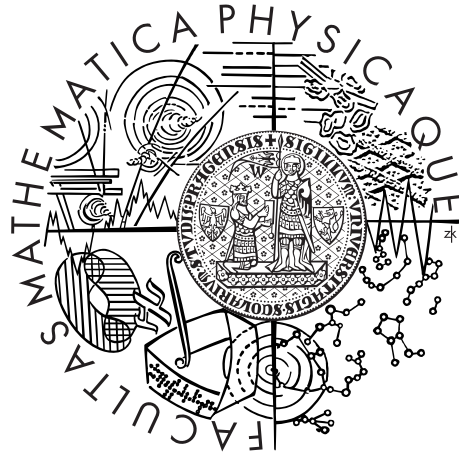


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Petra Santnerová

Bornhuetterova-Fergusonova metoda, odhadování parametrů a chyba predikce.

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Jan Šváb, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2012

Poděkování

Děkuji Mgr. Janu Švábovi, Ph.D. za vedení mé diplomové práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 11. dubna 2012

Petra Santnerová

Název práce: Bornhuetterova-Fergusonova metoda, odhadování parametrů a chyba predikce.

Autor: Petra Santnerová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Jan Šváb, Ph.D., Kooperativa pojišťovna, a.s., Vienna Insurance Group

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá popisem Bornhuetterovy-Fergusonovy metody, která se používá pro výpočet IBNR rezervy. Je rozdělena na deterministickou a stochastickou část. Deterministická část se věnuje odvození vývojových koeficientů a konečné výši škod, které jsou potřeba k výpočtu rezervy. Stochastická část se zabývá především chybou odhadu rezervy a chybou předpovědi. Výsledky výpočtů odhadu rezervy a její chyby jsou porovnány s výsledky získanými metodou chain ladder. Poslední kapitola se věnuje problematickým místům popisované metody.

Klíčová slova: rezerva, odhad, chyba odhadu, chyba predikce

Title: The Bornhuetter-Ferguson method, parameter estimation and prediction error

Author: Petra Santnerová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Jan Šváb, Ph.D., Kooperativa pojišťovna, a.s., Vienna Insurance Group

Abstract: This diploma thesis describes the Bornhuetter-Ferguson method, which is used to calculate the IBNR reserve. It is divided into deterministic and stochastic parts. The deterministic part deals with the derivation of development pattern and ultimate loss amount, which are needed to calculate the reserve. The stochastic part deals with reserve estimation error and prediction error. The calculation results of the reserve estimate and its error are compared with the results of the chain ladder method. The last chapter deals with the problematic areas of the described method.

Keywords: reserve, estimate, estimation error, prediction error

Obsah

Úvod	2
1 Mackův deterministický model	3
1.1 Definice modelu	3
1.2 Odvození odhadů	3
1.3 Tail a vylepšení parametrů	6
1.4 Shrnutí	7
2 Mackův stochastický model	9
2.1 Základní myšlenky stochastického modelu	9
2.2 Popis stochastického modelu	9
2.3 Odhad parametrů	10
2.4 Vyhlazení	11
2.5 Chyba předpovědi	12
3 Metoda chain ladder	15
4 Numerický příklad	17
4.1 Deterministická část	17
4.2 Stochastická část	23
4.3 Výsledky získané metodou chain ladder	27
4.4 Porovnání výsledků obou metod	29
5 Problémy	32
Závěr	34
Seznam tabulek	36
Seznam použitých zkratk	37
Přílohy	38

Úvod

Tato práce pojednává o Bornhuetterově-Fergusonově metodě. Zkoumá její použití pro výpočet odhadu rezervy na pojistná plnění a určení chyby předpovědi.

První kapitola vychází z článku profesora Thomase Macka věnovaného odhadu parametrů pro BF metodu. Je zde zadefinován deterministický model, který předpokládá ukončený vývoj škod, a dále je uveden postup, jak odhadnout jednotlivé parametry modelu. Další části první kapitoly se věnují vylepšení základního modelu, které spočívá především v předpokladu neukončeného vývoje škod. Snažíme se zde vhodným způsobem upravit parametry modelu tak, abychom s nimi mohli předpovídat do budoucnosti. Některé parametry při tom pozměníme pro získání výsledků lépe korespondujících se skutečností. Na konci první kapitoly jsou všechny úpravy modelu shrnuty do podoby, v jaké jsou používány v dalším textu.

Druhá kapitola je věnována stochastickému modelu BF metody dle profesora Macka. Na začátku jsou shrnuty myšlenky, které vedou k zadefinování stochastického modelu. Ten ve své základní podobě odpovídá deterministickému modelu. Jsou zde použity odlišné parametry, pro které je třeba získat odhady. Proto další podkapitoly se věnují získání těchto odhadů. Důležitou částí, která má významný vliv na výsledky metody, je vyhlazení hodnot parametrů. Ukážeme si, k čemu se dá vyhlazení použít a jak ho provést. V závěru druhé kapitoly je definována chyba předpovědi odhadu rezervy a dále je rozebrán postup pro spočtení jejího odhadu.

Třetí kapitola pojednává o metodě chain ladder. Tato metoda se v praxi často využívá pro výpočty rezerv, proto bývá brána za porovnávací měřítko při použití jiné metody.

Numerický příklad ukazuje použití BF metody na reálných zašumněných datech. Daty jsou vývojové trojúhelníky pro malé škody z povinného ručení za škodní roky 2000-2010. Celý výpočet je proveden v matematickém softwaru *Wolfram Mathematica 8 for students*. Výpočty jsou rozděleny na několik kroků. Mezivýsledky jsou zobrazovány přímo v textu společně s grafy. Přehledové tabulky a souhrny grafů jsou uvedeny v příloze.

Poslední kapitola je věnována problematickým místům metody. Většinou se jedná o body, kde je během výpočtů potřeba zkušenost řešitele příkladu. Ačkoliv je uváděno, že metoda požaduje pouze nezávislost všech výší škod v jednotlivých vývojových letech a meziročně, při výpočtu odhadu chyby odhadu narazíme ještě na další předpoklady týkající se nezávislosti odhadu rezervy na výších škod.

V příloze jsou mimo zmíněných tabulek a grafů uvedeny i důkazy použitých vět.

1. Mackův deterministický model

Profesor Thomas Mack zvolil pro odvození deterministického modelu pro odhad rezervy na pojistná plnění Bornhuetterovu-Fergusonovu (BF) metodu, viz Mack [3]. V následujících podkapitolách rozebereme jednotlivé její části. Metody pro výpočet odhadu rezervy na pojistná plnění se obvykle aplikují na data ve tvaru trojúhelníku. V této práci budeme pracovat se dvěma sadami dat. První je trojúhelník, kde řádky reprezentují roky, ve kterých škoda vznikla, a sloupce udávají zpoždění výplaty škody od jejího vzniku. Takový trojúhelník označíme vznik - výplata. Druhý trojúhelník, se kterým budeme pracovat, je označován jako vznik - účtování. Řádky opět reprezentují roky vzniku škody, sloupce ukazují účetní stavy zaregistrovaných škod při daném zpoždění.

1.1 Definice modelu

Uvažujme nekumulativní vývojový trojúhelník (účtování či výplat) a označme:

$C_{i,k}$ je kumulativní výše škod škodního roku i po k letech vývoje,
 $1 \leq i, k \leq n$;

v_i je objem pojistného pro škodní rok i , $1 \leq i \leq n$;

$S_{i,k} = C_{i,k} - C_{i,k-1}$ je přírůstek (nekumulativní) výše škod škodního roku i v k -tém roce vývoje ($C_{i,0} = 0$);

U_i je neznámá konečná výše škod škodního roku i ;

$R_i = U_i - C_{i,n+1-i}$ je (neznámá skutečná) rezerva škodního roku i .

Předpokládáme, že vývoj škod je po n letech ukončen.

Cílem BF metody je odhadnout rezervu na pojistná plnění R_i nezávisle na současné výši škod $C_{i,n+1-i}$. Definujme tedy odhad BF rezervy předpisem

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i(1 - \hat{b}_{n+1-i}), \quad (1.1)$$

kde $\hat{U}_i = v_i \hat{q}_i$ a \hat{q}_i je apriorní odhad konečného škodního průběhu $q_i = U_i/v_i$ škodního roku i ,

\hat{b}_k je odhad $b_k \in [0, 1]$, což je procento, udávající jakou část celkové výše škod očekáváme, že budeme znát, po k letech vývoje.

1.2 Odvození odhadů

Abychom mohli vypočítat odhad rezervy na pojistná plnění \hat{R}_i^{BF} , musíme nejprve získat odhady \hat{U}_i a \hat{b}_k .

Začneme odhadem \hat{U}_i . Ten získáme následujícím postupem a to ve třech krocích. Nejprve spočteme přírůstkové škodní průběhy

$$\hat{m}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i} \quad (1.2)$$

pro jednotlivé vývojové roky k , $1 \leq k \leq n$. Sečteme-li $\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_n$, získáme apriorní odhad konečného průměrného škodního průběhu pro průměrný rok.

V druhém kroku využijeme skutečnosti, že konečný škodní průběh q_i je silně ovlivněn úrovní sazbové postačitelnosti jednotlivých let. Sazbová postačitelnost v sobě zahrnuje dva prvky, úroveň sazeb a úroveň škod. Při sazbování má být určena dostatečná absolutní sazbová úroveň, aby bylo možné vyplatit všechny škody z daného obchodu. Pro rezervování stačí dle Mack [3] str. 144 rozhodnout o relativní úrovni sazbové postačitelnosti nějakého škodního roku ve srovnání s ostatními škodními roky. Pokud škodní rok i má nižší sazbovou postačitelnost ve srovnání s ostatními roky, pak objem pojistného v_i je menší než by měl být pro průměrný škodní rok. Tedy většina pozorovaných přírůstkových škodních průběhů

$$\frac{S_{i,1}}{v_i}, \dots, \frac{S_{i,n+1-i}}{v_i}$$

bude větší než odpovídající přírůstkové škodní průběhy

$$\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_n.$$

Abychom dospěli k jedinému parametru, který nám udá relativní úroveň sazbové postačitelnosti škodního roku i , použijeme podíl průměrů hodnot $S_{i,k}/v_i$ a \hat{m}_k , tj.

$$r_i = \frac{\frac{1}{n+1-i} \sum_{k=1}^{n+1-i} \frac{S_{i,k}}{v_i}}{\frac{1}{n+1-i} \sum_{k=1}^{n+1-i} \hat{m}_k} = \frac{\frac{C_{i,n+1-i}}{v_i}}{\sum_{k=1}^{n+1-i} \hat{m}_k}. \quad (1.3)$$

Parametr r_i je tedy podílem současného škodního průběhu $C_{i,n+1-i}/v_i$ škodního roku i a odpovídajícího apriorního průměrného škodního průběhu. Proto budeme r_i nazývat *index škodního průběhu*.

Dle Mack [3] str. 145 se lze na parametr r_i dívat i z hlediska pojistného. Jedná se totiž o faktor, kterým chceme vynásobit pojistné v_i , abychom je upravili na průměrnou úroveň sazbové postačitelnosti pro škodní roky $i = 1, \dots, n$. Z tohoto důvodu můžeme parametr r_i nazývat *faktorem úrovnového pojistného*. Faktor r_i nezbytně neupravuje pojistné v_i do dostatečné absolutní výše. Dosahuje pouze následujícího: pokud ve vztazích použijeme místo pojistného v_i upravené pojistné $v_i r_i$, pak všechny škodní roky budou přibližně dosahovat stejného konečného škodního průběhu $U_i/(v_i r_i) \approx \hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_n$. Proto

$$(\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_n) r_i$$

lze považovat za apriorní odhad konečného škodního průběhu $q_i = U_i/v_i$.

Ve třetím kroku nahradíme pojistné v_i upraveným pojistným $v_i r_i$. Z přírůstkových škodních průběhů \hat{m}_k vzniknou průběhy

$$\hat{\hat{m}}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i r_i}.$$

Apriorní odhad konečného škodního průběhu škodního roku i je pak

$$\hat{q}_i = r_i(\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_n) \quad (1.4)$$

a jemu odpovídá odhad konečné výše škod

$$\hat{U}_i = v_i r_i(\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_n). \quad (1.5)$$

Nyní již známe odhad \hat{U}_i , takže nám pro určení odhadu rezervy na pojistná plnění chybí získat jen odhad \hat{b}_k . Ze vzorce pro rezervu (1.1) odvodíme vývojový koeficient

$$\hat{b}_{n+1-i} = 1 - \frac{\hat{R}_i^{BF}}{\hat{U}_i} = \frac{\hat{U}_i - \hat{R}_i^{BF}}{\hat{U}_i} \approx \frac{C_{i,n+1-i}}{\hat{U}_i},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když apriorní odhad \hat{U}_i se rovná aposteriornímu odhadu $C_{i,n+1-i} + \hat{R}_i^{BF}$. To nemusí platit pro každý škodní rok i , ale mělo by to platit v průměru nebo alespoň přibližně, jinak koeficienty $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots$ neodpovídají datům. Z předchozí rovnice se nabízí možnost získat koeficient \hat{b}_k jako podíl průměrné současné výše škod a průměrné odhadované konečné výše škod

$$\hat{b}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} C_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} \hat{U}_i}.$$

Při takto zvolených \hat{b}_k se může stát, že $\hat{b}_k > \hat{b}_{k+1}$, protože každé \hat{b}_k je založeno na jiném počtu škodních letech. Proto nejprve zavedme

$$\hat{y}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} \hat{U}_i}$$

a poté \hat{b}_k jako jejich součet $\hat{b}_k = \hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_k$. Tato úprava problém vyřeší pouze pro $S_{i,k} \geq 0$. V praxi se může stát, že některá $S_{i,k}$, zvláště ta pro k blízko n , jsou záporná. V takovém případě zvraty $\hat{b}_k > \hat{b}_{k+1}$ mohou nastat. Dosadíme-li za \hat{U}_i vzorec (1.5), pak

$$\hat{y}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i r_i(\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_n)} = \frac{\hat{m}_k}{\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_n},$$

což vede ke vzorci pro vývojový koeficient

$$\hat{b}_k = \frac{\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_k}{\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_n}.$$

Nyní již máme všechny potřebné odhady pro spočtení odhadu rezervy \hat{R}_i^{BF} . Také můžeme zadaný vývojový trojúhelník doplnit na čtverec, čímž získáme odhady výše škod pro budoucí vývojové roky. Doplnění na čtverec spočteme jednoduše pomocí následujícího vztahu

$$\hat{S}_{i,k} = v_i r_i \hat{m}_k, \quad n + 2 - i \leq k.$$

Takto zavedený model neuvažuje možnost dalšího vývoje škod. V praxi naopak často předpokládáme další vývoj škod a potřebujeme tak odhadnout rezervu na pojistná plnění pro budoucí vývojové roky $k > n$. Proto v následujícím textu zapracujeme do základního modelu možnost dalšího vývoje a pokusíme se některé parametry ještě upravit, abychom získali lepší odhady.

1.3 Tail a vylepšení parametrů

Vylepšení parametrů spočívá především v jejich vyhlazení, neboť parametry pro poslední jeden až tři vývojové roky jsou založeny na malém počtu pozorování, a tedy mohou být zavádějící. Může se stát, že původní parametry již vyhlazeně vypadají. Pak je zbytečné vyhlazení provádět.

Index škodního průběhu r_i

Abychom vylepšili hodnoty parametru r_i , vezmeme v úvahu trojúhelník vznik - účtování. Oba trojúhelníky se vztahují k témuž portfoliu daného obchodu, tedy mají stejné pojistné. Řekneme-li si, že výše škod, které byly registrovány, se také vyplatí, pak i tato sada dat směřuje ke stejné konečné výši škod U_i jako sada dat ve vývojovém trojúhelníku závislosti vzniku škod na výplatě. Dle vzorce (1.3) vypočteme hodnoty r_i pro data vznik - účtování (r_i^u). Hodnoty vypočtené pro data vznik - výplata označujeme r_i^v . Jako nové hodnoty parametru r_i pak použijeme geometrický průměr $r_i^* = \sqrt{r_i^u * r_i^v}$ obou hodnot. Parametry r_{n-1}^* a r_n^* jsou opět založeny na malém počtu dat, proto je ručně upravíme. Pro obezřetnost zvolíme hodnoty trochu nižší než průměr všech r_i^* .

Tail

Dosud jsme uvažovali vývoj škod ukončený po n letech. Nyní tento předpoklad opustíme a v následujícím textu budeme pod pojmem *tail* rozumět zbývající vývoj škod po vývojovém roce n . K doposud zavedeným vývojovým parametrům přibude ještě jeden člen s indexem $n+1$, který bude tento tail zahrnovat. Hodnotu \hat{m}_{n+1} zvolíme buď pevně na základě našich zkušeností s daty, nebo ji odvodíme pomocí extrapolace. Pro extrapolaci můžeme použít různé typy křivek v závislosti na datech, např. exponenciální křivku $e^{\alpha-\beta k}$. Součet

$$\hat{m} = \hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_{n+1}$$

je tedy upravený odhad konečného škodního průběhu pro nějaký průměrný rok.

Další vývojový parametr, jenž je třeba doplnit o tail, je \hat{b}_k . Víme již, že

$$\hat{b}_k = \hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_k \quad \text{a} \quad \hat{y}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} \hat{U}_i}.$$

Po zavedení tailu je $\hat{U}_i = v_i r_i^* \hat{m}$, z čehož vyplývá

$$\hat{b}_k = \frac{\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_k}{\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_{n+1}}.$$

Jelikož b_k je procento, udávající jakou část celkové výše škod očekáváme, že budeme znát, po k letech vývoje, pak je zřejmé, že na konci vývoje již známe všechny škody, tedy $b_{n+1} = \hat{b}_{n+1} = 1$.

