro markovské řetězce	35
3.1.3 Aplikace	36
3.2 Markovské řetězce se spojitým časem	43
3.2.1 Test nezávislosti intenzity q_{ij} na proměnné Z	44
3.2.2 Aplikace	45
3.2.3 Další možné přístupy k testování	46
4 Simulace	47
4.1 Přesnost odhadu matice přechodu metodou kohorty	47
4.1.1 Výsledky jednoho simulačního experimentu	48
4.1.2 Výsledky simulační studie	49

4.1.3	Vliv velikosti portfolia na přesnost odhadů	51
4.2	Vliv délky nejmenšího rozlišovaného období na přesnost odhadu matice intenzit metodou dle Lando, Skodeberg	53
4.2.1	Výsledky jednoho simulačního experimentu	54
4.2.2	Výsledky simulační studie	55
4.3	Odhad matice přechodu metodou kohorty a pomocí matice intenzit	56
4.3.1	Výsledky jednoho simulačního experimentu	56
4.3.2	Výsledky simulační studie	58
4.4	Porovnání přesnosti odhadu matice přechodu metodou dle Lando, Skodeberg a metodou dle Bladt, Sorensen	58
4.4.1	Výsledky jednoho simulačního experimentu	59
4.4.2	Výsledky simulační studie	60
	Závěr	62
	Seznam použité literatury	64
	Příloha A	66
	Příloha B	68

Použité značení

$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$	množina přirozených čísel, přirozených čísel s nulou, celých čísel, reálných čísel
\cdot	operace násobení
$f^*(s)$	Laplaceova transformace funkce f v bodě s
X	markovský řetězec
S	množina stavů markovského řetězce
P	matice přechodu markovského řetězce
N	migrační matice
Q	matice intenzit markovského řetězce
I	jednotková matice
0	čtvercová matice, jejíž všechny členy jsou rovny 0
$\mathbb{E}(Y)$	střední hodnota náhodné veličiny Y
$ a $	absolutní hodnota čísla a
$\ \mathbf{M}\ $	eukleidovská norma matice \mathbf{M}
δ_{ij}	$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$
$I\{\text{vyraz}\}$	$I\{\text{vyraz}\} := \begin{cases} 1 & \text{pokud výraz v závorce platí} \\ 0 & \text{pokud výraz v závorce neplatí} \end{cases}$
$n_{i\bullet}$	$\sum_j n_{ij}$
$n_{\bullet j}$	$\sum_i n_{ij}$
χ_n^2	χ^2 (chí-kvadrát) rozdělení s n stupni volnosti
$\chi_n^2(\alpha)$	α -kvantil χ^2 rozdělení s n stupni volnosti

Úvod

V posledních 20 letech docházelo u bank k prudkému nárůstu expozice kreditnímu riziku a k rozvoji kreditních produktů. Banky se dostali do situace, kdy bylo nutné věnovat značnou pozornost nejen riziku tržnímu, ale nově i riziku kreditnímu. Docházelo tedy k vývoji nových metod analýz a měření tohoto rizika. Vhodně zvolené metody měření kreditního rizika začaly pro banku představovat značnou konkurenční výhodu.

V této oblasti se pro banky se staly klíčovými 2 faktory:

1. **odhad bonity klienta** (důvěryhodnost klienta, schopnost klienta splatit úvěr). Zde se používají především skóringové modely, jejichž výstupem je rating klienta¹- nejlepším klientům je přidělen nejvyšší rating, horší klienti získají rating nižší. V některých případech také ratingy neodhaduje banka, ale přebírá je od ratingových agentur, případně je klientům přiřazován rating přímo na základě regulačních pravidel.
2. **predikce vývoje splácení stávajících úvěrů**. Nejčastěji jsou využívány modely založené na predikci pravděpodobnosti defaultu (PD), ztráty v defaultu (LGD) a expozice v defaultu (EAD). Tato metoda je využita i pro výpočet regulačního kapitálového požadavku dle Basel II.

Do popředí se také dostává sledování a predikce defaultů klientů pomocí markovských řetězců. Předpokládáme, že pravděpodobnost defaultu klienta závisí pouze na jeho ratingu. Stav markovského řetězce v tomto případě odpovídají jednotlivým ratingům.

Markovské řetězce však mohou být v oblasti kreditního rizika použity nejen k predikci pravděpodobnosti defaultu. Často cena produktu (dluhopisu, kreditního derivátu) přímo závisí na ratingu firmy a my se zajímáme i o pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými ratingy. Dále můžeme pomocí markovských řetězců testovat, zda je z hlediska ratingových přechodů portfolio klientů homogenní, zda je platební schopnost klientů ovlivněna stavem ekonomického cyklu atd.

Ještě před dvaceti lety bylo využíváno pouze markovských řetězců s diskrétním časem - metody jejich odhadu jsou jednoduché, přímočaré, požadavkům na data lze relativně snadno vyhovět. I přes veškeré své výhody však často zůstávají nedostačující k modelování specifických situací (např. časový horizont kratší než 1 období). Postupně se proto začalo využívat i markovských řetězců se spojitým časem, přičemž byly představeny rozličné metody jejich odhadů. Některé z nich popisují odhady v situaci úplných, spojitých dat, některé se vymezují na data diskrétní. Podotkněme však, že tyto metody jsou často velice složité na implementaci.

Během posledních let bylo také navrženo mnoho statistických testů (různě vhodných), byly specifikovány obvyklé problémy odhadů a následně navrhovány postupy, jak tyto problémy překonat.

¹Některé banky také přímo hodnotí schopnost klienta splácet předem specifikovaný typ úvěru.

Cílem této práce je představit nejoblíbenější, dle našeho názoru nejdůležitější a nejvhodnější modely markovských řetězců využívané v kreditním riziku a zabývat se jejich výhodami a nevýhodami. Práce by měla čtenáři pomoci s rozhodováním, který z modelů použít pro jím pozorovaná data, jak odhad provést a případně jak řešit některé z nastalých problémů. Toto bude cílem druhé kapitoly.

Ve třetí kapitole se zaměříme na statistické testy. Ukážeme, jak ověřit předpoklady modelů, uvedeme i další testy. Vysvětlíme, proč některé z obecných testů markovských řetězců nejsou vhodné pro oblast kreditního rizika, případně naznačíme, jak je pro tuto oblast upravit. V literatuře je možno nalézt testy hypotéz proti různým alternativám a i my je zde prezentujeme, současně se však snažíme vysvětlit výhody a nevýhody těchto různých přístupů. Vzhledem k rozsahu práce uvádíme pouze vybrané testy, na další ještě odkazujeme. Upozorníme, že testy zde představené by neměly být jedinými provedenými testy, vždy je nutno zkoumat specifické vlastnosti pozorovaných dat.

Podotkneme závěrem, že v práci vycházíme jednak ze zdrojů základních, velice známých a ve své době často přelomových, jako například [5], [21], [22],[26] jednak ze zdrojů nejnovějších, méně rozšířených. Prezentujeme například metodu odhadu matice intenzit spojitého markovského řetězce na základě diskretních kreditních dat dle [9] z roku 2009, ale navíc ji vylepšujeme, zjednodušujeme dle článku [13] z roku 2011, neboť část metody uvedené v [9] je zbytečně složitá a nepřesná.

Doplňme, že vzhledem k rozsahu práce jsme se bohužel nemohli věnovat aplikacím prezentovaných markovských modelů. Zmiňme například výpočet kapitálového požadavku (popsaný např. v článku [12]), odhad a kalibrace výnosových křivek pro různé ratingové třídy (viz např. článek [26]) nebo stresové testování (např. [27]). Tento námět může posloužit jako téma další diplomové práce.

Nedílnou součástí práce jsou provedené simulační experimenty a malé simulační studie. Na příkladech se snažíme ukázat výhody a nevýhody vybraných prezentovaných metod. Zabýváme se především ilustrací přesnosti odhadů. Největší pozornost je věnována odhadu metodou kohorty, která je v praxi nejvíc využívána. Ukazujeme, proč volit nové, výpočetně náročnější metody, místo jednoduchých starších.

1. Markovské řetězce

Zde uvádíme seznam nejdůležitějších definic a vět z literatury, které v práci využíváme.

1.1 Markovské řetězce s diskrétním časem

Definice. Posloupnost celočíselných náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ se nazývá *markovský řetězec s diskrétním časem a množinou stavů*

$S = \{i \in \mathbb{Z} : P(X_n = i) > 0\}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$, jestliže platí

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad (1.1)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $x_0, \dots, x_{n-1}, i, j \in S$ taková, že $P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = i) > 0$.

Pravděpodobnost $p_{ij}(n) := P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ nazýváme *pravděpodobností přechodu ze stavu i do stavu j v čase n* , matici $\mathbf{P} = (p_{ij}(n))_{i,j \in S}$ označujeme jako *matici přechodu v čase n* . Vztah (1.1) nazýváme *markovskou vlastností*.

V celé naší práci budeme předpokládat, že množina stavů S je konečná.

Definice. Řekneme, že markovský řetězec s diskrétním časem je *homogenní*, jestliže pro libovolná $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $i, j \in S$ platí:

$$p_{ij}(n+m) = p_{ij}(n) = p_{ij}.$$

1.2 Markovské řetězce se spojitým časem

Definice. Systém celočíselných náhodných veličin $\{X(t), t \geq 0\}$ se nazývá *markovský řetězec se spojitým časem a množinou stavů*

$S = \{i \in \mathbb{Z} : P(X(t) = i) > 0\}$ pro nějaké $t \in [0, \infty)$, jestliže platí

$$P(X_t = j | X_s = i, X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_1} = x_1) = P(X_t = j | X_s = i) \quad (1.2)$$

pro všechna $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < s < t$ a všechna $x_1, \dots, x_n, i, j \in S$ taková, že $P(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n, X_s = i) > 0$.

Pravděpodobnost přechodu ze stavu i v čase s do stavu j ve čase t značíme $p_{ij}(s, t) := P(X_t = j | X_s = i)$. Matici $\mathbf{P}(s, t) = (p_{ij}(s, t))_{i,j \in S}$ opět nazýváme *maticí přechodu z času s do času t* , vztah (1.2) *markovskou vlastností*.

Definice. Řekneme, že markovský řetězec se spojitým časem je *homogenní*, jestliže pro libovolné $s \geq 0$, $t > 0$, $i, j \in S$ platí:

$$p_{ij}(s, s+t) = p_{ij}(t).$$

1.2.1 Homogenní markovské řetězce

Definice. Nechť $\mathbf{P}(t)$ je matice přechodu homogenního markovského řetězce se spojitým časem. Matice $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$, taková, že:

$$q_{ij} := \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} \quad \text{pro } i \neq j$$

$$q_{ii} := \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} = - \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

se nazývá *generátorem (maticí intenzit)* matice \mathbf{P} .

Připomeňme, že pro markovské řetězce s konečnou množinou stavů tyto limity vždy existují a jsou konečné. Členy na diagonále jsou nekladné a často jsou značeny jako $q_i := -q_{ii}$. (Tohoto značení budeme využívat i v naší práci)

Dle [25], Věty 3.10 platí

$$\mathbf{P}(t) = \exp(t\mathbf{Q}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^k t^k}{k!}. \quad (1.3)$$

Poznámka.

Předpokládejme, že známe matici \mathbf{Q} a chceme vypočítat matici $\mathbf{P}(t)$. Pro $t \in [0, \infty)$, můžeme vypočítat $\mathbf{P}(t)$ na základě vzorce (1.3). Jediným problémem je výpočet nekonečné sumy. V praxi však potřebujeme výsledky jen určité přesnosti a protože řada (1.3) konverguje, lze přičítat jednotlivé členy řady pouze dokud není splněno nějaké kritérium přesnosti, například dokud $\left\| \frac{\mathbf{Q}^{(k+1)} t^{(k+1)}}{(k+1)!} - \frac{\mathbf{Q}^k t^k}{k!} \right\| > \epsilon$ pro nějaké předem dané $\epsilon > 0$.

Věta 1. Je-li $q_i = 0$, potom $p_{ii}(t) = 1$ pro všechna $t \geq 0$. Je-li $0 < q_i < \infty$, má doba, po kterou řetězec setrvává ve stavu i , exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{q_i}$.

Důkaz.: Viz [25].

1.2.2 Nehomogenní markovské řetězce

Definice. Nechť $\mathbf{P}(s, t)$ je matice přechodu nehomogenního markovského řetězce se spojitým časem. Proces $\mathbf{Q} = \{\mathbf{Q}(t), t \geq 0\}$, kde $\mathbf{Q}(t) := (q_{ij}(t))_{i,j \in S}$ a

$$q_{ij}(t) := \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{p_{ij}(t, t+h)}{h} \quad \text{pro } i \neq j$$

$$q_i(t) = (-1) \cdot q_{ii}(t) := \sum_{j \neq i} q_{ij}(t)$$

se nazývá *procesem intenzit* matice \mathbf{P} .

Dle [21] (str. 441) platí, že

$$P\left(X(u) = i \text{ pro všechna } u \in (s, t] \mid X(s) = i\right) = \exp\left(- \int_s^t q_i(u) du\right).$$

2. Odhady

2.1 Odhad matice přechodu markovského řetězce s diskretním časem

V této kapitole představíme nejjednodušší (a v praxi nepoužívanější) metodu modelování přechodů mezi ratingy pomocí markovského řetězce s diskretním časem. Pravděpodobnosti přechodu v tomto modelu se odhadují *metodou kohorty*.

Předpokládáme, že prvky $1, \dots, m$ stavové množiny S označují jednotlivé ratingové stupně (postupně od nejvyššího ratingového stupně po default). Výraz $p_{ij}(n)$ bude označovat pravděpodobnost, že klient, který má v čase n rating i , bude mít v čase $n + 1$ rating j ¹. Předpokládáme, že stav default je absorbní, tedy $p_{mj}(n) = 0$ pro $\forall j \neq m$, $p_{mm}(n) = 1$ ².

2.1.1 Homogenní případ

Na začátek uvedeme metodu odhadu pro **homogenní** markovský řetězec. Předpokládáme, že změny ratingu nezávisí na čase, tj. že pravděpodobnosti přechodu jsou v čase konstantní - matematicky vyjádřeno: $p_{ij}(n + m) = p_{ij}(n) = p_{ij}$, pro všechna $i, j \in S, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$. Matice přechodu, kterou chceme odhadnout, má tedy tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m-1\ 1} & p_{m-1\ 2} & \dots & p_{m-1\ m} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále předpokládejme, že máme k dispozici následující realizaci homogenního markovského řetězce délky $n + 1$:

$$X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n.$$

Označme $\mathbf{N} = (n_{ij})_{i,j \in S}$ migrační matici, tj. matici přechodových četností mezi jednotlivými stavy (n_{ij} odpovídá počtu sledovaných přechodů mezi stavy i a j).

Budeme odhadovat metodou maximální věrohodnosti. Logaritmická věrohod-

¹Nejčastějším obdobím, přes které odhadujeme, bývá jeden rok, méně často jeden měsíc. Ostatní možnosti se v praxi vyskytují zřídka.

²Tento předpoklad však v praxi často není splněn. Klient může své závazky nakonec zaplatit, ač banka již tuto možnost nepředpokládala a přidělila klientovi rating „default“. Některé z možností, jak na tento problém nahlížet, jsou uvedeny například v [12].

nostní funkce má tvar:

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{P}; X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \ln P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \\
 &= \ln p_{x_0} p_{x_0 x_1} \cdots p_{x_{n-1} x_n} \\
 &= \ln p_{x_0} \prod_{ij \in S} p_{ij}^{n_{ij}} = \ln p_{x_0} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m n_{ij} \ln p_{ij} \quad (2.1) \\
 &= \ln p_{x_0} + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{m-1} n_{ij} \ln p_{ij} + n_{im} \ln \left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_{ij} \right) \right). \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Maximalizací (2.2) vzhledem k parametrům p_{ij} získáváme následující odhady:

$$\bullet \quad \hat{p}_{ij} = 0, \quad \text{pokud } n_{ij} = 0, \quad (2.3)$$

$$\bullet \quad \hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} \quad \text{jinak.} \quad (2.4)$$

Poznámka.

Předpokládejme, že chceme odhadnout pouze parametry p_{ij} a nepotřebujeme znát odhad počátečních pravděpodobností p_i . Potom je výše uvedený postup je ekvivalentní tomu, že $X_0 = x_0$ považujeme za dané, neboli že pracujeme s věrohodností

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{P}; X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= L(\mathbf{P}; X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | X_0 = x_0) \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m n_{ij} \ln p_{ij}.
 \end{aligned}$$

Právě v tomto tvaru je věrohodnostní funkce často uváděna. Stejně tak i my budeme v našem textu uvádět další věrohodnostní funkce v tomto tvaru.

Poznámka.

Ukázali jsme si řešení pro případ, kdy známe jednu (dostatečně dlouhou) realizaci markovského řetězce a chceme odhadnout matici \mathbf{P} . V praxi však máme k dispozici více kratších realizací (jednoho) řetězce. Situaci lze řešit jednoduše.

Označme si \mathbf{X}^k realizaci řetězce klienta k , ($k = 1, \dots, K$) a n_{ij}^k počet přechodů mezi stavy i a j tohoto klienta. Za předpokladu nezávislosti jednotlivých realizací a za předpokladu, že všechny realizace jsou realizacemi toho samého markovského řetězce platí:

$$L(\mathbf{P}; \mathbf{X}^1 = \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{X}^n = \mathbf{x}^n) = \prod_{k=1}^K \prod_{i,j \in S} p_{ij}^{n_{ij}^k} = \prod_{i,j \in S} p_{ij}^{\sum_k n_{ij}^k} \quad (2.5)$$

Řešením je tedy zřejmě odhad

$$\bullet \quad \hat{p}_{ij} = 0, \quad \text{pokud } n_{ij} = 0, \quad (2.6)$$

$$\bullet \quad \hat{p}_{ij} = \frac{\sum_k n_{ij}^k}{\sum_j \sum_k n_{ij}^k} \quad \text{jinak.} \quad (2.7)$$

Upozorníme, že oba výše uvedené předpoklady by měly být ověřeny. Často se například mylně předpokládá, že firmy z různých oborů činnosti mají stejnou matici přechodu. Pro testování této a dalších hypotéz viz kapitolu 3.1.

Jelikož je výše uvedené odvození jednoduché, nebudeme ho pro další typy markovských řetězců uvádět.

Poznámka.

Podotkněme, že ověřeny by měly být i předpoklady markovské vlastnosti a homogenity. Některé z možných statistických možných testů jsou uvedeny v kapitole 3.1.

Poznámka.

Konzistence odhadů pravděpodobností p_{ij} je pro jednu dlouhou realizaci řetězce $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ založena na ergodických větách o četnostech návratů (viz např. [24], kapitolu 2.10) a bez restartování řetězce je splněna pouze pro trvalé stavy. Proto, když máme v našem modelu absorpční stav „default“, jsou odhady pravděpodobností přechodu (2.6), (2.7) konzistentní pro $K \rightarrow \infty$.

Poznámka.

Matice přechodu mezi ratingy má obvykle následující vlastnosti:

- Jak jsme již zmínili, stav default je považován za absorpční, platí tedy $p_{\text{default default}} = 1$, pravděpodobnosti přechodu z defaultu do ostatních stavů jsou nulové.
- Nejvyšší je pravděpodobnost, že se klientův rating nezmění, tj. nejvyššími členy řádku jsou členy diagonální (často jsou vyšší než 0,5).
- Pravděpodobnost, že se klientův rating změní o méně stupňů je vyšší, než že se změní o více stupňů. Často se pravděpodobnosti přechodu mezi vzdálenými ratingy blíží nule. Upozorníme, že právě proto potřebujeme velké množství pozorování, aby náš odhad byl dostatečně přesný - předpokládejme například, že skutečná pravděpodobnost přechodu z ratingu A do ratingu D je 0,01. My jsme však napozorovali pouze 50 přechodů z ratingu A, přičemž nedošlo ani k jednomu přechodu z A do D. Odhadujeme tedy $\hat{p}_{AD} = 0$. Problém je většinou nutné řešit u vyšších ratingových tříd a přechodů do defaultu. Měli bychom tedy vždy zkoumat nejen celkový počet sledovaných klientů, ale i počet pozorovaných přechodů a účel odhadování matice přechodu. (Přesností odhadu metodou kohorty se zabýváme v kapitole 4.1).

2.1.2 Nehomogenní případ

Rozšířme si odhady markovských řetězců s diskrétním časem ještě o nehomogenní případ.³ Makroekonomická situace státu se mění a s ní i schopnost klientů splácet své závazky. Platí tedy, že matice přechodu v čase l nemusí být stejná jako matice přechodu v čase $l + k$ (tj. $\mathbf{P}(l) \neq \mathbf{P}(l + k)$ pro nějaká $l \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$). Řešením je odhadnout matici přechodu pro každý časový okamžik $l \in \mathbb{N}_0$ zvlášť. Označíme-li

³Stále však předpokládáme ekvidistatní časová pozorování.

$n_{ij}(l)$ počet firem s ratingem i v čase l a ratingem j v čase $l + 1$, pak zřejmě můžeme odhadovat:

$$\bullet \hat{p}_{ij}(l) = 0, \quad \text{pokud } n_{ij}(l) = 0, \quad (2.8)$$

$$\bullet \hat{p}_{ij}(l) = \frac{n_{ij}(l)}{n_{i\bullet}(l)} \quad \text{jinak.} \quad (2.9)$$

Poznámka.

Popišme navíc postup řešení pro případ (diskrétních) neekvidistantních časových pozorování. Předpokládejme, že pro klienty známe přechody mezi ratingovými stupni mezi daty l a u a zároveň mezi daty u a v ($l < u < v$). Označme $\mathbf{P}(l, u)$ matici přechodu od data l do data u . Pak lze odhadovat metodou kohorty:

$$\bullet \hat{p}_{ij}(l, u) = 0, \quad \text{pokud } n_{ij}(l, u) = 0,$$

$$\bullet \hat{p}_{ij}(l, u) := \frac{n_{ij}(l, u)}{n_{i\bullet}(l, u)} \quad \text{jinak,}$$

kde $n_{ij}(l, u)$ značí počet přechodů z i do j od času l do času u . Podobně odhadneme matici $\mathbf{P}(u, v)$

Dle [25], str. 20 platí $\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{P}(l, u)\mathbf{P}(u, v)$ pro $l < u < v$. Pokud tedy chceme znát odhad matice přechodu od času l do času v , můžeme jej získat jako $\hat{\mathbf{P}}(l, v) = \hat{\mathbf{P}}(l, u)\hat{\mathbf{P}}(u, v)$.

Odhady pro nehomogenní případ nejsou v praxi vzhledem k nedostatku dat příliš využívány. Měli by však být minimálně využity pro testování homogenity řetězce. Pro některé z testů a pro návrhy řešení nesplnění požadavku homogenity viz kapitolu 3.1.

2.2 Odhad matice intenzit markovského řetězce se spojitým časem na základě spojitých pozorování

Většina ratingových agentur a bank, které využívají markovské k řetězce k modelování kreditního rizika, volí jejich diskrétní (homogenní) variantu. Jejimi výhodami jsou mimo jiné jednoduchost odhadování, relativní nenáročnost na data a snadná interpretovatelnost matic přechodu.

Tyto instituce však často znají i přesná data (časové okamžiky), kdy je firmám měněn rating, mají tedy přístup i ke spojitým datům o ratingových přechodech. V tomto případě může být vhodné zvolit k modelování markovské řetězce se spojitým časem, neboť použitím řetězců s diskrétním časem dochází ke ztrátě informace.

2.2.1 Výhody užití řetězce se spojitým časem

Uveďme si některé z výhod použití markovského řetězce se spojitým časem oproti řetězci s diskrétním časem.

Řešení rovnice (2.2) na straně 9 ukazuje, že pokud během sledovaného období nedojde k žádnému přechodu z ratingu i do ratingu j , odhadujeme $\hat{p}_{ij} = 0$. Jak

jsme již uvedli v poznámce na straně 10, k některým přechodům však dochází zřídka a nemusí tedy být zrovna v pozorovaném vzorku zachyceny. Odhad pomocí matice intenzit však tento problém částečně řeší. Pokud došlo ve sledovaném období k přechodům z ratingu 1 do ratingu 2 a zároveň z 2 do 3, odhadnutá intenzita přechodu mezi ratingy 1 a 3 nebude nulová, tedy ani pravděpodobnost přechodu mezi ratingy 1 a 3 nebude nulová. **Velmi zjednodušeně řečeno**, odhad matice přechodu pomocí matice intenzit nám vyhladí odhad matice \mathbf{P} metodou kohorty.