Vyhlazení

Dávají-li zadaná data rozkolísané hodnoty parametru \hat{m}_k , $1 \leq k \leq n$, pak pro získání lepších odhadů je vhodné tyto hodnoty vyhladit tak, aby byly klesající k 0. Sada dat vznik - účtování by měla mít stejný konečný škodní průběh jako sada dat vznik - výplata, proto dopočítáme \hat{m}_{n+1}^* pro trojúhelník vznik - výplata tak, aby platila rovnost $\hat{m}_v^* = \hat{m}_u^*$, kde \hat{m}_v^* značí již upravený součet $\hat{m}_1^* + \dots + \hat{m}_{n+1}^*$ pro sadu dat vznik - výplata a \hat{m}_u^* značí již upravený součet $\hat{m}_1^* + \dots + \hat{m}_{n+1}^*$ pro sadu dat vznik - účtování. Takto upravený odhad \hat{m}^* vede na apriorní odhad $\hat{q}_i = r_i^* \hat{m}^*$ konečného škodního průběhu pro škodní rok i a odpovídající odhad konečné výše škod je tedy $\hat{U}_i = v_i r_i^* \hat{m}^*$. Vyhlazené hodnoty dále použijeme i při výpočtu ostatních parametrů, tj. \hat{y}_k^* a \hat{b}_k^* . Poznamenejme, že pro sadu dat vznik - účtování je extrapolovaná hodnota \hat{m}_{n+1} použita zároveň jako vyhlazená hodnota, tj. $\hat{m}_{n+1} = \hat{m}_{n+1}^*$. U sady dat vznik - výplata se extrapolovaná hodnota \hat{m}_{n+1} liší od vybrané hodnoty \hat{m}_{n+1}^* .

1.4 Shrnutí

Při výpočtu odhadu rezervy na pojistná plnění \hat{R}_i^{BF} pro škodní rok i jsme vyšli ze základního deterministického modelu, který jsme postupně doplnili o tzv. tail a vyhlazení parametrů. Tím jsme získali úplný deterministický model pro odhad rezervy na pojistná plnění \hat{R}_i^{BF} škodního roku i . Připomeňme si ještě důležitost parametru \hat{b}_k^* . Kdybychom nezavedli tento parametr, pak bychom rezervu odhadli nejspíše jako rozdíl $\hat{R}_i = \hat{U}_i - C_{i,n+1-i}$. V tomto případě by byl odhad rezervy tím větší, čím menší by byla současná výše škod $C_{i,n+1-i}$. Takže bychom se nezbavili závislosti na současné výši škod $C_{i,n+1-i}$, a tedy nedosáhli cíle. V CL metodě platí pro odhad rezervy přímá úměra, tj. odhad rezervy \hat{R}_i^{CL} je tím větší, čím větší je současná výše škod $C_{i,n+1-i}$. Proto zavádíme v BF metodě navíc parametr \hat{b}_k^* , který po vynásobení odhadem současné výše škod \hat{U}_i udává očekávanou výši škod pro daný vývojový rok. Poté můžeme určit odhad rezervy nezávisle na současné výši škod $C_{i,n+1-i}$. Odchylku mezi současnou pozorovanou výší škod $C_{i,n+1-i}$ a

současnou očekávanou výší škod $\hat{b}_{n+1-i}^* \hat{U}_i$ považujeme za náhodnou veličinu nemající vliv na budoucí vývoj škod. Ideální případ nastává v okamžiku, kdy např. ze sazbování známe apriorní odhad konečné výše škod \hat{U}_i a odhad procenta \hat{b}_k^* . V tuto chvíli se výpočet odhadu rezervy stává zcela nezávislý na datech. Níže je uveden přehled použitých parametrů pro deterministický model.

$$\hat{m}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i} \text{ je původní přírůstkový škodní průběh vývojové-}$$

ho roku k , $1 \leq k \leq n$;

$$r_i = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} (v_i \hat{m}_k)} \text{ je původní index škodního průběhu pro škodní}$$

rok i , $1 \leq i \leq n$;

r_i^* je index škodního průběhu vzniklý jako geometrický průměr indexů pro data vznik - výplata a vznik - účtování;

\hat{m}_k^* je vyhlazená verze pro hodnotu \hat{m}_{n+1} získanou extrapolací a

$$\text{pro hodnoty } \hat{m}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} (v_i r_i^*)}, k = 1, \dots, n;$$

\hat{m}_{n+1}^* je pro data vznik - výplata rozdíl $\hat{m}_u^* - \sum_{k=1}^n \hat{m}_k^*$;

$\hat{q}_i = r_i^*(\hat{m}_1^* + \dots + \hat{m}_{n+1}^*)$ je apriorní odhad konečného škodního průběhu pro škodní rok i , $1 \leq i \leq n$;

$\hat{U}_i = v_i \hat{q}_i = v_i r_i^*(\hat{m}_1^* + \dots + \hat{m}_{n+1}^*)$ je apriorní odhad konečné výše škod škodního roku i , $1 \leq i \leq n$;

$\hat{b}_k^* = \frac{\hat{m}_1^* + \dots + \hat{m}_k^*}{\hat{m}_1^* + \dots + \hat{m}_{n+1}^*}$ je odhad procenta známých škod ve vývojovém roce k , $1 \leq k \leq n+1$;

$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i(1 - \hat{b}_{n+1-i}^*) = v_i r_i^*(\hat{m}_{n+2-i}^* + \dots + \hat{m}_{n+1}^*)$ je rezerva pro škodní rok i , $1 \leq i \leq n$.

2. Mackův stochastický model

Deterministická část BF metody dává pouze bodový odhad škodní rezervy, což není uspokojivé, protože nemůžeme usoudit, zda by jiný odhad nebyl lepší. Abychom určili kvalitu předpovědi, odhadneme její chybu. K tomu je nezbytné zavést stochastický model.

2.1 Základní myšlenky stochastického modelu

Uvažujme, že výše škod $C_{i,k}$ a $S_{i,k}$ jsou pro $1 \leq i \leq n$ a $1 \leq k \leq n+1$ náhodné veličiny a $S_{i,n+1} = U_i - C_{i,n}$ je náhodná veličina vyjadřující přírůstek výše škod po vývojovém roce n , tj. tail.

Z intuitivního hlediska bychom mohli očekávat, že $C_{i,k} = U_i b_k$ a $S_{i,k} = U_i y_k$, kde $b_k = y_1 + \dots + y_k$. Proto budeme definovat střední hodnotu současné výše škod $E(C_{i,k})$ předpisem $E(C_{i,k}) = x_i b_k$.

Věta 2.1.1. $E(C_{i,k}) = x_i b_k \Leftrightarrow E(S_{i,k}) = x_i y_k$ pro $1 \leq i \leq n$ a $1 \leq k \leq n+1$.

Vzhledem k tomu, že $x_i y_k = (x_i a)(y_k/a)$ pro nějaké $a > 0$, jsou x_i a y_k jednoznačné až na konstantu, viz Mack [4] str. 90. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti stanovit zúžení $y_1 + \dots + y_n + y_{n+1} = 1$. Poté $E(U_i) = E(S_{i,1} + \dots + S_{i,n+1}) = x_i(y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1}) = x_i$ ukazuje, že parametr x_i může být považován za průměrnou konečnou výši škod pro škodní rok i . Jako odhad $\hat{x}_i = \hat{E}(U_i)$ parametru x_i můžeme považovat odhad \hat{U}_i , neboť tento odhad jsme v deterministickém modelu získali jako odhad konečné výše škod pro průměrný škodní rok i . Proto v následujícím textu budeme psát odhad \hat{U}_i místo odhadu \hat{x}_i .

Další pozorování můžeme učinit pro rozptyl náhodné veličiny $S_{i,k}$. Pokud se podíváme na některá známá rozdělení, všimneme si, že často bývá rozptyl dané veličiny úměrný její střední hodnotě, např. náhodná veličina X má binomické rozdělení s parametry n a p . Pak $E(X) = np$ a $\text{Var}(X) = np(1-p)$, tj. střední hodnota $E(X)$ je úměrná rozptylu $\text{Var}(X) = E(X)(1-p)$. Kdybychom uvažovali logaritmicko-normální rozdělení, viděli bychom, že rozptyl je kvadraticky závislý na střední hodnotě, viz Anděl [1] str. 27. Přeneseme-li toto pozorování na náhodné veličiny $S_{i,k}$, získáváme vzorec $\text{Var}(S_{i,k}) = c x_i y_k$ pro všechna i, k . Tak jako v případě binomického či logaritmicko-normálního rozdělení se míra závislosti rozptylu náhodné veličiny X na střední hodnotě náhodné veličiny X měnila se změnou parametru p (či a, b, m pro logaritmicko-normální rozdělení) tak lze i zde předpokládat, že se konstanta c může měnit v závislosti na velikosti k . Proto budeme uvažovat obecnější vzorec $\text{Var}(S_{i,k}) = x_i s_k^2$.

Vzhledem k požadované vlastnosti BF metody o nezávislosti minulých a budoucích škod budeme předpokládat, že všechny přírůstkové výše škod $S_{i,k}$ jsou nezávislé jak během jednoho roku, tak meziročně.

2.2 Popis stochastického modelu

Shrnutím předchozích myšlenek získáváme stochastický BF model, pro jehož přírůstky $S_{i,k}$, $1 \leq i \leq n$ a $1 \leq k \leq n+1$, platí:

(BF1) Všechny přírůstkové výše škod $S_{i,k}$ jsou nezávislé.

(BF2) Pro neznámé parametry x_i, y_k platí $E(S_{i,k}) = x_i y_k$ a $y_1 + \dots + y_{n+1} = 1$.

(BF3) Pro neznámé konstanty s_k^2 platí $\text{Var}(S_{i,k}) = x_i s_k^2$.

Věta 2.2.1. Označme $b_k = y_1 + \dots + y_k$, pak $E(R_i) = x_i(1 - b_{n+1-i})$.

Podobně lze získat rozptyl pro rezervu škodního roku i .

Věta 2.2.2. Pro rozptyl rezervy škodního roku i platí

$$\text{Var}(R_i) = x_i(s_{n+2-i}^2 + \dots + s_{n+1}^2), \quad 1 \leq i \leq n.$$

V následujícím textu budeme předpokládat, že parametry x_1, \dots, x_n jsou známé a to kladné, neboť z předpokladu (BF3) nemohou být záporné a nulový parametr by znamenal, že střední hodnota i rozptyl náhodné veličiny je roven nule, což v praxi odpovídá nulovému řádku vývojového trojúhelníku, tedy roku, ve kterém se s daným produktem neobchodovalo.

Věta 2.2.3. Pro známé parametry x_1, \dots, x_n je

$$\hat{y}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i}$$

nejlepší nestranný lineární odhad y_k , $1 \leq k \leq n$.

Věta 2.2.4. Pro známé parametry x_1, \dots, x_n je

$$\hat{s}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} (S_{i,k} - x_i \hat{y}_k)^2 / x_i$$

nestranný odhad s_k^2 , $1 \leq k \leq n-1$.

Takto zavedený stochastický model odpovídá deterministickému modelu, který byl uveden výše. V dalším textu si ukážeme, jak lze napočítat odhady jednotlivých parametrů stochastického modelu.

2.3 Odhad parametrů

Jak již bylo řečeno výše, místo odhadu \hat{x}_i budeme psát odhad \hat{U}_i . Ve svém článku Mack [4] používá profesor Mack odhad \hat{U}_i vypočtený z deterministického modelu a přistupuje k němu, jako kdyby ho získal ze sazbování, čili jako by byl nezávislý na datech. Snaží se tak držet myšlenky nezávislosti BF metody na dosavadní výši škod. Pokud ale nemáme žádné údaje ze sazbování a jsme nuceni si veškeré parametry dopočítat z dané sady dat, pak se závislosti na datech nevyhneme.

V odhadu \hat{y}_k parametru y_k provedeme příslušné nahrazení a získáme odhad

$$\hat{\hat{y}}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} \hat{U}_i}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.1)$$

Nahrazení provedeme i pro odhad \hat{s}_k^2 , dostaneme

$$\hat{s}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} (S_{i,k} - \hat{U}_i \hat{y}_k)^2 / \hat{U}_i, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (2.2)$$

Odhad BF rezervy na pojistná plnění je pak dán předpisem

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i (\hat{y}_{n+2-i} + \dots + \hat{y}_{n+1}) = \hat{U}_i (1 - \hat{b}_{n+1-i}), \quad \text{kde } \hat{b}_k = \hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_k.$$

Došli jsme tedy ke stejným výsledkům jako v deterministickém modelu, ale bez použití vyhlazování koeficientů. I zde se dají parametry \hat{y}_k a \hat{s}_k^2 vyhladit, a to opět především hodnoty u posledních vývojových let, neboť ty jsou založeny na malém počtu dat.

Pokud není potřeba hodnoty vyhlazovat (hodnoty v posledních vývojových letech příliš nekolísají), můžeme použít vyhlazovací křivku jako prostředek k určení hodnoty pro tail.

2.4 Vyhlazení

Jeden z možných postupů navržený profesorem Mackem je vyhlazení pomocí lineární regrese, viz Mack [4] str. 94. Pro parametr \hat{y}_k , $1 \leq k \leq n$, spočtený ze vzorce (2.1) zvolíme k_1 a k_2 taková, že $k_1 < n$ a $k_2 > n$. Za předpokladu $y_k > 0$ provedeme regresi

$$\ln(\hat{y}_k) = \alpha - \beta k$$

pro $k_1 < k \leq n$ a dále extrapolaci pro $n < k \leq k_2$. Poté spočteme \hat{s}_k^2 podle vzorce (2.2), ale již použijeme vyhlazené \hat{y}_k . Získané hodnoty $\hat{s}_1^2, \dots, \hat{s}_{n-1}^2$ nyní necháme pevné pro minimalizaci

$$Q = \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^{n+1-i} \frac{(S_{i,k} - \hat{U}_i \hat{y}_k)^2}{\hat{U}_i \hat{s}_k^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(S_{1,k} - \hat{U}_1 \hat{y}_k)^2}{\hat{U}_1 \hat{s}_k^2} \quad (2.3)$$

za podmínky

$$\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_{k_1} + \exp\{\alpha - \beta(k_1 + 1)\} + \dots + \exp\{\alpha - \beta(k_2)\} = 1,$$

abychom získali lepší hodnoty pro $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{k_1}, \alpha, \beta$.

Vyhlazené hodnoty $\hat{y}_1^*, \dots, \hat{y}_{n+1}^*$ získáme tak, že pro hodnoty $k = 1, \dots, k_1$ použijeme hodnoty přímo z minimalizace, pro $k = k_1 + 1, \dots, n$ použijeme hodnoty z regrese a \hat{y}_{n+1}^* získáme sečtením regresních hodnot pro $k = n + 1, \dots, k_2$. Tyto vyhlazené parametry \hat{y}_k^* , pro které platí $\hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_{n+1}^* = 1$, použijeme ve vzorci (2.2) pro výpočet odpovídajících \hat{s}_k^{2*} , $1 \leq k \leq n-1$. Z grafu závislosti $\ln(\hat{s}_k^{2*})$ na $|\hat{y}_k^*|$ pro $k > k_1$ vybereme vhodnou křivku pro vyhlazení a získáme finální \hat{s}_k^{2*} , zvláště pro $k = n$ a $k = n + 1$. Není vždy nutné začít vyhlazovat již od hodnoty k_1 . Může se stát, že budeme chtít vyhlazovat až od hodnoty $k_1' > k_1$, ale abychom měli dostatečný vzorek hodnot, napočítáme vyhlazovací křivku již od k_1 a použijeme ji poté jen pro hodnoty $k \geq k_1'$.

Vlastnosti zmíněných odhadů jsou v článku Mack [4] str. 94 shrnuty následovně:

- (a) $\hat{y}_1^*, \dots, \hat{y}_{n+1}^*$ jsou po dvou negativně korelované, pokud se mají sečíst na jedničku.
- (b) Parametry $\hat{y}_1^*, \dots, \hat{y}_{n+1}^*$ a tedy i $\hat{b}_1^*, \dots, \hat{b}_{n+1}^*$ jsou prakticky nezávislé na $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$.
- (c) Odhad rezervy \hat{R}_i^{BF} a skutečná rezerva R_i jsou vzhledem k (BF1) nezávislé.
- (d) Platí $E(\hat{U}_i) = E(U_i) = x_i$, $1 \leq i \leq n$.
- (e) Nestrannost $\hat{y}_k^* : E(\hat{y}_k^*) = y_k$, $1 \leq k \leq n+1$, a tedy i $E(\hat{b}_k^*) = b_k$, $1 \leq k \leq n+1$.
- (f) Nestrannost $\hat{s}_k^{2*} : E(\hat{s}_k^{2*}) = s_k^2$, $1 \leq k \leq n+1$.

Vlastnosti (e) a (f) platí, pokud vyhlazení parametrů bylo provedeno nestranně.

2.5 Chyba předpovědi

Jednou z nejpoužívanějších měř pro přesnost předpovědi je střední kvadratická chyba. Dle Mack [4] str. 95 se střední kvadratická chyba předpovědi (=msep = mean squared error of prediction) pro libovolný odhad rezervy \hat{R}_i spočte dle vzorce

$$\text{mse}(\hat{R}_i) = E\left((\hat{R}_i - R_i)^2 \mid S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}\right).$$

Odhad rezervy \hat{R}_i^{BF} a rezerva R_i jsou brány za nezávislé na $S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}$.

Věta 2.5.1. *Nechť \hat{R}_i^{BF} a R_i jsou nezávislé na $S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}$, pak*

$$\text{mse}(\hat{R}_i^{BF}) = \text{Var}(\hat{R}_i^{BF}) + \text{Var}(R_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Z věty 2.5.1 plyne, že součet (kvadratické) chyby odhadu $\text{Var}(\hat{R}_i^{BF})$ a (kvadratické) chyby procesu $\text{Var}(R_i)$ dává dohromady střední kvadratickou chybu předpovědi $\text{mse}(\hat{R}_i^{BF})$.

Věta 2.5.2. *Nechť $i = 1, \dots, n$. Chybu procesu $\text{Var}(R_i)$ lze vyjádřit jako*

$$\text{Var}(R_i) = x_i (s_{n+2-i}^2 + \dots + s_{n+1}^2) \quad (2.4)$$

a pro chybu odhadu $\text{Var}(\hat{R}_i^{BF})$ platí

$$\text{Var}(\hat{R}_i^{BF}) = (x_i^2 + \text{Var}(\hat{U}_i)) \text{Var}(\hat{b}_{n+1-i}^*) + \text{Var}(\hat{U}_i) (1 - b_{n+1-i}^*)^2. \quad (2.5)$$

Dále nalezneme odhad chyby procesu a odhad chyby odhadu pro jednotlivé roky $i = 1, \dots, n$. Jak je ukázáno v Mack [4] str. 97, pro jednotlivé roky i , $1 \leq i \leq n$, se odhad chyby procesu spočte ze vzorce

$$\hat{\text{Var}}(R_i) = \hat{U}_i (\hat{s}_{n+2-i}^{2*} + \dots + \hat{s}_{n+1}^{2*}) \quad (2.6)$$

a odhad chyby odhadu lze určit z předpisu

$$\hat{\text{Var}}(\hat{R}_i^{BF}) = (\hat{U}_i^2 + (\text{s.e.}(\hat{U}_i))^2) (\text{s.e.}(\hat{b}_{n+1-i}^*))^2 + (\text{s.e.}(\hat{U}_i))^2 (1 - \hat{b}_{n+1-i}^*)^2, \quad (2.7)$$

pro který je ještě zapotřebí získat dílčí odhady. Mějme $\hat{b}_k^* = \hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_k^*$ a chceme odhadnout $\text{Var}(\hat{b}_k^*)$. Pro $k = 1, \dots, n$ platí rovnosti

$$\text{Var}(\hat{b}_k^*) = \text{Var}(1 - \hat{b}_k^*) = \text{Var}(\hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_k^*) = \text{Var}(\hat{y}_{k+1}^* + \dots + \hat{y}_{n+1}^*),$$

$$\text{Var}(\hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_k^*) = \text{Var}(\hat{y}_1^*) + \dots + \text{Var}(\hat{y}_k^*) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \sum_{j=1}^k \text{Cov}(\hat{y}_i^*, \hat{y}_j^*),$$

$$\text{Var}(\hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_{n+1}^*) = \text{Var}(1) = 0.$$

Jelikož jsou veličiny $\hat{y}_1^*, \dots, \hat{y}_{n+1}^*$ negativně korelované, dostáváme

$$\text{Var}(\hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_k^*) < \text{Var}(\hat{y}_1^*) + \dots + \text{Var}(\hat{y}_k^*),$$

$$\text{Var}(\hat{y}_{k+1}^* + \dots + \hat{y}_{n+1}^*) < \text{Var}(\hat{y}_{k+1}^*) + \dots + \text{Var}(\hat{y}_{n+1}^*).$$

Protože se levé strany těchto dvou nerovnic rovnají, zvolíme

$$\text{Var}(\hat{b}_k^*) = \min\{\text{Var}(\hat{y}_1^*) + \dots + \text{Var}(\hat{y}_k^*), \text{Var}(\hat{y}_{k+1}^*) + \dots + \text{Var}(\hat{y}_{n+1}^*)\}.$$

Odtud dostáváme rovnici pro odhad (s.e. (\hat{b}_k^*))² rozptylu $\text{Var}(\hat{b}_k^*)$

$$\text{(s.e. } (\hat{b}_k^*))^2 = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{(s.e. } (\hat{y}_1^*))^2 + \dots + \text{(s.e. } (\hat{y}_k^*))^2, \\ \text{(s.e. } (\hat{y}_{k+1}^*))^2 + \dots + \text{(s.e. } (\hat{y}_{n+1}^*))^2 \end{array} \right\},$$

kde (dle Mack [4] str. 97)

$$\text{(s.e. } (\hat{y}_k^*))^2 = \frac{\hat{S}_k^{2*}}{n+1-k}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^n \hat{U}_j$$

Pro výpočet směrodatné odchylky s.e. (\hat{U}_i) lze použít vzorec

$$\text{(s.e. } (\hat{U}_i))^2 = \frac{v_i}{n-1} \sum_{j=1}^n v_j \left(\frac{\hat{U}_j}{v_j} - \frac{\sum_{p=1}^n \hat{U}_p}{\sum_{p=1}^n v_p} \right)^2$$

v případě, že apriorní odhady \hat{U}_i jsou nekorelované pro $i = 1, \dots, n$. Pro korelované veličiny použijeme výpočet s.e. (\hat{U}_i) uvedený v Mack [4] str. 101, tj.

$$\text{s.e. } (\hat{U}_i) = \hat{U}_i \text{ c.v. } (\hat{U}_i), \quad (2.9)$$

kde

$$\text{c.v. } (\hat{U}_i) = \frac{\sqrt{\text{(s.e. } (\hat{y}_1))^2 + \dots + \text{(s.e. } (\hat{y}_{n+1}))^2}}{\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_{n+1}}, \quad (2.10)$$

$$\text{s.e. } (\hat{y}_{n+1}) = \hat{y}_{n+1} \text{ c.v. } (\hat{y}_{n+1}).$$

Hodnoty s.e. (\hat{y}_k) získáme také ze vzorce (2.8), pouze dosadíme nevyhlazené hodnoty \hat{S}_k^2 . Podle Mack [4] str. 102 je vhodné zvolit c.v. $(\hat{y}_{n+1}) = 50\%$.

Odhad střední kvadratické chyby předpovědi odhadu rezervy $\hat{\text{mse}}(\hat{R}_i^{BF})$ je součet

$$\hat{\text{mse}}(\hat{R}_i^{BF}) = \hat{\text{Var}}(R_i) + \hat{\text{Var}}(\hat{R}_i^{BF}).$$

Na závěr můžeme spočítat odhad střední kvadratické chyby předpovědi pro odhad $\hat{R}^{BF} = \hat{R}_1^{BF} + \dots + \hat{R}_n^{BF}$ celkové rezervy $R = R_1 + \dots + R_n$.

Věta 2.5.3. *Pro střední kvadratickou chybu předpovědi celkové rezervy platí*

$$\text{mse}(\hat{R}^{BF}) = \text{Var}(\hat{R}^{BF}) + \text{Var}(R),$$

$$\text{kde} \quad \text{Var}(R) = \text{Var}(R_1) + \dots + \text{Var}(R_n),$$

$$\text{Var}(\hat{R}^{BF}) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(\hat{R}_i^{BF}) + 2 \sum_{i<j} \text{Cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}).$$

Jak je uvedeno v Mack [4] str. 98-99, pro odhad střední kvadratické chyby předpovědi odhadu celkové rezervy platí

$$\hat{\text{mse}}(\hat{R}^{BF}) = \hat{\text{Var}}(\hat{R}^{BF}) + \hat{\text{Var}}(R), \quad (2.11)$$

$$\text{kde} \quad \hat{\text{Var}}(R) = \sum_{i=1}^n \hat{U}_i (\hat{s}_{n+2-i}^{2*} + \dots + \hat{s}_{n+1}^{2*}),$$

$$\hat{\text{Var}}(\hat{R}^{BF}) = \sum_{i=1}^n \hat{\text{Var}}(\hat{R}_i^{BF}) + 2 \sum_{i<j} \hat{\text{Cov}}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}).$$

Odhad rozptylu $\hat{\text{Var}}(\hat{R}_i^{BF})$ známe ze vzorce (2.7), kovarianci $\hat{\text{Cov}}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF})$ spočteme pomocí následujících vztahů

$$\begin{aligned} \hat{\text{Cov}}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}) &= \hat{\rho}_{i,j}^U \text{s.e.}(\hat{U}_i) \text{s.e.}(\hat{U}_j) (1 - \hat{b}_{n+1-i}^*) (1 - \hat{b}_{n+1-j}^*) + \\ &+ \hat{\rho}_{i,j}^b \text{s.e.}(\hat{b}_{n+1-i}^*) \text{s.e.}(\hat{b}_{n+1-j}^*) \hat{U}_i \hat{U}_j, \end{aligned}$$

$$\hat{\rho}_{i,j}^b = \frac{\hat{b}_{n+1-j}^* (1 - \hat{b}_{n+1-i}^*)}{\hat{b}_{n+1-i}^* (1 - \hat{b}_{n+1-j}^*)},$$

$$\hat{\rho}_{i,j}^U = \frac{1}{1 + |i - j|}.$$

Výše uvedené věty společně s jejich důkazy lze nalézt v příloze na konci této práce.

3. Metoda chain ladder

Přesný popis metody chain ladder je uveden v článku Mack [2]. Pro účel této práce jsou zde vypsány pouze nejdůležitější části.

Metoda chain ladder vychází z kumulovaného trojúhelníku dat narozdíl od BF metody, která využívá spíše nekumulovaná data. Pro předpověď budoucích škod používá roční vývojové koeficienty \hat{f}_k . Platí $\hat{C}_{i,k+1} = \hat{C}_{i,k}\hat{f}_k$ s počáteční hodnotou předpovědi $\hat{C}_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i}$. Roční faktory \hat{f}_k jsou dány předpisem

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} w_{i,k} C_{i,k}^\alpha F_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n-k} w_{i,k} C_{i,k}^\alpha}, \quad \alpha \in \{0; 1; 2\},$$

kde

$$F_{i,k} = C_{i,k+1}/C_{i,k}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

a váhy $w_{i,k} \in [0; 1]$. Budeme uvažovat váhy $w_{i,k} = 1$ pro každé i, k a $\alpha = 1$. Pro vývojové roky $k = 2, \dots, n$ jsou výpočty předpovědí již zdefinovány,

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n+1-i} \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{n-1},$$

chybí výpočet pro tail. Vývojový koeficient zahrnující tail označíme \hat{f}_{ult} a získáme ho lineární extrapolací funkce $\ln(\hat{f}_k - 1)$ přímkou $a k + b$, $a < 0$, tedy

$$\hat{f}_{ult} = \prod_{k=n}^{\infty} \hat{f}_k.$$

Pak pro konečnou výši škod škodního roku i platí

$$\hat{C}_{i,ult} = C_{i,n+1-i} \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{n-1} \hat{f}_{ult}.$$

Odhad rezervy je dán předpisem

$$\hat{R}_i^{CL} = \hat{C}_{i,ult} - C_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i} (\hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{n-1} \hat{f}_{ult} - 1). \quad (3.1)$$

Předpoklady metody chain ladder:

$$(CL1) \quad E(F_{i,k} | C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = f_k, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq n-1;$$

$$(CL2) \quad \text{Var}(F_{i,k} | C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \frac{\sigma_k^2}{w_{i,k} C_{i,k}^\alpha}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq n-1;$$

$$(CL3) \quad \{C_{i,1}, \dots, C_{i,n}\}, \{C_{j,1}, \dots, C_{j,n}\}, \quad i \neq j, \text{ jsou nezávislé.}$$

Odhad parametru σ_k^2 , $1 \leq k \leq n-1$, vypočteme pomocí vzorců

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k} w_{i,k} C_{i,k}^\alpha (F_{i,k} - \hat{f}_k)^2, \quad 1 \leq k \leq n-2 \quad (3.2)$$

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min\{\hat{\sigma}_{n-2}^4 / \hat{\sigma}_{n-3}^2, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2)\}. \quad (3.3)$$

Pro střední kvadratickou chybu předpovědi odhadu rezervy za předpokladu $D = \{C_{i,k} | i + k \leq n + 1\}$ platí

$$\begin{aligned} \text{mse}(\hat{R}_i) &= \text{E}((\hat{R}_i - R_i)^2 | D) = \\ &= \text{E}\left(\left((\hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i}) - (C_{i,n} - C_{i,n+1-i})\right)^2 | D\right) = \\ &= \text{E}((\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 | D) = \text{mse}(\hat{C}_{i,n}). \end{aligned}$$

Dále platí $(\text{s.e.}(\hat{R}_i))^2 = (\text{s.e.}(\hat{C}_{i,n}))^2$, což je odhad pro $\text{mse}(\hat{C}_{i,n})$ a

$$\begin{aligned} (\text{s.e.}(\hat{C}_{i,n}))^2 &= \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \left((\text{s.e.}(F_{i,k}))^2 + (\text{s.e.}(\hat{f}_k))^2 \right) / \hat{f}_k^2 = \\ &= \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \right), \end{aligned}$$

kde $(\text{s.e.}(F_{i,k}))^2$ je odhad pro $\text{Var}(F_{i,k} | C_{i,1}, \dots, C_{i,k})$ a $(\text{s.e.}(\hat{f}_k))^2$ je odhad pro

$$\text{Var}(\hat{f}_k) = \sigma_k^2 / \sum_{j=1}^{n-k} w_{j,k} C_{j,k}^\alpha.$$

Rekurzivní formule s počáteční hodnotou $\text{s.e.}(\hat{C}_{i,n+1-i}) = 0$ má tvar

$$\text{s.e.}(\hat{C}_{i,k+1})^2 = \hat{C}_{i,k}^2 \left((\text{s.e.}(F_{i,k}))^2 + (\text{s.e.}(\hat{f}_k))^2 \right) + (\text{s.e.}(\hat{C}_{i,k}))^2 \hat{f}_k^2.$$

Předpokládejme, že i pro tail platí $(\text{s.e.}(\hat{R}_i))^2 = (\text{s.e.}(\hat{C}_{i,ult}))^2$ a

$$\text{s.e.}(\hat{C}_{i,ult})^2 = \hat{C}_{i,n}^2 \left((\text{s.e.}(F_{i,ult}))^2 + (\text{s.e.}(\hat{f}_{ult}))^2 \right) + (\text{s.e.}(\hat{C}_{i,n}))^2 \hat{f}_{ult}^2.$$

Pomocí lineární extrapolace jsme získali odhad \hat{f}_{ult} . Potřebujeme získat ještě odhad $\text{s.e.}(\hat{f}_{ult})$ pro chybu $\sqrt{\text{Var}(\hat{f}_{ult})}$, tj. o kolik se liší \hat{f}_{ult} od f_{ult} , a odhad $\text{s.e.}(F_{i,ult})$ pro chybu $\sqrt{\text{Var}(F_{i,ult})}$, tedy jak moc se v průměru budou lišit jednotlivá $F_{i,ult}$ od f_{ult} . Tyto odhady získá aktuár na základě své zkušenosti.

Rekurzivní formule pro odhad chyby celkové rezervy všech škodních let je definována předpisem

$$\begin{aligned} \left(\text{s.e.} \left(\sum_{i=n+1-k}^n \hat{C}_{i,k+1} \right) \right)^2 &= \left(\text{s.e.} \left(\sum_{i=n+2-k}^n \hat{C}_{i,k} \right) \right)^2 \hat{f}_k^2 + \\ &+ \sum_{i=n+1-k}^n \hat{C}_{i,k}^2 (\text{s.e.}(F_{i,k}))^2 + \left(\sum_{i=n+1-k}^n \hat{C}_{i,k} \right)^2 (\text{s.e.}(\hat{f}_k))^2. \end{aligned}$$

4. Numerický příklad

Celou Bornhuetterovu-Fergusonovu metodu dle profesora Macka si ukážeme na numerickém příkladu, který zpracujeme v programu *Wolfram Mathematica 8 for students*. Jako vstupní data použijeme malé škody z povinného ručení ze škodních let 2000 – 2010. Pro tuto práci byla zašumněna jak výše škod, tak výše pojistného. Data jsou reprezentována ve vývojovém trojúhelníku závislosti výše vyplacených škod na roku vzniku škod doplněný o pojistné pro dané portfolio (trojúhelník vznik - výplata, viz příloha obrázek 1). Pro některé výpočty využijeme trojúhelník vznik - účtování, viz příloha obrázek 2). Chceme spočítat odhad rezervy na pojistná plnění pro jednotlivé roky a jeho chybu, dále odhad celkové rezervy pro všechny škodní roky dohromady a chybu tohoto odhadu. Hodnoty spočtené pro data vznik - výplata bude označovat s indexem v , pro data vznik - účtování indexem u .

4.1 Deterministická část

Výpočet vychází z deterministického modelu a je rozdělen na několik částí:

1. Data jsou škody z povinného ručení pro škodní roky 2000 – 2010, čili $n = 11$. Dle vzorce (1.2) napočítáme hodnoty \hat{m}_k pro jednotlivé vývojové roky k , $1 \leq k \leq n$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\hat{m}_k^v	0,56773	0,22234	0,02701	0,008	0,00248	0,00099	0,00034	0,00024	0,00009	0,00014	0,00008
\hat{m}_k^u	0,8575	0,0485	-0,0354	-0,0194	-0,0101	-0,0068	-0,0050	-0,0027	-0,0022	-0,0005	-0,0003

Tabulka 4.1: Hodnoty \hat{m}_k , $k = 1, \dots, n$, pro obě sady dat

2. Hodnoty r_i spočteme ze vzorce (1.3).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_i^v	1,13921	1,16178	1,06902	0,96523	0,91842	0,94415	1,007	0,99509	0,90612	0,9179	0,99566
r_i^u	1,14844	1,17115	1,07684	0,97193	0,93343	0,95469	1,01279	0,99842	0,89348	0,90964	0,97272

Tabulka 4.2: Hodnoty r_i , $i = 1, \dots, n$, pro obě sady dat

3. Hodnoty r_i^* získáme jako geometrický průměr hodnot r_i^v a r_i^u . Máme-li informace ze sazbování, můžeme ještě pozměnit hodnoty r_{n-1}^* a r_n^* , protože jsou založené na malém počtu dat a tedy nemusejí být důvěryhodné. Nově vzniklé hodnoty r_i^* budeme dále používat pro výpočty s oběma sadami dat, tj. pro trojúhelník vznik - výplata i pro trojúhelník vznik - účtování. Ze sazbování víme, že index škodního průběhu klesl v roce 2009 o 1,1% a v roce 2010 o 7,8% oproti roku 2008 (poznamenejme, že hodnoty jsou opět zašumněny). Proto změníme hodnoty r_{n-1}^* a r_n^* .
4. Dle vzorce

$$\hat{m}_k = \sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k} / \sum_{i=1}^{n+1-k} (v_i r_i^*)$$

spočteme nové hodnoty pro odhad koeficientů m_k pro obě sady dat.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_i^*	1,14382	1,16645	1,07292	0,96857	0,92589	0,9494	1,00989	0,99675	0,89978	0,89	0,83