Mezi další velké výhody patří, že pokud máme odhadnutou matici intenzit, můžeme velice snadno dopočítat matici přechodu na libovolně dlouhé období ⁴, tj. dokonce na období kratší než jeden rok (resp. 1 měsíc).

Modelování řetězcem se spojitým časem nám dále umožňuje velice precizní formulování a testování statistických hypotéz. Testovat lze např. zda nedochází k tzv. ratingovému driftu (závislost na předchozích ratingích), zda je doba do změny ratingu nezávislá na trendu přidělovaných ratingů, zda je řetězec homogenní a nezávislý na ekonomickém cyklu atd. (Pro některé z těchto testů viz kapitolu 3.2).

Některé z dalších výhod jsou uvedeny například v [21].

2.2.2 Homogenní případ

Cílem této kapitoly bude popsat odhad matice přechodu pro daný časový interval. Předpokládáme homogenitu, tj. že změny ratingu nezávisí na čase, tedy platí $\mathbf{P}(s, s+t) = \mathbf{P}(t)$ pro všechna $s \geq 0$, $t > 0$.

V kapitole 1.2 jsme uvedli, že platí $\mathbf{P}(t) = \exp(t\mathbf{Q})$. Stačí tedy nejprve odhadnout matici intenzit \mathbf{Q} a odhad $\mathbf{P}(t)$ pak získáme pomocí této rovnice.

Věnujme se chvíli interpretaci matice \mathbf{Q} . Pravděpodobnost setrvání ve stavu i po dobu t má exponenciální rozdělení s parametrem $q_i := -q_{ii}$, tj. je rovna $\exp(-q_i t)$. Pravděpodobnost skoku ze stavu i do stavu j , za podmínky, že přechod ze stavu i nastal je $\frac{q_{ij}}{-q_{ii}}$, $i \neq j$.

Zformulujme si podmínky a značení samotného odhadu. Proces přechodů mezi ratingy modelujeme markovským řetězcem se spojitým časem $\mathbf{X} = \{X(t), t \geq 0\}$ s diskrétní množinou stavů $S = \{1, \dots, m\}$. Předpokládáme, že máme k dispozici K nezávislých realizací tohoto řetězce:

$$\mathbf{X}^1 = \mathbf{x}^1, \mathbf{X}^2 = \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{X}^K = \mathbf{x}^K,$$

kde $\mathbf{X}^k = \{X^k(t), t \in [0, \tau]\}$ pro $\tau > 0$. V kontextu kreditních ratingů je tedy S množina všech možných ratingů a \mathbf{X}^k kreditní historie k -tého klienta nebo firmy.

Chceme odhadnout matici intenzit $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ řetězce $\mathbf{X} = \{X(t), t \geq 0\}$ metodou maximální věrohodnosti. Věrohodnostní funkce má tvar:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Q}; \mathbf{X}^1 = \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{X}^K = \mathbf{x}^K) &= \prod_{k=1}^K \prod_{i=1}^m \prod_{j \neq i} q_{ij}^{n_{ij}^k(\tau)} \exp(-q_{ij} R_i^k(\tau)) \\ &= \prod_{i=1}^m \prod_{j \neq i} q_{ij}^{n_{ij}(\tau)} \exp(-q_{ij} R_i(\tau)), \end{aligned} \quad (2.10)$$

⁴Předpokládáme-li homogenitu v tomto období.

kde $n_{ij}^k(t)$ značí počet přechodů ze stavu i do stavu j v časovém intervalu $[0, t]$ procesu \mathbf{X}^k ,

$$R_i^k(t) = \int_0^t I\{x_s^k = i\} ds$$

je čas strávený ve stavu i do času t procesu \mathbf{X}^k , a

$$n_{ij}(t) = \sum_{k=1}^K n_{ij}^k(t), \quad R_i(t) = \sum_{k=1}^K R_i^k(t).$$

Maximalizací (2.10) dostaneme :

$$\bullet \quad \hat{q}_{ij}(\tau) = \frac{n_{ij}(\tau)}{R_i(\tau)}, \quad \text{pokud } i \neq j, \quad (2.11)$$

$$\bullet \quad \hat{q}_{ii}(\tau) = - \sum_{j \neq i} \hat{q}_{ij}(\tau) \quad \text{jinak.} \quad (2.12)$$

Poznámka.

Přestože jsme uvedli odhad pro markovské řetězce se spojitým časem na základě spojitých pozorování, ve skutečnosti pozorování spojitá nejsou. Nejmenší období, které rozlišujeme je obvykle jeden den. Uvažujeme-li však roční odhady, dělení na dny je dostačující a pozorování za spojitá považovat můžeme. (V kapitole 4.2 je na příkladě ukázán vliv délky nejmenšího rozlišovaného intervalu na přesnost odhadu matice \mathbf{Q} touto metodou.)

Poznámka.

V praxi často dochází k tomu, že rating některých klientů známe pouze pro část období $[0, \tau]$, na základě kterého matici \mathbf{Q} odhadujeme⁵. Při odhadu máme tedy k dispozici realizace $\mathbf{X}^k = \{X^k(t), t \in [\sigma^k, \tau^k]\}$, kde $0 \leq \sigma^k < \tau^k \leq \tau$. Toto omezení zřejmě nemá vliv na tvar řešení (2.11), (2.12).

Ukažme si nyní na příkladech možné rozdíly mezi odhadem matice přechodu \mathbf{P} metodou kohorty a pomocí matice intenzit markovského řetězce se spojitým časem. První příklad je pouze ilustrativní, vysvětlujeme možné rozdíly. Druhý příklad byl převzat z [21], kapitol 2. a 3. Popisuje reálnou situaci na reálných datech. Nebudeme zde prezentovat popis dat ani odhadnutou matici přechodu. Uvedeme pouze nejdůležitější závěry⁶.

Příklad 1.

Uvažujme ratingový systém se třemi ratingy - A, B a defaultním ratingem D. Předpokládejme, že po dobu jednoho roku pozorujeme 20 firem. 10 firem má na začátku roku rating A, 10 rating B.

- Jedné firmě s ratingem A je po 8 měsících změněn rating na B.
- Jedné firmě s ratingem B je po 6 měsících změněn rating na A.

⁵Stávající klienti mohou banku opustit, naopak během období mohou přijít klienti noví.

⁶Příklad jsme se zde rozhodli uvést, protože nemáme k dispozici reálná data, ale chceme upozornit na časté praktické problémy odhadu markovského řetězce se spojitým časem, které lze jen těžko prezentovat simulací dat.

- Dvě firmy s ratingem B zdefaultují. Jedna po 2 měsících, druhá po 4 měsících.

Řešení:

Počítáme tedy

$$\hat{q}_{AB} = \frac{1}{9 + 8/12 + 6/12} \doteq 0,098. \quad (2.13)$$

Postupně dopočítáme i další členy matice $\hat{\mathbf{Q}}$ a dostáváme

$$\hat{\mathbf{Q}} \doteq \begin{pmatrix} -0,098 & 0,098 & 0 \\ 0,111 & -0,333 & 0,222 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a následně

$$\hat{\mathbf{P}}(1) \doteq \begin{pmatrix} 0,91 & 0,08 & 0,01 \\ 0,09 & 0,72 & 0,19 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metodou kohorty získáváme

$$\hat{\mathbf{P}} \doteq \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0 \\ 0,10 & 0,70 & 0,20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že metoda kohorty nezachytila riziko defaultu u firem s ratingem A. Naopak odhadem pomocí matice intenzit získáváme $\hat{p}_{AD}(1) > 0$. Během roku byly pozorovány přechody z A do B a z B do D, tedy logicky může během roku dojít i k přechodu z A do D. Proto se odhad pomocí matice intenzit jeví jako vhodnější.

Uvažujme nyní situaci stejnou jako výše, pouze s rozdílem, že k defaultu firem s ratingem B nedošlo po 2, resp. 4 měsících, ale po 10, resp. 11 měsících. V tomto případě dostáváme

$$\hat{\mathbf{P}}(1) \doteq \begin{pmatrix} 0,91 & 0,08 & 0,01 \\ 0,08 & 0,75 & 0,17 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tedy odhad jiný než výše uvedený. Došlo ke změně u ratingové kategorie B, ale byla ovlivněna i kategorie A. Naopak odhad matice \mathbf{P} metodou kohorty se nemění, zůstává stejný. U odhadu pomocí matice intenzit má tedy čas, po kterou má firma daný rating, vliv na odhadnuté pravděpodobnosti přechodu.

Poznámka.

Dodejme, že v praxi jsou u bank časté dva způsoby přehodnocování ratingů:

- K přehodnocení schopnosti klienta splnit své závazky dochází automaticky každý měsíc. Při dostatečném množství dat a jednorocním období, přes které odhadujeme, můžeme považovat řetězec se spojitým časem za homogenní a preferujeme tedy modelování pomocí markovského řetězce se spojitým časem⁷.

⁷Při rozhodování, který model zvolit, je samozřejmě nutné také posoudit účel odhadu a další faktory

- Části klientů je přehodnocen rating k náhodnému datu během roku, tedy doby přehodnocení mají rovnoměrné rozdělení (k přehodnocení dojde na základě nějaké „akce“ - žádosti klienta o nový úvěr, nesplácení dohodnutých splátek, významné změně v situaci klienta). Druhé skupině (případně všem klientům) je přehodnocen rating jednou v roce k vybranému datu. V tomto případě tedy není splněna markovská vlastnost pro markovské řetězce se spojitým časem, doba do změny nemá exponenciální rozdělení, volíme tedy markovské řetězce s časem diskrétním.

Příklad 2.

Cílem této práce je mimo jiné porovnat různé modely markovských řetězců. V kapitole 4.3 ukážeme porovnání odhadu metodou kohorty a pomocí matice intenzit markovského řetězce se spojitým časem na simulovaných datech. V praxi však často musíme řešit jiné problémy, než ty, které lze ilustrovat v teoretických simulacích. Jelikož k dispozici reálná data nemáme, uvedeme závěry ze studie provedené v [21], kapitolách 2. a 3.

Studie byla provedena na datech získaných od ratingové agentury S&P z let 1988-1998. Zahrnula více než 3000 firem, většinu tvořily firmy z USA. Cílem bylo odhadnout jednorochní matici přechodu \mathbf{P} , resp. $\mathbf{P}(1)$. Nebudeme uvádět další detaily popisu dat, detaily drobných úprav metod odhadů, ani celkové výsledné odhady matic. Upozorníme pouze na nejdůležitější závěry.

Dle [21] můžeme jako největší rozdíl prezentovat, že u odhadu pomocí matice intenzit pravděpodobnost defaultu nejvyšších ratingových kategorií není nulová (je rovna 0,0001). Důvodem mohou být případy uvedené v příkladu 1.

Označme default ratingem D a rating o stupeň lepší než default písmenem C . Pak dalším, a podle nás důležitějším, zjištěním je, že odhad pravděpodobnosti defaultu z ratingu C je $\hat{p}_{CD} \doteq 0,20$ dle metody kohorty a $\hat{p}_{CD}(1) \doteq 0,38$ pomocí matice intenzit, tedy téměř dvojnásobný!

Je to pravděpodobně způsobeno tím, že mnoho firem přechází během roku na velmi krátkou dobu do ratingu C a po velmi krátké době defaultuje. Vysvětleme tuto situaci podrobněji.

V praxi často můžeme firmy s ratingem C rozdělit na dvě skupiny:

- firmy, jejichž situace je konstantně špatná a mají rating C po dlouhou dobu a
- firmy, jejichž situace se najednou začne prudce zhoršovat a pouze na krátkou dobu „skočí“ do ratingu C a pak zdefaultují.

Všimněme si, že v tomto případě odhad metodou kohorty zachytí především firmy z první skupiny, jejichž jednorochní pravděpodobnost defaultu je nižší. Naopak případy z druhé skupiny velice ovlivní odhad pomocí matice intenzit - každá z firem z druhé skupiny bude zahrnuta a pravděpodobnost defaultu $q_{CD} = \frac{\text{počet přechodu z } C \text{ do } D}{\text{čas strávený v } C}$ bude vysoká, neboť s každou firmou z druhé skupiny přibude do čitatele jednotka a ve jmenovateli přibude pouze krátký časový úsek. Připomeňme, že toto je pouze jedno z možných vysvětlení.

V našem případě (a v mnohých podobných případech, kdy se odhad matice přechodu pomocí obou metod liší) je nutné se zamýšlet nad tím:

- **zda jsou splněny předpoklady k odhadu.** Hledejme, čím je odlišnost způsobena a na základě toho provádějme testy markovské vlastnosti a homogenity oproti vhodným alternativám. Některé z testů jsou uvedeny například v kapitole 3.2. Podotkněme, že pokud je vysvětlení rozdílnosti odhadů q_{CD} uvedené výše pravdivé, pak není splněn předpoklad markovské vlastnosti, neboť u obou skupin má doba do změny ratingu jiné rozdělení. Dodejme, že v [21] byly provedeny testy předpokladů a bylo nakonec prokázáno, že neplatí ani markovská vlastnost, ani homogenita.
- **k čemu odhad potřebujeme** - pokud potřebujeme znát pouze jedno-roční matici přechodu, doporučovali bychom využít odhadu metodou kohorty - rozdíly v míře defaultu u vyšších ratingových kategorií nejsou příliš významné (viz odhadnutou matici přechodu v [21], 430), odhadnutá jedno-roční míra defaultu ratingového stupně C pomocí matice intenzit je však zcela nepřiměřená (z pozorovaných dat plyne, že pouze 20 % klientů s ratingem C zdefaultovalo v horizontu 1 roku, nikoli 38%). Podotkněme, že výběr metody by měl záviset i na počátečním rozdělení ratingů⁸ a mnohých dalších věcech.

Pokud však potřebujeme provádět simulace ve smyslu, že potřebujeme generovat realizace markovského řetězce se spojitým časem, může být vhodné využít odhadnutou matici \mathbf{Q} . Další, a často lepší možností v případě, kdy není splněna markovská vlastnost pro markovské řetězce se spojitým časem, může být využít pouze diskrétně pozorovaných (jednorozhodných) dat a matici intenzit odhadnout metodou dle Blatt a Sorensen [8], [9] prezentovanou v kapitole 2.3.

2.2.3 Nehomogenní případ

Z dlouhodobého hlediska je nepravděpodobné, že by markovský řetězec popisující chování ratingů byl homogenní. S makroekonomickou situací se mění platební schopnost dlužníků. Tento předpoklad je velmi omezující. Ukažme si proto nyní, jakým způsobem lze odhadovat řetězce nehomogenní. Naším cílem bude tedy odhadnout matici přechodu z času s do času t označovanou jako $\mathbf{P}(s, t)$. V [21] je prezentován odhad dle Aalen-Johansen. Tuto metodu si nejdříve představíme teoreticky a následně ji aplikujeme na náš problém. Podotkněme ještě, že následující definice a věty byly převzaty z [4], kapitol II.6 a IV.4 a [25].

V následujícím textu bude \mathfrak{S} značit interval $[0, \tau)$ nebo $[0, \tau]$, kde τ je dané a $0 < \tau \leq \infty$.

Definice. Nechť $\mathbf{U}(t), t \in \mathfrak{S}$ je čtvercová matice zprava spojitých funkcí majících limity zleva v každém bodě \mathfrak{S} a lokálně omezený rozptyl. Pak definujeme integrální součin \mathbf{U} přes intervaly $[0, t], t \in \mathfrak{S}$

$$\mathbf{V} = \prod (\mathbf{I} + d\mathbf{U})$$

⁸Pokud máme například v portfolio málo klientů s ratingem C a predikujeme pouze v horizontu jednoho roku, nepřiměřená míra defaultu u ratingu C nám nemusí příliš vadit.

jako:

$$\mathbf{V}(t) = \prod_{s \in (0, t]} (\mathbf{I} + \mathbf{U}(ds)) = \lim_{\max |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0} \prod (\mathbf{I} + \mathbf{U}(t_i) - \mathbf{U}(t_{i-1})), \quad (2.14)$$

kde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ je dělení intervalu $[0, t]$ a definujeme $\mathbf{U}(0) = \mathbf{0}$.

Poznámka.

Pokud jsou funkce $\mathbf{U}(t)$ skokovitými funkcemi, lze vzorec (2.14) přepsat jako

$$\mathbf{V}(t) = \prod_{i=1}^n (\mathbf{I} + \mathbf{U}(t_i) - \mathbf{U}(t_{i-1})),$$

kde $0 = t_0$ a $(t_0 <) t_1 < \dots < t_n (\leq t)$ jsou časy skoků.

Definice. Řekneme, že $m \times m$ maticová funkce \mathbf{A} je lokálně konečnou *mírou intenzit* na intervalu \mathfrak{I} , pokud

- $A_{hj}(t)$, $h \neq j$ jsou neklesající zprava spojitě funkce s limitami zleva nulové k času 0,
- $A_{hh}(t) = -\sum_{j \neq h} A_{hj}(t)$ a
- $\Delta A_{hh}(t) = A_{hh}(t) - \lim_{s \rightarrow 0^-} A_{hh}(t+s) \geq -1$ pro všechna t .

Věta 2. *Nechť maticová funkce \mathbf{A} je mírou intenzit. Definujme*

$$\mathbf{P}(s, t) = \prod_{(s, t]} (\mathbf{I} + d\mathbf{A}), \quad s \leq t; \quad s, t \in [0, \infty).$$

Pak \mathbf{P} je maticí přechodu markovského řetězce se stavovým prostorem $\{1, \dots, m\}$ a mírou intenzit \mathbf{A} .

Předpokládejme nyní nehomogenní markovský řetězec se spojitým časem $\{X(t), t \geq 0\}$ s množinou stavů $S = \{1, \dots, m\}$, maticí přechodu $\mathbf{P}(s, t)$ a procesem intenzit $\mathbf{Q} = \{\mathbf{Q}(t), t \geq 0\}$, $\mathbf{Q}(t) = (q_{ij}(t))_{i, j \in S}$ definovaným v kapitole 1.2.2. Dále předpokládejme, že známe K realizací tohoto procesu:

$$\mathbf{X}^1 = \mathbf{x}^1, \mathbf{X}^2 = \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{X}^K = \mathbf{x}^K,$$

kde $\mathbf{X}^k = \{X^k(t), t \in [0, \tau]\}$.

Definujme si:

- $a_{ij}(t) = \int_0^t q_{ij}(s) ds$,
- $a_{ij}(t) = -\sum_{j \neq i} a_{ij}(t)$.

Pak proces $\mathbf{A} = \{\mathbf{A}(t), t \geq 0\}$, kde $\mathbf{A}(t) := (a_{ij}(t))_{i, j \in S}$, splňuje požadavky na míru intenzit. Z Věty 2 a z poznámky na straně 17 plyne, že:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s, t) &= \prod_{(s, t]} (\mathbf{I} + d\mathbf{A}), \quad s \leq t; \quad s, t \in [0, \tau] \\ &= \prod_{l=1}^n (\mathbf{I} + \mathbf{A}(t_l) - \mathbf{A}(t_{l-1})), \end{aligned} \quad (2.15)$$

kde $0 = t_0$, a $t_1 < \dots < t_n$ jsou pozorované časy skoků.

Abychom získali odhad matice $\mathbf{P}(s, t)$, stačí tedy odhadnout matice $\mathbf{A}(t_i)$. K tomu použijeme metodu Nelson-Aalen převzatou z [4]. Doplníme, že asymptotické vlastnosti tohoto odhadu, jeho teoretické odvození a další detaily lze nalézt opět v [4], kapitole IV.4. Nyní označme:

- $n_{ij}(u)$, $i \neq j$ počet pozorovaných přechodů z i do j do času u ,
- $Y_i(t) \leq K$ počet realizací, které byly těsně před časem t ve stavu i , tj. pro které $\lim_{u \rightarrow t^-} X_u^k = i^9$.

Pak můžeme odhadovat:

$$\hat{a}_{ij}(t) = \int_0^t \frac{I \{Y_i(u) > 0\}}{Y_i(u)} dn_{ij}(u) \quad \text{pro všechna } i \neq j,$$

$$\hat{a}_{ii}(t) = - \sum_{j \neq i} \hat{a}_{ij}(t).$$

Označíme-li nyní $\hat{\mathbf{A}}(s, t) := \hat{\mathbf{A}}(t) - \hat{\mathbf{A}}(s)$, můžeme dle (2.15) psát:

$$\hat{\mathbf{P}}(s, t) = \prod_{l=1}^n \left(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{A}}(t_{l-1}, t_l) \right),$$

přičemž platí

$$\hat{a}_{ij}(t_{l-1}, t_l) = \int_{t_{l-1}}^{t_l} \frac{I \{Y_i(u) > 0\}}{Y_i(u)} dn_{ij}(u) = \frac{n_{ij}(t_{l-1}, t_l]}{Y_i(t_l)} \quad \text{pro všechna } i \neq j,$$

$$\hat{a}_{ii}(t_{l-1}, t_l) = - \sum_{j \neq i} \hat{a}_{ij}(t_{l-1}, t_l),$$

kde $n_{ij}(t_{l-1}, t_l]$ značí počet přechodů z i do j mezi časy t_{l-1} a t_l včetně.

Tento odhad odpovídá odhadu prezentovanému v [21]. Shrňme si nakonec, jak bude vypadat náš odhad z pohledu kreditního rizika. Předpokládejme, že chceme odhadnout matici přechodu $\mathbf{P}(s, t)$ mezi daty s a t . Označme $t_0 := s$, N počet dní, kdy došlo k alespoň jedné změně ratingu a t_1, \dots, t_N data změn ratingu mezi daty s a t (tj. data, kdy již mají firmy nový rating)¹⁰. Pak můžeme $\hat{\mathbf{P}}(s, t)$ odhadnout jako:

$$\hat{\mathbf{P}}(s, t) = \prod_{l=1}^N \left(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{A}}(t_{l-1}, t_l) \right), \quad (2.16)$$

kde

$$\hat{\mathbf{A}}(t_{l-1}, t_l) = \begin{pmatrix} \frac{-N_{1\bullet}(t_{l-1}, t_l)}{Y_1(t_l)} & \frac{N_{12}(t_{l-1}, t_l)}{Y_1(t_l)} & \frac{N_{12}(t_{l-1}, t_l)}{Y_1(t_l)} & \dots & \frac{N_{1p}(t_{l-1}, t_l)}{Y_1(t_l)} \\ \frac{N_{21}(t_{l-1}, t_l)}{Y_2(t_l)} & \frac{-N_{2\bullet}(t_{l-1}, t_l)}{Y_2(t_l)} & \frac{N_{23}(t_{l-1}, t_l)}{Y_2(t_l)} & \dots & \frac{N_{2p}(t_{l-1}, t_l)}{Y_2(t_l)} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ \frac{N_{p-1\ 1}(t_{l-1}, t_l)}{Y_{p-1}(t_l)} & \frac{N_{p-1\ 2}(t_{l-1}, t_l)}{Y_{p-1}(t_l)} & \dots & \frac{-N_{p-1\ \bullet}(t_{l-1}, t_l)}{Y_{p-1}(t_l)} & \frac{N_{p-1\ p}(t_{l-1}, t_l)}{Y_{p-1}(t_l)} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

přičemž

⁹Všimněme si, že funkce $Y_i(t)$ jsou zleva spojité.

¹⁰Přestože došlo ke změně ratingu z data $s-1$ na s , datum s jako datum změny neoznačujeme. Naopak došlo-li ke změně z data $t-1$ na t , datum t jako datum změny označujeme.

- $N_{ij}(t_{l-1}, t_l)$ značí počet firem, které měly k datu t_{l-1} rating i a k datu t_l rating j .
- $N_{i\bullet}(t_{l-1}, t_l)$ značí počet firem, které měly k datu t_{l-1} rating i a k datu t_l jiný rating,
- $Y_i(t_l)$ značí počet firem, které měly k datu t_{l-1} rating i .

Poznámka.

Všimněme si, že součet řádkových členů matice $\mathbf{I} + \Delta\hat{\mathbf{A}}(t_{l-1}, t_l)$ je roven jedné a uvědomme si, co tato matice vlastně obsahuje za členy. Zjistíme, že se vlastně jedná o odhad metodou kohorty na období od data t_{l-1} do t_l , tj. ve smyslu poznámky na straně 11 odhadujeme: $\hat{\mathbf{P}}(s, t) = \hat{\mathbf{P}}(s, t_1) \cdot \hat{\mathbf{P}}(t_1, t_2) \cdots \hat{\mathbf{P}}(t_{N-1}, t_N)$, kde odhady metodou kohorty jsou postupně prováděny pro velmi krátké časové okamžiky.

Podotkněme ještě, že odhad metodou dle Aalena a Johansena je neparametrický odhad (funkcí) intenzit, nemusíme tedy znát zdroje nehomogenity v datech. Je však více než vhodné, zajímat se, čím je nehomogenita způsobena a testovat různé hypotézy. Některé z možných testů jsou uvedeny v kapitole 3.2.

Příklad.

Předpokládejme stejná data, jako v Příkladě 1. na straně 13. Odhadněme jedno-roční matici přechodu metodou Aalen-Johansen.

Řešení:

Okamžiky skoků označme tedy $t_1 = 2/12$ roku, $t_2 = 4/12$, $t_3 = 6/12$, $t_4 = 8/12$. Spočítejme nejprve $\hat{\mathbf{A}}(0, \frac{2}{12})$, $\hat{\mathbf{A}}(\frac{2}{12}, \frac{4}{12})$, $\hat{\mathbf{A}}(\frac{4}{12}, \frac{6}{12})$, $\hat{\mathbf{A}}(\frac{6}{12}, \frac{8}{12})$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}\left(0, \frac{2}{12}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{A}}\left(\frac{2}{12}, \frac{4}{12}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{A}}\left(\frac{4}{12}, \frac{6}{12}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{-1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{A}}\left(\frac{6}{12}, \frac{8}{12}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{11} & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Pomocí vzorce (2.16) dostáváme:

$$\Delta P(\hat{0}, 1) = \begin{pmatrix} 0,91 & 0,09 & 0 \\ 0,09 & 0,71 & 0,20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tedy odhad podobný odhadům metodou kohorty i odhadem pomocí matice intenzit pro homogenní markovské řetězce. Výhody odhadu metodou dle Aalena a Johansena pro nehomogenní řetězce se spojitým časem se ukáží až u větších portfolií klientů a nesplnění předpokladu homogenity.

2.3 Odhad matice intenzit markovského řetězce se spojitým časem na základě diskretních pozorování

V kapitole 2.2.1 jsme uvedli mnohé výhody modelování přechodů mezi ratingy pomocí markovského řetězce se spojitým časem oproti modelování pomocí markovského řetězce s diskretním časem. Nevýhodou však zůstává, že v praxi často máme k dispozici pouze diskretně pozorovaná data. V této kapitole ukážeme, že je možné odhadnout matici intenzit \mathbf{Q} markovského řetězce se spojitým časem i na základě diskretně pozorovaných dat.

Uvedeme obecný postup získání odhadu matice \mathbf{Q} pro případ, kdy všechny míry přechodu (tj. všechny členy matice \mathbf{Q}) jsou volnými parametry. V oblasti kreditního rizika sice předpokládáme, že míry přechodu z defaultu jsou nulové a pokládáme je rovny nule, ale v tomto případě může být postup odhadu velice jednoduše upraven (viz poznámka na straně 25).

Nechť $\mathbf{X} = \{X(t), t \geq 0\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem s diskretní množinou stavů $S = \{1, \dots, m\}$. Abychom mohli odhadnout matici \mathbf{Q} na základě spojitých dat, potřebovali bychom mít k dispozici K nezávislých realizací tohoto procesu, označme je jako:

$$\mathbf{X}^1 = \mathbf{x}^1, \mathbf{X}^2 = \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{X}^K = \mathbf{x}^K,$$

kde $\mathbf{X}^k = \{X^k(t), t \in [0, \tau]\}$. V tomto případě bychom se tedy snažili maximalizovat věrohodnostní funkci $L(\mathbf{Q}; \mathbf{X}^1 = \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{X}^K = \mathbf{x}^K)$ uvedenou na straně 12. Řešení tohoto problému jsme našli v kapitole 2.2.2.

Nyní si představme, že známe pouze diskretní data z těchto realizací, tj. stav řetězce \mathbf{X}^k známe pouze pro několik časových okamžiků, označme je $0 \leq t_1^k < \dots < t_{n_k}^k \leq \tau$. Podotkněme, že tyto časy mohou být obecně pro každý řetězec \mathbf{X}^k rozdílné. Označíme-li si $Y_i^k = \mathbf{X}^k(t_i^k)$, pak je naším úkolem najít odhad matice \mathbf{Q} na základě pozorování

$$\mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \mathbf{Y}^2 = \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K,$$

kde $\mathbf{Y}^k = \{Y_l^k, l = 1, \dots, n_k\}$.

Opět hledáme odhad metodou maximální věrohodnosti. Naším cílem je tedy maximalizovat věrohodnostní funkci

$$L(\mathbf{Q}; \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K) = \prod_{k=1}^K \prod_{l=1}^{n_k} \mathbf{P}(\mathbf{Q})_{x_l^k x_{l+1}^k} (t_{l+1} - t_l), \quad (2.17)$$

kde $\mathbf{P}(\mathbf{Q})_{ij}(\Delta)$ značí člen na pozici ij matice přechodu \mathbf{P} určené na období Δ , jejíž matice intenzit je \mathbf{Q} . Bohužel tuto věrohodnostní funkci neumíme přímo vyjádřit pomocí intenzit matice \mathbf{Q} , tedy ji ani neumíme maximalizovat vzhledem k parametrům q_{ij} .

Řešení problému existuje, ale není triviální. V [9] jsou uvedeny dvě metody řešení, my zde budeme prezentovat tzv. metodu EM-algoritmu. Nejprve tuto metodu představíme teoreticky v podkapitole 2.3.1 a poté ji v podkapitole 2.3.2 aplikujeme na náš problém.

2.3.1 EM-algoritmus

EM-algoritmus je iterační metoda, jak najít maximálně věrohodný odhad parametrů ve statistickém modelu, pokud model závisí na nepozorovaných „skrytých“ proměnných. Popis metody algoritmu byl převzat z [11], kde lze také najít jeho důkaz, příklady jeho využití a další detaily.

Popišme si problém teoreticky. Nechť rozdění náhodné veličiny U je jednoznačně určeno parametrem θ a nechť rozdění náhodné veličiny Z je jednoznačně určeno veličinou U . Předpokládáme tedy, že θ, U, Z splňují tzv. Markovův vztah $\theta \rightarrow U \rightarrow Z$ ¹¹ (viz [11], kapitola 1.4). Předpokládejme dále, že máme k dispozici pozorovaná data z_1, \dots, z_N - nezávislé realizace veličiny Z a chtěli bychom odhadnout parametr θ metodou maximální věrohodnosti. Hledáme tedy odhad¹²:

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; Z_1 = z_1, \dots, Z_N = z_N) \\ &= \arg \max_{\theta \in \Theta} \ln L(\theta; Z_1 = z_1, \dots, Z_N = z_N).\end{aligned}\quad (2.18)$$

Najít řešení (2.18) může být v některých případech obtížné nebo nemožné. Pokud však lze relativně snadno najít odhad $\hat{\theta}$ na základě realizací u_1, \dots, u_N veličiny U , tj. najít

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Omega} \ln L(\theta; U_1 = u_1, \dots, U_N = u_N),$$

můžeme se pokusit najít $\hat{\theta}$ pomocí EM-algoritmu, i když ve skutečnosti realizaci u_1, \dots, u_N neznáme.

Jak jsme již zmínili, EM algoritmus je iterační metoda. Obecně můžeme EM algoritmus popsat následovně:

Nechť krok algoritmu $s = 0$. Stanovme vhodný počáteční odhad $\hat{\theta}^{(s)}$ parametru θ .

1. **E-krok** (*expectation step*): Předpokládejme, že odhad $\hat{\theta}^{(s)}$ je správný.

- Zformulujme podmíněnou hustotu $f(u|z, \hat{\theta}^{(s)})$.
- Zformulujme podmíněnou očekávanou logaritmicou věrohodnost, tzv. Q -funkci:

$$\begin{aligned}Q(\theta|\hat{\theta}^{(s)}) &= \int_{\Psi} \ln f(u|\theta) f(u|z, \hat{\theta}^{(s)}) du \\ &= \mathbb{E} \left[\ln L(\theta; U_1, \dots, U_N) | Z_1 = z_1, \dots, Z_N = z_N, \theta = \hat{\theta}^{(s)} \right]\end{aligned}\quad (2.19)$$

$$= \mathbb{E}_{\hat{\theta}^{(s)}} [\ln L(\theta; U_1, \dots, U_N) | Z_1 = z_1, \dots, Z_N = z_N].\quad (2.20)$$

Dodejme, že Ψ značí uzávěr množiny $\{u, f(u|z, \theta) > 0\}$. Úprava vzorce (2.19) na vzorec (2.20) spočívá pouze v přepisu značení. Značení použité ve vzorci (2.20) se pro přehlednost používá v literatuře častěji a je vhodnější pro následující úpravy.

¹¹Veličina U může například obsahovat úplná data, veličina Z pouze vybrané informace.

¹² Θ v našem případě značí množinu všech přípustných parametrů θ .

2. **M-krok** (*maximization step*): Najdeme θ , které maximalizuje Q -funkci z kroku 1. Výsledkem je nový odhad $\hat{\theta}^{(s+1)}$. Pokud není splněn požadavek na ukončení algoritmu, položíme $s := s + 1$ a přejdeme opět na krok 1.

EM-algoritmus nspecifikuje přímo požadavek na ukončení algoritmu. Mezi standardní kritéria patří například $\left\| \hat{\theta}^{(s+1)} - \hat{\theta}^{(s)} \right\| < \epsilon$ pro nějaké předem dané $\epsilon > 0$ nebo pokračovat, dokud se věrohodnost $\ln L(\theta; Z_1 = z_1, \dots, Z_N = z_N)$ nepřestane měnit, tj. dokud nezačne platit

$$\left| \ln L(\hat{\theta}^{(s+1)}; Z_1 = z_1, \dots, Z_N = z_N) - \ln L(\hat{\theta}^{(s)}; Z_1 = z_1, \dots, Z_N = z_N) \right| < \epsilon$$

pro nějaké předem dané $\epsilon > 0$.

Iterace v EM odhadu však pouze zajistí, že odhad nikdy nebude horší než odhad předchozí. Pokud má věrohodnostní funkce $\ln L(\theta; Z_1 = z_1, \dots, Z_N = z_N)$ více lokálních maxim, EM algoritmus v tomto případě nemusí nutně najít maximum globální. Problém je v tomto případě řešen tak, že vybereme více počátečních odhadů, pro všechny necháme proběhnout EM-algoritmus a nakonec vybereme odhad s největší věrohodností.

2.3.2 Aplikace EM-algoritmu

V této kapitole ukážeme, jak aplikovat EM-algoritmus na náš problém.

Připomeňme, že potřebujeme najít maximum věrohodnostní funkce $L(\mathbf{Q}; \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K)$, ale tuto funkci neumíme explicitně vyjádřit pomocí intenzit q_{ij} . Naopak umíme vyjádřit funkci $L(\mathbf{Q}; \mathbf{X}^1 = \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{X}^K = \mathbf{x}^K)$ a také umíme najít její maximum. Navíc platí $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$, kde $\mathbf{X} = \{X(t), t \geq 0\}$ je markovský řetězec se spojitým časem a $\mathbf{Y} = \{Y_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ je diskrétní markovský řetězec. Zřejmě tedy:

- $\theta := \mathbf{Q}$,
- $U := \mathbf{X}$ (tj. $U_k := \mathbf{X}^k$),
- $Z := \mathbf{Y}$ (tj. $Z_k := \mathbf{Y}^k$).

Nejtěžším krokem algoritmu je E-krok, tj. výpočet Q -funkce

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\hat{\theta}^{(s)}} [\ln L(\theta; U_1, \dots, U_N) | Z_1 = z_1, \dots, Z_N = z_N] \\ & = \mathbb{E}_{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}} [\ln L(\mathbf{Q}; \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^K) | \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dle (2.10) můžeme přepsat střední hodnotu (2.21) následovně:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}} \left[\ln \prod_{i=1}^m \prod_{j \neq i} q_{ij}^{n_{ij}(\tau)} \exp(-q_{ij} R_i(\tau)) | \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K \right] \\ & = \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i} \ln(q_{ij}) \mathbb{E}_{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}} [n_{ij}(\tau) | \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K] \\ & \quad - \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i} (q_{ij}) \mathbb{E}_{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}} [R_i(\tau) | \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K]. \end{aligned}$$

Abychom si mohli výše uvedenou rovnici ještě více zjednodušit, definujme si pro $\Delta \in [0, \infty)$ veličiny :

$$\tilde{M}_{ij}^k(\Delta, \mathbf{Q}) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} [R_k^1(\Delta) | X^1(\Delta) = j, X^1(0) = i] \quad (2.22)$$

$$\tilde{f}_{ij}^{kl}(\Delta, \mathbf{Q}) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} [n_{kl}^1(\Delta) | X^1(\Delta) = j, X^1(0) = i] \quad (2.23)$$

Jelikož jsou vektory \mathbf{Y}^k , $k = 1, \dots, K$ nezávislé můžeme psát:

$$\mathbb{E}_{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}} [n_{ij}(\tau) | \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K] = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{n_k-1} \tilde{f}_{y_l^k, y_{l+1}^k}^{ij}(t_{l+1}^k - t_l^k, \mathbf{Q}^{(s)}) \quad (2.24)$$

$$\mathbb{E}_{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}} [R_i(\tau) | \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K] = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{n_k-1} \tilde{M}_{y_l^k, y_{l+1}^k}^i(t_{l+1}^k - t_l^k, \mathbf{Q}^{(s)}) \quad (2.25)$$

Pokud tedy dokážeme spočítat (2.24) a (2.25), budeme schopni provést EM-algoritmus. V [9] je odkazováno na řešení uvedené v [8]. Jelikož je toto řešení složité a nepřesné, uvedeme zde jednu z nejnovějších metod řešení představenou v roce 2011 v [13], tzv. metodu uniformizace. Nejdříve opět tuto metodu popíšeme teoreticky v kapitole 2.3.3 a následně ji v kapitole 2.3.4 aplikujeme na náš problém.

2.3.3 Metoda uniformizace

Popíšeme teoreticky problém, kterým se budeme zabývat. Předpokládejme markovský řetězec se spojitým časem $\mathbf{X} = \{X(t), t \geq 0\}$ s množinou stavů $S = \{1, \dots, m\}$ definovaný známou maticí intenzit \mathbf{Q} . Dále předpokládejme, že víme, že $X(0) = a$, $X(T) = b$. Naším cílem je vypočítat

$$\mathbb{E} [H(T) | X(0) = a, X(T) = b],$$

kde H značí tzv. *souhrnnou statistiku*. V našem případě bude $H(T)$ označovat buď statistiku

- $R_\alpha(T)$ - čas, který řetězec \mathbf{X} strávil ve stavu α do času T nebo
- $n_{\alpha\beta}(T)$ - počet přechodů mezi stavy α a β u řetězce \mathbf{X} do času T .

Další příklady souhrnných statistik jsou uvedeny například v [13]. Všimněme si že, platí

$$\mathbb{E} [H(T) | X(0) = a, X(T) = b] = \frac{\mathbb{E} [H(T) \cdot I \{X(T) = b\} | X(0) = a]}{P(X(T) = b | X(0) = a)}. \quad (2.26)$$

Stačí tedy umět spočítat $\mathbb{E} [R_\alpha(T) \cdot I \{X(T) = b\} | X(0) = a]$ a $\mathbb{E} [n_{\alpha\beta}(T) \cdot I \{X(T) = b\} | X(0) = a]$, neboť jmenovatel je jednoduše členem matice $\mathbf{P}(T) = \exp(T\mathbf{Q})$ na pozici ab .

Článek [13] uvádí několik možných metod výpočtu. Jako nejlepší a nejjednodušší byla prezentována *metoda uniformizace* vedoucí k rovnicím:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [R_\alpha(T) \cdot I \{X(T) = b\} | X(0) = a] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T}{n+1} \left[\sum_{l=0}^n (\mathbf{W}^l)_{a\alpha} (\mathbf{W}^{n-l})_{\alpha b} \right] \text{Pois}(n, \mu T), \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[n_{\alpha\beta}(T) \cdot I\{X(T) = b\} | X(0) = a] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^n (\mathbf{W}^{n-l})_{a\alpha} \mathbf{W}_{\alpha\beta} (\mathbf{W}^{l-1})_{\alpha b} \right] \text{Pois}(n, \mu T), \end{aligned} \quad (2.28)$$

kde:

- $\mu = \max_i(-q_{ii})$,
- $\mathbf{W} = \frac{1}{\mu} \mathbf{Q} + \mathbf{I}$ (\mathbf{I} značí jednotkovou matici),
- $(\mathbf{W}^l)_{ij}$ značí člen l -té mocniny matice \mathbf{W} na pozici ij ,
- $\text{Pois}(n, \lambda)$ je pravděpodobnost z Poissonova rozdělení se střední hodnotou λ , tj. $\frac{\lambda^n}{n!} \exp^{-\lambda}$.

Důkaz tohoto tvrzení zde uvádět nebudeme, je uveden v [13].

Poznámka.

Všimněme si že, oba vzorce (2.27) a (2.28) obsahují nekonečnou sumu. V praxi však potřebujeme výsledky jen určité přesnosti, a protože obě řady konvergují, můžeme sumy vhodně „useknout“ - lze například přičítat jednotlivé členy řady pouze dokud rozdíl dvou po sobě jdoucích sčítanců není menší než požadované $\epsilon > 0$.

2.3.4 Aplikace metody uniformizace

Výše popsaná metodika nám ukazuje, jak vypočítat (2.22), (2.23), tj. najít řešení k (2.25) a (2.24). Lze tedy psát

$$\begin{aligned} & \tilde{M}_{ij}^k(\Delta, \mathbf{Q}^{(s)}) = \\ &= \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{\Delta}{n_1 + 1} \left[\sum_{n_2=0}^{n_1} (\mathbf{W}^{n_2})_{ik} (\mathbf{W}^{n_1-n_2})_{kj} \right] \text{Pois}(n_1, \mu\Delta) \right) \cdot \frac{1}{P(X(\Delta) = j | X(0) = i)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_{ij}^{kl}(\Delta, \mathbf{Q}^{(s)}) = \\ &= \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \left[\sum_{n_2=1}^{n_1} (\mathbf{W}^{n_1-n_2})_{ik} \mathbf{W}_{kl} (\mathbf{W}^{n_2-1})_{kj} \right] \text{Pois}(n_1, \mu\Delta) \right) \cdot \frac{1}{P(X(\Delta) = j | X(0) = i)}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

kde:

- $\mu = \max_i(-\hat{q}_{ii}^{(s)})$
- $\mathbf{W} = \frac{1}{\mu} \mathbf{Q}^{(s)} + \mathbf{I}$
- $P(X(\Delta) = j | X(0) = i)$ je rovno členu matice $\exp(\Delta \cdot \mathbf{Q}^{(s)})$ na pozici ij .

2.3.5 Shrnutí

Shrňme tedy postup EM-algoritmu pro nalezení odhadu matice \mathbf{Q} na základě diskretních pozorování:

Nechť krok algoritmu $s = 0$. Vyberme vhodný počáteční odhad matice intenzit $\hat{\mathbf{Q}}^{(0)}$.

1. Vypočtěme $\mathbb{E}_{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}} [n_{ij}(\tau) | \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K]$ a $\mathbb{E}_{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}} [R_i(\tau) | \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K]$ pomocí vzorců (2.24), (2.25), (2.29) a (2.30).
2. Vypočtěme $\hat{q}_{ij}^{(s+1)}$ pomocí

$$\hat{q}_{ij}^{(s+1)} = \frac{\mathbb{E}_{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}} [n_{ij}(\tau) | \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K]}{\mathbb{E}_{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}} [R_i(\tau) | \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^K = \mathbf{y}^K]} \quad (2.31)$$

pro $i \neq j$ a dopočtěme $\hat{q}_{ii}^{(s+1)} = -\sum_{j \neq i} \hat{q}_{ij}^{(s+1)}$ pro $i = 1, \dots, m$ (viz vzorce (2.11), (2.12)). Pokud není splněn požadavek na ukončení algoritmu, položíme $\hat{\mathbf{Q}}^{(s)} := \hat{\mathbf{Q}}^{(s+1)}$ a přejdeme opět na krok 1.

Jak jsme již zmínili výše, obecně iterace v EM odhadu pouze zajistí, že odhad nikdy nebude horší než odhad předchozí. Nevíme tedy, zda algoritmus nalezne odhad globální či pouze lokální. Uveďme si proto Větu 4. z článku [8], která náš problém řeší.

Věta 3. *Nechť jsou všechny nediagonální členy matice $\mathbf{Q}^{(0)}$ kladné. Pak řada $\left\{ \hat{\mathbf{Q}}^{(s)} \right\}_{s=0}^{\infty}$ buď konverguje ke stacionárnímu bodu věrohodnostní funkce $L(\mathbf{Q}; \mathbf{Y}^1 = \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{Y}^k = \mathbf{y}^k)$, nebo determinant řady $\left\{ \exp \left(\hat{\mathbf{Q}}^{(s)} \right) \right\}_{s=0}^{\infty}$ konverguje k nule.*

Druhá možnost značí, že maximálně věrohodný odhad neexistuje a může indikovat, že model není vhodný pro námi pozorovaná data. Je tedy vhodné jako počáteční matici $\hat{\mathbf{Q}}^{(0)}$ volit matici, pro níž je determinant matice $\exp \left(\hat{\mathbf{Q}}^{(0)} \right)$ vzdálený od nuly.

Všimněme si, že pokud pro nějaké $i \neq j$ položíme $\hat{q}_{ij}^{(0)} = 0$, pro všechny iterace zůstane $\hat{q}_{ij}^{(s)}$ také nulové¹³. Podle poznámky v [8], str. 404, navíc platí, že pokud položíme $\hat{q}_{ij}^{(0)} = 0$ pro nějaká $i, j \in S$, dostaneme obdobné podmínky existence stacionárního bodu a konvergence řady $\left\{ \hat{\mathbf{Q}}^{(s)} \right\}_{s=0}^{\infty}$ jako ve Větě 3.

Poznámka.

Pro oblast kreditního rizika předpokládáme, že intenzity výskoku ze stavu defaultu jsou nulové. Proto je vhodné volit takové $\mathbf{Q}^{(0)}$, pro něž jsou intenzity výskoku z defaultu $\hat{q}_{mj}^{(0)}$, $j \in S$ nulové a pro které jsou ostatní intenzity $\hat{q}_{ij}^{(0)}$, $i \neq m$, $j \neq i$ kladné.

¹³Je-li $\hat{q}_{ij}^{(0)}$ rovno nule, pak je zřejmě i \mathbf{W}_{ij} rovno nule. Ze vzorce (2.30) plyne, že $\tilde{f}_{kl}^{ij}(\Delta, \mathbf{Q}^{(s)}) = 0$ pro všechna k, l, s, Δ . Proto ze vzorce (2.24) dostáváme $n_{ij}(\tau) = 0$. Z (2.31) nakonec plyne, že $\hat{q}_{ij}^{(s+1)} = 0$ pro všechna s .

Poznámka.

Postup výpočtu odhadů může být značně výpočetně a tedy i časově náročný. Jak jsme již zmínili, EM algoritmus nám zaručí, že následující odhad nebude horší než odhad současný. Čím lepší počáteční odhad tedy máme, tím rychleji nám řada $\{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}\}_{s=0}^{\infty}$ dokonverguje. Proto může být vhodné získat nějakou jinou, výpočetně nenáročnou metodou počáteční odhad $\hat{\mathbf{Q}}^{(0)}$ a pak odhad pouze vylepšovat. Musíme si však ověřit, že pro odhad pomocí této metody jsou intenzity z nedefaultních stavů kladné. Jako tuto „nepřesnou, rychlou metodu“ můžeme zvolit například metodu dle Lando, Skodeberg uvedenou v kapitole 2.2.2, kde pouze vhodně upravíme nejmenší rozlišované období (viz kapitoly 4.2 a 4.4). V případě ekvidistantních pozorování také můžeme nejprve odhadnout matici přechodu metodou kohorty a pak najít její matici intenzit např. pomocí metod uvedených v [26] kapitole 3.4.5 nebo v [16].

Pro ukázkou vlivu výběru počátečního odhadu $\hat{\mathbf{Q}}^{(0)}$ na rychlost konvergence řady $\{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}\}_{s=0}^{\infty}$ viz kapitolu 4.4.