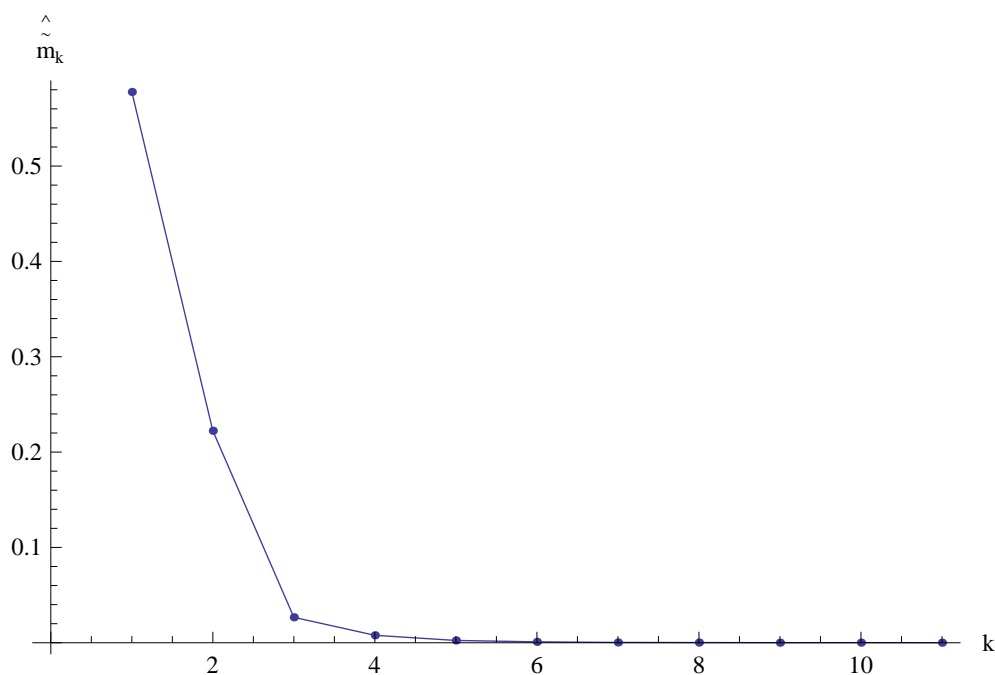
Tabulka 4.3: Vybrané hodnoty indexu škodního průběhu

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\hat{m}_k^v	0,57772	0,22234	0,0267	0,00781	0,00242	0,00095	0,00033	0,00022	0,00008	0,00012	0,00007
\hat{m}_k^u	0,8725	0,0485	-0,035	-0,019	-0,0098	-0,0066	-0,0047	-0,0025	-0,002	-0,0004	-0,0002

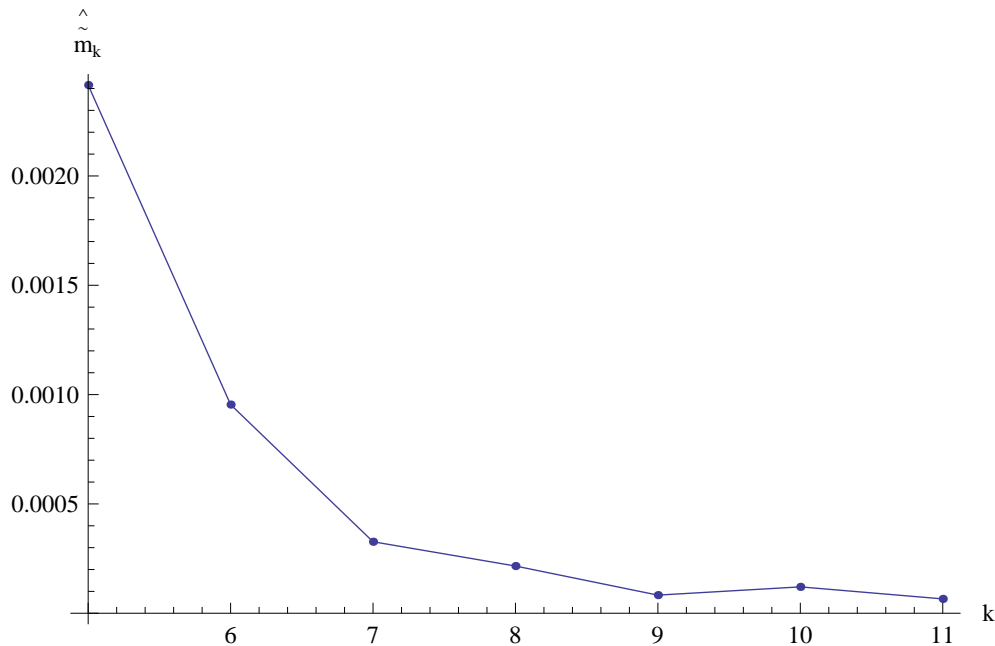
Tabulka 4.4: Hodnoty \hat{m}_k , $k = 1, \dots, n$, pro obě sady dat

5. Hodnoty \hat{m}_k by měly být vyhlazené a blížíci se k 0. Dle grafu se rozhodneme, zda je vůbec potřeba hodnoty vyhladit. Nejprve rozebereme výsledky pro data vznik - výplata. Na grafu 4.1 je vidět, že hodnoty jsou prudce klesající a připomínají exponenciální křivku. Při bližším pohledu na poslední vývojové roky zobrazené v grafu 4.2 se data zdají být celkem vyhlazená. Můžeme uvažovat, zda vyhladit poslední 3 vývojové roky, které mírně kolísají, nebo nevyhlazovat vůbec.

V příloze na obrázku 3 je zobrazen seznam grafů. Každý graf přísluší jednomu vývojovému roku k . Přímkou je na grafu zobrazena hodnota parametru \hat{m}_k a body zobrazují jednotlivé podíly $S_{i,k}/(v_i r_i^*)$, $i = 1, \dots, n+1-k$. Pokud některý bod nebo dokonce body leží výrazně mimo vyznačenou přímkou, pak můžeme uvažovat o vyhlazení koeficientu pro daný rok k . Takovým grafem se zdají být grafy pro vývojové roky $k = 6, 8, 9$, ale vzhledem k měřítku osy y se nejedná o velké vychýlení. Hodnoty proto není nutné vyhlazovat. Pro ilustraci však provedeme vyhlazení posledních tří hodnot a na konci porovnáme výsledky s výsledky výpočtu bez použití vyhlazení. Pro vyhla-



Obrázek 4.1: Hodnoty \hat{m}_k pro $k = 1, \dots, 11$ z dat vznik-výplata



Obrázek 4.2: Hodnoty \hat{m}_k pro $k = 5, \dots, 11$ z dat vznik-výplata

zení hodnot použijeme exponenciální křivku e^{a-bx} , jejíž základním vzorkem budou hodnoty \hat{m}_k pro vývojové roky $k = 7, \dots, 11$. Příkaz použitý pro software *Mathematica* je

`FindFit[Drop[data, 6], Exp[a - b x], {a, b}, x].`

Dostaneme hodnoty pro jednotlivé parametry a dopočtením hodnotu pro tail $\hat{m}_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{n+7} e^{a-bk}$. Vývoj uvažujeme jen do roku $n + 7$, protože pro další roky jsou hodnoty menšího řádu než 10^{-5} .

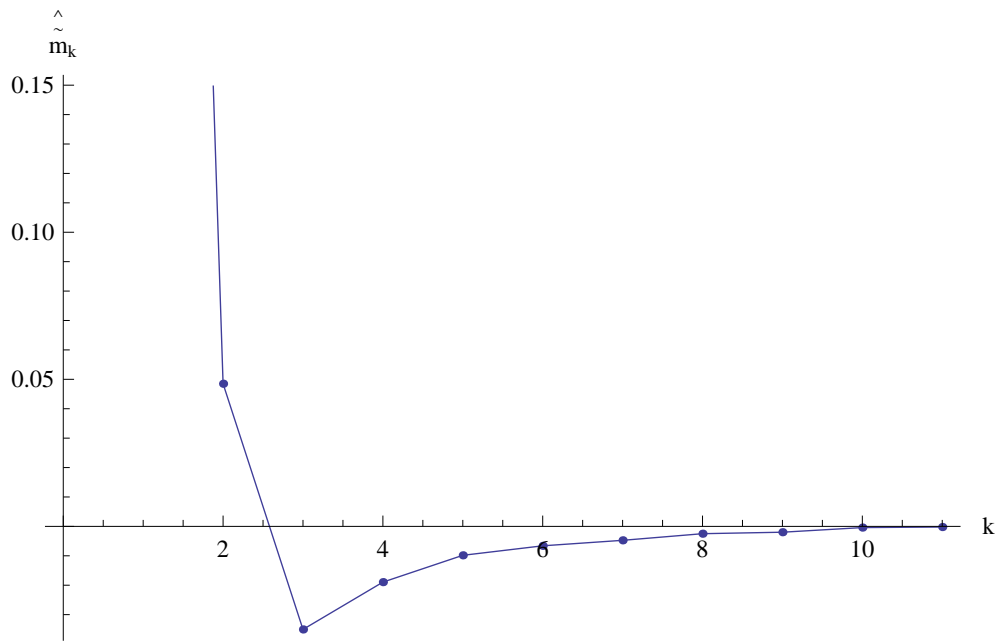
Celý krok zopakujeme i pro data vznik - účtování. Na grafu 4.3 je zobrazeno, jak v prvních letech prudce klesají výše vývojových koeficientů \hat{m}_k , které v dalších vývojových letech rostou k 0.

Při detailnějším pohledu na rostoucí část křivky můžeme dle grafu 4.4 usoudit, že vyhlazovací křivkou bude znovu exponenciála. Hodnoty se zdají být celkem vyhlazené, pro kontrolu se opět podíváme na seznam dílčích grafů, viz příloha obrázek 4. Spornými grafy mohou být 4, 7, 8. Vyhlazení od čtvrtého vývojového roku je poměrně brzy a výkyvy vzhledem k měřítku os opět nejsou významné. Vyhladíme tedy jen poslední 3 hodnoty, které jsou založené na malém počtu pozorování. Předpis pro vyhlazovací křivku bude tentokrát s opačným znaménkem, tj. $-e^{a-bx}$. Tail vyjádříme jako

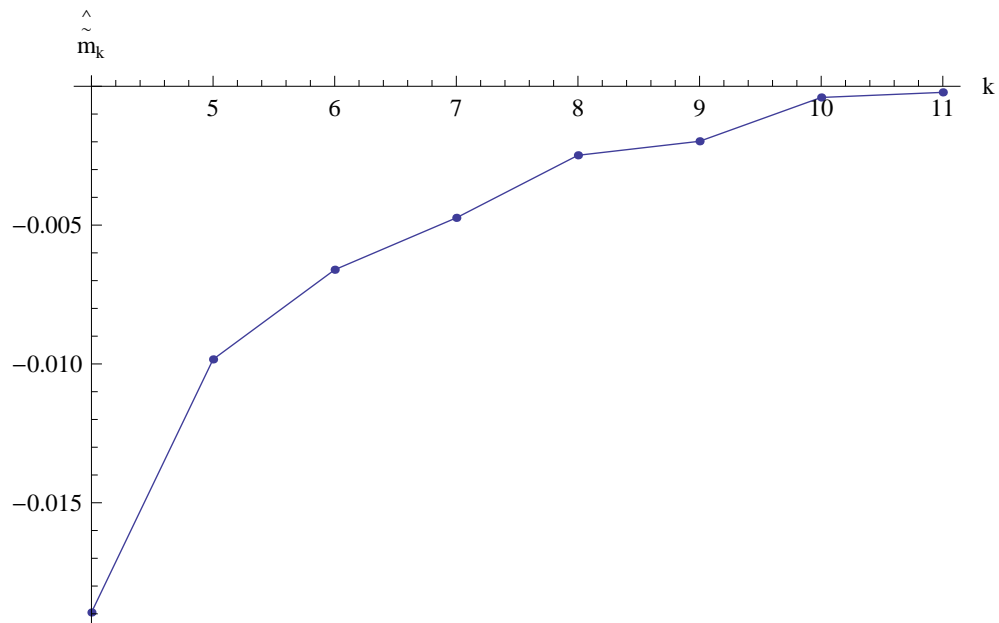
$\hat{m}_{n+1}^* = \hat{m}_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{n+6} -e^{a-bk}$. Hodnoty \hat{m}_k s extrapolací křivkou jsou pro

sadu dat vznik - výplata zobrazeny na grafu 4.5 a pro sadu vznik - účtování na grafu 4.6.

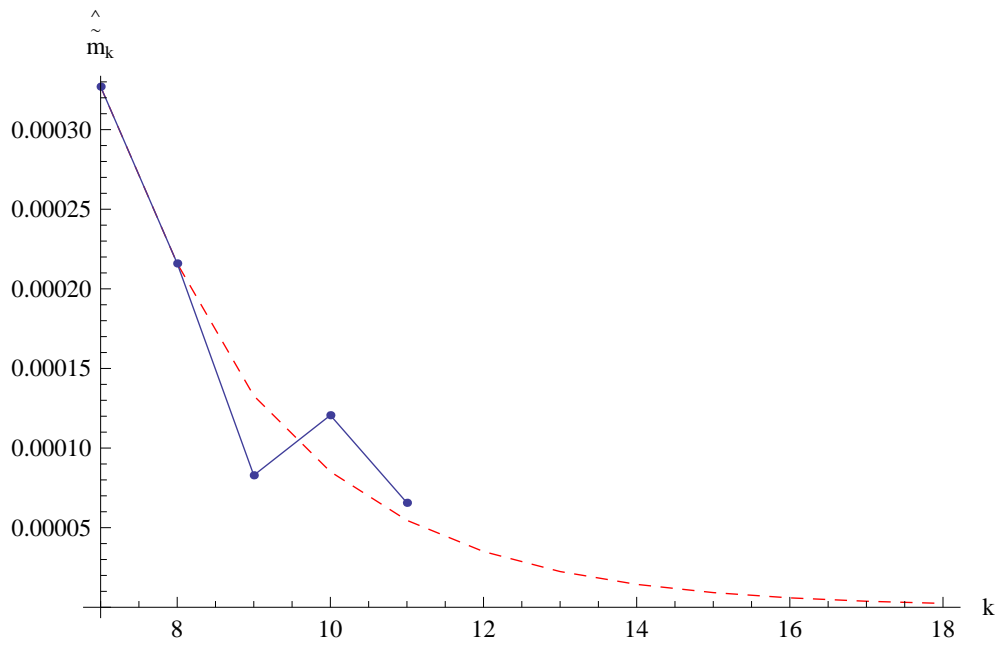
Jelikož chceme, aby platila rovnost $\hat{m}_v^* = \hat{m}_u^*$, zvolíme $\hat{m}_{n+1}^{*v} = 0,00146903$.



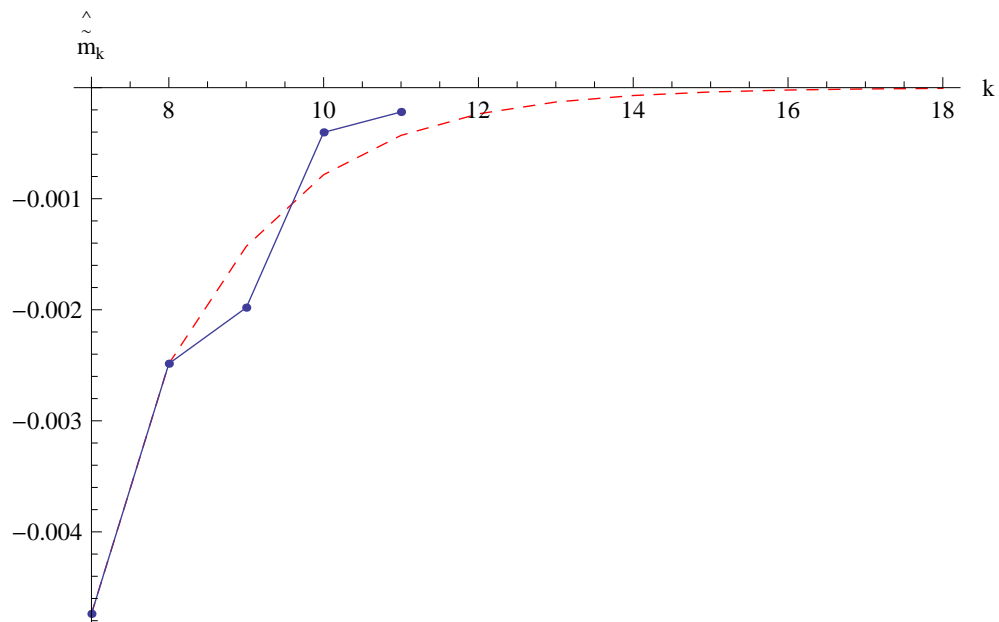
Obrázek 4.3: Hodnoty \hat{m}_k pro $k = 1, \dots, 11$ z dat vznik-účtování



Obrázek 4.4: Hodnoty \hat{m}_k pro $k = 4, \dots, 11$ z dat vznik-účtování



Obrázek 4.5: Hodnoty \hat{m}_k a extrapolační křivka pro $k = 7, \dots, 18$ pro data vznik - výplata



Obrázek 4.6: Hodnoty \hat{m}_k a extrapolační křivka pro $k = 7, \dots, 18$ pro data vznik-úctování

data	a	b	tail \hat{m}_{n+1}
vznik - výplata	-4,92462	0,444629	0,0000907416
vznik - účtování	-1,14174	0,600957	-0,000507478

Tabulka 4.5: Parametry extrapoláčních křivek a hodnoty pro tail

Vyhlazené hodnoty \hat{m}_k^* , $k = 1, \dots, n + 1$, pro obě sady dat jsou zobrazeny v následující tabulce.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	tail
\hat{m}_k^{*v}	0,5777	0,2223	0,0267	0,0078	0,0024	0,0010	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0015
\hat{m}_k^{*u}	0,8725	0,0485	-0,035	-0,019	-0,0098	-0,0066	-0,0047	-0,0025	-0,0014	-0,0008	-0,0004	-0,0005

Tabulka 4.6: Vybrané hodnoty \hat{m}_k^* , $k = 1, \dots, n + 1$, pro obě sady dat

6. Nyní máme všechny potřebné hodnoty pro určení odhadu konečného škodního průběhu $\hat{q}_i = r_i^*(\hat{m}_1^* + \dots + \hat{m}_{n+1}^*)$, $1 \leq i \leq n$, který je stejný pro obě sady dat.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\hat{q}_i	0,96107	0,98009	0,9015	0,81382	0,77796	0,79772	0,84854	0,8375	0,75602	0,7478	0,69739

Tabulka 4.7: Hodnoty apriorního odhadu konečného škodního průběhu

7. Apriorní odhad konečné výše škod pro škodní rok i je $\hat{U}_i = v_i r_i^*(\hat{m}_1^* + \dots + \hat{m}_{n+1}^*)$, $1 \leq i \leq n$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\hat{U}_i	20147	23207	19198	17107	19187	23050	24516	22376	16848	17150	19069

Tabulka 4.8: Hodnoty apriorního odhadu konečné výše škod

8. Zajímá nás odhad rezervy na pojistná plnění. Zbývá určit odhad procenta známých škod, tj.

$$\hat{b}_k^* = \frac{\hat{m}_1^* + \dots + \hat{m}_k^*}{\hat{m}_1^* + \dots + \hat{m}_{n+1}^*}.$$

Povšimněme si, že hodnoty $\hat{b}_k^* > 1$ pro data vznik - účtování. Je to způsobeno zápornou hodnotou pro tail, což znamená, že bylo zaúčtováno více, než se skutečně mělo vyplatit. Většinou je to způsobeno tím, že likvidátor pojistné události odhadl škodu na vyšší částku, než kolik skutečně byla, např. oprava poškozeného vozu byla levnější, než se původně očekávalo.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	tail
\hat{b}_k^{*v}	0,68758	0,9522	0,98397	0,99327	0,99615	0,99728	0,99767	0,99793	0,99809	0,99819	0,99825	1
\hat{b}_k^{*u}	1,03846	1,09618	1,05447	1,03192	1,02021	1,01235	1,00671	1,00375	1,00205	1,00112	1,0006	1

Tabulka 4.9: Hodnoty odhadů vývojových koeficientů pro obě sady dat

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\hat{R}_i^v	35	42	37	35	45	63	95	151	270	820	5958
\hat{R}_i^u	-12	-26	-39	-64	-129	-285	-496	-714	-918	-1649	-733

Tabulka 4.10: Hodnoty BF odhadů rezervy pro obě sady dat

9. Na závěr spočteme odhad rezervy na pojistná plnění dle vzorce

$$\hat{R}_i^{BF} = (1 - \hat{b}_{n+1-i}^*) \hat{U}_i = v_i r_i^* (\hat{m}_{n+2-i}^* + \dots + \hat{m}_{n+1}^*).$$

Trojúhelník doplněný na čtverec se sloupcem navíc pro tail je pro data vznik - výplata zobrazený v tabulce 5 a pro data vznik - účtování v tabulce 6, viz příloha.