Poznámka.

V článku [9] je také uvedeno, jak vypočítat odhad rozptylu odhadu matice intenzit \mathbf{Q} uvedeného v této kapitole. My jej zde vzhledem k rozsahu práce uvádět nebudeme, postup jeho výpočtu se příliš neliší od postupu výpočtu samotného odhadu matice \mathbf{Q} (je například také využito EM-algoritmu, odhad lze také vylepšit využitím metody uniformizace k výpočtu souhrnných statistik podle článku [13]).

Doplňme nakonec, že článek [9] také popisuje jak provést statistický test rovnosti dvou matic intenzit odhadnutých na různých časových obdobích. Tento test využívá odhadu rozptylu odhadu a proto jej zde také neuvádíme.

2.4 Semimarkovské řetězce

Cílem této diplomové práce je poskytnout přehled různých typů markovských řetězců používaných k modelování kreditního rizika. Výhodou těchto modelů je jejich jednoduchost, logickou nevýhodou pak, že tyto modely zcela neodpovídají pozorovaným datům a že často nejsou splněny předpoklady k odhadování. Proto jsou zkoumány možnosti zobecnění markovských řetězců. Jednou z nich je použití tzv. semimarkovských řetězců.

Problematika použití semimarkovských řetězců v oblasti kreditního rizika je složitá, není možné ji zde představit se všemi nutnými podrobnostmi. Vysvětlíme tedy její výhody oproti použití markovských řetězců a naznačíme postup řešení největších problémů. Další informace lze najít například v [22], [14], [1], [2]. Doporučujeme však začít s dizertační prací [6], která tuto problematiku přehledně zpracovává.

2.4.1 Představení semimarkovských řetězců

Trajektorii libovolného náhodného procesu $\mathbf{X} = \{X(t), t \geq 0\}$ s konečnou množinou stavů¹⁴ S můžeme popsat pomocí:

- posloupnosti stavů $\Xi = \{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$, jimiž trajektorie prochází a
- posloupnosti dob setrvání ve stavech $\{\tau_n, n = 1, 2, \dots\}$.

Proces \mathbf{X} nazveme *semimarkovským*, je-li Ξ homogenní markovský řetězec a pokud pro libovolná

$$t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, \infty), \quad i_1, i_2, \dots, i_n \in S$$

platí

$$\begin{aligned} P(\tau_1 \leq t_1, \tau_2 \leq t_2, \dots, \tau_n \leq t_n | \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_n = i_n) \\ = F_{i_1 i_2}(t_1) F_{i_2 i_3}(t_2) \dots F_{i_n i_{n+1}}(t_n) \end{aligned}$$

kde $F_{ij}(t) = P(\tau_1 \leq t | \xi_1 = i, \xi_2 = j)$ jsou distribuční funkce kladných náhodných veličin.

Poznámka.

Trajektorie semimarkovského procesu \mathbf{X} vzniká následujícím způsobem: nejprve je vybrán počáteční stav ξ_1 na základě počátečního pravděpodobnostního rozdělení stavů řetězce Ξ . V tomto stavu proces \mathbf{X} zůstane po (náhodnou) dobu τ_1 , přičemž τ_1 je náhodná veličina s distribuční funkcí $F_{\xi_1 \xi_2}(t)$. Následně na základě pravděpodobnostního rozdělení $p_{\xi_1 j}, j \in S$ přejde proces do stavu ξ_2 , kde setrvá po dobu τ_2 , atd.

V teorii kreditního rizika nám posloupnost stavů $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ vyjadřuje jednotlivé ratingové stupně, které byly postupně danému dlužníkovi přiděleny. Doby $\{\tau_n, n = 1, 2, \dots\}$ reprezentují doby mezi změnami těchto ratingů.

Výhodou použití semimarkovských řetězců oproti markovským je, že dobu setrvání mezi dvěma stavy můžeme modelovat libovolnou distribuční funkcí -

¹⁴Definice v [22] připouští i spočetné množiny.

na základě Věty 1 jsme dosud uvažovali pouze exponenciální rozdělení této doby. Navíc doba do změny může záviset nejen na předchozím stavu i , ale i na následujícím stavu j .

Další výhodou je, že se při odhadu nemusíme omezovat na předem stanovené období (jako například při použití diskrétního markovského řetězce.)

Poznámka.

Označme $\Xi P = (\Xi p_{ij})_{i,j \in S}$ matici přechodu vnořeného řetězce Ξ . Všimněme si, že tato matice má jiný „tvar“, než matice homogenního markovského řetězce uvažovaného v kapitole 2.1.1 (viz poznámku na straně 2.1.1 o tvaru matice přechodu). Diagonální prvky jsou (mimo stav defaultu) nulové.

2.4.2 Marginální rozdělení řetězce

Narozdíl od ostatních dosud uvedených markovských modelů zde otázka „*jaký rating bude mít klient v čase t , když v čase 0 měl rating i* “ není snadno řešitelná. Zajímá nás tedy

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j | X(0) = i) \quad \text{pro všechna } i, j \in S, \quad t \geq 0. \quad (2.32)$$

Při řešení tohoto problému je často využívána Laplaceova transformace funkce, která je definována pro lokálně integrovatelné funkce $f(t), t \geq 0$ jako

$$f^*(s) = \int_0^\infty \exp(-st) f(t) dt. \quad (2.33)$$

Připomeňme, že platí, že Laplaceova transformace konvoluce 2 funkcí je součin Laplaceových transformací těchto dvou funkcí, tj. označíme-li

$$h(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad t \geq 0,$$

platí

$$h^*(s) = f_1^*(s) f_2^*(s). \quad (2.34)$$

Dále víme, že

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{f^*(s)}{s} \quad (2.35)$$

a že Laplaceova transformace výrazu $\frac{d}{dt} f(t)$ je

$$s f^*(s) - f(0). \quad (2.36)$$

Označme f_{ij} hustotu distribuční funkce F_{ij} . Dle [22] lze pravděpodobnosti (2.32) hledat tak, že nejprve vyřešíme soustavu rovnic

$$p_{ik}^*(s) - \sum_j \Xi p_{ij} f_{ij}^*(s) p_{jk}^*(s) = 0 \quad \text{pro } i \neq k \quad (2.37)$$

$$p_{ii}^*(s) - \sum_j \Xi p_{ij} f_{ij}^*(s) p_{ji}^*(s) = \frac{1}{s} (1 - f_i^*(s)), \quad (2.38)$$

kde

$$f_i^*(s) = \sum_j \Xi p_{ij} f_{ij}^*(s),$$

čímž získáme Laplaceovy transformace těchto pravděpodobností a z těchto transformací dopočítáme na základě (2.33), (2.34) a (2.35) přímo pravděpodobnosti (2.32).

Hledání inverzní Laplaceovy transformace však nemusí být triviálním problémem. Aby problém byl snadno řešitelný, je vhodné hustotu f_{ij} vyjadřovat pomocí exponenciální(ch) a racionálně lomených funkcí. Dle [6] je vhodné jako f_{ij} volit např. hustotu exponenciálního, gamma rozdělení, nebo vhodně upravenou goniometrickou funkci či volit jako distribuční funkci Diracovo delta¹⁵ či volit směsí těchto funkcí.

Je tedy velmi vhodné nejprve provést podrobnou analýzu dat za účelem zjištění, které funkce by mohly být vhodné k modelování f_{ij} . Měli bychom například zkoumat, zda jsou ratingy v bance měněny průběžně/po určitém období, zda dobu do změny ovlivňuje předchozí změna, zda doba do změny závisí na ekonomickém cyklu apod.

V následující kapitole uvedeme, jak najít marginální rozdělení řetězce za předpokladu exponenciálního rozdělení dob do změny. Doplňme, že pro tuto volbu se semimarkovský model redukuje na markovský řetězec se spojitým časem. Další konkrétní příklady výpočtu marginálních rozdělení na základě různých hustot dob do změny a příklady použití semimarkovských řetězců v praxi jsou uvedeny například v [6].

2.4.3 Exponenciální rozdělení doby do změny

Předpokládejme, že doba do změny má exponenciální rozdělení. Omezme se navíc na případ, kdy doba nezávisí na novém, ale pouze na současném ratingu. Hustota doby do změny z ratingu i do ratingu j má tedy tvar

$$f_{ij}(t) = f_i(t) = q_i \exp(-q_i t), \quad (2.39)$$

kde $q_i > 0$. Předpokládáme, že parametry q_1, \dots, q_m jsou známé.

Laplaceova transformace funkce (2.39) má tvar

$$f_i^*(s) = \frac{q_i}{q_i + s}. \quad (2.40)$$

Dosazením do (2.37) a (2.38) získáváme soustavu rovnic

$$p_{ik}^*(s) = \delta_{ik} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{q_i}{(q_i + s)} \right) + \sum_{j \neq i} \Xi p_{ij} \frac{q_i}{(q_i + s)} p_{jk}^*(s)$$

¹⁵Distribuční funkce Diracova delta je definována následujícím způsobem:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < \hat{t} \\ 1 & t \geq \hat{t} \end{cases},$$

a postupně upravujeme

$$(s + q_i)p_{ik}^*(s) = \delta_{ik} + \sum_{j \neq i} q_i \Xi p_{ij} p_{jk}^*(s),$$

$$s p_{ik}^*(s) - \delta_{ik} = -q_i p_{ik}^*(s) + \sum_{j \neq i} q_i \Xi p_{ij} p_{jk}^*(s).$$

Víme, že $p_{ik}(0) = \delta_{ik}$ a protože platí (2.36), inverzní transformací dostáváme

$$\frac{d}{dt} p_{ik}(t) = -q_i p_{ik}(t) + \sum_j q_i \Xi p_{ij} p_{jk}(t).$$

Označme nyní $q_{ik} = q_i p_{ik}$ pro $q \neq i$ a $q_{ii} = -q_i$. Pak můžeme psát

$$\frac{d}{dt} p_{ik}(t) = -q_i p_{ik}(t) + \sum_{j \neq i} q_{ik} p_{jk}(t),$$

čímž dostáváme soustavu retrospektivních Kolmogorových rovnic uvedenou v [25], str. 82. Řešením je tedy matice $P(t) = \exp(\mathbf{Q}t)$ přechodových pravděpodobností markovského řetězce se spojitým časem a maticí intenzit \mathbf{Q} .

2.5 Semiparametrický multiplikativní model rizika

Jak jsme již zmínili, semimarkovské řetězce jsou jedním ze způsobů zobecnění markovského řetězce se spojitým časem. Ukažme si nyní ještě jeden způsob prezentovaný v [21], a to takzvaný semiparametrický multiplikativní model rizika aplikovaný na intezity přechodu. Tento model později využijeme k testování markovské vlastnosti markovského řetězce se spojitým časem.

Teoretické poznatky k odvození modelu přebíráme z [4], kapitoly VII.2, kde lze také najít další detaily.

Předpokládejme proces $\{X(t), t \geq 0\}$ s množinou stavů $S = \{1, \dots, m\}$ určený procesem intenzit $\mathbf{Q} = \{\mathbf{Q}(t), t \geq 0\}$, $\mathbf{Q}(t) = (q_{ij}(t))_{i,j \in S}$ (detaily viz v [4], str. 477). Dále předpokládejme, že pro K klientů známe realizace

$$\mathbf{X}^1 = \mathbf{x}^1, \mathbf{X}^2 = \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{X}^K = \mathbf{x}^K,$$

tohoto procesu, kde $\mathbf{X}^k = \{X^k(t), t \in [0, \tau]\}$.

Zaveďme si pomocné procesy \mathbf{Y}_i^k : pro dané $i \in S$, $k = 1, \dots, K$ bude $\mathbf{Y}_i^k = \{Y_i^k(t), t \in [0, \tau]\}$ označovat proces, který

- $Y_i^k(t) = 1$, pokud pozorovaná trajektorie procesu $\{X^k(t), t \in [0, \tau]\}$ klienta k je těsně před časem t ve stavu i , tj. pokud $\lim_{u \rightarrow t^-} X^k(u) = i$,
- $Y_i^k(t) = 0$ jinak¹⁶.

¹⁶Jelikož jsou procesy \mathbf{Y}_i^k zleva spojitě, splňují podmínku prediktability požadovanou v [4], kapitole VII.1.

Předpokládejme, že intenzity přechodu závisí na specifikované proměnné Z následujícím způsobem:

$$q_{ij}^k(t) = Y_i^k(t) \alpha_{ij}^k(t, Z_k(t)), \quad (2.41)$$

kde $\alpha_{ij}^k(t, Z_k(t))$ má multiplikativní tvar

$$\alpha_{ij}^k(t, Z_k(t)) = \alpha_{ij}^0(t) \exp(\beta_{ij} Z_k(t)). \quad (2.42)$$

V modelu (2.41), (2.42) předpokládáme, že proměnné $Z_k(t)$ jsou známy pro všechna $t \in [0, \tau]$ a $i = 1, \dots, K$, že jsou na $[0, \tau]$ lokálně omezené a zleva spojité¹⁷. Podkladová intenzita $\alpha_{ij}^0(t)$ musí být nezáporná, musí platit $\int_0^t \alpha_{ij}^0(u) du < \infty$ pro všechna $t \in [0, \tau]$, ale dále nemusí být blíže specifikována. Jelikož zde tento model prezentujeme především kvůli testování hypotéz markovské vlastnosti markovského řetězce se spojitým časem a k řešení tohoto problému nepotřebujeme znát podkladovou intenzitu $\alpha_{ij}^0(t)$, nebudeme zde ani postup jejího odhadu uvádět. (Tento postup je netriviální.) Naším cílem v následujících odstavcích bude pouze odhadnout parametry β_{ij} .

Definujme si

$$S_{ij}^{(0)}(\beta_{ij}, t) = \sum_{k=1}^K Y_i^k(t) \exp(\beta_{ij} z_k(t)).$$

Dále označme $n_{ij}^k(t)$ počet pozorovaných přechodů ze stavu i do stavu j do času t včetně u klienta k . Položme t_0 a označme $t_1 < \dots < t_N$ pozorované časy skoků. Pak můžeme dle [4], str. 482 získat odhad β_{ij} pro dané ij maximalizací tzv. *částečné věrohodnostní funkce*

$$\begin{aligned} L(\beta_{ij}; \mathbf{X}^1 = \mathbf{x}^1, \mathbf{X}^2 = \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{X}^K = \mathbf{x}^K, Z_1 = z_1, \dots, Z_k = z_k) \\ = \prod_{l=1}^N \prod_{k=1}^K \left(\frac{\exp(\beta_{ij} Z_k(t_l))}{S_{ij}^{(0)}(\beta_{ij}, t_l)} \right)^{(n_{ij}^k(t_l) - n_{ij}^k(t_{l-1}))}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Budeme pracovat s logaritmickou věrohodností. Označíme-li $C_\tau(\beta_{ij})$ logaritmus věrohodnosti (2.43), můžeme psát

$$C_\tau(\beta_{ij}) = \sum_{k=1}^K \int_0^\tau \beta_{ij} z_k(t) dn_{ij}^k(t) - \int_0^\tau \ln S_{ij}^{(0)}(\beta_{ij}, t) dn_{ij}(t). \quad (2.44)$$

Označme $t_0^k = 0$ a dále $t_1^k, \dots, t_{L^k}^k$ pozorované časy skoků procesu \mathbf{X}^k . Pak můžeme první sčítanec ze vzorce (2.44) zjednodušit následovně

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \int_0^\tau \beta_{ij} z_k(t) dn_{ij}^k(t) & \qquad \qquad \qquad \text{Aalen} \\ &= \beta_{ij} \sum_{k=1}^K \sum_{l=0}^{L^k-1} (n_{ij}^k(t_{l+1}) - n_{ij}^k(t_l)) z_k(t_{l+1}) \\ &= \beta_{ij} \sum_{k=1}^K \sum_{l=0}^{L^k-1} I \{x^k(t_l) = i, x^k(t_{l+1}) = j\} z_k(t_{l+1}) \end{aligned}$$

¹⁷V kapitole 3.2 bude naším cílem testovat, zda intenzity přechodu skutečně na Z závisí či nikoliv.

Nyní označme $t_0 = 0$ a t_1, \dots, t_L pozorované časy skoků ze všech procesů. Druhý sčítanec ze vzorce (2.44) zjednodušíme následovně:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \ln \left(\sum_{k=1}^K Y_i^k(t) \exp(\beta_{ij} z_k(t)) \right) dn_{ij}(t) \\
&= \sum_{l=0}^{L-1} (n_{ij}(t_{l+1}) - n_{ij}(t_l)) \ln \left(\sum_{k=1}^K Y_i^k(t_{l+1}) \exp(\beta_{ij} z_k(t_{l+1})) \right) \\
&= \sum_{l=0}^{L-1} \left(\sum_{k=1}^K I \{x^k(t_l) = i, x^k(t_{l+1}) = j\} \right) \\
&\quad \cdot \ln \left(\sum_{k=1}^K I \{x^k(t_l) = i\} \exp(\beta_{ij} z_k(t_{l+1})) \right) \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Všimněme si výhody, že maximalizaci můžeme provést pro každý parametr β_{ij} , tj. pro každou intenzitu q_{ij} zvlášť.

Maximum nalezneme derivováním 2.44 dle parametru β_{ij} a položením skórové funkce rovné 0. Dostáváme tedy

$$0 = \frac{d}{d\beta_{ij}} C_\tau(\beta_{ij}) = \sum_{k=1}^K \int_0^\tau z_k(t) dn_{ij}^k(t) - \int_0^\tau \frac{S_{ij}^{(1)}(\beta_{ij}, t)}{S_{ij}^{(0)}(\beta_{ij}, t)} dn_{ij}(t), \tag{2.46}$$

kde

$$S_{ij}^{(1)}(\beta_{ij}, t) = \sum_{k=1}^K z_k(t) Y_i^k(t) \exp(\beta_{ij} z_k(t)). \tag{2.47}$$

První sčítanec je tedy zřejmě roven

$$\sum_{k=1}^K \sum_{l=0}^{L^k-1} I \{x^k(t_l) = i, x^k(t_{l+1}) = j\} z_k(t_{l+1}).$$

Druhý sčítanec lze upravit na

$$\sum_{l=0}^{L-1} \left(\sum_{k=1}^K I \{x^k(t_l) = i, x^k(t_{l+1}) = j\} \right) \frac{\sum_{k=1}^K I \{x^k(t_l) = i\} z_k(t_{l+1}) \exp(\beta_{ij} z_k(t_{l+1}))}{\sum_{k=1}^K I \{x^k(t_l) = i\} \exp(\beta_{ij} z_k(t_{l+1}))}$$

Dle [4], kapitoly VII.2 existuje pro dané ij za specifických podmínek regularity¹⁸ jediné řešení $\hat{\beta}_{ij}$ a navíc platí, že $\hat{\beta}_{ij} \xrightarrow{P} \beta_{ij}$ pro $K \rightarrow \infty$.

Poznámka.

Proměnnou Z jsme zatím definovali pouze obecně. Některé z konkrétních definic uvedeme v kapitole 3.2 - uvedeme třeba, jak markovský řetězec se spojitým časem zobecnit pro případ, kdy pravděpodobnost přechodu do následujícího stavu závisí na trendu přechodu do stavu současného. Veličinu Z můžeme také definovat jako

¹⁸Podmínky regularity zde uvádět nebudeme, lze je nalézt pod pojmem „Condition VII.2.1“ v [4], str. 497.

indikátor příslušnosti klienta do dané skupiny (v daném čase) - intenzity přechodu mohou záviset na typických skóringových indikátorech - na tom, zda má klient v daném čase více než jeden úvěr, kolik osob (s příjmem) s ním žije v domácnosti, zda je zaměstnancem / zaměstnavatelem / studuje /... atd. Poznamenejme však, že musí být splněny požadavky na definici Z uvedené na straně 31. Doplňme, že model může být zobecněn pro případ, kdy intenzity nezávisí pouze na jedné proměnné Z , ale na vektoru proměnných (Z_1, \dots, Z_N) .

3. Testování hypotéz

Cílem této kapitoly je představit vybrané testy hypotéz o markovských řetězcích využívaných k modelování kreditního rizika. Může nás například zajímat, zda jsou splněny předpoklady modelu, tj. předpoklad markovské vlastnosti, předpoklad homogenity, nebo zda jsou všechny pozorované realizace skutečně realizacemi toho samého markovského řetězce.

Uvedeme zvláště testy pro řetězce s diskrétním časem a pro řetězce se spojitým časem. Semimarkovskými řetězci se dále zabývat nebudeme.

Existuje mnoho různých testů - testy s rozdílnými alternativami, různou silou i různými požadavky na data. Naším cílem bude uvést testy nejpoužívanější a dle našeho názoru pro praxi nejvhodnější.

3.1 Markovské řetězce s diskrétním časem

Mnoho testů markovských řetězců s diskrétním časem je založeno na tzv. χ^2 testu dobré shody parametrů. Proto si v kapitole 3.1.1 nejprve uvedeme znění obecného χ^2 testu a další potřebná tvrzení. V kapitole 3.1.2 následně představíme χ^2 test specifický pro markovské řetězce a naznačíme jeho důkaz. V kapitole 3.1.3 ukážeme důležité aplikace.

3.1.1 Obecný χ^2 test

Připomeňme na úvod multinomické rozdělení. Multinomické rozdělení je zobecněním rozdělení binomického. Uvažujme n nezávislých pokusů, přičemž každý z pokusů může skončit jedním z k možných výsledků v_1, \dots, v_k . Předpokládáme, že pravděpodobnost výsledku v_j je π_j . Označme n_j počet pokusů s výsledkem v_j a položme $n = \sum_j n_j$. Pak četnosti n_1, \dots, n_k mají tzv. multinomické rozdělení s parametry (n, π_1, \dots, π_k) a platí:

$$P(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \pi_1^{n_1} \dots \pi_k^{n_k}.$$

Přejděme k obecnému χ^2 testu. Dle [3] platí následující věta:

Věta 4. *Jestliže náhodný vektor (n_1, \dots, n_k) má multinomické rozdělení s parametry (n, π_1, \dots, π_k) , kde $n = \sum_{j=1}^k n_j$, Pearsonova statistika*

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j} \tag{3.1}$$

má při $n \rightarrow \infty$ asymptoticky χ^2 rozložení s $k - 1$ stupni volnosti.

Tuto větu nelze přímo aplikovat na markovské řetězce, neboť veličiny X_0, X_1, \dots z realizace řetězce nejsou nezávislé. Jak tento problém řešit uvádíme v následující podkapitole.

3.1.2 χ^2 test pro markovské řetězce

Uvažujme nerozložitelný homogenní markovský řetězec $\mathbf{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ s diskrétním časem a s konečnou množinou aperiodických stavů. Označme $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ počáteční rozdělení tohoto řetězce a $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^m$ jeho matici přechodu. Předpokládejme, že máme k dispozici jednu (dlouhou) realizaci řetězce, tj. známe migrační matici $\mathbf{N} = (n_{ij})_{i,j=1}^m$. Pak dle [22] platí následující věta.

Věta 5. Statistika

$$\chi^2 = \sum_{ij} \frac{(n_{ij} - n_{i\bullet} p_{ij})^2}{n_{i\bullet} p_{ij}} \quad (3.2)$$

má při $n = \sum_{ij} n_{ij} \rightarrow \infty$ asymptoticky χ^2 rozložení s $d - m$ stupni volnosti, kde d značí počet kladných pravděpodobností přechodu a m počet ratingových kategorií.

Důkaz. Náznak důkazu převezmeme z [22].

Definujme pomocné náhodné veličiny $(\eta_{il})_{i \in S, l \in \mathbb{N}}$ následovně: veličiny η_{il} mohou nabývat hodnot $1, \dots, m$, jsou navzájem nezávislé a $P(\eta_{il} = j) = p_{ij}$ pro všechna l .

Konstruujeme markovský řetězec. Na základě počátečního rozdělení zvolíme hodnotu x_0 náhodné veličiny X_0 a pokládáme $x_1 = \eta_{x_0 1}$. Pokud $x_0 \neq x_1$, pokládáme $x_2 = \eta_{x_1 1}$, v opačném případě klademe $x_2 = \eta_{x_1 2}, \dots$, pokládáme $x_{l+1} = \eta_{x_l j}$, kde $\eta_{x_l j}$ je první nevyužitá veličina v x_l -tém řádku matice $(\eta_{il})_{i \in S, l \in \mathbb{N}}$. Zřejmě tedy platí $P(X_{l+1} = j | X_l = i) = p_{ij}$ a \mathbf{X} je skutečně markovský řetězec s maticí přechodu \mathbf{P} .