Hodnoty parametrů použité pro výpočty výše lze pro data z trojúhelníku vznik - výplata najít v tabulkách 7 a 9, pro data z trojúhelníku vznik - účtování je najdeme v tabulkách 8 a 10.

4.2 Stochastická část

Odhad konečné výše škod \hat{U}_i , kterou známe z deterministické části budeme v následujícím výpočtu používat jako apriorní odhad konečné výše škod U_i . Výpočet aplikujeme na sadu dat vznik - výplata a opět ho rozdělíme na několik částí. Nejprve provedeme vyhlazení parametrů a poté spočteme odhad chyby procesu a odhad chyby odhadu.

1. Dle vzorce (2.1) napočítáme hodnoty pro \hat{y}_k , $1 \leq k \leq n$, a z jejich grafu 4.7 určíme, zda je potřebujeme vyhladit a pokud ano, od jakého k a kterou křivkou hodnoty vyhladíme. Vidíme, že hodnoty \hat{y}_k odpovídají vývojovým koeficientům \hat{m}_k z deterministického modelu. Při bližším pohledu na poslední vývojové roky můžeme z grafu 4.8 usuzovat, že vyhlazení není úplně nutné. Přesto vyhladíme poslední 3 vývojové roky.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\hat{y}_k	0,68758	0,26462	0,03178	0,0093	0,00288	0,00114	0,00039	0,00026	0,0001	0,00014	0,00008

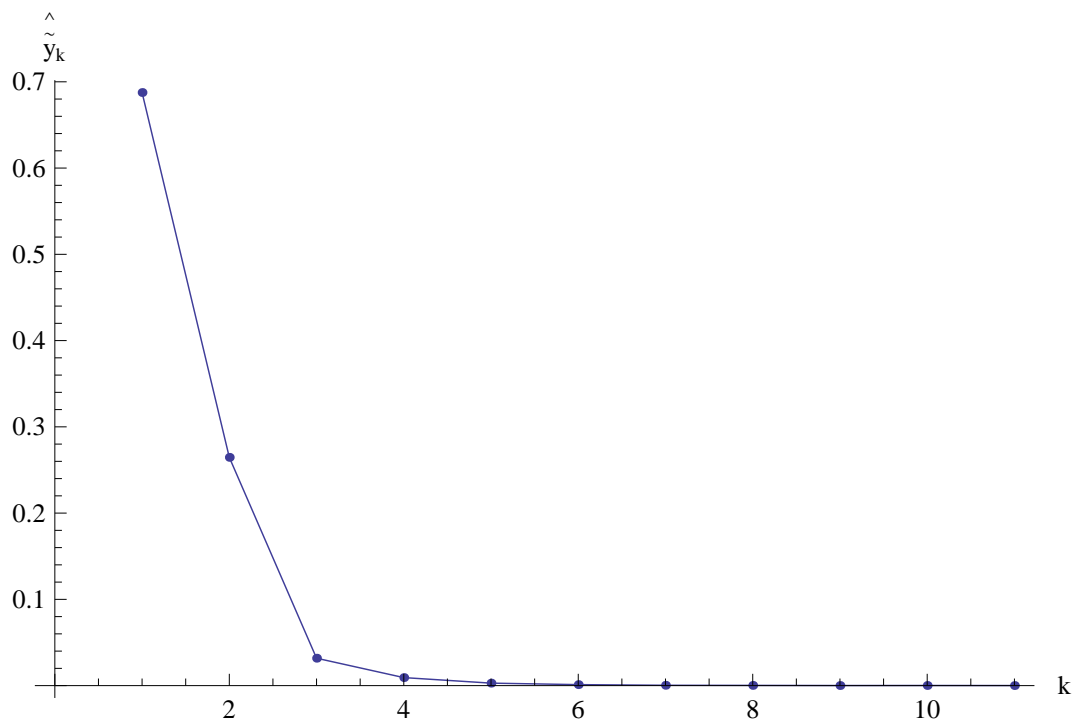
Tabulka 4.11: Hodnoty odhadu vývojových koeficientů \hat{y}_k , $k = 1, \dots, n$

2. Než začneme vyhlazovat hodnoty \hat{y}_k , spočteme ještě původní hodnoty \hat{s}_k^2 ze vzorce (2.2), abychom mohli porovnat, jak se odhad rozptylu s vyhlazováním mění.

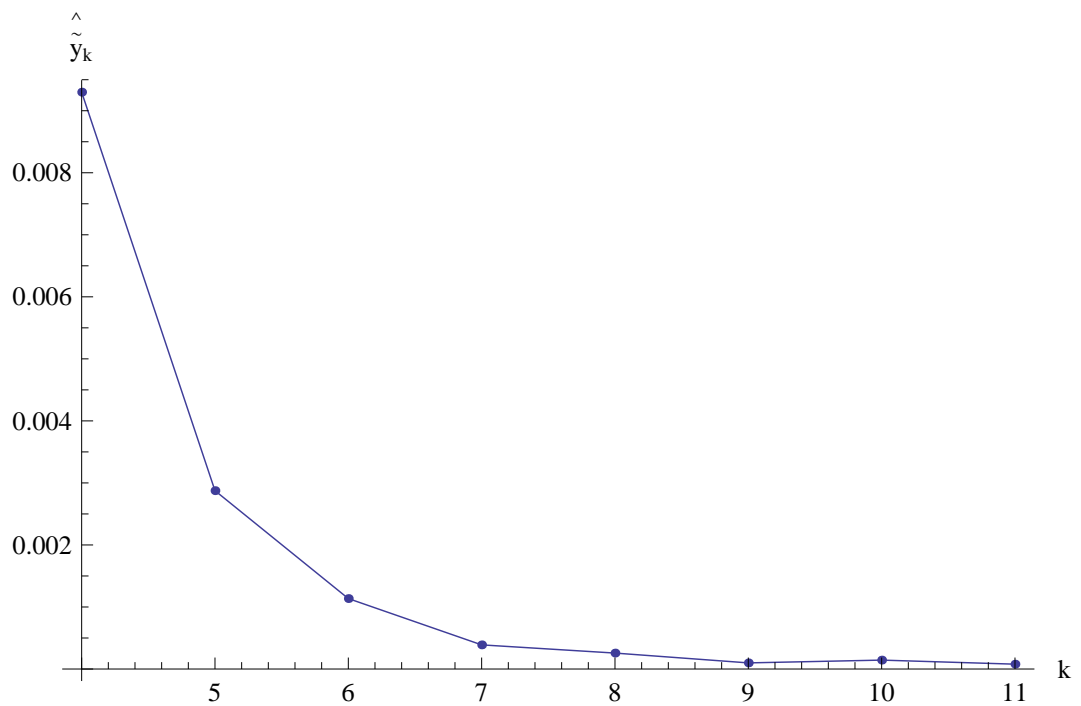
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\hat{s}_k^2	65,5224	20,1638	0,93987	0,17203	0,02172	0,00479	0,00104	0,00079	0,00105	0,00032

Tabulka 4.12: Hodnoty odhadu \hat{s}_k^2 , $k = 1, \dots, n - 1$

3. Graf výší \hat{y}_k vypadá jako exponenciální křivka $e^{\alpha - \beta x}$, čili po vyhlazení je $\ln(\hat{y}_k) = \alpha - \beta k$. Jako vzorek pro vyhlazení použijeme hodnoty pro $k > k_1 = 6$ a extrapolaci provedeme až do vývojového roku $k_2 = 16$. Výše k_2 byla

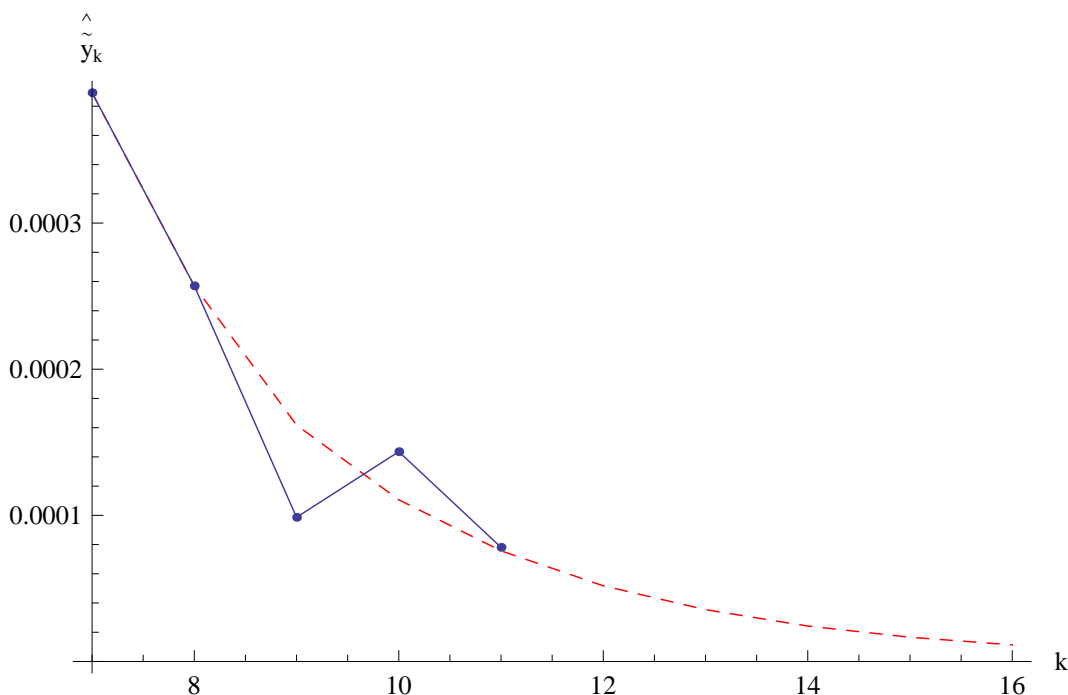


Obrázek 4.7: Hodnoty \hat{y}_k pro $k = 1, \dots, 11$



Obrázek 4.8: Hodnoty \hat{y}_k pro $k = 4, \dots, 11$

zvolena na základě extrapolovaných hodnot \hat{y}_k , $k = n, \dots, n+20$, které jsou od roku $k > 16$ řádu menšího než 10^{-6} . Hodnoty \hat{y}_k pro $k = 1, \dots, k_2$ jsou uvedeny v následující tabulce, kde jsme použili konstanty $\alpha = -5,31443$ a $\beta = 0,379463$ pro vyhlazení hodnot $\hat{\tilde{y}}_k$, $k = n - k_1 + 1, \dots, n$ a dále pro určení extrapolovaných hodnot \hat{y}_k , $k = n + 1, \dots, k_2$. Graf hodnot $\hat{\tilde{y}}_k$ s extrapolací pro $k = 7, \dots, 16$ je zobrazen na obrázku 4.9. Pro vývojové roky $k = 1, \dots, n - k_1$ ponecháme původní \hat{y}_k . Sečtením výší \hat{y}_k pro vývojové roky $k = n + 1, \dots, k_2$, získáme hodnotu pro tail.



Obrázek 4.9: Hodnoty $\hat{\tilde{y}}_k$ a extrapolací pro $k = 7, \dots, 16$

k	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{y}_k	0,68758	0,26462	0,03178	0,0093	0,00288	0,00114	0,00039	0,00026
k	9	10	11	12	13	14	15	16
\hat{y}_k	0,00016	0,00011	0,00008	0,00005	0,00004	0,00002	0,00002	0,00001

Tabulka 4.13: Extrapolované hodnoty \hat{y}_k , $k = 1, \dots, 16$

S vyhlazením parametru $\hat{\tilde{y}}_k$ se změň i hodnoty pro \hat{s}_k^2 , jak je ukázáno v další tabulce.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\hat{s}_k^2	65,5224	20,1638	0,93987	0,17203	0,02172	0,00479	0,00104	0,00079	0,00117	0,00037

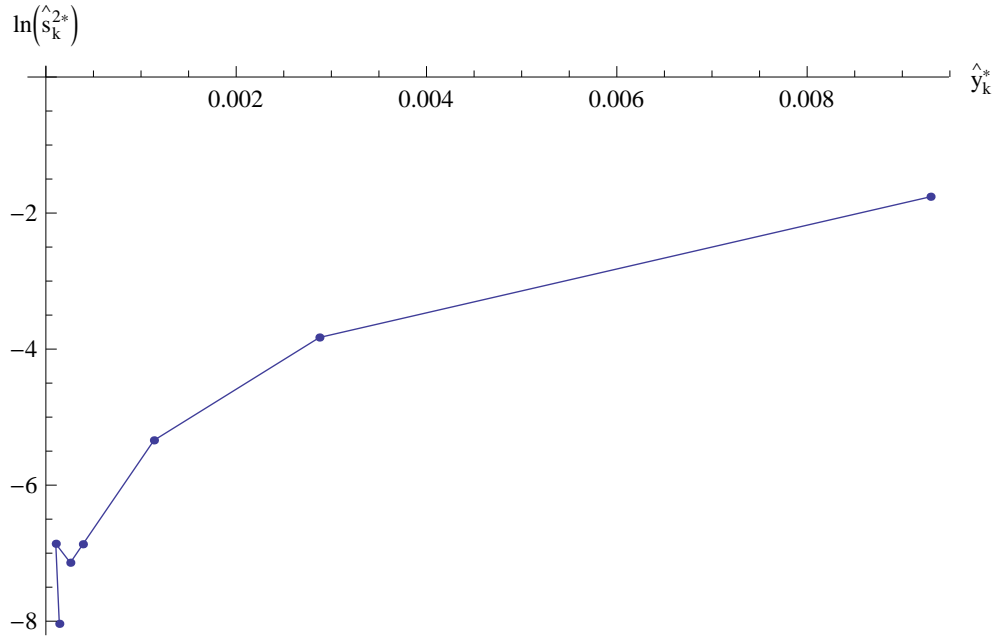
Tabulka 4.14: Hodnoty odhadu \hat{s}_k^2 , $k = 1, \dots, n - 1$

- Minimalizaci Q dle vzorce (2.3) provedeme pro $k_1 = 8$, protože křivkou chceme vyhladit poslední 3 členy \hat{y}_k , $k = 1, \dots, n$. Minimální hodnota je $Q = 54,665$ a z podmínky obdržíme hodnoty $\alpha = -11,9217$, $\beta = -0,305692$ a \hat{y}_k^* pro $k = 1, \dots, 8$. Přehled všech nových hodnot \hat{y}_k^* , $k = 1, \dots, n + 1$, je uveden v následující tabulce. Trojúhelník vznik - výplata doplněný na čtverec s přidáním sloupce pro tail je k vidění v příloze na obrázku 11.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	tail
\hat{y}_k^*	0,68685	0,26437	0,03176	0,0093	0,00287	0,00114	0,00039	0,00026	0,0001	0,00014	0,00019	0,00263

Tabulka 4.15: Hodnoty odhadu vývojových koeficientů \hat{y}_k^* , $k = 1, \dots, n + 1$

5. Hodnoty \hat{y}_k^* , $1 \leq k \leq n$, dosadíme do vzorce (2.2) a spočteme výše \hat{s}_k^{2*} , $1 \leq k \leq n - 1$. Vykreslením hodnot $\ln(\hat{s}_k^{2*})$ proti $|\hat{y}_k^*|$ pro $k > k_1$ je zobrazeno na grafu 4.10. Pro dopočítání hodnot pro $k = n$ a $k = n + 1$ použijeme exponenciálu tvaru $-e^{\alpha - \beta x}$. Konstanty vyšly $\alpha = 2,00414$ a $\beta = 202,911$.