Definujme nyní pro $i, j \in S$ veličiny n_{ij} následovně: n_{ij} bude značit počet výskytů stavu j v posloupnosti $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{in_i\bullet}$. Uvědomme si, že n_{ij} zároveň značí počet pozorovaných přechodů p_{ij} .

Označme $\mathbf{p}(\infty) = (p_1(\infty), \dots, p_m(\infty))$ stacionární rozdělení markovského řetězce. Z [25], Vět 2.25 a 2.27 víme, že veličiny $n_{i\bullet}$ konvergují v pravděpodobnosti k $np_i(\infty)$. Pro dané i označme dále $n_{i1}^i, \dots, n_{im}^i$ četnosti výskytu stavů $1, \dots, m$ v posloupnosti $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{in_i[np_i(\infty)]}$. Nyní si uvědomme, že vektor $(n_{i1}^i, \dots, n_{im}^i)$ pak má multinomické rozdělení s parametry $([np_i(\infty)], p_{i1}, \dots, p_{im})$. Můžeme tedy aplikovat Větu 4. - statistika

$$\sum_j \frac{(n_{ij}^i - [np_i(\infty)] p_{ij})^2}{[np_i(\infty)] p_{ij}} \quad (3.3)$$

má při $n \rightarrow \infty$ asymptoticky χ^2 rozdělení, přičemž počet stupňů volnosti je roven počtu kladných pravděpodobností přechodu ze stavu i snížených o jeden.

Platí, že součet dvou nezávislých veličin, které mají χ^2 rozdělení s a a b stupni volnosti, má opět χ^2 rozdělení s $a + b$ stupni volnosti. Jelikož jsou veličiny 3.3 nezávislé pro jednotlivá i , platí, že statistika

$$\chi^2 = \sum_{ij} \frac{(n_{ij} - n_{i\bullet} p_{ij})^2}{n_{i\bullet} p_{ij}} \quad (3.4)$$

má při $n \rightarrow \infty$ asymptoticky χ^2 rozložení s $d - m$ stupni volnosti, kde d značí počet kladných pravděpodobností přechodu. \square

Poznámka. Z důkazu Věty 5. navíc plyne, že pro dané $i \in S$ má statistika

$$\sum_j \frac{(n_{ij} - n_{i\bullet} p_{ij})^2}{n_{i\bullet} p_{ij}} \quad (3.5)$$

při $n_{i\bullet} \rightarrow \infty$ asymptoticky χ^2 rozdělení, přičemž počet stupňů volnosti je roven počtu kladných pravděpodobností přechodu ze stavu i snížených o jeden.

Poznámka.

Všimněme si, že jednotlivé sčítance ze vzorce (3.5) lze upravit následovně:

$$\sum_j \frac{(n_{ij} - n_{i\bullet} p_{ij})^2}{n_{i\bullet} p_{ij}} = \sum_j \frac{\left(\frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} - p_{ij}\right)^2}{\frac{p_{ij}}{n_{i\bullet}}} = \sum_j n_{i\bullet} \frac{(\hat{p}_{ij} - p_{ij})^2}{p_{ij}}. \quad (3.6)$$

Poznámka.

Uvedli jsme variantu testu pro jednu dlouhou realizaci nerozložitelného řetězce. V oblasti kreditního rizika však typicky máme k dipozici více kratších realizací **rozložitelného** řetězce - předpokládáme, že stav default je absorpční, ostatní stavy jsou přechodné. V [5] je ukázáno, že pro dané $i = 1, \dots, m-1$ má statistika

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(n_{ij} - n_{i\bullet} p_{ij})^2}{n_{i\bullet} p_{ij}} \quad (3.7)$$

pro $n_{i\bullet} \rightarrow \infty$ asymptoticky χ^2 rozložení s $d-1$ stupni volnosti, kde d značí počet kladných pravděpodobností přechodu ze stavu i .

Označíme-li $n_{i\bullet}(0)$ počet klientů v čase 0 se stavem i , a předpokládáme-li že $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{n_{i\bullet}(0)}{\sum_{j=1}^m n_{j\bullet}(0)} = u_i > 0$, pak má statistika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^m \frac{(n_{ij} - n_{i\bullet} p_{ij})^2}{n_{i\bullet} p_{ij}} \quad (3.8)$$

dle [5] pro $K \rightarrow \infty$ asymptoticky χ^2 rozložení s $d - (m-1)$ stupni volnosti, kde d značí počet kladných pravděpodobností přechodu ze stavů $i = 1, \dots, m-1$.

3.1.3 Aplikace

V této kapitole budeme pro přehlednost předpokládat, že pravděpodobnosti přechodu ze stavu defaultu jsou nulové a všechny pravděpodobnosti přechodu z nedefaultních stavů jsou kladné. Stupně volnosti příslušných statistik budeme tedy uvádět pro tento tvar matice přechodu. V případě jiného tvaru musí být stupně volnosti příslušně upraveny. Dodejme, že pro přehlednost budeme navíc značit S^{-m} množinu všech nedefaultních stavů $1, \dots, m-1$.

Test, zda parametry p_{ij} nabývají specifických hodnot

Chceme testovat, zda odhady \hat{p}_{ij} odpovídají nějakým předem specifikovaným hodnotám q_{ij} . Testujeme tedy hypotézu

$$H_0 : p_{ij} = q_{ij} \text{ pro } \forall i \in S^{-m}, \forall j \in S$$

oproti alternativě

$$H_1 : \exists i \in S^{-m}, j \in S \text{ taková, že } \hat{p}_{ij} \neq q_{ij}$$

na hladině spolehlivosti α .

Dle Věty 5 a poznámky na straně 36 zamítáme hypotézu H_0 na hladině spolehlivosti α při $K \rightarrow \infty$ pokud

$$\sum_{ij} n_{i\bullet} \frac{(\hat{p}_{ij} - q_{ij})^2}{q_{ij}} \geq \chi_{(m-1)^2}^2 (1 - \alpha). \quad (3.9)$$

Uveďme si nyní nejprve variantu testu po řádcích matice přechodu a posléze i variantu po jednotlivých členech matice přechodu.

Varianta pro testování po řádcích matice přechodu

Pro pevně dané $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ testujeme hypotézu

$$H_0 : p_{ij} = q_{ij} \text{ pro } \forall j \in S$$

oproti alternativě

$$H_1 : \exists j \in S \text{ takové, že } p_{ij} \neq q_{ij}.$$

Z poznámky na straně 36 o rozdělení statistiky (3.5) a poznámky na straně 36 o asymptotice odhadů na základě více realizací řetězce plyne, že hypotézu H_0 zamítáme na hladině spolehlivosti α pro $K \rightarrow \infty$ pokud

$$\sum_j n_{i\bullet} \frac{(\hat{p}_{ij} - q_{ij})^2}{q_{ij}} \geq \chi_{(m-1)}^2 (1 - \alpha). \quad (3.10)$$

Varianta pro testování po jednotlivých členech matice přechodu

Pro pevně daná $i \in S^{-m}, j \in S$ testujeme hypotézu

$$H_0 : p_{ij} = q_{ij}$$

oproti alternativě

$$H_1 : p_{ij} \neq q_{ij}.$$

Z důkazu Věty 5 plyne, že vektor $(n_{i1}^{\cdot}, \dots, n_{im}^{\cdot})$ má multinomické rozdělení s parametry $([np_i(\infty)], p_{i1}, \dots, p_{im})$. Jednotlivé členy vektoru mají tedy binomické rozdělení s parametry $([np_i(\infty)], p_{ij})$. Platí tedy, že statistika

$$\frac{n_{ij}^{\cdot} - [np_i(\infty)] p_{ij}}{\sqrt{[np_i(\infty)] p_{ij} (1 - p_{ij})}} \quad (3.11)$$

má při $n \rightarrow \infty$ asymptoticky normální rozdělení. Pro $n \rightarrow \infty$ ji navíc můžeme (3.11) upravit na

$$\frac{n_{ij} - n_{i\bullet}p_{ij}}{\sqrt{n_{i\bullet}p_{ij}(1-p_{ij})}} = \sqrt{n_{i\bullet}} \frac{\frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} - p_{ij}}{\sqrt{p_{ij}(1-p_{ij})}} = \sqrt{n_{i\bullet}} \frac{\hat{p}_{ij} - p_{ij}}{\sqrt{p_{ij}(1-p_{ij})}} \quad (3.12)$$

Podobně jako v poznámce na straně 36 o asymptotice odhadů na základě více realizací řetězce platí, že statistika (3.12) má pro $K \rightarrow \infty$ asymptoticky normální rozdělení. Hypotézu H_0 tedy zamítáme pokud je absolutní hodnota statistiky

$$\sqrt{n_{i\bullet}} \frac{\hat{p}_{ij} - q_{ij}}{\sqrt{q_{ij}(1-q_{ij})}}$$

větší než $(1 - \alpha/2)$ -kvantil normálního rozdělení.

Poznámka.

Vzhledem k zřejmosti výše uvedených odvození nebudeme u následujících testů uvádět jejich varianty pro testování po řádcích matice přechodu ani pro testování po členech matice přechodu.

Test homogenity portfolia

V praxi jsou klienti s podobnými charakteristikami slučováni do skupin a pro tyto skupiny jsou následně odhadovány matice přechodu. Zajímá nás tedy, zda můžeme sloučit do jedné skupiny klienty s charakteristikou A a klienty s charakteristikou B, tj. zda chování klientů s charakteristikou A lze popsat tím samým markovským řetězcem jako u klientů s charakteristikou B.

Začneme tedy s testováním rovnosti matic přechodu dvou portfolií klientů A a B. označme $\mathbf{P}^A = (p_{ij}^A)_{i,j \in S}$ matici přechodu skupiny A, $\mathbf{P}^B = (p_{ij}^B)_{i,j \in S}$ matici přechodu druhé skupiny B a podobně $\mathbf{N}^A = (n_{ij}^A)_{i,j \in S}$, resp. $\mathbf{N}^B = (n_{ij}^B)_{i,j \in S}$ jejich migrační matice. Odhad matice \mathbf{P}^{AB} společné pro obě skupiny je dán zřejmě jako

$$\hat{p}_{ij}^{AB} = \frac{n_{ij}^A + n_{ij}^B}{n_{i\bullet}^A + n_{i\bullet}^B}.$$

Za předpokladu nezávislosti obou portfolií, platí dle [7], str. 26, že statistika

$$\sum_{i \in S^{-m}} \sum_{j \in S} \frac{(n_{ij}^A - n_{i\bullet}^A \hat{p}_{ij}^{AB})^2}{n_{i\bullet}^A \hat{p}_{ij}^{AB}} + \sum_{i \in S^{-m}} \sum_{j \in S} \frac{(n_{ij}^B - n_{i\bullet}^B \hat{p}_{ij}^{AB})^2}{n_{i\bullet}^B \hat{p}_{ij}^{AB}} \quad (3.13)$$

$$= \sum_{i \in S^{-m}} \sum_{j \in S} \frac{n_{i\bullet}^A n_{i\bullet}^B}{n_{ij}^A + n_{ij}^B} \left(\frac{n_{ij}^A}{n_{i\bullet}^A} - \frac{n_{ij}^B}{n_{i\bullet}^B} \right)^2 \quad (3.14)$$

má pro $K \rightarrow \infty$ χ^2 rozdělení s $(m-1)^2$ stupni volnosti. Hypotézu

$$H_0 : p_{ij}^A = p_{ij}^B \text{ pro } \forall i \in S^{-m}, \forall j \in S \quad (3.15)$$

oproti alternativě

$$H_1 : \exists i \in S^{-m}, j \in S \text{ taková, že } p_{ij}^A \neq p_{ij}^B \quad (3.16)$$

zamítáme pokud statistika (3.13) je větší než $\chi^2_{((m-1)^2)} (1 - \alpha)$.

Rozšíření výše uvedeného testu na více výběrů je zřejmé, nebudeme ho zde uvádět. Podotkněme jen, že pro s výběrů bude mít statistika podobná statistice (3.13) χ^2 -rozdělení se $(s - 1) \cdot (m - 1)^2$ stupni volnosti. Doplňme, že v tomto případě je také vhodné postupně testovat shodnost celkové matice portfolia s jednotlivými maticemi subportfolií, abychom zjistili, které portfolio se nejvíce odlišuje.

Test homogenity v čase I

Předpokládejme, že máme několik období, přes které odhadujeme matici přechodu metodou kohorty. Předpokládáme, že markovský řetězec je homogenní, tj. že kdybychom odhadovali matice přechodu pro každé období zvlášť, dostaneme shodné výsledky. V praxi tomu tak však často není - mění se makroekonomické podmínky a s nimi i kreditní kvalita dlužníků. Je tedy vhodné předpoklad homogenity ověřit statistickým testem. Uveďme test prezentovaný v [5].

Postup je následující:

1. Vypočtíme matici přechodu $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$ společnou pro všechna období metodou uvedenou v kapitole 2.1.1.
2. Vypočtíme matice přechodu $\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in S}$ specifické pro jednotlivá období metodou uvedenou v kapitole 2.1.2.
3. Označme T počet období, přes která odhadujeme. Chceme testovat hypotézu

$$H_0 : p_{ij}(0) = p_{ij}(1) = \dots = p_{ij}(T - 1) = p_{ij} \forall i \in S^{m-1}, j \in S \quad (3.17)$$

oproti alternativě H_1 , že alespoň jedna z těchto rovností neplatí.

Použijme stejný test χ^2 -test jako u testování homogenity portfolia, tentokrát však aplikovaný na více výběrů. Hypotézu H_0 tedy zamítáme (při $K \rightarrow \infty$), pokud testová statistika

$$\chi^2 = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i \in S^m} \sum_{j \in S} n_{i \bullet}(t) \frac{(\hat{p}_{ij}(t) - \hat{p}_{ij})^2}{\hat{p}_{ij}} \quad (3.18)$$

χ^2 je větší než $\chi^2_{((T-1)(m-1)^2)} (1 - \alpha)$.

Problém výše uvedeného testu homogenity spočívá v nedostatku dat - může být problém odhadnout matice přechodu $\mathbf{P}(t)$ s dostatečnou přesností, případně nám může vadit nízká síla uvedeného testu.

Test homogenity v čase II - závislost na ekonomickém cyklu

Klientova schopnost splatit své závazky může být závislá na makroekonomických podmínkách - v době recese lidé ztrácejí zaměstnání, mají nižší výdělky a celkově se zhoršuje jejich životní situace. V důsledku toho může docházet ke snižování ratingů klientů, k nárůstu defaultů a tedy i ke změnám matice přechodu.

Naším cílem bude otestovat, zda ekonomický cyklus - tj. recese nebo expanse, ovlivňuje matici přechodu, tj. zda matice přechodu zůstává homogenní v čase. Tento test na rozdíl od předchozího testu homogenity čase předpokládá, že matice přechodu pro období recese (resp. expanse) jsou shodné. Má proto nižší nároky na data.

Předpokládejme, že máme dostatečný počet období, přes která matici přechodu odhadujeme. Postup testování je následující:

1. Rozhodněme, která období budeme považovat za recesi a která za expansi. Můžeme se orientovat podle vyjádření finančních organizací (např. národních bank), podle výše vybraných ekonomických ukazatelů (např. HDP), podle poměru počtu defaultů (či snížení ratingů) na počet klientů atd. Podotkněme, že pokud se rozhodujeme podle prvních dvou zmíněných kritérií, může být vhodné posunout období, kterému ukazatel přidělujeme, neboť zhoršení v makroekonomických podmínkách se může projevit v ratingu klientů až se zpožděním.
2. Odhadneme jednu matici přechodu $\mathbf{P}^{AB} = (p_{ij}^{AB})$ společnou pro všechna období.
3. Odhadneme zvlášť matici přechodu $\mathbf{P}^A = (p_{ij}^A)$ pro období recese a matici přechodu $\mathbf{P}^B = (p_{ij}^B)$ pro období expanse.
4. Hypotézu (3.15), že ekonomický cyklus nemá vliv na matici přechodu, zamítáme ve prospěch alternativy (3.16) na hladině spolehlivosti α (při $K \rightarrow \infty$), pokud statistika (3.13) je větší než $\chi_{(m-1)^2}^2(1 - \alpha)$.

Test markovské vlastnosti I

Markovská vlastnost vyžaduje, aby rating budoucí závisel pouze na ratingu současném. V praxi se však může stát, že rating závisí i na ratingích předchozích. Můžeme tedy testovat, zda rating v čase $t + 2$ závisí pouze na ratingu v čase $t + 1$ v rámci hypotézy, že rating klienta závisí pouze na předchozích dvou stavech, tj. na ratingu klienta v časech $t + 1$ a t (v tomto případě se jedná o markovský řetězec druhého řádu). Uveďme test prezentovaný v [5], kapitole 3.3.

Postupujme tedy následovně:

1. Označme $\mathbf{N}(t) = (n_{hi}(t))_{h,i \in S}$ migrační matici pozorovaných přechodů mezi stavy h, i , tj. $n_{hi}(t)$ bude rovno počtu klientů, kteří měli v čase t rating h , v čase $t + 1$ rating i .
2. Odhadněme tradičně matici přechodu $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$ metodou kohorty¹.
3. Označme $\mathbf{N}^3(t) = (n_{hij}(t))_{h,i,j \in S}$ migrační matici pozorovaných přechodů mezi stavy h, i, j , tj. $n_{hij}(t)$ bude rovno počtu klientů, kteří měli v čase t rating h , v čase $t + 1$ rating i , v čase $t + 2$ rating j . Tato matice je zřejmě trojrozměrná.

¹Neměli bychom přitom brát v potaz přechody z času 0 do času 1.

4. Odhadněme matici přechodu $\mathbf{P}^3 = (p_{hij})_{h,i,j \in S}$ následovně:

$$\hat{p}_{hij} = \frac{\sum_{t=0}^{T-2} n_{hij}(t)}{\sum_{t=0}^{T-2} n_{hi}(t)}$$

5. Chceme testovat hypotézu

$$H_0 : p_{1ij} = p_{2ij} = \dots = p_{mij} = p_{ij} \quad \forall i \in S^{-m}, \forall j \in S$$

oproti alternativě H_1 , že alespoň jedna z těchto rovností neplatí. K testování využijeme statistiku

$$\chi^2 = \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^m n_{hi} \frac{(\hat{p}_{hij} - \hat{p}_{ij})^2}{\hat{p}_{ij}}$$

Nulovou hypotézu, že řetězec splňuje markovskou vlastnost, zamítáme pokud statistika χ^2 je větší než $\chi^2_{((m-1)^2(m-2))} (1 - \alpha)$.

Problém výše uvedeného testu markovské vlastnosti spočívá v nedostatku dat k odhadu trojrozměrné matice přechodu $\mathbf{P}^3 = (p_{hij})_{h,i,j \in S}$. Proto tento test často v praxi není možné aplikovat.

Dodejme, že teoreticky je možné testovat, zda je řetězec prvního řádu, oproti alternativě, že je markovským řetězcem třetího (či vyššího) řádu. Tyto testy se opět vzhledem k nedostatku dat v kreditní praxi neprovádějí.

Test markovské vlastnosti II

Můžeme se však pokusit testovat markovskou vlastnost oproti jiné alternativě. Zmiňme dva v praxi časté problémy, kdy následující rating nezávisí na pouze na ratingu současném, ale i na ratingu předchozím.

Prvním z nich je situace, kdy dojde ke zhoršení ekonomické situace dlužníka, dlužník například ztratí práci. Představme si, že banka na tuto změnu zareaguje snížením ratingu o jeden stupeň. Pokud klient nesežene v práci ani v dalším období, jeho ekonomická situace se ještě zhorší a dojde k dalšímu zhoršení ratingu. Jedná se tedy o v praxi častou situaci, kdy po zhoršení ratingu následuje další zhoršení.

Jako druhý můžeme popsat problém, ke kterému dochází (nejen) při využití automatického behaviorálního skóringu, kdy je klientovi jedno období vypočteno o jeden stupeň odlišný rating a v dalším období ihned přepočten zpět na původní rating.

Zaměříme se tedy na zkoumání trendu - bude nás zajímat, jestli je pravděpodobnost přechodu z ratingu i v čase t do ratingu j v čase $t + 1$ ovlivněna trendem přechodu ze stavu h v čase $t - 1$ do stavu i , tj. zda je pravděpodobnost $p_{ij}(t, t + 1)$ závislá na tom, jestli v předchozí „změnou“ ratingu bylo snížení, zvýšení, nebo nezměnění ratingu.

Test provedeme jako variantu předchozího testu. Testujeme stejnou nulovou hypotézu (že se jedná o markovský řetězec prvního řádu), ale oproti jiné alternativě - alternativě, že markovský řetězec je sice druhého řádu, ale přechodové pravděpodobnosti $p_{1,ij}, \dots, p_{i-1,ij}$ jsou si rovny a přechodové pravděpodobnosti $p_{i+1,ij}, \dots, p_{m-1,ij}$ jsou si rovny.

Postupujeme následovně:

1. Odhadněme tradičně matici přechodu $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$ metodou kohorty zahrnutím všech klientů portfolia².
2. Klienty v daném čase t rozdělíme do tří skupin:
 - (a) **skupina -**: klienti, jejichž předchozí změnou (z času $t - 1$ do času t) bylo zhoršení,
 - (b) **skupina o**: klienti, kteří měli stejný rating v čase $t - 1$ i v čase t ,
 - (c) **skupina +**: klienti, jejichž předchozí změnou (z času $t - 1$ do času t) bylo zlepšení.

Podotkněme jen, že klienty z času 0 nemůžeme do analýzy zahrnout.

3. Pro každou ze skupin $-$, o , $+$ vytvořme v daném čase t ($t = 1, \dots, T$) vlastní migrační matici (označme je $\mathbf{N}^-(t) = (n_{-ij}(t))_{i,j \in S}$, $\mathbf{N}^o(t) = (n_{oij}(t))_{i,j \in S}$, $\mathbf{N}^+(t) = (n_{+ij}(t))_{i,j \in S}$).
4. Pro $i \in S^{m-}$, $j \in S$ odhadněme členy \hat{p}_{-ij} , \hat{p}_{oij} a \hat{p}_{+ij} .

$$\hat{p}_{-ij} = \frac{\sum_{t=0}^{T-2} n_{-ij}(t)}{\sum_{t=0}^{T-2} n_{-i\bullet}(t)}, \quad \hat{p}_{oij} = \frac{\sum_{t=0}^{T-2} n_{oij}(t)}{\sum_{t=0}^{T-2} n_{oi\bullet}(t)}, \quad \hat{p}_{+ij} = \frac{\sum_{t=0}^{T-2} n_{+ij}(t)}{\sum_{t=0}^{T-2} n_{+i\bullet}(t)}$$

5. Testujme hypotézu markovské vlastnosti řetězce prvního řádu oproti alternativě, že předchozí trend má vliv na pravděpodobnosti přechodu. Matematicky vyjádřeno, testujeme

$$H_0 : p_{oij} = p_{+ij} = p_{ij} \quad \text{pro } i = 1, j \in S \quad (3.19)$$

$$p_{-ij} = p_{oij} = p_{+ij} = p_{ij} \quad \text{pro } \forall i \in S^{m-}, j \in S \quad (3.20)$$

$$p_{-ij} = p_{oij} = p_{ij} \quad \text{pro } i = m - 1, j \in S \quad (3.21)$$

oproti alternativě, že alespoň jedna z uvedených rovností neplatí a řetězec je markovským řetězcem druhého řádu.

Podobně jako u testu markovské vlastnosti I využíváme statistiku:

$$\chi^2 = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=1}^m n_{-i\bullet} \frac{(\hat{p}_{-ij} - \hat{p}_{ij})^2}{\hat{p}_{ij}} + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^m n_{oi\bullet} \frac{(\hat{p}_{oij} - \hat{p}_{ij})^2}{\hat{p}_{ij}} \quad (3.22)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=1}^m n_{+i\bullet} \frac{(\hat{p}_{+ij} - \hat{p}_{ij})^2}{\hat{p}_{ij}} \quad (3.23)$$

která má pro $K \rightarrow \infty$ asymptoticky χ^2 rozdělení s $2(m-1)(m-2)$ stupni volnosti.

Hypotézu H_0 tedy zamítáme pokud je statistika χ^2 větší než $\chi_{2(m-1)(m-2)}^2(1-\alpha)$.

²Neměli bychom přitom brát v potaz přechody z času 0 do času 1.

Tento test má zřejmě oproti předchozímu testu markovské vlastnosti menší nároky na data. Nároky na data můžeme ještě snížit, pokud nebudeme testovat hypotézu nezávislosti pravděpodobností přechodu na předchozím trendu pro celou matici současně, ale zaměříme se pouze na přechody do sousedních stavů (jak jsme již zmínili v poznámce na straně 10 počty přechodů do sousedních stavů bývají obvykle výrazně vyšší, než počty přechodů do vzdálenějších stavů). Zaměříme se tedy nyní na přechody $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$, \dots , $m-2 \rightarrow m-1$ a přechody $2 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 2$, \dots , $m-2 \rightarrow m-3$. Pro daná i, j pak testujeme hypotézu

$$H_0 : p_{-ij} = p_{oij} = p_{+ij} = p_{ij} \quad (3.24)$$

oproti alternativě, že alespoň jedna z rovností neplatí.

Hypotézu H_0 zřejmě zamítáme, pokud je statistika

$$\chi^2 = n_{-i\bullet} \frac{(\hat{p}_{-ij} - \hat{p}_{ij})^2}{\hat{p}_{ij}} + n_{oi\bullet} \frac{(\hat{p}_{oij} - \hat{p}_{ij})^2}{\hat{p}_{ij}} + n_{+i\bullet} \frac{(\hat{p}_{+ij} - \hat{p}_{ij})^2}{\hat{p}_{ij}}$$

větší než $\chi_{(2)}^2(1 - \alpha)$.

Pro přechody z $1 \rightarrow 2$ a $m-1 \rightarrow m-2$ můžeme podobně testovat hypotézu $H_0 : p_{o12} = p_{+12} = p_{12}$, respektive $H_0 : p_{-(m-1)(m-2)} = p_{o(m-1)(m-2)} = p_{(m-1)(m-2)}$. Úprava testu pro tento případ je zřejmá, uvádět ji nebudeme.

Otázkou zůstává, jak situaci řešit, pokud test prokáže významnou závislost na předchozím trendu. Můžeme se pokusit modelovat přechody mezi ratingy pomocí řetězce druhého řádu, přičemž budeme předpokládat, že pravděpodobnosti přechodu ze stavů $h = 1, \dots, i-1$ v čase t přes stav i v čase $t+1$ do stavu j v čase $t+2$ jsou shodné a podobně. Problém může opět být nedostatek dat k odhadu matice přechodu.

Závislost na trendu také může indikovat nevhodnost použitého skóringového modelu. Především behaviorální skóringový model může být příliš citlivý na změny, nebo naopak na změny v situaci klienty reagovat se zpožděním. Další z možností, je provést změny ve skóringovém modelu. Toto řešení však není často aplikovatelné, případně je velmi dlouhodobé.

Dodejme, že pokud se závislost na trendu skutečně prokáže, mělo by před návrhem řešení dojít k dalším analýzám. Je vhodné zkoumat, zda dochází ke změnám o jednu ratingovou kategorii či o více, zda tento počet závisí na předchozím trendu, zda se chování liší pro nové či stávající klienty a podobně.

3.2 Markovské řetězce se spojitým časem

Jednou z výhod využití markovských řetězců se spojitým časem k modelování je snadné a přesné formulování hypotéz a statistických testů. Ukážeme si, jak testování provést a uvedeme 2 příklady použití. K testování využijeme semiparametrický multiplikativní model rizika prezentovaný v kapitole 2.5.

Postup odvození testů bude následující: nejprve si připomeneme obecný test poměrem věrohodností, pak ukážeme jak použít test poměrem věrohodností na semiparametrický multiplikativní model rizika aplikovaný na intenzity. V poslední podkapitole se již budeme věnovat speciálním aplikacím zkoumajícím markovskou vlastnost.

Test poměrem věrohodností je vhodný k porovnání vhodnosti dvou modelů, pokud jeden model (nulový model) je speciálním případem modelu druhého (alternativní model). Dalším předpokladem je, že parametry obou modelů lze nalézt pomocí metody maximální věrohodnosti. Za platnosti nulové hypotézy (, že redukovaný model je dostačující) a tzv. *standardních podmínek regularity* lze dokázat, že statistika

$$LR = -2 \ln \left(\frac{\text{logaritmická věrohodnost nulového modelu}}{\text{logaritmická věrohodnost alternativního modelu}} \right) \quad (3.25)$$

má asymptoticky χ^2 rozdělení, jehož stupně volnosti jsou rovny rozdílu parametrů alternativního a nulového modelu. Asymptotické výsledky založené na teorii martingalů ukazují, že i v případě semiparametrického multiplikativního modelu rizika má statistika LR definovaná pomocí logaritmu částečné věrohodností funkce (2.43) asymptoticky χ^2 rozdělení. Důkaz a odpovídající podmínky regularity lze nalézt v [4], kapitole VII.

3.2.1 Test nezávislosti intenzity q_{ij} na proměnné Z

Připomeňme semiparametrický multiplikativní model rizika aplikovaný na intenzity přechodu - předpokládáme, že intenzity přechodu závisí na specifikované proměnné Z následujícím způsobem:

$$q_{ij}^k(t) = Y_i^k(t) \alpha_{ij}^k(t, Z_k(t)), \quad (3.26)$$

kde $\alpha_{ij}^k(t, Z_k(t))$ má multiplikativní tvar

$$\alpha_{ij}^k(t, Z_k(t)) = \alpha_{ij}^0(t) \exp(\beta_{ij} Z_k(t)). \quad (3.27)$$

Naším cílem bude zkoumat, zda obecná proměnná Z má vliv na velikost intenzity q_{ij} . Využijeme testu poměrem (částečných) věrohodností z [4], kapitoly VII. Alternativním modelem bude v našem případě model (3.26),(3.27), naopak za platnosti nulové hypotézy budeme moci intenzitu q_{ij}^k vyjádřit jako

$$q_{ij}^k(t) = Y_i^k(t) \alpha_{ij}^0(t).$$

Testujme tedy hypotézu $H_0 : \beta_{ij} = 0$ oproti alternativě $H_1 : \beta_{ij} \neq 0$. Dle [4] platí³, že testová statistika

$$LR = 2 \cdot (C(\beta_{ij}) - C(0))$$

má χ^2 rozdělení s jedním stupněm volnosti. Nulovou hypotézu tedy zamítáme na hladině α , pokud je statistika LR větší než $\chi_{(1)}^2(1 - \alpha)$

Ukázali jsme test pro jednu intenzitu q_{ij} . Můžeme si však přát testovat výše uvedenou hypotézu i pro všechny intenzity matice \mathbf{Q} najednou. Víme, že diagonální členy matice \mathbf{Q} jsou jednoznačně určeny ostatními řádkovými členy, proto je nebudeme do testové statistiky zahrnovat. Dále v oblasti kreditního rizika předpokládáme, že intenzity přechodu z defaultního stavu m jsou nulové (v každém čase), proto je také nezahrneme. Testujme tedy hypotézu $H_0 : \beta_{ij} = 0$

³Musí být samozřejmě splněny podmínky regularity uvedené v [4], kapitole VII.

pro všechna $i = 1, \dots, m - 1, j = 1, \dots, m$ taková, že $i \neq j$, oproti alternativě $H_1 : \exists i, j$ takové, že $\beta_{ij} \neq 0$. Nulovou hypotézu tedy zamítáme, pokud statistika

$$LR = 2 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j \neq i} \left(C(\hat{\beta}_{ij}) - C(0) \right)$$

je větší než $\chi^2_{(m(m-1))}(1 - \alpha)$.

Dodejme, že pokud test vyjde signifikantní, může pro nás být vhodné modelovat intenzity q_{ij} pomocí modelu (3.26), (3.27). V tomto případě je však nutné odhadnout nejen parametry β_{ij} , ale i parametr α_{ij}^0 . Postup odhadu tohoto parametru je však netriviální, a jelikož pro naše účely není nutný, odhadovat ho nebudeme. Postup odhadu je prezentován například v [4].

3.2.2 Aplikace

Test markovské vlastnosti - závislost na trendu

Podobně jako v kapitole Test markovské vlastnosti II pro diskrétní markovské řetězce nás bude zajímat závislost ratingů na trendu - zda jsou intenzity skoku ze současného stavu ovlivněny trendem skoku z předchozího do současného stavu, tj. například zda po zhoršení ratingu je intenzita výskoku ze současného stavu vyšší, než pokud byl předtím rating zvýšen apod.

Naším cílem bude tedy vhodně definovat proměnné $Z_k(t)$. Z kapitoly 2.5 víme, že musí být lokálně omezené a zleva spojité. Definujme je proto jako

- $Z_k(t) = 1$ pokud se klient k dostal do ratingové třídy, kterou měl těsně před časem t , zvýšením ratingu (využíváme tedy limitu procesu zleva),
- $Z_k(t) = 0$ pokud se klient k dostal do ratingové třídy, kterou měl těsně před časem t , snížením ratingu.

Požadavky na Z jsou splněny a my můžeme využít test představený v kapitole 3.2.1.

Doplňme, že v testu můžeme zřejmě využít pouze informace o klientech, u kterých byly pozorovány alespoň dvě změny během sledovaného období $[0, \tau]$.

Test markovské vlastnosti - doba do změny

Uveďme ještě jeden test markovské vlastnosti - zkoumejme zda doba, po kterou nedošlo ke změně ratingu, má vliv na intenzity přechodu (v praxi se například často stává, že intenzity výskoku ze stavu jsou vyšší těsně po změně ratingu.).

K testování této hypotézy definujme proměnné $Z_k(t)$ následovně:

- $Z_k(t) =$ „čas, který uběhl od doby, kdy byl klientovi přidělen rating, který měl klient těsně před časem t .“

Poznámka.

Podobným způsobem můžeme testovat, zda intenzity přechodu závisí i na dalších věcech - na tom zda má klient v daném čase více než jeden úvěr, zda je klient v daném čase zaměstnancem/studentem/... a podobně (viz též poznámka na straně

32). Test lze také využít k testování závislosti intenzit na ekonomickém cyklu. Tyto případy zde ale vzhledem k rozsahu práce a k nepřilíšnému využití řetězců se spojitým časem v praxi uvádět nebudeme.

3.2.3 Další možné přístupy k testování

Uvedli jsme přístup k testování vlastností markovského řetězce se spojitým časem založený na jeho zobecnění na semiparametrický multiplikativní model rizika. Výše uvedený postup je (výpočetně) jednoduchý a v literatuře kreditního rizika asi nejčastěji zmiňovaný.

Je však možné využít i jiné postupy. Zmiňme například test z [9], který lze využít k testování rovnosti matic intenzit, tj. například k testování homogenity. Tento test však vyžaduje odhad rozptylu a Fisherovy informace, které jsme zde neuváděli, proto neprezentujeme ani tento test. Další z důvodů, proč jsme prezentovali přístup uvedený výše a nikoli test z [9] je vysoká výpočetní náročnost odhadu rozptylu dle [9].

Další přístup k testování homogenity uvádí například [29], [28].

4. Simulace

V předchozích kapitolách jsme prezentovali vybrané metody odhadů v markovských řetězcích. Cílem této kapitoly bude ilustrovat výsledky vybraných metod na příkladech.

V kapitole 4.1 se budeme zabývat přesností odhadu matice přechodu metodou kohorty. Zaměříme se na metody určení intervalů spolehlivosti a na vliv velikosti portfolia. V kapitole 4.2 ukážeme vliv délky nejmenšího rozlišovaného období na přesnost odhadu matice přechodu metodou dle Lando, Skodeberg prezentovanou v kapitole 2.2.2. V kapitole 4.3 porovnáme kvalitu odhadů matice přechodu metodou kohorty a metodou dle Lando, Skodeberg. V poslední kapitole 4.4 pak porovnáme přesnost odhadů matice přechodu metodou dle Lando, Skodeberg a metodou dle Bladt, Sorensen uvedenou v kapitole 2.3.

Naše práce v dané kapitole je obvykle rozdělena do dvou částí - v první části ilustrujeme výsledky metody na jednom příkladě, na jednom simulačním experimentu. V druhé části provedeme experiment 1000-krát (nebo 100-krát při velké výpočetní náročnosti zkoumaných metod) a vyvodíme patřičné závěry.

Dodejme, že **pro přehlednost budeme v celé této kapitole uvádět členy matice přechodu v procentech** a stejně tomu bude u i ukazatelů vypočtených na základě těchto matic.

Pro porovnání kvality odhadů si vybíráme mimo jiné eukleidovskou vzdálenost $\|\mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}(1)\|$. Další možné normy vhodné pro porovnání matic přechodu využívaných pro oblast kreditního rizika jsou uvedeny například v [26].

Simulace jsme provedli ve statistickém programu R. Výpočetní náročnost některých z metod je však vysoká, proto je vhodné se otázkou volby software zabývat a případně využít jiné programy než R. Data, na kterých byly provedeny simulační experimenty, a výpočetní skripty příkládáme na příloženém CD. Podotkneme, že skripty byly vytvořeny pouze pro naše účely a pro využití na jiných příkladech musí být upraveny.

4.1 Přesnost odhadu matice přechodu metodou kohorty

Metoda kohorty přes veškeré své nedostatky zůstává v praxi nejoblíbenější a nejčastěji používanou metodou. Cílem této kapitoly bude demonstrovat na příkladě přesnost této metody a ukázat některé z možností výpočtu intervalů spolehlivosti pro jednotlivé členy.

Předpokládejme, že ratingový systém banky rozlišuje 4 ratingové stupně - A,B,C a defaultní stav D. Banka sledovala po dobu 4 let 2000 klientů, jejichž chování lze popsat homogenním markovským řetězcem s diskretním časem a roční maticí přechodu

$$\mathbf{P}(1) = \begin{pmatrix} 94,1 & 4,1 & 1,4 & 0,4 \\ 4,9 & 84,2 & 6,7 & 4,2 \\ 2,3 & 8,5 & 76,5 & 12,7 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} .$$

Předpokládáme, že počáteční rozdělení klientů v nedefaultních ratingových stupních je rovnoměrné, tj. $\mathbf{p}(0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$. Banka má k dispozici roční údaje o ratingových klientů¹.

Naši práci tentokrát rozdělíme do tří částí - v kapitole 4.1.1 prezentujeme výsledky jednoho simulačního experimentu, v 4.1.2 tento experiment provádíme 1000-krát a prezentujeme příslušné závěry a v kapitole 4.1.3 ukazujeme vliv velikosti portfolia na přesnost odhadu.

4.1.1 Výsledky jednoho simulačního experimentu

Na základě matice přechodu a počátečního rozdělení generujeme pro každého klienta 5 pozorování, tj. generujeme 2000 řetězců po dobu 4 let. Na základě těchto pozorování odhadujeme matici přechodu $\hat{\mathbf{P}}^{koh}(1)$ metodou kohorty. Ukažme tuto odhadnutou matici přechodu spolu s její migrační maticí:

$$\hat{\mathbf{P}}^{koh}(1) = \begin{pmatrix} 92,6 & 4,9 & 1,9 & 0,6 \\ 5,4 & 82,5 & 7,6 & 4,5 \\ 1,7 & 8,4 & 77,0 & 13,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 100 \end{pmatrix} .$$

$$\mathbf{N}^{koh}(1) \doteq \begin{pmatrix} 2386 & 127 & 48 & 15 \\ 137 & 2107 & 194 & 115 \\ 37 & 186 & 1704 & 287 \\ 0 & 0 & 0 & 657 \end{pmatrix} .$$

Všimněme si, že jednotlivé členy odhadnuté matice přechodu se liší maximálně o 17 desetín (procenta), pravděpodobnosti defaultu nejvíce o 3 desetiny. Vypočetli jsme, že $\|\hat{\mathbf{P}}^{koh}(1) - \mathbf{P}(1)\| = 2,78$. Jedná se však o typicky přesný odhad a o typické odchylky?

Zaměřme na chvíli naši pozornost na migrační matici. Naším cílem bude určit intervaly spolehlivosti. Při testování, zda jednotlivé členy matice přechodu nabývají specifických hodnot jsme na straně 37 uvedli, že náhodné veličiny n_{ij} mají binomické rozdělení s parametry $(n_{i\bullet}, p_{ij})$. Pro stanovení intervalu spolehlivosti můžeme tedy použít tradiční metodiku aproximace binomického rozdělení rozdělením normálním při $n_{i\bullet} \rightarrow \infty$ a intervaly spolehlivosti na hladině α vypočítat jako

$$CI_N = \hat{p}_{ij} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_{ij}(1-\hat{p}_{ij})}{n_{i\bullet}}} . \quad (4.1)$$

Pro přehlednost nazýváme tyto intervaly Waldovými intervaly spolehlivosti. Máme však dostatek pozorování, abychom mohli binomické rozdělení aproximovat normálním? V [10], str. 106 je zmíněno, že se používají různá kritéria - například, že interval spolehlivosti (4.1) může být využit, pokud $n_{i\bullet}\hat{p}_{ij}$ a $n_{i\bullet}(1-\hat{p}_{ij})$ nejsou menší než 5. V našem případě je kritérium splněno pro všechny odhadované členy. Co se ale stane, když banka nebude mít k dispozici pozorování pro 2000 klientů, ale jen pro 500? V [10] je uvedeno, že pro malá $n_{i\bullet}$ a pravděpodobnosti p_{ij} blízké 0 nebo 1 může být lepší využít tzv. Wilsonovy intervaly spolehlivosti. Označme $\kappa = z_{\alpha/2}$, $\hat{q}_{ij} = (1 - \hat{p}_{ij})$. Pak Wilsonův interval

¹Uvažujeme tedy 5 pozorování pro každého klienta

spolehlivosti definujeme jako

$$CI_W = \frac{n_{ij} + \kappa^2/2}{n_{i\bullet} + \kappa^2} \pm \frac{\kappa n_{i\bullet}^{1/2}}{n_{i\bullet} + \kappa^2} (\hat{p}_{ij}\hat{q}_{ij} + \kappa^2/(4n_{i\bullet}))^{1/2}. \quad (4.2)$$

Zajímá nás tedy, která metoda určení intervalu spolehlivosti je vhodnější pro náš příklad. Uveďme si odhadnuté intervaly spolehlivosti pro pravděpodobnosti přechodů do defaultu na základě matice přechodu $\hat{\mathbf{P}}^{koh}(1)$ a migrační matice $\mathbf{N}^{koh}(1)$:

	$CI_N(0,05)$	$CI_W(0,05)$
\hat{p}_{AD}	(0,29 ; 0,88)	(0,35 ; 0,96)
\hat{p}_{BD}	(3,70 ; 5,31)	(3,77 ; 5,38)
\hat{p}_{CD}	(11,56 ; 14,36)	(11,63 ; 14,43)

Na první pohled vidíme, že obě hranice Wilsonových intervalů jsou vyšší než hranice Waldových intervalů, šíře intervalů je prakticky stejná. Všechny uvedené Waldovy intervaly zahrnují skutečný parametr a stejně je tomu i u intervalů Wilsonových.

4.1.2 Výsledky simulační studie

Experiment uvedený v předchozí kapitole jsme provedli 1000-krát - máme tedy odhadnuto 1000 matic přechodu. Podívejme se nejprve na průměrné hodnoty odhadů:

	A	B	C	D
A	94,10	4,08	1,41	0,40
B	4,92	84,21	6,71	4,19
C	2,29	8,51	76,46	12,72

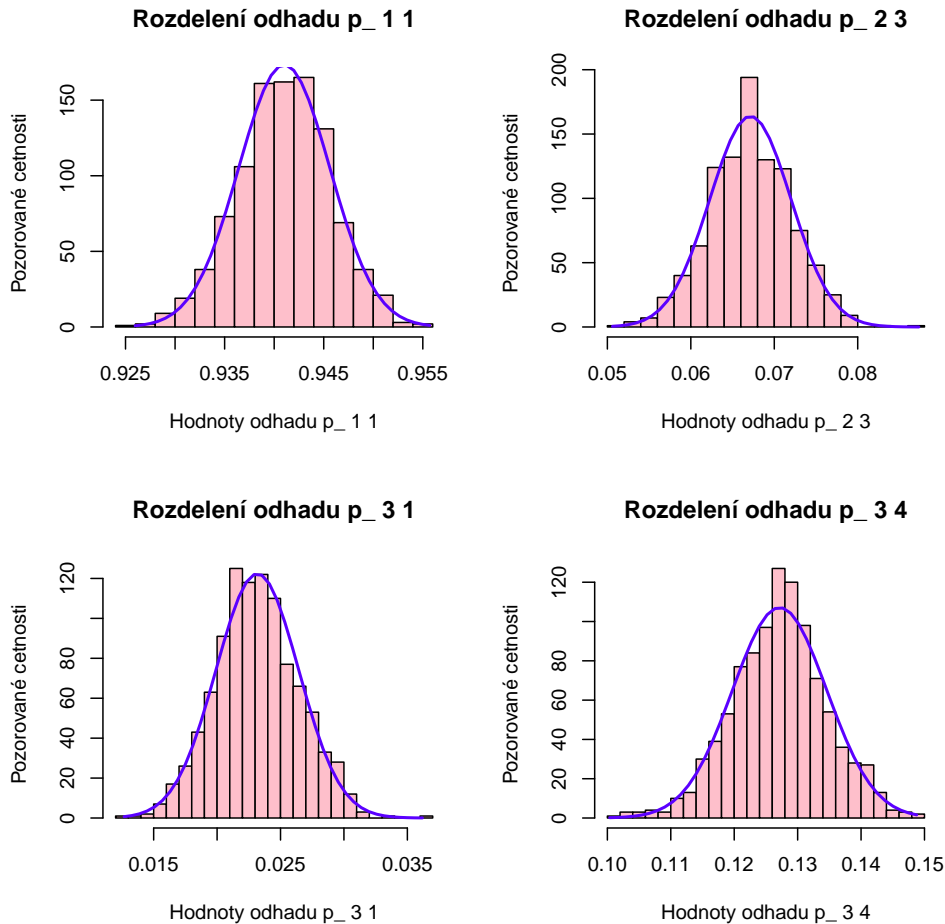
Nevidíme tedy žádné významné vychýlení odhadů. Zajímejme se nyní o střední čtvercové chyby (pro přehlednost uvádíme jejich odmocniny):

	A	B	C	D
A	0,46	0,38	0,23	0,12
B	0,43	0,72	0,49	0,40
C	0,33	0,61	0,93	0,74

Největší střední čtvercové chyby vidíme u přechodů ze stavu C, nejmenší u přechodů ze stavu A, což odpovídá i průměrným pozorovaným četnostem z příslušných stavů:

$\bar{n}_{A\bullet}$	$\bar{n}_{B\bullet}$	$\bar{n}_{C\bullet}$
2708	2521	2135

Podívejme se ještě na rozdělení odhadů jednotlivých parametrů. Pro vybrané členy matice $\mathbf{P}(1)$ uveďme histogramy rozdělení odhadů spolu s hustotou normálního rozdělení, jehož parametry budou vypočteny empirický průměr odhadů a empirický rozptyl odhadů (hustota je znázorněna modrou barvou).



Empirické rozdělení lze ve všech případech považovat za normální. Dodejme, že průměrná vzdálenost $\|\mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}^{koh}(1)\|$ je rovna 1,76. Odhad prezentovaný v kapitole 4.1.1 byl tedy méně přesný než většina ostatních odhadů.

Zaměříme nyní pozornost na intervaly spolehlivosti. Vypočteme empirické kvantily rozdělení odhadů jednotlivých parametrů. Uvádíme vždy 0,025-kvantil a 0,975-kvantil:

	A	B	C	D
A	(93,16 ; 95,00)	(3,35 ; 4,86)	(0,98 ; 1,87)	(0,19 ; 0,66)
B	(4,06 ; 5,69)	(82,74 ; 85,60)	(5,75 ; 7,66)	(3,43 ; 4,99)
C	(1,68 ; 2,97)	(7,36 ; 9,80)	(74,64 ; 78,29)	(11,21 ; 14,19)

Nejširší jsou vzdálenosti mezi oběma kvantily pro odhady přechodových pravděpodobností p_{33} (vzdálenost je 3,7) a p_{34} (3,0). Nejužší naopak pro p_{14} (0,5) a p_{13} (0,9).

Nyní bude naším cílem porovnat vhodnost intervalů spolehlivosti CI_N a CI_W . Pro přehlednost se zaměříme pouze na pravděpodobnosti defaultu. Budeme zkoumat dvě kritéria - pokrytí intervalů a délku intervalů.