Obrázek 4.10: Hodnoty závislosti $\ln(\hat{s}_k^{2*})$ proti $|\hat{y}_k^*|$ pro $k > k_1$

Všechny hodnoty \hat{s}_k^{2*} , $k = 1, \dots, n + 1$ jsou zobrazeny níže.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	tail
\hat{s}_k^{2*}	65,5343	20,1651	0,93987	0,17203	0,02172	0,00479	0,00104	0,00079	0,00105	0,00032	0,0008	0,01289

Tabulka 4.16: Hodnoty odhadu \hat{s}_k^{2*} , $k = 1, \dots, n + 1$

6. Odhad rezervy na pojistná plnění je zobrazen v nadcházející tabulce. K po-

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\hat{R}_i^{BF}	53	65	57	52	64	86	119	173	287	837	5972

Tabulka 4.17: Hodnoty odhadu rezervy pro jednotlivé škodní roky i

rovnání výsledků pro odhad rezervy \hat{R}_i^{BF} s hodnotami spočtenými v deterministickém modelu slouží tabulka 7, kterou najdeme v příloze. Zbývá spočítat odhad chyby předpovědi. Nejprve pomocí vzorce (2.6) spočteme odhad chyby procesu $\hat{\text{Var}}(R_i)$ jako mocninu $(\text{s.e.}(R_i))^2$.

7. Abychom spočítali odhad chyby odhadu, nejdříve určíme $\text{s.e.}(\hat{U}_i)$ ze vzorce (2.9). Pro výsledek c.v. $(\hat{U}_i) = 0,02$ ze vzorce (2.10) dostaneme hodnoty $\text{s.e.}(\hat{U}_i)$ pro $i = 1, \dots, n$. V tabulkách níže jsou uvedeny hodnoty pro

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s.e.(R_i)	16	18	16	16	17	20	23	31	60	141	638

Tabulka 4.18: Odhad chyby procesu

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s.e.(\hat{U}_i)	403	464	384	342	384	461	490	448	337	343	381

Tabulka 4.19: Hodnoty odhadu s.e.(\hat{U}_i) pro škodní rok $i = 1, \dots, n$

s.e.(\hat{y}_k^*) a s.e.(\hat{b}_k^*), ze kterých dle vzorce (2.7) dopočteme odhad chyby odha-

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	tail
s.e.(\hat{y}_k^*)	0,0172	0,0100	0,0023	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0013
s.e.(\hat{b}_k^*)	0,0104	0,0028	0,0017	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0

Tabulka 4.20: Hodnoty směrodatných odchylek pro veličiny \hat{y}_k^* a \hat{b}_k^*

du $\hat{\text{Var}}(\hat{R}_i^{BF})$ jako mocninu $\left(\text{s.e.}(\hat{R}_i^{BF})\right)^2$. Odhad střední kvadratické chyby

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s.e.(\hat{R}_i^{BF})	27	31	26	23	26	31	33	32	30	52	231

Tabulka 4.21: Odhad chyby odhadu

předpovědi $\hat{\text{mse}}(\hat{R}_i)$ je vypočítán jako mocnina $\left(\text{e.p.}(\hat{R}_i^{BF})\right)^2$ z následující tabulky.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
e.p.(\hat{R}_i^{BF})	31	36	30	28	31	37	41	45	67	150	678

Tabulka 4.22: Odhad střední chyby předpovědi

- Pro odhad celkové rezervy $\hat{R} = 7764$ je dle vzorce (2.11) odhad střední kvadratické chyby předpovědi roven $\hat{\text{mse}}(\hat{R}^{BF}) = 735^2$, kde odhad kvadratické chyby procesu je $\hat{\text{Var}}(R) = 658^2$ a odhad kvadratické chyby odhadu je $\hat{\text{Var}}(\hat{R}^{BF}) = 327^2$.

Všechny hodnoty vývojových parametrů jsou shrnuty v tabulce 15 a výsledky pro odhad rezervy a jeho chybu jsou uvedeny v tabulce 13, viz příloha.

4.3 Výsledky získané metodou chain ladder

Metodu chain ladder provedeme na sadu dat vznik - výplata také v několika krocích a výsledky porovnáme s BF metodou.

- Jelikož CL metoda používá kumulovaný trojúhelník, začneme nejprve nakumulováním trojúhelníku vznik - výplata. Poté spočteme podíly $F_{i,k}$ (viz příloha obrázek 17) a pomocí nich roční vývojové faktory $\hat{f}_k, k = 1, \dots, n - 1$.

K nim musíme ještě určit poslední člen pro tail. Lineární extrapolací zlogaritmovaných hodnot $\hat{f}_k - 1$ dostaneme $\hat{f}_{ult} = 1,00067$. Taková hodnota vede k tvorbě menší rezervy než očekáváme (rozdíl současných výší škod z obou sad dat). Jelikož chceme obě metody porovnávat, zvolíme tail tak, aby odpovídal hodnotě pro tail v BF metodě. Víme, že konečná výše škod je $\hat{C}_{i,ult} = \hat{C}_{i,n}\hat{f}_{ult}$. Poznamenejme, že $\hat{C}_{i,ult}$ v CL metodě označuje totéž co \hat{U}_i v BF metodě. Pak \hat{f}_{ult} zvolíme následovně

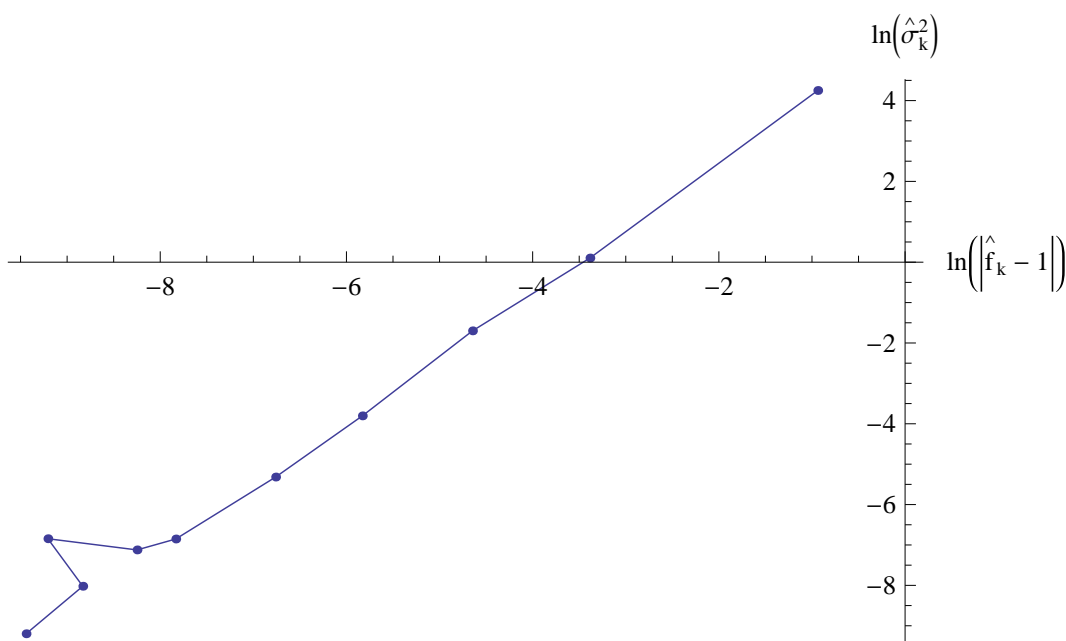
$$\hat{f}_{ult} = \frac{\hat{C}_{i,ult}}{\hat{C}_{i,n}} = \frac{\hat{U}_i}{\hat{U}_i(1 - \hat{y}_{n+1}^*)} = \frac{1}{1 - \hat{y}_{n+1}^*}.$$

Přehled všech vývojových faktorů \hat{f}_k je zobrazen v nadcházející tabulce.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	tail
\hat{f}_k	1,39144	1,03388	1,0096	1,00294	1,00116	1,0004	1,00026	1,0001	1,00015	1,00008	1,00264

Tabulka 4.23: Hodnoty meziročních vývojových faktorů \hat{f}_k

- Ze vzorců (3.2) a (3.3) napočítáme hodnoty pro $\hat{\sigma}_k^2$, $k = 1, \dots, n - 1$. Podle grafu 4.11 závislosti $\ln(\hat{\sigma}_k^2)$ na $\ln(|\hat{f}_k - 1|)$ použijeme pro extrapolaci přím-



Obrázek 4.11: Graf závislosti $\ln(\hat{\sigma}_k^2)$ na $\ln(|\hat{f}_k - 1|)$, $k = 1, \dots, n - 1$.

ku $5,19975 + 1,482x$. Výsledné hodnoty pro $\hat{\sigma}_k^2$ jsou uvedeny níže.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	tail
$\hat{\sigma}_k^2$	70,1243	1,10842	0,18276	0,02228	0,0049	0,00106	0,00081	0,00106	0,00033	0,0001	0,0273

Tabulka 4.24: Hodnoty odhadu $\hat{\sigma}_k^2$

- Abychom mohli spočítat odhad chyby odhadu rezervy, potřebujeme získat hodnotu $s.e.(\hat{f}_{ult})$. Protože není uvedeno, jak tuto hodnotu získat, pokusíme

se ji odvodit následující úvahou. Za předpokladu normálního rozdělení je $(\hat{f}_k - 1,96 \cdot \text{s.e.}(\hat{f}_k), \hat{f}_k + 1,96 \cdot \text{s.e.}(\hat{f}_k))$ 95procentní interval spolehlivosti pro $E(f_k)$. Chceme, aby dolní hranice neklesla pod jedničku s pravděpodobností 2,5%, zvolíme tedy $\text{s.e.}(\hat{f}_{ult}) = (\hat{f}_{ult} - 1)/1,96$. Přehled výsledků pro $\text{s.e.}(\hat{f}_k)$ je uveden níže.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	tail
s.e. (\hat{f}_k)	0,02262	0,00252	0,00106	0,00039	0,0002	0,0001	0,0001	0,00013	0,00009	0,00007	0,00135

Tabulka 4.25: Hodnoty směrodatné odchylky veličiny \hat{f}_k

4. Máme již všechny potřebné údaje pro spočtení odhadu rezervy na pojistná plnění a jeho chyby. Výsledky odhadů rezervy spočtené ze vzorce (3.1) jsou v následující tabulce společně s odhady jejich chyb, kde $\hat{m}\text{sep}(\hat{R}_i^{CL}) = (\text{e.p.}(\hat{R}_i^{CL}))^2$. Pro odhad celkové rezervy $\hat{R}^{CL} = 8962$ je odhad střední kvadratické chyby předpovědi $\hat{m}\text{sep}(\hat{R}^{CL}) = 1226^2$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\hat{R}_i^{CL}	52	62	54	50	61	82	115	170	287	863	7166
e.p. (\hat{R}_i^{CL})	35	40	34	32	35	41	44	48	70	161	1170

Tabulka 4.26: CL: Odhad rezervy a odhad střední chyby předpovědi

Odhad chyby předpovědi odhadu rezervy lze rozdělit na odhad chyby procesu a odhad chyby odhadu. Oba odhady jsou shrnuty v další tabulce.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
odhad chyby procesu	23	25	23	22	24	26	29	36	64	153	1109
odhad chyby odhadu	27	31	25	23	26	31	33	32	30	53	374

Tabulka 4.27: CL: Odhad chyby procesu a odhad chyby odhadu

Trojúhelník vznik - výplata doplněný na čtverec CL metodou je zobrazený na obrázku 12, vývojové parametry použité pro CL metodu jsou shrnuty v tabulce 16 a odhady rezervy a chyby nalezneme na obrázku 14, viz příloha.

4.4 Porovnání výsledků obou metod

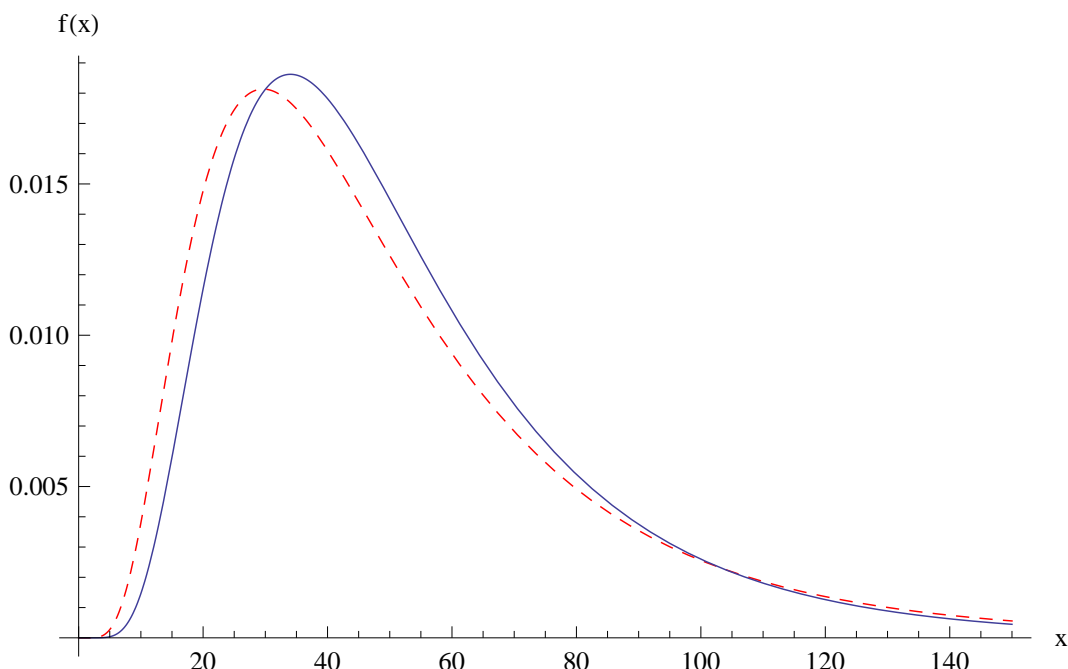
Pokud bychom ve stochastickém modelu BF metody neprovedli žádné vyhlazení, dostali bychom stejné výsledky jako dostaneme z deterministického modelu. Pokud bychom nevyhlazovali ani hodnoty v deterministickém modelu a hodnotu \hat{m}_{n+1}^* pro tail z trojúhelníku vznik - účtování bychom zvolili rovnu 0, dostali bychom výsledky zobrazené v příloze na obrázku 18.

Z předchozích výpočtů již známe odhad rezervy i odhad chyby předpovědi pro obě metody, viz obrázek 4.12 níže. Kdyby rezerva škodního roku i byla náhodná veličina pocházející z logaritmicko-normálního rozdělení, pak bychom i její odhad považovali za náhodnou veličinu pocházející z logaritmicko-normálního rozdělení.

Budeme-li chtít odhadnout např. rezervu škodního roku 1, pak za střední hodnotu logaritmicko-normálního rozdělení dosadíme \hat{R}_1 a za rozptyl dosadíme pro obezřetnost $\hat{msep}(\hat{R}_1)$. Hustota takového rozdělení je zobrazena na grafu 4.13. Plná čára odpovídá BF metodě a přerušovaná CL metodě. V příloze na obrázku 19 můžeme vidět seznam grafů, kde i -tý graf znázorňuje hustotu logaritmicko-normálního rozdělení se střední hodnotou \hat{R}_i a rozptylem $\hat{msep}(\hat{R}_i)$.

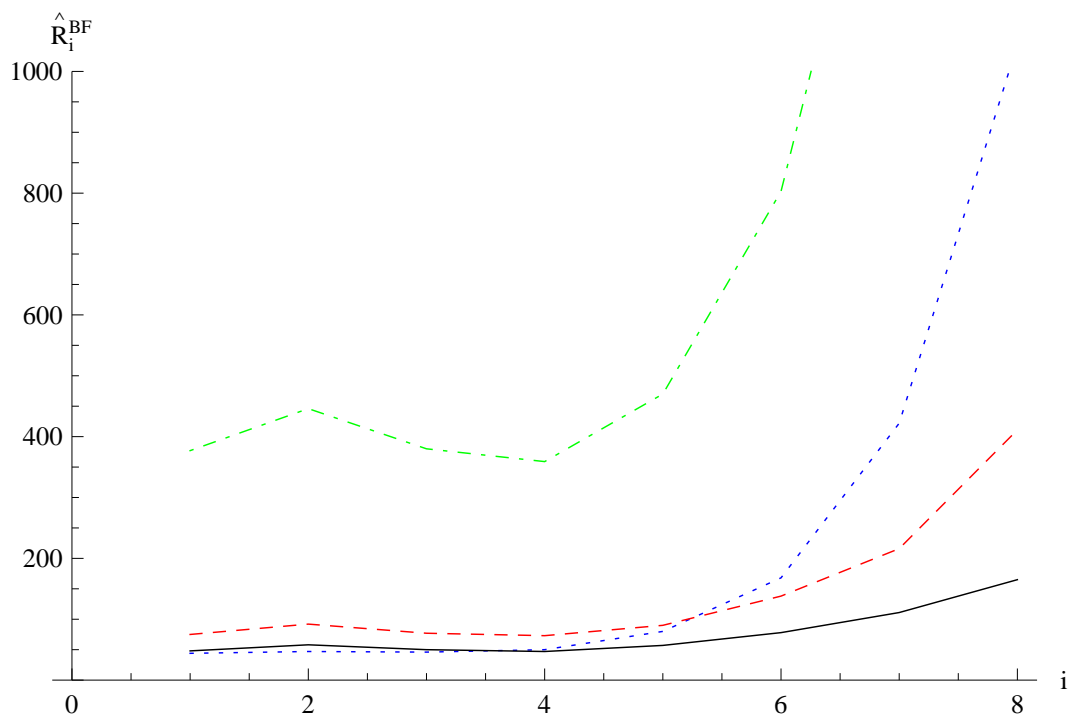
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	celkem
\hat{R}_i^{BF}	53	65	57	52	64	86	119	173	287	837	5972	7764
e.p. $[\hat{R}_i^{\text{BF}}]$	31	36	30	28	31	37	41	45	67	150	678	735
\hat{R}_i^{CL}	52	62	54	50	61	82	115	170	287	863	7166	8962
e.p. $[\hat{R}_i^{\text{CL}}]$	35	40	34	32	35	41	44	48	70	161	1170	1226