Prvně tedy budeme zkoumat, jaké procento vypočtených intervalů spolehlivosti (na hladině 0,05) obsahuje skutečný parametr:

	pokrytí $CI_N(0, 05)$	pokrytí $CI_W(0, 05)$
\hat{p}_{AD}	93,4	95,4
\hat{p}_{BD}	94,8	94,9
\hat{p}_{CD}	94,2	93,5

Empiricky vypočtené pokrytí tedy odpovídá požadovanému pokrytí pro obě metody. Podívejme se tedy na průměrnou délku získaných intervalů:

	pr. délka $CI_N(0, 05)$	pr. délka $CI_W(0, 05)$
\hat{p}_{AD}	0,47	0,49
\hat{p}_{BD}	1,56	1,57
\hat{p}_{CD}	2,82	2,83

Vidíme, že i průměrné délky intervalů spolehlivosti jsou podobné. Pro náš příklad bychom tedy doporučovali využívat Waldovy intervaly spolehlivosti a to kvůli jejich jednoduchosti a snadné interpretovatelnosti.

4.1.3 Vliv velikosti portfolia na přesnost odhadů

V předchozích podkapitolách jsme uvažovali portfolio 2000 klientů. Banky však mají k dispozici často mnohem menší portfolia klientů se shodnými charakteristikami. Co se tedy stane, když budeme uvažovat portfolio 250, 500, 1000, (2000,) nebo 4000 klientů?

Budeme postupovat podobně jako v podkapitole 4.1.2. Pro portfolia o různé velikosti provedeme stejnou simulační studii- 1000-krát odhadneme matici přechodu na základě generování ročních pozorování řetězce po dobu 4 let pro každého klienta. Vzhledem k rozsahu práce zde není možné prezentovat všechny výsledky jako u simulace pro 2000 klientů, proto uvedeme jen z našeho pohledu nejdůležitější závěry.

Pro všechna portfolia jsme vypočetli matici průměrů odhadů parametrů p_{ij} . Pro žádné portfolio jsme nepozorovali významnou odchylku průměrů odhadů od skutečných parametrů.

Zaměříme nyní naši pozornost na nejjednodušší ukazatel přesnosti odhadů, a to průměr ze vzdáleností $\|\mathbf{P}^{koh}(1) - \mathbf{P}(1)\|$:

Počet klientů	250	500	1000	2000	4000
Průměrná $\ \mathbf{P}^{koh}(1) - \mathbf{P}(1)\ $	4,93	3,49	2,48	1,76	1,25

Dle očekávání se tedy průměrná vzdálenost $\|\mathbf{P}^{koh}(1) - \mathbf{P}(1)\|$ s rostoucím počtem klientů snižuje - se zdvojnásobením počtu klientů se sníží zhruba o třetinu.

Podívejme se nyní na podrobněji na střední čtvercové odchylky odhadů pravděpodobností defaultu (pro přehlednost opět uvedeme jejich odmocniny):

Počet klientů:	250	500	1000	2000	4000
\hat{p}_{AD}	0,33	0,23	0,17	0,12	0,09
\hat{p}_{BD}	1,10	0,80	0,55	0,40	0,29
\hat{p}_{CD}	2,05	1,44	1,01	0,74	0,51

Nejvyšší jsou zřejmě chyby pro pravděpodobnosti defaultu ze stavu C , nejmenší ze stavu A . Pro 1000 klientů je odmocnina ze střední čtvercové chyby parametru

\hat{p}_{CD} větší než 1 procento, pro 250 klientů dokonce větší než 2 procenta - odhady tedy jsou již značně nepřesné, ale vždy samozřejmě záleží na tom, k čemu jsou odhady využity. Spolu se střední čtvercovou odchylkou je vhodné sledovat počty sledovaných přechodů z jednotlivých stavů:

Počet klientů:	250	500	1000	2000	4000
$\bar{n}_{A\bullet}$	340	678	1 350	2 708	5 398
$\bar{n}_{B\bullet}$	316	630	1 259	2 516	5 046
$\bar{n}_{C\bullet}$	265	532	1 071	2 137	4 278

Všimněme si, že ač pro portfolio 500 klientů máme $\bar{n}_{C\bullet} = 532$ a pro portfolio 250 $\bar{n}_{A\bullet} = 340$, tedy méně, střední čtvercová chyba parametru \hat{p}_{AD} pro portfolio 250 klientů je nižší než střední čtvercová chyba parametru \hat{p}_{CD} pro portfolio 500 klientů. Chyba odhadu tedy nezávisí jen na počtu pozorovaných přechodů z příslušného stavu.

Opět budeme zkoumat přesnost získaných intervalů spolehlivosti. Pro přehlednost se zaměříme jen na intervaly spolehlivosti pro odhady pravděpodobností defaultu. Vypočítáme nejprve empirické kvantily (0,025-kvantil a 0,975-kvantil):

Počet klientů:	250	500	1000
\hat{p}_{AD}	(0,0 ; 1,1)	(0,0 ; 0,9)	(0,1 ; 0,8)
\hat{p}_{BD}	(2,1 ; 6,3)	(2,7 ; 5,8)	(3,2 ; 5,3)
\hat{p}_{CD}	(8,9 ; 16,9)	(10,0 ; 15,5)	(10,7 ; 14,8)

Počet klientů:	2000	4000
\hat{p}_{AD}	(0,19 ; 0,66)	(0,24 ; 0,58)
\hat{p}_{BD}	(3,43 ; 4,99)	(3,66 ; 4,38)
\hat{p}_{CD}	(11,21 ; 14,19)	(11,72 ; 13,76)

Pro portfolia s nízkým počtem klientů (250, 500) jsou získané intervaly spolehlivosti velice široké, přesnost odhadů je tedy již velice nízká. Jelikož v kreditní praxi často potřebujeme přesné údaje, mohou být tyto odhady prakticky bezcenné - je rozdíl, jestli předpokládáme, že zdefaultuje 11,3 nebo 14,2 klientů s ratingem C. Pokud navíc používáme odhady k predikci, chyby se mohou násobit a můžeme nakonec dojít ke zcela mylným závěrům.

Vypočítejme si empirické pokrytí intervalů spolehlivosti získaných pomocí obou metod:

$CI_N(0,05)$	250	500	1000	2000	4000
\hat{p}_{AD}	71,9	93,4	88,7	93,4	93,6
\hat{p}_{BD}	92,9	93,6	95,8	94,8	94,5
\hat{p}_{CD}	94,5	94,4	94,5	94,2	94,5

$CI_W(0,05)$	250	500	1000	2000	4000
\hat{p}_{AD}	96,5	96,4	95,7	95,4	94,9
\hat{p}_{BD}	96,6	94,7	95,7	94,9	95,0
\hat{p}_{CD}	95,3	95,7	94,6	93,5	94,7

Všimněme si, že pro parametr \hat{p}_{CD} vychází obě metody podobně přesně. Jiné je to u parametru \hat{p}_{AD} - pro portfolio s 250 klienty je empirické pokrytí velice nízké pro Waldovy intervaly, dobré pro intervaly Wilsonovy. Pro portfolio s 500 klienty problém nemáme, ale problém se opět objevuje u portfolio s 1000 klienty, ač v menší míře. Nízká hodnota pokrytí je pravděpodobně způsobena nízkou hodnotou parametru \hat{p}_{AD} - dle článku [10] jsou pro nízká $n_{i\bullet}$ a pro \hat{p}_{ij} blízká 0 nebo 1 Waldovy intervaly nespolehlivé, jejich pokrytí je buď nízké nebo nestabilní pro malé změny \hat{p}_{ij} a $n_{i\bullet}$. Podívejme se ale ještě na délku intervalů:

$CI_N(0,05)$	250	500	1000	2000	4000
\hat{p}_{AD}	1,07	0,88	0,66	0,47	0,34
\hat{p}_{BD}	4,36	3,12	2,21	1,56	1,11
\hat{p}_{CD}	8,03	5,67	3,99	2,82	2,00

$CI_W(0,05)$	250	500	1000	2000	4000
\hat{p}_{AD}	1,66	1,06	0,72	0,49	0,34
\hat{p}_{BD}	4,48	3,16	2,22	1,57	1,11
\hat{p}_{CD}	8,04	5,67	3,99	2,83	2,00

Pro parametr \hat{p}_{AD} a menší portfolia jsou Wilsonovy intervaly viditelně delší, ale zase mají mnohem lepší pokrytí. Pro nízké/vysoké hodnoty parametru \hat{p}_{ij} a nízká $n_{i\bullet}$ bychom měli volit Wilsonovy intervaly. Některá z kritérií, jak posuzovat \hat{p}_{ij} a $n_{i\bullet}$ a na základě kterých se můžeme rozhodnout jakou metodu výpočtu intervalů zvolit, jsou uvedena například v [10]. My je zde uvádět nebudeme, protože pro náš příklad vidíme ještě jeden problém - intervaly spolehlivosti pro parametr \hat{p}_{CD} jsou velice široké a tudíž prakticky nepoužitelné. V některých testech může být vzhledem k přílišné šířce intervalů spolehlivosti těžké zamítnout nulovou hypotézu, síla testu tedy může být nízká.

Jelikož v oblasti kreditního rizika potřebujeme přesné výsledky, doporučili bychom pro náš příklad používat Waldovy intervaly spolehlivosti pro portfolia s 1000 a více klienty. Naopak u portfolií a méně než 1000 klienty mohou být odhady již značně nepřesné a proto doporučujeme intervaly spolehlivosti pokud možno nevyužívat vůbec. Dodejme, že závěry se mohou lišit pro matice intenzit jiného tvaru, především pro matice s nízkými/vysokými hodnotami některých parametrů.

4.2 Vliv délky nejmenšího rozlišovaného období na přesnost odhadu matice intenzit metodou dle Lando, Skodeberg

V kapitole 2.2.2 jsme ukázali, jak odhadovat matici intenzit \mathbf{Q} markovského řetězce se spojitým časem metodou maximální věrohodnosti na základě spojitých dat. Jak jsme již uvedli v poznámce na straně 13, v praxi však nemáme k dispozici pozorování spojitá, ale pouze diskrétní - nejmenší období, které rozlišujeme, je obvykle jeden den, což je dostatečně malé období na to, abychom data za spojitá považovat mohli. Nejmenší rozlišované období však může být i delší. V následující

simulaci ukážeme na příkladě, jak volba délky tohoto období ovlivňuje přesnost odhadu.

Vliv délky nejmenšího období na přesnost odhadu matice \mathbf{Q} ukážeme na simulaci fiktivního portfolia klientů. Předpokládejme stejně jako v kapitole 4.1, že ratingový systém banky rozlišuje 4 ratingové stupně - A,B,C a defaultní stav D. Banka sledovala po dobu 4 let 2000 klientů, jejichž chování lze popsat homogenním markovským řetězcem se spojitým časem a s maticí intenzit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0,062 & 0,045 & 0,015 & 0,002 \\ 0,054 & -0,177 & 0,083 & 0,040 \\ 0,024 & 0,106 & -0,273 & 0,143 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Príslušná roční matice přechodu je tedy rovna (podobně jako v kapitole 4.1)

$$\mathbf{P}(1) \doteq \begin{pmatrix} 94,12 & 4,07 & 1,43 & 0,38 \\ 4,89 & 84,24 & 6,68 & 4,19 \\ 2,28 & 8,53 & 76,47 & 12,72 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Naše porovnání rozdělíme do dvou částí - v kapitole 4.2.1 si ukážeme výsledky jednoho simulačního experimentu, v kapitole 4.2.2 provedeme simulační experiment 100-krát a uvedeme závěry plynoucí z této malé simulační studie.

4.2.1 Výsledky jednoho simulačního experimentu

Na základě matice intenzit \mathbf{Q} generujeme spojitě realizace 2000 řetězců po dobu 4 let². Předpokládáme počáteční rovnoměrné rozdělení klientů mezi stupně A, B a C. Postupem uvedeným v kapitole 2.2.2 získáváme celkem přesný odhad matice intenzit na základě spojitých pozorování

$$\hat{\mathbf{Q}}_{spoj} \doteq \begin{pmatrix} -0,0609 & 0,0468 & 0,0123 & 0,0019 \\ 0,0520 & -0,1736 & 0,0787 & 0,0429 \\ 0,0196 & 0,1115 & -0,2688 & 0,1376 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resp. odhad jednorocní matice přechodu

$$\hat{\mathbf{P}}_{spoj}(1) \doteq \begin{pmatrix} 94,21 & 4,23 & 1,20 & 0,36 \\ 4,70 & 84,53 & 6,35 & 4,42 \\ 1,91 & 9,00 & 76,79 & 12,30 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme postupně, že nejmenší období, které banka rozlišuje je jeden den / jeden pracovní den / jeden měsíc / jeden rok. Tj. například pro nejmenší období jeden den předpokládáme, že známe ratingy firem jen k okamžikům $0, \frac{1}{365}, \frac{2}{365}, \dots, \frac{4 \cdot 365}{365}$.

²Pro každého klienta generujeme 2 vektory - vektor postupně přidělovaných ratingů a vektor dob setrvání klienta v těchto ratingích.

Všechny odhadnuté matice intenzit i matice přechodu uvádíme Příloze A. Zde prezentujeme jen vybrané závěry. Matice intenzit $\hat{\mathbf{Q}}_{\frac{1}{365}}$, $\hat{\mathbf{Q}}_{\frac{1}{250}}$ jsou velmi podobné matici $\hat{\mathbf{Q}}_{\text{spoj}}$ (neliší se od sebe na prvních třech desetinných místech). Odhady $\hat{\mathbf{Q}}_{\frac{1}{52}}$, $\hat{\mathbf{Q}}_{\frac{1}{12}}$ jsou na první pohled méně přesné, stále však značně podobné matici $\hat{\mathbf{Q}}_{\text{spoj}}$. Velký zlom však nastává, když jako nejmenší rozlišované období volíme jeden rok - odhady jsou výrazně méně přesné.

Podívejme se blíže na některá z ukazatelů přesnosti - začněme například s pozorovanými vzdálenostmi $\|\mathbf{Q} - \hat{\mathbf{Q}}_{\perp}\|$ a $\|\mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}_{\perp}(1)\|$:

Období	$\ \mathbf{Q} - \hat{\mathbf{Q}}_{\perp}\ $	$\ \mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}_{\perp}(1)\ $
Spojité realizace	0,012 29	1,00
1/365	0,012 32	1,00
1/250	0,012 78	1,03
1/52	0,012 94	1,04
1/12	0,015 87	1,25
1	0,058 53	4,38

Získané vzdálenosti jen potvrdily naše očekávání. První tři zmíněné odhady se prakticky nelíší. Naopak odhad, kdy je nejmenším rozlišovaným obdobím jeden rok, je ve smyslu vzdáleností $\|\mathbf{Q} - \hat{\mathbf{Q}}_{\perp}\|$ čtyřikrát méně přesný, než odhad $\hat{\mathbf{Q}}_{\frac{1}{365}}$.

Zaměřme ještě naši pozornost na přesnost odhadů pravděpodobností defaultu - uveďme pro přehlednost absolutní odchylky odhadů \hat{p}_{AD} , \hat{p}_{BD} a \hat{p}_{CD} :

Období	$ p_{AD} - \hat{p}_{AD} $	$ p_{BD} - \hat{p}_{BD} $	$ p_{CD} - \hat{p}_{CD} $
Spojité realizace	0,19	0,228	0,421
1/365	0,19	0,228	0,421
1/250	0,19	0,226	0,424
1/52	0,19	0,224	0,434
1/12	0,19	0,279	0,563
1	0,82	0,146	1,380

Na základě výsledků této jedné simulace, bychom mohli učinit závěr, že pro naše portfolio klientů a naši matici intenzit můžeme považovat data, kdy nejmenším rozlišovaným obdobím je jeden (pracovní) den, jeden týden nebo jeden měsíc, za spojitá. Naopak odhad na základě ročních pozorování vychází již značně odlišný, a tudíž ještě více nepřesný. V následující kapitole se pokusíme ověřit, zda je tento závěr podložený či nikoliv.

4.2.2 Výsledky simulační studie

Proveďme simulaci z kapitoly 4.2.1 100-krát - získáme tak 100 odhadů $\hat{\mathbf{Q}}_{\text{spoj}}$, 100 odhadů $\hat{\mathbf{Q}}_{\frac{1}{365}}$ atd. Uveďme zde nejdůležitější závěry. Nejprve zaměřme pozornost na nejjednodušší ukazatele přesnosti - průměrné vzdálenosti $\|\mathbf{Q} - \hat{\mathbf{Q}}_{\perp}\|$ a $\|\mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}_{\perp}(1)\|$:

Období	Průměrná $\ \mathbf{Q} - \hat{\mathbf{Q}}_{\perp}\ $	Průměrná $\ \mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}_{\perp}(1)\ $
Spojité realizace	0,019 42	1,571
1/365	0,019 43	1,572
1/250	0,019 44	1,573
1/52	0,019 55	1,581
1/12	0,020 11	1,620
1	0,056 40	4,258

A hned se podíváme na střední čtvercové odchylky defaultních pravděpodobností (v tabulce uvádíme jejich odmocniny):

	\hat{p}_{AD}	\hat{p}_{BD}	\hat{p}_{CD}
Spojité realizace	0,09	0,38	0,70
1/365	0,09	0,38	0,70
1/250	0,09	0,38	0,70
1/52	0,09	0,38	0,70
1/12	0,09	0,37	0,71
1	0,20	0,36	1,38

Z naší studie jasně vyplývá, že data, kdy nejmenším rozlišovaným obdobím je období kratší nebo rovné jednomu měsíci, můžeme považovat za spojitá. Naopak odhad na základě ročních pozorování již může být značně odlišný, a tudíž mnohem více nepřesný. Dodejme, že samozřejmě také záleží na počtu klientů v portfoliu, počtu sledovaných let a na tvaru matice \mathbf{Q} .

4.3 Odhad matice přechodu metodou kohorty a pomocí matice intenzit

Pokusme se nyní porovnat přesnost odhadu matice přechodu metodou kohorty a metodou dle Lando, Skodeberg. Budeme předpokládat stejné podmínky jako v kapitole 4.2 - opět tedy předpokládáme ratingový systém se čtyřmi ratingy a portfolio 2000 klientů, jehož chování lze popsat spojitým markovským řetězcem s maticí intenzit \mathbf{Q} uvedenou na straně 54. Na rozdíl od kapitoly 4.2 se omezíme pouze na měsíční a roční pozorování a na jejich základě odhadneme matice přechodu $\mathbf{P}(1)$ pomocí obou metod.

Naši práci rozdělíme do dvou částí - v kapitole 4.3.1 ilustrujeme přesnost odhadů na jednom simulačním experimentu, v kapitole 4.3.2 provedeme tento experiment 1000-krát a uvedeme závěry plynoucí z této malé simulační studie.

4.3.1 Výsledky jednoho simulačního experimentu

Na základě matice \mathbf{Q} jsme v kapitole 4.2.1 generovali 2000 realizací řetězců se spojitým časem po dobu 4 let. Právě na těchto vygenerovaných datech ilustrujeme přesnost odhadu metodou kohorty a metodou dle Lando, Skodeberg.

Připomeňme, že roční matici přechodu příslušnou skutečné matici \mathbf{Q} jsme uvedli na straně 54. Odhadněme tedy roční matice přechodu na základě měsíčních pozorování metodou kohorty a metodou dle Lando, Skodeberg:

$$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{koh}(1) = \left(\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{1\ koh}(1) \right)^{12} \doteq \begin{pmatrix} 94,19 & 4,26 & 1,2 & 0,35 \\ 4,76 & 84,47 & 6,3 & 4,47 \\ 1,87 & 9,02 & 76,86 & 12,26 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S}(1) \doteq \begin{pmatrix} 94,21 & 4,23 & 1,2 & 0,36 \\ 4,72 & 84,6 & 6,2 & 4,47 \\ 1,86 & 8,88 & 77,1 & 12,16 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Hned uveďme i roční matice přechodu odhadnuté na základě ročních pozorování:

$$\hat{\mathbf{P}}_1^{koh}(1) \doteq \begin{pmatrix} 94,07 & 4,35 & 1,27 & 0,31 \\ 4,84 & 84,6 & 6,27 & 4,29 \\ 1,91 & 8,74 & 76,86 & 12,50 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_1^{L\&S}(1) \doteq \begin{pmatrix} 94,35 & 3,97 & 1,22 & 0,46 \\ 4,41 & 86,05 & 5,20 & 4,34 \\ 1,83 & 7,25 & 79,58 & 11,34 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Odhady $\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{koh}(1)$, $\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S}(1)$ a $\hat{\mathbf{P}}_1^{koh}(1)$ se nám jeví jako podobně přesné. Máme k dispozici celkem velké portfolio klientů, získáváme tedy dobré odhady. Odhad $\hat{\mathbf{P}}_1^{L\&S}(1)$ se na první pohled jeví o něco méně přesný (všimněme si například přesnosti odhadů problematického členu p_{CD} - skutečná hodnota je 12,72, odchylka odhadu metodou dle Lando, Skodeberg na základě ročních pozorování je 1,38, což je více než dvakrát větší odchylka než u ostatních odhadů), což potvrzují i sledované vzdálenosti $\|\mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}(1)\|$:

Odhad:	$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{koh}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_1^{koh}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_1^{L\&S}(1)$
$\ \mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}(1)\ $:	1,08	1,25	0,90	4,38

Odhady metodou kohorty se tedy na základě tohoto experimentu jeví jako přesnější, než odhady pomocí matice intenzit dle Lando, Skodeberg. Všimněme si, že odhad metodou kohorty na základě měsíčních pozorování se při porovnání eukleidovskou vzdáleností jeví jako méně přesný v porovnání s odhadem (metodou kohorty) na základě ročních pozorování. Je to obecný výsledek, nebo jen náhoda? Na to se pokusíme odpovědět v následující kapitole.

4.3.2 Výsledky simulační studie

Provedme simulaci z kapitoly 4.3.2 1000-krát - získáme tak 1000 odhadů $\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{koh}(1)$, 1000 odhadů $\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S}(1)$ atd. Uvedme zde nejdůležitější výsledky. Začneme s průměrnými vzdálenostmi $\|\mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}(1)\|$:

Odhad:	$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{koh}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_1^{koh}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_1^{L\&S}(1)$
Průměrná $\ \mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}(1)\ $:	1,66	1,68	1,73	4,13

A hned se podívejme na střední čtvercové odchylky defaultních pravděpodobností (v tabulce uvádíme jejich odmocniny):

	$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{koh}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_1^{koh}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_1^{L\&S}(1)$
\hat{p}_{AD} :	0,092	0,089	0,121	0,196
\hat{p}_{BD} :	0,358	0,362	0,406	0,392
\hat{p}_{CD} :	0,695	0,703	0,716	1,339

Získáváme podobné výsledky jako u předchozího experimentu. Vidíme, že zvláště pro jednorocní data o klientech dostáváme výrazně přesnější odhad metodou kohorty. S rostoucím intervalem mezi dvěma pozorováními se odhad pomocí matice intenzit stává čím dál méně přesným, pro roční pozorování již často značně nevhodným. Podotkněme, že odhady metodou dle Lando, Skodeberg sice vycházejí méně přesné, ale poskytují nám zase jiné výhody - můžeme například využít odhadnutou matici intenzit a odhadovat matici přechodu i pro období kratší než jeden měsíc (resp. rok). atd. Nabízí se ale další možnost - využít odhady matice intenzit na základě ročních pozorování metodou dle Bladt, Sorensen. Těmto odhadům se budeme věnovat v kapitole 4.4.

Všimněme že nyní již můžeme udělat závěr, že odhady metodou kohorty na základě měsíčních pozorování jsou obecně přesnější než odhady na základě ročních pozorování. Opačný výsledek u předchozího experimentu byl jen náhodou.

4.4 Porovnání přesnosti odhadu matice přechodu metodou dle Lando, Skodeberg a metodou dle Bladt, Sorensen

Zabývali jsme se přesností odhadů matice přechodu metodou kohorty a metodou dle Lando, Skodeberg. Zabývejme se nyní třetí metodou odhadu dle Bladt, Sorensen, kterou jsme prezentovali v kapitole 2.3.

Opět tedy předpokládáme ratingový systém se čtyřmi ratingy a portfolio klientů, jehož chování lze popsat spojitým markovským řetězcem s maticí intenzit \mathbf{Q} uvedenou na straně 54. Stejně jako v kapitole 4.3 se omezíme pouze na měsíční a roční pozorování. Na rozdíl od předchozích kapitol však budeme předpokládat, že námi sledované portfolio má nikoliv 2000, ale 1000 klientů - vyniknou tak rozdíly mezi metodami.

Naši práci opět rozdělíme do dvou částí - v kapitole 4.4.1 ilustrujeme přesnost odhadů na jednom simulačním experimentu, v kapitole 4.4.2 provedeme tento experiment 100-krát a uvedeme závěry plynoucí z této malé simulační studie.

4.4.1 Výsledky jednoho simulačního experimentu

Na základě matice \mathbf{Q} generujeme 1000 spojitých realizací řetězce po dobu 4 let. Předpokládáme počáteční rovnoměrné rozdělení klientů mezi stupně A, B a C. Předpokládáme, že máme k dispozici pouze měsíční pozorování, a odhadujeme matice intenzit metodou dle Lando, Skodeberg (značíme $\hat{\mathbf{Q}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S}$) a metodou dle Bladt, Sorensen (značíme $\hat{\mathbf{Q}}_{\frac{1}{12}}^{B\&S}$) - tyto matice uvádíme v Příloze B, zde prezentujeme pouze dopočítané (roční) matice přechodu. Podotkneme, že roční matici přechodu příslušnou skutečné matici \mathbf{Q} jsme uvedli na straně 54.

$$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{B\&S}(1) \doteq \begin{pmatrix} 93,64 & 4,61 & 1,41 & 0,33 \\ 5,36 & 84,58 & 5,94 & 4,12 \\ 2,21 & 7,24 & 76,69 & 13,86 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} .$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S}(1) \doteq \begin{pmatrix} 93,67 & 4,58 & 1,41 & 0,35 \\ 5,31 & 84,71 & 5,85 & 4,13 \\ 2,2 & 7,13 & 76,93 & 13,74 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} .$$

Všimněme si, že všechny odhadnuté pravděpodobnosti přechodu jsou si velmi podobné. Naopak pro roční data dostáváme odhady

$$\hat{\mathbf{P}}_1^{B\&S}(1) \doteq \begin{pmatrix} 93,63 & 4,74 & 1,40 & 0,24 \\ 5,06 & 84,74 & 6,20 & 4,00 \\ 2,58 & 6,94 & 76,32 & 14,16 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} .$$

$$\hat{\mathbf{P}}_1^{L\&S}(1) \doteq \begin{pmatrix} 93,95 & 4,31 & 1,34 & 0,4 \\ 4,62 & 86,13 & 5,14 & 4,11 \\ 2,37 & 5,77 & 79,1 & 12,75 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} ,$$

které se už liší více. Všimněme si, že pravděpodobnosti defaultu odhadnuté dle Lando, Skodeberg jsou přesnější, ale neplatí to pro všechny členy matice (např. pro p_{BC} , p_{CD} ,). Jestli je to spíše výjimka se pokusíme zjistit v příští kapitole.

Podívejme se na pozorované vzdálenosti $\|\mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}(1)\|$:

Odhad:		$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{B\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_1^{B\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_1^{L\&S}(1)$
Průměrná	$\ \mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}(1)\ $:	2,11	2,19	2,45	4,54

Pokud se nezabýváme přesností odhadů pravděpodobností defaultu, ale spíše se rozhodujeme na základě uvedených vzdáleností, odhady metodou Bladt, Sorensen se nám jeví jako přesnější - rozdíl je markantní především u ročně pozorovaných dat.

Doplňme, že všechny odhadnuté matice intenzit jsou vedeny v příloze B, kde navíc prezentujeme i matice přechodu odhadnuté na základě spojitých dat a metodou kohorty.

Poznámka.

Jak jsme již uvedli v kapitole 2.3, výpočet odhadu metodou dle Blatt, Sorensen je výpočetně náročný. Rychlost konvergence řady $\{\hat{\mathbf{Q}}^{(s)}\}_{s=0}^{\infty}$ z algoritmu kapitoly 2.3.5 závisí na několika věcech - mimo jiné na počtu stupňů matice intenzit, na tvaru matice intenzit, na požadované přesnosti odhadu (tj. na počtu sčítanců ve vzorcích (2.29) a (2.30)) i na výběru počátečního odhadu $\mathbf{Q}^{(0)}$.

Jen pro ilustraci uveďme časovou náročnost výpočtu naší úlohy (uvažujme pouze měsíční pozorování). Předpokládejme, že chceme znát odhady matice \mathbf{Q} s přesností na 5 desetinných míst.

Nejvyšší pozorovaný počet přechodů mezi dvěma stavy byl 146, proto se rozhodujeme, že vzorce (2.29) a (2.30) chceme mít vypočtené s přesností na 2.29 8 desetinných míst. Na základě spuštění algoritmu s několika počátečními maticemi se konzervativně rozhodujeme, že ve vzorcích (2.29), (2.30) budeme přičítat sčítance dokud je $n_1 \leq 20$. Jedna iterace algoritmu v tomto případě trvá cca 20 vteřin. Když jsme jako počáteční matici $\mathbf{Q}^{(0)}$ vybrali matici

$$\mathbf{Q}^{(0)} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

odhad na dokonvergoval s přesností na 5 desetinných míst po 6 iteracích. Jak jsme již zmínili v poznámce na straně 26, výpočet můžeme urychlit, pokud jako počáteční matici zvolíme matici blízkou konečnému odhadu. Položme tedy $\mathbf{Q}^{(0)} = \hat{\mathbf{Q}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S}$. V tomto případě odhad dokonvergoval s přesností na pět desetinných míst již po třech iteracích. V našem příkladě je prakticky jedno, jestli algoritmus poběží 1 nebo 2 minuty, ale pro matice přechodu s více stavy nebo pro větší portfolia klientů může být rozdíl markantní.

Doplňme, že volba výpočetního software a vhodná implementace algoritmu mohou výrazně ovlivnit dobu výpočtu. Pro větší portfolia klientů a matice přechodu s více stavy se tímto problémem doporučujeme zabývat.

4.4.2 Výsledky simulační studie

Simulaci z předchozí kapitoly jsme provedli 100-krát. Samozřejmě by bylo lepší zvolit větší počet simulací, abychom získali přesnější výsledky, ale vzhledem k časové náročnosti výpočtů jsme se rozhodli prezentovat výsledky alespoň této malé studie.

Podívejme se opět na průměrné vzdálenosti $\|\mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}(1)\|$. Pro doplnění si uveďme i vzdálenost pro odhad na základě spojitých dat.

Odhad:	$\hat{\mathbf{P}}_{spoj}^{L\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{B\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_1^{B\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_1^{L\&S}(1)$
Prům. $\ \mathbf{P}(1) - \hat{\mathbf{P}}(1)\ $:	2,229	2,244	2,251	2,384	4,458

Lépe tedy vychází odhady metodou dle Blatt, Sorensen, rozdíl je markantní zejména pro roční pozorování. Naopak odhady na základě měsíčních pozorování jsou podobně přesné - pro náš příklad bychom tedy doporučili využívat matice přechodu odhadnuté metodou dle Lando, Skodeberg při měsíčních pozorováních (obě metody jsou podobně přesné, ale metoda dle Blatt, Sorensen je výpočetně mnohem náročnější). Naopak při ročních pozorováních důrazně doporučujeme využít metodou dle Blatt, Sorensen, neboť druhá metoda je výrazně méně přesnější.

Podívejme se ještě pro na pozorované střední čtvercové odchylky defaultních pravděpodobností (v tabulce uvádíme jejich odmocniny):

	$\hat{\mathbf{P}}_{spoj}^{L\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{B\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_1^{B\&S}(1)$	$\hat{\mathbf{P}}_1^{L\&S}(1)$
\hat{p}_{AD} :	0,12	0,12	0,13	0,17	0,25
\hat{p}_{BD} :	0,49	0,50	0,49	0,58	0,53
\hat{p}_{CD} :	0,89	0,89	0,89	0,89	1,49

V souladu s našimi očekáváními jsou první tři odhady podobně přesné, hned v závěsu následuje odhad metodou Blatt, Sorensen na základě ročních pozorování. Poslední uvedený odhad je zejména pro pravděpodobnosti pro přechodu ze stupně C do defaultu značně nepřesný.

Poznámka.

V této i předchozích kapitolách jsme uvedli výsledky pouze malých simulačních studií. Důrazně upozorníme, že prezentované výsledky a závěry se mohou lišit, když změníme počáteční parametry - počáteční rozdělení klientů v jednotlivých ratingových stupních, tvar matice přechodu, velikost portfolia klientů, dobu sledování.

Závěr

Kreditní riziko je pro banky jedním z nejsledovanějších rizik. Mezi nástroje používané k jeho měření a modelování patří mimo jiné markovské řetězce - pomocí nich modelujeme přechody klientů mezi ratingovými stupni. Cílem této práce bylo představit různé modely markovských řetězců a metody odhadu jejich parametrů. Navíc jsme uvedli možnost využití dalších dvou modelů zobecňujících markovské řetězce se spojitým časem.

V praxi zůstává nejčastěji využívaným modelem markovský řetězec s diskretním časem. Parametry matice přechodu odhadujeme metodou kohorty. Jedná se o jednoduchý model s jednoduchou interpretací. Mezi další výhody lze zařadit nižší požadavky na data a méně předpokladů. Tento model má však také mnoho nevýhod - nemůžeme například modelovat přechody mezi ratingy pro období kratší než 1 rok, některé odhadnuté pravděpodobnosti defaultu mohou být nulové, což však v praxi neplatí.

Dalším modelem je homogenní markovský řetězec se spojitým časem. V kreditní praxi máme k dispozici pouze diskretně pozorovaná data, proto jsme prezentovali dvě metody odhadu matice intenzit na základě diskretních dat. První metoda dle Lando, Skodeberg z roku 2002 prezentovaná v kapitole 1.2 je výpočetně nenáročná, ale jak jsme ukázali v simulační studii, nemusí se hodit pro data s dlouhým intervalem mezi dvěma pozorováními (jeden měsíc či rok - v závislosti na tvaru matice přechodu atd.). Uvedli jsme také rozšíření této metody pro nehomogenní případ. Druhá metoda dle Lando, Skodeberg z roku 2009 prezentovaná v kapitole 2.3 může být výrazně přesnější pro dlouhé intervaly mezi daty, ale je výpočetně náročná, prakticky těžko implementovatelná pro krátké intervaly.

V druhé části práce jsme se věnovali testování hypotéz. Nejprve jsme představili různé testy aplikovatelné na markovské řetězce s diskretním časem. Tyto testy jsou založeny na χ^2 testech, tj. na asymptotice rozdělení binomického rozdělení normálním při počtu klientů jdoucích k nekonečnu. Jak jsme ukázali v simulační studii, v oblasti kreditního rizika se potýkáme s dvěma problémy - prvním je nízký počet klientů: získané intervaly spolehlivosti jsou široké pro malá portfolia klientů a testy proto mají malou sílu. Druhým problémem jsou nízké hodnoty přechodových pravděpodobností - pokrytí 95-procentních (Waldových) intervalů spolehlivosti může být v tomto případě být mnohem nižší než 95 procent. Jako částečné řešení tohoto problému jsme prezentovali Wilsonovy intervaly spolehlivosti.

Představili jsme také jeden z přístupů k testování pro markovské řetězce se spojitým časem založený na jejich zobecnění na semiparametrický multiplikativní model rizika.

V poslední části práce se věnujeme simulačním experimentům a simulačním studiím. Zaměřujeme se především na ilustrace přesnosti jednotlivých metod odhadů matice přechodu. V kapitole 4 jsme uvedli závěry pro naše portfolio klientů, naši matici intenzit a počáteční rozdělení. Tyto závěry však nelze zobecnit na všechny matice intenzit, všechna počáteční rozdělení atd. Výběr metody by měl být vždy individuální záležitostí. Dodejme, že na simulacích jsme ukázali některé

z teoretických problémů prezentovaných metod, v praxi však můžeme řešit problémy zcela jiného charakteru, které nelze předem předvídat.

Řekli jsme, co naše práce obsahuje, zmiňme na závěr několik věcí, které jsme do práce vzhledem k jejímu rozsahu nezahrnuli, ale které by si dle našeho názoru zasloužily pozornost.

Představili jsme odhad matice přechodu markovského řetězce s diskretním časem metodou kohorty. Často však nemáme k dispozici ratingovou historii jednotlivých klientů, ale pouze rozložení klientů v ratingových stupních v jednotlivých letech, tedy takzvaná agregovaná data. V tomto případě sice není možné odhadovat metodou kohorty, ale existují jiné přístupy založené na metodách kvadratického programování. Uveďme například články [18], [19], [23]. Téma je také přehledně zpracované v bakalářské práci [15].

U testování hypotéz markovského řetězce s diskretním časem jsme se zabývali testy založenými na χ^2 rozdělení. Mezi další oblíbené testy patří testy poměrem věrohodností, které mohou řešit některé z problémů. Jejich využití je uvedeno na příklad v [5], [20].

Pro markovské řetězce se spojitým časem jsme uvedli přístup k testování založený na semiparametrickém multiplikativním modelu rizika. Tento postup je jednoduchý, v literatuře často zmiňovaný. Dalším možný přístup je uvedený například v [9]- popisuje testy rovnosti matic intenzit a testování homogenity. Tento přístup však vyžaduje znalost odhadu rozptylu a Fisherovy informace, které jsme zde vzhledem k rozsahu práce neuváděli, proto neprezentujeme ani tento test. Další nevýhodou tohoto testu je také jeho vysoká výpočetní náročnost. Další z přístupů k testování homogenity je uveden například v [29], [28].

Dále jsme se nevěnovali aplikacím prezentovaných markovských modelů. Zmiňme například výpočet kapitálového požadavku (popsaný např. v článku [12]), odhad a kalibrace výnosových křivek pro různé ratingové třídy (viz např. článek [26]) nebo stresové testování (např. [27]). Tento námět může posloužit jako téma další diplomové práce.

Literatura

- [1] Amico G., Janssen J., Manca R.: *Homogenous semi-markov reliability models for credit risk management*, Decision in Economics and Finance, str. 79-93, 2005.
- [2] Amico G., Janssen J., Manca R.: *Semi-markov reliability models with recurrence times and credit rating applications*, Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences, 2009.
- [3] Andel J.: *Základy matematické statistiky*, Matfyzpress, Praha, 2007.
- [4] Andersen P.K., Borgan O., Gill R.D., Keiding N.: *Statistical Models Based on Counting Processes*, Springer-Verlag New York, Inc., New York USA, 1993.
- [5] Anderson T.W., Goodman L.A.: *Statistical inference about Markov chain*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 28, No. 1, str. 89-110., 1957.
- [6] Benková M.: *Semimarkovský model pro řízení kreditního rizika*, Disertační práce, MFF UK , 2010.
- [7] Billingsley P.: *Statistical methods in Markov chains*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 32, No. 1, str. 12-40., 1961.
- [8] Blandt M., Sorensen M.: *Statistical inference for discretely observed Markov jump processes*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology), Vol. 67, No. 3, str. 395-410, červen 2005.
- [9] Blandt M., Sorensen M.: *Efficient estimation of transition rates between credit ratings from observations at discrete time points*, Quantitative Finance, No. 9, str. 147-160, 2009.
- [10] Brown L.D., Cai T.T., DasGupta A.: *Interval Estimation for a Binomial Proportion* , Statistical Science, No. 2, str. 101-133, 2001.
- [11] Gupta M., Chen Y.: *Theory and use of the EM algorithm*, Foundation and Trends in Signal Processing, Vol. 4, No. 3, str. 223-296, 2010.
- [12] Gupton G.M., Finger Ch. C., Bhatia M.: *CreditMetricsTM - Technical document*, J.P.Morgan & Co. Incorporated, New York, 1997.
- [13] Hobolth A., Jensen J.: *Summary statistics for end-point conditioned continuous-time Markov chains*, Journal of Applied Probability, Vol. 48, No.4, str.911-924, 2011.
- [14] Howard R. A.: *Dynamic probabilistic systems, Volume II: Semi-Markov and Decision Processes*, John Wiley & Sons, New York, 1971.
- [15] Chudy M.: *Štatistické metódy v Markovských reťazoch s aplikáciami vo financiách*, Bakalárska práca, MFF UK, 2011.

- [16] Israel R.B., Rosenthal J.S., Wei J.Z.: *Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices with Applications to Credit Ratings*, Mathematical Finance, Vol. 11, No. 2, str. 245-265, 2001.
- [17] Jafry Y., Schuermann T.: *Measurement, estimation and comparison of credit migration matrices*, Journal of Banking & Finance, Vol. 28, No. 11, str. 2603-2639, 2004.
- [18] Jones M. T.: *Estimating Markov Transition Matrices Using Proportions Data*, IMF Working Papers No.05/219, International Monetary Fund, 2005.
- [19] Kelton Ch. M.L., Kelton W.D.: *Estimation of Time-independent Markov processes with Aggregate Data: A Comparison of Techniques*, Econometrica, Vol. 49, str. 517-518, 1981.
- [20] Kiefer N. M., Larson C. E.: *Testing Simple Markov Structures for Credit Rating Transitions*, Economic and policy analysis working paper, Comptroller of the Currency, No. 3, 2004.
- [21] Lando D., Skodeberg M.: *Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations*, Journal of Banking & Finance, Vol. 26, str. 423-444, 2002.
- [22] Mandl P.: *Pravděpodobnostní dynamické modely*, Academia, Praha, 1985.
- [23] MacRae E.C.: *Estimation of Time-Varying Markov Processes with Aggregate Data*, Econometrica, Vol. 45, No. 1, 1977.
- [24] Norris J.R.: *Markov chains*, Cambridge University Press, 1999.
- [25] Prášková Z., Lachout P.: *Základy náhodných procesů*, Karolinum, Praha, 2005.
- [26] Jarrow R.A., Lando D., Turnbull S.M.: *A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads*, The Review of Financial Studies, Vol. 10, No. 2, str.481-523, 1997.
- [27] Lawrence R. F., Belkin B., Suchower S.J.: *A One-Parameter Representation of Credit Risk and Transition Matrices*, CreditMetrics Monitor, No. 3, str. 46-56, 1998.
- [28] Weissbach, R., Dette H.: *Kolmogorov–Smirnov-type testing for the partial homogeneity of Markov processes—with application to credit risk*, Applied Stochastic Models in Business and Industry, Vol. 23, Issue 3 str. 181–271, 2007.
- [29] Weissbach, R., Tschierisch P., Lawrenz C.: *Testing time-homogeneity of rating transitions after origination of debt*, Empirical Economics, Vol. 36, No. 3, 2008.
- [30] <http://ucebnice.euromise.cz/>.

Příloha A

$$\hat{Q}_{spoj} \doteq \begin{pmatrix} -0,060\ 94 & 0,046\ 76 & 0,012\ 26 & 0,001\ 92 \\ 0,051\ 95 & -0,173\ 56 & 0,078\ 71 & 0,042\ 90 \\ 0,019\ 59 & 0,111\ 52 & -0,268\ 76 & 0,137\ 65 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q}_{\frac{1}{365}} \doteq \begin{pmatrix} -0,060\ 94 & 0,046\ 76 & 0,012\ 26 & 0,001\ 92 \\ 0,051\ 95 & -0,173\ 55 & 0,078\ 71 & 0,042\ 9 \\ 0,019\ 59 & 0,111\ 50 & -0,268\ 71 & 0,137\ 62 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q}_{\frac{1}{250}} \doteq \begin{pmatrix} -0,060\ 94 & 0,046\ 76 & 0,012\ 26 & 0,001\ 92 \\ 0,052\ 34 & -0,173\ 55 & 0,078\ 32 & 0,042\ 90 \\ 0,019\ 08 & 0,111\ 49 & -0,268\ 18 & 0,137\ 61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q}_{\frac{1}{52}} \doteq \begin{pmatrix} -0,060\ 94 & 0,046\ 76 & 0,012\ 26 & 0,001\ 92 \\ 0,052\ 32 & -0,173\ 50 & 0,078\ 29 & 0,042\ 88 \\ 0,019\ 06 & 0,111\ 37 & -0,267\ 89 & 0,137\ 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q}_{\frac{1}{12}} \doteq \begin{pmatrix} -0,060\ 95 & 0,046\ 77 & 0,012\ 27 & 0,001\ 92 \\ 0,052\ 27 & -0,172\ 55 & 0,076\ 64 & 0,043\ 63 \\ 0,018\ 97 & 0,109\ 81 & -0,264\ 54 & 0,135\ 76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q}_1 \doteq \begin{pmatrix} -0,059\ 3 & 0,043\ 51 & 0,012\ 71 & 0,003\ 08 \\ 0,048\ 36 & -0,153\ 97 & 0,062\ 67 & 0,042\ 94 \\ 0,019\ 05 & 0,087\ 36 & -0,231\ 41 & 0,125\ 00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{spoj}(1) \doteq \begin{pmatrix} 94,211 & 4,226 & 1,2 & 0,363 \\ 4,697 & 84,532 & 6,351 & 4,42 \\ 1,913 & 8,999 & 76,791 & 12,297 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{365}}(1) \doteq \begin{pmatrix} 94,211 & 4,226 & 1,2 & 0,363 \\ 4,696 & 84,533 & 6,351 & 4,419 \\ 1,913 & 8,998 & 76,795 & 12,295 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{250}}(1) \doteq \begin{pmatrix} 94,212 & 4,226 & 1,199 & 0,363 \\ 4,729 & 84,532 & 6,321 & 4,417 \\ 1,872 & 8,998 & 76,833 & 12,297 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{52}}(1) \doteq \begin{pmatrix} 94,211 & 4,226 & 1,199 & 0,363 \\ 4,728 & 84,537 & 6,320 & 4,415 \\ 1,870 & 8,990 & 76,856 & 12,285 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\frac{1}{12}}(1) \doteq \begin{pmatrix} 94,21 & 4,228 & 1,198 & 0,363 \\ 4,724 & 84,605 & 6,201 & 4,471 \\ 1,861 & 8,882 & 77,101 & 12,155 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_1(1) \doteq \begin{pmatrix} 94,351 & 3,965 & 1,219 & 0,464 \\ 4,405 & 86,054 & 5,203 & 4,338 \\ 1,834 & 7,252 & 79,576 & 11,338 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Příloha B

$$\hat{\mathbf{Q}}_{spoj}^{L\&S} \doteq \begin{pmatrix} -0,067\ 8 & 0,050\ 8 & 0,015\ 5 & 0,001\ 5 \\ 0,059\ 8 & -0,171\ 7 & 0,073\ 0 & 0,038\ 9 \\ 0,023\ 4 & 0,089\ 5 & -0,269\ 5 & 0,156\ 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\frac{1}{12}}^{L\&S} \doteq \begin{pmatrix} -0,067\ 0 & 0,050\ 8 & 0,014\ 7 & 0,001\ 5 \\ 0,058\ 9 & -0,170\ 6 & 0,072\ 1 & 0,039\ 5 \\ 0,023\ 3 & 0,087\ 9 & -0,265\ 8 & 0,154\ 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\frac{1}{12}}^{B\&S} \doteq \begin{pmatrix} -0,067\ 4 & 0,051\ 3 & 0,014\ 8 & 0,001\ 3 \\ 0,059\ 4 & -0,172\ 2 & 0,073\ 4 & 0,039\ 3 \\ 0,023\ 4 & 0,089\ 5 & -0,269\ 0 & 0,156\ 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_1^{L\&S} \doteq \begin{pmatrix} -0,063\ 8 & 0,047\ 4 & 0,014\ 1 & 0,002\ 2 \\ 0,050\ 6 & -0,152\ 7 & 0,062\ 0 & 0,040\ 1 \\ 0,025\ 8 & 0,069\ 4 & -0,236\ 9 & 0,141\ 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_1^{B\&S} \doteq \begin{pmatrix} -0,067\ 5 & 0,052\ 7 & 0,014\ 5 & 0,000\ 3 \\ 0,055\ 9 & -0,170\ 3 & 0,076\ 8 & 0,037\ 6 \\ 0,028\ 1 & 0,085\ 7 & -0,273\ 9 & 0,160\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{spoj}^{L\&S}(1) \doteq \begin{pmatrix} 93,6 & 4,58 & 1,47 & 0,35 \\ 5,39 & 84,62 & 5,91 & 4,08 \\ 2,21 & 7,24 & 76,65 & 13,89 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_1^{koh}(1) \doteq \begin{pmatrix} 93,62 & 4,74 & 1,41 & 0,22 \\ 5,06 & 84,73 & 6,2 & 4,01 \\ 2,58 & 6,94 & 76,31 & 14,17 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$