Obrázek 4.12: Odhad rezervy a chyby předpovědi pro obě metody

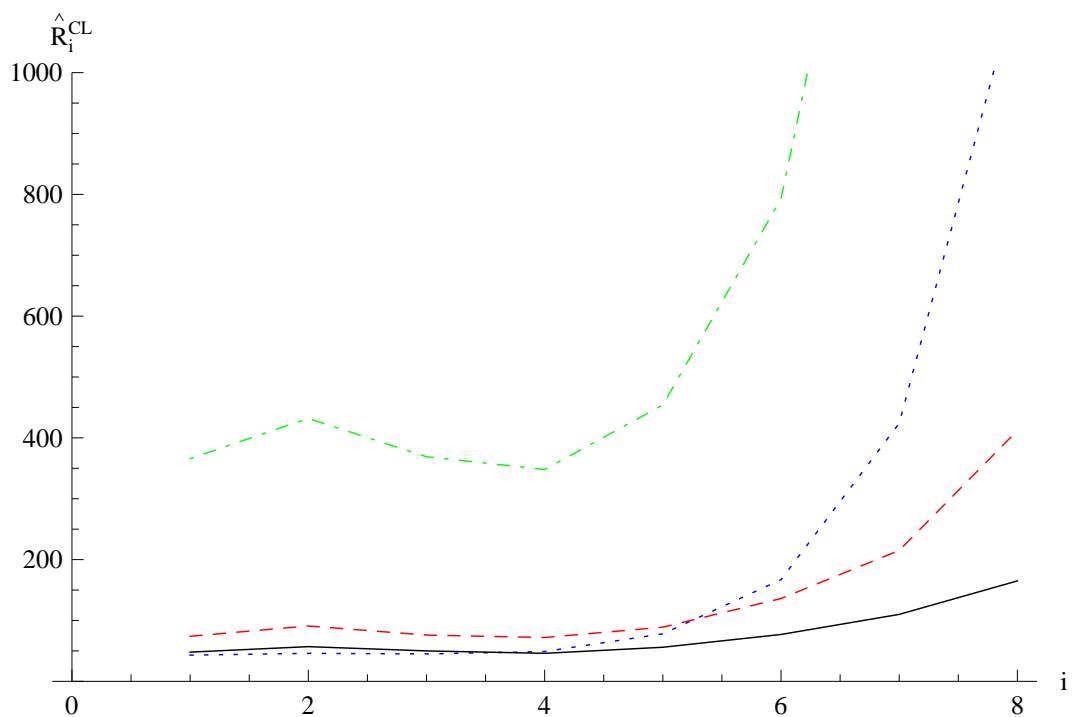


Obrázek 4.13: Hustota logaritmicko-normálního rozdělení se střední hodnotou \hat{R}_1 a rozptylem $\hat{msep}(\hat{R}_1)$

Na závěr učiníme ještě jedno pozorování. Vezměme data jen za období 2000 – 2007 a spočtěme odhad rezervy a jeho chybu BF i CL metodou. Výpočet provedeme bez dodatečných informací a bez vyhlazení, tj. $\hat{y}_k^* = \hat{y}_k$, $k = 1, \dots, n + 1$, kde hodnotu \hat{y}_{n+1} spočteme jako $1 - \hat{y}_1 - \dots - \hat{y}_n$. Tím získáme odhady z 8leté historie. Tentýž postup zopakujeme pro data za období 2000 – 2008 (9letá historie), ale pro srovnání použijeme jen odhad rezervy pro prvních 8 let. Totéž pro období 2000 – 2009 a opět nás zajímá jen $\hat{R}_1, \dots, \hat{R}_8$. Všechny takto získané odhady rezervy porovnáme ještě s odhadem za období 2000 – 2010. Grafické znázornění odhadů rezervy, jak se měnily s časem, je pro BF metodu na obrázku 4.14 a pro CL metodu na obrázku 4.15.



Obrázek 4.14: Odhad BF rezervy z historie 8leté (čerchovaně), 9leté (tečkovaně), 10leté (čárkovaně) a 11leté (plnou čarou)



Obrázek 4.15: Odhad CL rezervy z historie 8leté (čerchovaně), 9leté (tečkovaně), 10leté (čárkovaně) a 11leté (plnou čarou)

5. Problémy

Bornhuetterova-Fergusonova metoda, tak jak ji popisuje profesor Mack ve svých článcích Mack [3] a Mack [4], obsahuje několik míst, kde při použití v praxi mohou vzniknout potíže, které dokáže aktuár vyřešit mnohdy jen na základě své zkušenosti.

1. Jedním z takových míst je volba r_{n-1}^* a r_n^* . Pokud necháme původní hodnoty vypočtené z malého počtu pozorování, může se stát, že $\hat{m}_v^* > \hat{m}_r^*$. Tento stav vede k volbě hodnoty pro tail $\hat{m}_{n+1}^* < 0$ pro trojúhelník vznik - výplata, což nedává smysl (znamená to, že místo peněz, které bychom měli vyplatit za vzniklé škody, peníze obdržíme). V tuto chvíli se musíme rozhodnout, zda zvolíme tail $\hat{m}_{n+1}^{*v} = 0$, nebo zmenšíme hodnoty r_{n-1}^* a r_n^* . Bez informací ze sazbování je těžké určit, o kolik hodnoty změnit. Poznamenejme ještě, že výše r_{n-1}^* a r_n^* mají vliv na odhad konečné výše škod \hat{U}_i pro všechny škodní roky i , zatímco u odhadu rezervy \hat{R}_i mají vliv pouze na dané roky $n - 1$ a n , např. snížíme-li původní hodnoty r_{n-1}^* a r_n^* každou o 10%, odhad rezervy se sníží v roce $n - 1$ o 10% a v roce n o 11%, ale odhad konečné výše škod vzroste o 1,85% pro každý rok $i = 1, \dots, n - 2$ a klesne o 8,34% v letech $n - 1$ a n .
2. Otázku, kterou jsme částečně načali v bodu 1, je volba hodnoty vývojového koeficientu pro tail \hat{m}_{n+1}^{*v} . Zadaná data ukazují, že rychlost výplaty vzniklých škod je vysoká. Jak je vidět z grafu 4.1, většina škod se vyplatí v prvních dvou letech a téměř všechny škody jsou vyplaceny do šesti let od vzniku. V této práci byla hodnota vývojového koeficientu pro tail zvolena kladná proto, že jsme měli k dispozici i trojúhelník vznik - účtování a chtěli jsme dosáhnout stejného odhadu konečné výše škod pro obě sady dat. Bez znalostí z druhého trojúhelníku bychom hodnotu pro tail nejspíše zvolili rovnu 0.
3. Odpověď na otázku, od kterého vývojového roku začít koeficienty vyhlazovat, najdeme v grafu závislosti velikosti koeficientů (např. \hat{m}_k) na vývojovém roce k . Začneme vyhlazovat až za polovinou vývojových let a to buď od místa, kde se koeficienty příliš nemění, nebo pro poslední dva až tři vývojové roky. V extrémních případech (pokud jsme z dat neodstranili nadměrně velké škody již dříve) můžeme provést úpravu jednotlivých vývojových koeficientů. Typ vyhlazovací křivky zvolíme také podle grafu a dílčí koeficienty získáme vhodnou volbou funkce v matematickém softwaru. Některá data mohou vypadat již vyhlazeně, pak vyhlazovací křivku použijeme jen pro výpočet hodnot budoucích vývojových let.
4. Další obtížný krok na cestě k výpočtu odhadu rezervy na pojistná plnění a odhadu chyby tohoto odhadu je volba hodnot posledních členů jednotlivých parametrů. Hodnota \hat{y}_{n+1}^* je vypočítána extrapolací z vyhlazovací křivky podobně jako hodnoty \hat{s}_n^{2*} a \hat{s}_{n+1}^{2*} . Směrodatné odchylky jsou určeny pomocí koeficientu variace, jenž zvolíme dle Mack [4] str. 102 roven 50%. Není jasné, na jakém základě profesor Mack svou volbu založil. Mohl učinit další předpoklady o rozdělení veličin, které nezmínil, a na jejich základě

hodnotu 50% vypočítat, nebo to mohla být čistě volba na základě jeho zkušenosti. Pak $\text{s.e.}(\hat{y}_{n+1}^*) = 0,5 \hat{y}_{n+1}^*$, v případě výpočtu metodou chain ladder použijeme koeficient variace pro výpočet směrodatné odchylky vývojového faktoru pro tail $\text{s.e.}(\hat{f}_n) = 0,5(\hat{f}_n - 1)$. V případě směrodatné odchylky pro odhad konečné výše $\text{s.e.}(\hat{U}_i)$ vypočítáme koeficient variace ze vzorce

$$\text{c.v.}(\hat{U}_i) = \frac{\sqrt{(\text{s.e.}(\hat{y}_1))^2 + \dots + (\text{s.e.}(\hat{y}_{n+1}))^2}}{\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_{n+1}}.$$

Tento vzorec je stejný pro všechny škodní roky i .

5. Zbývá otázka nezávislosti náhodných veličin. Ideou BF metody je nezávislost mezi \hat{R}_i^{BF} a $C_{i,n+1-i}$. Ve vlastnosti (b) odhadů ve stochastickém modelu je uvedeno, že veličiny $\hat{y}_1^*, \dots, \hat{y}_{n+1}^*$ a tím i $\hat{b}_1^*, \dots, \hat{b}_{n+1}^*$ jsou prakticky nezávislé na $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$. Ačkoli veličiny $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n$ jsou negativně korelované s $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$, po jejich vyhlazení a přidáním posledního členu korelace slábnou. Jelikož je ještě upravíme, aby se sečetly na jedničku, považujeme je již za nezávislé na $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$. Vzhledem k nezávislosti všech dílčích výší škod $S_{i,k}$ jsou \hat{R}_i^{BF} a R_i nezávislé náhodné veličiny. Dále víme, že rezerva $R_i = S_{i,n+2-i} + \dots + S_{i,n+1}$ je nezávislá na výších $S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}$. Vzhledem k tomu, že veličiny \hat{U}_i a \hat{b}_k^* považujeme za nezávislé, pak i veličinu \hat{R}_i^{BF} považujeme za nezávislou na $S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}$. Pokud nemáme žádné údaje např. ze sazbování a všechny parametry potřebné pro výpočet odhadu rezervy musíme napočítat pouze z dat, pak nezávislost těžko dodržíme. Nezávislost veličin na $S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}$ je úskalím celé metody, proto se snažíme předejít závislosti procesem různých úprav parametrů (vyhlazení, sečtení hodnot \hat{y}_k^* , $k = 1, \dots, n+1$, na jedničku). Kde už nejde nezávislost udržet, je výpočet hodnot $\hat{R}_1^{BF}, \dots, \hat{R}_n^{BF}$. Jelikož každý z těchto odhadů

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i(1 - \hat{b}_{n+1-i}^*) = \hat{U}_i(1 - (\hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_{n+1-i}^*)) = \hat{U}_i(\hat{y}_{n+2-i}^* + \dots + \hat{y}_{n+1}^*)$$

vzniká vynásobením součtu negativně korelovaných náhodných veličin \hat{y}_k^* , $k = n+2-i, \dots, n+1$, pak odhady rezervy $\hat{R}_1^{BF}, \dots, \hat{R}_n^{BF}$ jsou pozitivně korelované.

Závěr

V této práci jsem se zabývala články profesora Thomase Macka popisující Bornhuetterovu-Fergusonovu metodu a metodu chain ladder. Metodu chain ladder jsem použila k porovnání výsledků, které jsem získala aplikací BF metody na reálná zašumněná data. Použitou teorii jsem shrnula v prvních třech kapitolách.

Z počátku jsem se věnovala výpočtům podle deterministického modelu. Jelikož BF metoda požaduje pouze nezávislost jak mezi škodními roky, tak mezi vývojovými roky, je celkem nenáročná na použití. Pracuje nezávisle na distribuci výší škod. Výhodou modelu je možnost zapracování vnějších informací, např. ze sazbování nebo trhu. Přínosem deterministické části výpočtu je získání apriorního odhadu konečné výše škod pro jednotlivé škodní roky. Tento odhad se stane základním kamenem pro stochastickou část, díky které můžeme spočítat i odhad chyby odhadu rezervy.

Ve stochastickém přístupu hraje velkou roli určení hodnot parametrů pro tail a jejich chyba. Tato část je náročná na zkušenosti aktvára a dělá se pomocí extrapolace daných hodnot. Pro velmi rozkolísané hodnoty je možné použít jejich vyhlazení. V této práci jsem se rozhodla pro vyhlazení hodnot posledních třech vývojových let, protože byly lehce rozkolísané a byly založeny na malém počtu pozorování. V porovnání s nevyhlazenými hodnotami nebyl rozdíl výsledků příliš velký. Jelikož jsou v našem případě vyhlazované hodnoty prudce klesající, dává vyhlazení velmi malou výši pro tail. Malý tail vede k tvorbě příliš malé nebo dokonce žádné rezervy pro staré škodní roky. Díky minimalizaci uvedené v kapitole 2 se hodnota pro tail dopočte tak, aby součet všech vyhlazených hodnot byl roven 1, a zároveň, aby tyto hodnoty měli v součtu co nejmenší odchylku od skutečných pozorování. Tím se všechny hodnoty pozmění. Většinou dojde k navýšení hodnoty pro tail.

Mezi výhody BF metody bych zařadila získání apriorního i posteriorního odhadu konečné výše škod pro jednotlivé škodní roky, nezávislost na distribuci výší škod a možnost předpovědi do budoucna.

Nevýhodou je náročnost na zkušenosti aktvára při předpovídání pro budoucí vývojové roky a nedostatek literatury (obzvláště v českém jazyce) věnující se této problematice.

Seznam použité literatury

- [1] ANDĚL, Jiří. *Základy matematické statistiky*. Matfyzpress, Praha 2005. ISBN 80-86732-40-1
- [2] MACK, Thomas. *The standard error of Chain Ladder reserve estimates: recursive calculation and inclusion of a tail factor*. Astin Bulletin, Vol. 29. No 2., 361-366, 1999.
- [3] MACK, Thomas. *The prediction error of Bornhuetter/Ferguson*. Astin Bulletin, 38(1), 87-103, 2008.
- [4] MACK, Thomas. *Parameter estimation for Bornhuetter/Ferguson*. Casualty Actuarial Society Forum, Fall 2006.

Seznam tabulek

4.1	Hodnoty \hat{m}_k , $k = 1, \dots, n$, pro obě sady dat	17
4.2	Hodnoty r_i , $i = 1, \dots, n$, pro obě sady dat	17
4.3	Vybrané hodnoty indexu škodního průběhu	18
4.4	Hodnoty \hat{m}_k , $k = 1, \dots, n$, pro obě sady dat	18
4.5	Parametry extrapoláčních křivek a hodnoty pro tail	22
4.6	Vybrané hodnoty \hat{m}_k^* , $k = 1, \dots, n + 1$, pro obě sady dat	22
4.7	Hodnoty apriorního odhadu konečného škodního průběhu	22
4.8	Hodnoty apriorního odhadu konečné výše škod	22
4.9	Hodnoty odhadů vývojových koeficientů pro obě sady dat	22
4.10	Hodnoty BF odhadů rezervy pro obě sady dat	23
4.11	Hodnoty odhadu vývojových koeficientů \hat{y}_k , $k = 1, \dots, n$	23
4.12	Hodnoty odhadu \hat{s}_k^2 , $k = 1, \dots, n - 1$	23
4.13	Extrapolované hodnoty \hat{y}_k , $k = 1, \dots, 16$	25
4.14	Hodnoty odhadu \hat{s}_k^2 , $k = 1, \dots, n - 1$	25
4.15	Hodnoty odhadu vývojových koeficientů \hat{y}_k^* , $k = 1, \dots, n + 1$	26
4.16	Hodnoty odhadu \hat{s}_k^{2*} , $k = 1, \dots, n + 1$	26
4.17	Hodnoty odhadu rezervy pro jednotlivé škodní roky i	26
4.18	Odhad chyby procesu	27
4.19	Hodnoty odhadu s.e. (\hat{U}_i) pro škodní rok $i = 1, \dots, n$	27
4.20	Hodnoty směrodatných odchylek pro veličiny \hat{y}_k^* a \hat{b}_k^*	27
4.21	Odhad chyby odhadu	27
4.22	Odhad střední chyby předpovědi	27
4.23	Hodnoty meziročních vývojových faktorů \hat{f}_k	28
4.24	Hodnoty odhadu $\hat{\sigma}_k^2$	28
4.25	Hodnoty směrodatné odchylky veličiny \hat{f}_k	29
4.26	CL: Odhad rezervy a odhad střední chyby předpovědi	29
4.27	CL: Odhad chyby procesu a odhad chyby odhadu	29

Seznam použitých zkratek

BF	Bornhuetter-Ferguson, příjmení autorů metody, která je v této práci popisována.
CL	Chain Ladder, metoda, se kterou je BF metoda porovnávána.
IBNR	rezerva na pojistná plnění za škody dosud vzniklé, ale ještě nereportované.
post.	aposteriorní
Est.	Estimation (=odhad), zkratka používaná při výpočtu chyby odhadu
Proc.	Process (=proces), zkratka používaná při výpočtu chyby procesu
Pred.	Prediction (=predikce), zkratka používaná při výpočtu chyby predikce

Přílohy

Věta 2.1.1. $E(C_{i,k}) = x_i b_k \Leftrightarrow E(S_{i,k}) = x_i y_k$ pro $1 \leq i \leq n$ a $1 \leq k \leq n+1$.

Důkaz. Uvažujme $1 \leq i \leq n$ a $1 \leq k \leq n+1$.

$$” \Rightarrow: ” \quad E(S_{i,k}) = E(C_{i,k} - C_{i,k-1}) = x_i b_k - x_i b_{k-1} = x_i (b_k - b_{k-1})$$

Označíme-li $y_k := b_k - b_{k-1}$, získáváme $E(S_{i,k}) = x_i y_k$.

$$” \Leftarrow: ” \quad E(C_{i,k}) = E(S_{i,k} + C_{i,k-1}) = E(S_{i,k} + S_{i,k-1} + C_{i,k-2}) = \\ = \dots = E\left(\sum_{j=1}^k S_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^k E(S_{i,j}) = \sum_{j=1}^k x_i y_j = x_i \sum_{j=1}^k y_j$$

Označíme-li $b_k := \sum_{j=1}^k y_j$, získáváme $E(C_{i,k}) = x_i b_k$. □

Věta 2.2.1. Označme $b_k = y_1 + \dots + y_k$, pak $E(R_i) = x_i(1 - b_{n+1-i})$.

Důkaz.

$$E(R_i) = E(S_{i,n+2-i} + \dots + S_{i,n+1}) \stackrel{\text{(BF2)}}{=} x_i (y_{n+2-i} + \dots + y_{n+1}) = \\ = x_i [1 - (y_1 + \dots + y_{n+1-i})] = x_i (1 - b_{n+1-i})$$

□

Věta 2.2.2. Pro rozptyl rezervy škodního roku i platí

$$\text{Var}(R_i) = x_i (s_{n+2-i}^2 + \dots + s_{n+1}^2), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Důkaz. Pro každé $1 \leq i \leq n$ platí:

$$\text{Var}(R_i) = \text{Var}(S_{i,n+2-i} + \dots + S_{i,n+1}) \stackrel{\text{(BF1,BF3)}}{=} x_i (s_{n+2-i}^2 + \dots + s_{n+1}^2).$$

□

Věta 2.2.3. Pro známé parametry x_1, \dots, x_n je

$$\hat{y}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i}$$

nejlepší nestranný lineární odhad y_k , $1 \leq k \leq n$.

Důkaz. Nechť x_1, \dots, x_n jsou známé kladné parametry.

Nestrannost:

$$E(\hat{y}_k) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i} \sum_{i=1}^{n+1-k} E(S_{i,k}) \stackrel{\text{(BF2)}}{=} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i} \sum_{i=1}^{n+1-k} x_i y_k = y_k$$

Linearita: Z předpokladu (BF2) plyne, že $y_k = E(S_{i,k})/x_i$. Necht

$$\sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{a_i}{x_i} S_{i,k}$$

je libovolný nestranný lineární odhad y_k , tj. $\frac{a_i}{x_i}$ jsou reálné konstanty pro každé $1 \leq i \leq n$. Pak

$$E\left(\sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{a_i}{x_i} S_{i,k}\right) \stackrel{(BF2)}{=} \sum_{i=1}^{n+1-k} a_i y_k \stackrel{\text{nestr.}}{=} y_k.$$

Odtud plyne, že

$$\sum_{i=1}^{n+1-k} a_i = 1.$$

Dále

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{a_i}{x_i} S_{i,k}\right) \stackrel{(BF1)}{=} \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{a_i^2}{x_i^2} \text{Var}(S_{i,k}) \stackrel{(BF3)}{=} \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{a_i^2}{x_i} s_k^2.$$

Nalézt nejmenší nestranný lineární odhad (NNLO) znamená minimalizovat $Q = \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{a_i^2}{x_i}$ za podmínky $\sum_{i=1}^{n+1-k} a_i = 1$. Zvolme

$$a_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} + \delta_i.$$

Z podmínky minimalizace plyne, že

$$\sum_{i=1}^{n+1-k} a_i = 1 + \sum_{i=1}^{n+1-k} \delta_i = 1. \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n+1-k} \delta_i = 0$$

Minimalizace:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{a_i^2}{x_i} = \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{1}{x_i} \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} + \delta_i \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{1}{x_i} \left(\frac{x_i^2}{\left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j\right)^2} + \frac{2x_i}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} \delta_i + \delta_i^2 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j\right)^2} + \frac{2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1-k} \delta_i}_{=0} + \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{\delta_i^2}{x_i} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} + \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{\delta_i^2}{x_i}$$

Odtud je zřejmé, že hodnota Q bude nejmenší pro $\delta_i = 0$ pro každé $1 \leq i \leq n$.

□

Věta 2.2.4. Pro známé parametry x_1, \dots, x_n je

$$\hat{s}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} (S_{i,k} - x_i \hat{y}_k)^2 / x_i$$

nestranný odhad s_k^2 , $1 \leq k \leq n-1$.

Důkaz. Necht' x_1, \dots, x_n jsou známé kladné parametry.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s_k^2) &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{1}{x_i} ((S_{i,k}^2 - 2S_{i,k}x_i\hat{y}_k + (x_i\hat{y}_k)^2) \right] = \\ &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{1}{x_i} \left[\mathbb{E}(S_{i,k}^2) - \underbrace{2\mathbb{E}(S_{i,k}x_i\hat{y}_k)}_A + \underbrace{\mathbb{E}(x_i\hat{y}_k)^2}_B \right] \end{aligned}$$

Nyní spočítáme dílčí části.

$$\begin{aligned} B &= \mathbb{E} x_i^2 (\hat{y}_k)^2 = x_i^2 \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} S_{j,k} \right)^2 / \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j \right)^2 = \\ &= \frac{x_i^2}{\left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j \right)^2} \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} S_{j,k}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1-k} \sum_{j=1}^{n+1-k} S_{i,k} S_{j,k} \right) = \\ &\stackrel{\text{(BF1)}}{=} \frac{x_i^2}{\left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j \right)^2} \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} \mathbb{E} S_{j,k}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1-k} \sum_{j=1}^{n+1-k} \mathbb{E} S_{i,k} S_{j,k} \right) = \\ &= \frac{x_i^2}{\left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j \right)^2} \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} \mathbb{E} S_{j,k}^2 + y_k^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1-k} \sum_{j=1}^{n+1-k} x_i x_j \right) = \\ &= \frac{x_i^2}{\left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j \right)^2} \left[\sum_{j=1}^{n+1-k} \mathbb{E} S_{j,k}^2 + y_k^2 \left(\left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j \right)^2 - \sum_{j=1}^{n+1-k} x_j^2 \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_i^2}{\left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j\right)^2} \left[\sum_{j=1}^{n+1-k} \underbrace{\left(\mathbb{E}S_{j,k}^2 - \sum_{j=1}^{n+1-k} x_j^2 y_k^2 \right)}_{\text{Var}(S_{j,k})} + y_k^2 \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j \right)^2 \right] = \\
&= \frac{x_i^2}{\left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j\right)^2} \left[\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j s_k^2 + y_k^2 \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j \right)^2 \right] = \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} s_k^2 + x_i^2 y_k^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= 2x_i \mathbb{E} \left(S_{i,k} \sum_{j=1}^{n+1-k} S_{j,k} / \sum_{j=1}^{n+1-k} x_j \right) = \frac{2x_i}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} \mathbb{E} \left(S_{i,k}^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1-k} S_{j,k} S_{i,k} \right) = \\
&\stackrel{\text{(BF1)}}{=} \frac{2x_i}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} \left(\mathbb{E}(S_{i,k}^2) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1-k} x_i y_k x_j y_k \right) = \\
&= \frac{2x_i}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} \left(\mathbb{E}(S_{i,k}^2) + y_k^2 \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} x_i x_j - x_i^2 \right) \right) = \\
&= \frac{2x_i}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} \left(x_i y_k^2 \sum_{j=1}^{n+1-k} x_j + \underbrace{\mathbb{E}(S_{i,k}^2) - x_i^2 y_k^2}_{\text{Var}(S_{i,k})} \right) = \\
&= \frac{2x_i}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} \left(x_i y_k^2 \sum_{j=1}^{n+1-k} x_j + x_i s_k^2 \right) = 2x_i^2 y_k^2 + 2 \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} s_k^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\hat{s}_k^2 &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{1}{x_i} \left[\mathbb{E}(S_{i,k}^2) - 2x_i^2 y_k^2 - 2 \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} s_k^2 + x_i^2 y_k^2 + \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} s_k^2 \right] = \\
&= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{1}{x_i} \left[\underbrace{\mathbb{E}(S_{i,k}^2) - x_i^2 y_k^2}_{\text{Var}(S_{i,k})} - \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} s_k^2 \right] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{1}{x_i} \left[x_i s_k^2 - \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} s_k^2 \right] = \frac{1}{n-k} \left[(n-k+1) s_k^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j} s_k^2 \right] = s_k^2$$

□

Věta 2.5.1. *Nechť \hat{R}_i^{BF} a R_i jsou nezávislé na $S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}$, pak*

$$\text{mse}(\hat{R}_i^{BF}) = \text{Var}(\hat{R}_i^{BF}) + \text{Var}(R_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \text{mse}(\hat{R}_i^{BF}) &= \mathbb{E} \left((\hat{R}_i^{BF} - R_i)^2 \middle| S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i} \right) = \\ &= \mathbb{E} \left((\hat{R}_i^{BF} - R_i)^2 \right) = \\ &= \text{Var}(\hat{R}_i^{BF} - R_i) + \underbrace{\left(\mathbb{E}(\hat{R}_i^{BF}) - \mathbb{E}(R_i) \right)^2}_{=0} \stackrel{(c)}{=} \\ &= \text{Var}(\hat{R}_i^{BF}) + \text{Var}(R_i) \end{aligned}$$

□

Věta 2.5.2. *Nechť $i = 1, \dots, n$. Chybu procesu $\text{Var}(R_i)$ lze vyjádřit jako*

$$\text{Var}(R_i) = x_i (s_{n+2-i}^2 + \dots + s_{n+1}^2) \quad (2.4)$$

a pro chybu odhadu $\text{Var}(\hat{R}_i^{BF})$ platí

$$\text{Var}(\hat{R}_i^{BF}) = (x_i^2 + \text{Var}(\hat{U}_i)) \text{Var}(\hat{b}_{n+1-i}^*) + \text{Var}(\hat{U}_i) (1 - b_{n+1-i})^2. \quad (2.5)$$

Důkaz. *Nejprve spočteme chybu procesu.*

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_i) &= \text{Var}(S_{i,n+2-i} + \dots + S_{i,n+1}) \stackrel{(BF1)}{=} \\ &= \text{Var}(S_{i,n+2-i}) + \dots + \text{Var}(S_{i,n+1}) = \\ &= x_i (s_{n+2-i}^2 + \dots + s_{n+1}^2). \end{aligned}$$

Pro chybu BF odhadu rezervy $\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i (1 - \hat{b}_{n+1-i}^)$, kde \hat{U}_i a \hat{b}_{n+1-i}^* považujeme dle (b) za nezávislé, použijeme obecný vzorec pro dvě nezávislé náhodné veličiny X a Y*

$$\text{Var}(XY) = (\mathbb{E}(X))^2 \text{Var}(Y) + \text{Var}(X) \text{Var}(Y) + \text{Var}(X) (\mathbb{E}(Y))^2.$$

Vzhledem k tomu, že $\text{Var}(1 - \hat{b}_{n+1-i}^) = \text{Var}(\hat{b}_{n+1-i}^*)$, dostaneme*

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{R}_i^{BF}) &= (\mathbb{E}(\hat{U}_i))^2 \text{Var}(\hat{b}_{n+1-i}^*) + \\ &+ \text{Var}(\hat{U}_i) \text{Var}(\hat{b}_{n+1-i}^*) + \text{Var}(\hat{U}_i) (1 - \mathbb{E}(\hat{b}_{n+1-i}^*))^2 \stackrel{(d)}{=} \\ &= (x_i^2 + \text{Var}(\hat{U}_i)) \text{Var}(\hat{b}_{n+1-i}^*) + \text{Var}(\hat{U}_i) (1 - b_{n+1-i})^2. \quad \square \end{aligned}$$

Věta 2.5.3. Pro střední kvadratickou chybu předpovědi celkové rezervy platí

$$\text{mse}(\hat{R}^{BF}) = \text{Var}(\hat{R}^{BF}) + \text{Var}(R),$$

$$\text{kde } \text{Var}(R) = \text{Var}(R_1) + \dots + \text{Var}(R_n),$$

$$\text{Var}(\hat{R}^{BF}) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(\hat{R}_i^{BF}) + 2 \sum_{i<j} \text{Cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}).$$

Důkaz. Nejprve odvodíme vlastnost pro střední hodnoty rezervy a jejího odhadu

$$\text{E}(\hat{R}) = \text{E}\left(\sum_{i=1}^n \hat{U}_i(1 - \hat{b}_{n+1-i}^*)\right) \stackrel{(b)}{=} \sum_{i=1}^n x_i(1 - b_{n+1-i}) = \text{E}(R).$$

Pro rozptyl celkové rezervy R platí

$$\text{Var}(R) = \text{Var}(R_1 + \dots + R_n) \stackrel{(BF1)}{=} \text{Var}(R_1) + \dots + \text{Var}(R_n).$$

Rozptyl odhadu celkové rezervy \hat{R}^{BF} spočteme následovně

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{R}^{BF}) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \hat{R}_i^{BF}\right) = \text{E}\left(\sum_{i=1}^n \hat{R}_i^{BF}\right)^2 - \left(\text{E}\sum_{i=1}^n \hat{R}_i^{BF}\right)^2 = \\ &= \text{E}\left(\sum_{i=1}^n (\hat{R}_i^{BF})^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \hat{R}_i^{BF} \hat{R}_j^{BF}\right) - \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^n (\text{E}\hat{R}_i^{BF})^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \text{E}(\hat{R}_i^{BF})\text{E}(\hat{R}_j^{BF})\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\text{E}(\hat{R}_i^{BF})^2 - (\text{E}(\hat{R}_i^{BF}))^2\right) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left(\text{E}(\hat{R}_i^{BF} \hat{R}_j^{BF}) - \text{E}(\hat{R}_i^{BF})\text{E}(\hat{R}_j^{BF})\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(\hat{R}_i^{BF}) + 2 \sum_{i<j} \text{Cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}). \end{aligned}$$

Zanedbáme-li člen $\text{Cov}(\hat{U}_i, \hat{U}_j)\text{Cov}(1 - \hat{b}_{n+1-i}^*, 1 - \hat{b}_{n+1-j}^*)$, pak pro kovarianci $\text{Cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF})$ platí

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}) &= \text{Cov}(\hat{U}_i(1 - \hat{b}_{n+1-i}^*), \hat{U}_j(1 - \hat{b}_{n+1-j}^*)) = \\ &= \text{Cov}(\hat{U}_i, \hat{U}_j)\text{E}(1 - \hat{b}_{n+1-i}^*)\text{E}(1 - \hat{b}_{n+1-j}^*) + \\ &\quad + \text{Cov}(1 - \hat{b}_{n+1-i}^*, 1 - \hat{b}_{n+1-j}^*)\text{E}(\hat{U}_i)\text{E}(\hat{U}_j). \end{aligned}$$

□

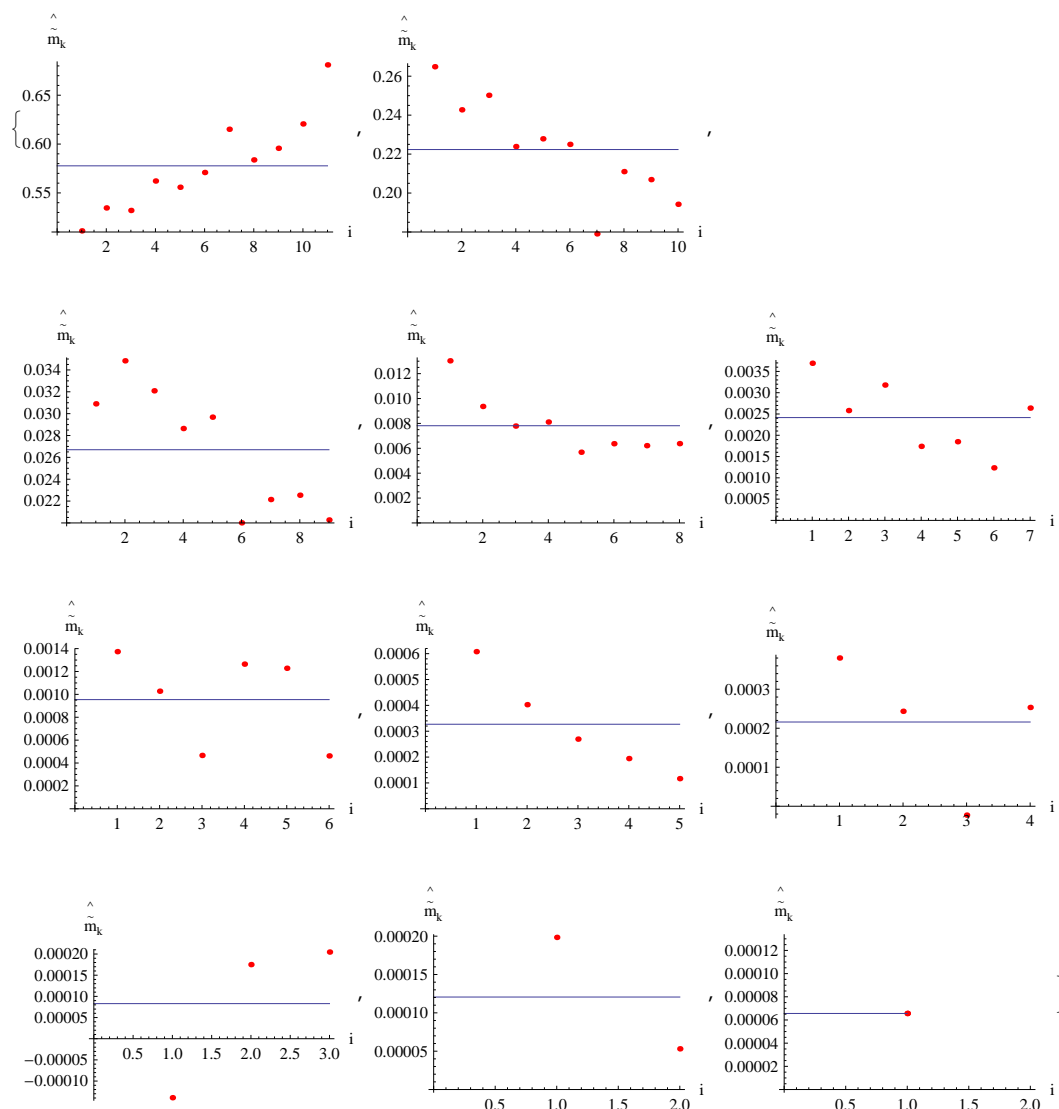
Výsledky exportované z programu *Mathematica* jsou zobrazeny s desetinnou tečkou místo desetinné čárky.

rok i	v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2000	20 963	12 256	6351	741	312	89	33	15	9	-3	5	2
2001	23 678	14 766	6704	962	259	71	28	11	7	5	1	
2002	21 296	12 156	5716	733	178	73	11	6	-1	5		
2003	21 021	11 446	4558	583	165	35	26	4	5			
2004	24 663	12 692	5203	678	130	42	28	3				
2005	28 895	15 662	6172	549	175	34	13					
2006	28 893	17 949	5224	646	181	77						
2007	26 718	15 547	5619	600	170							
2008	22 286	11 944	4149	407								
2009	22 934	12 667	3964									
2010	27 344	15 457										

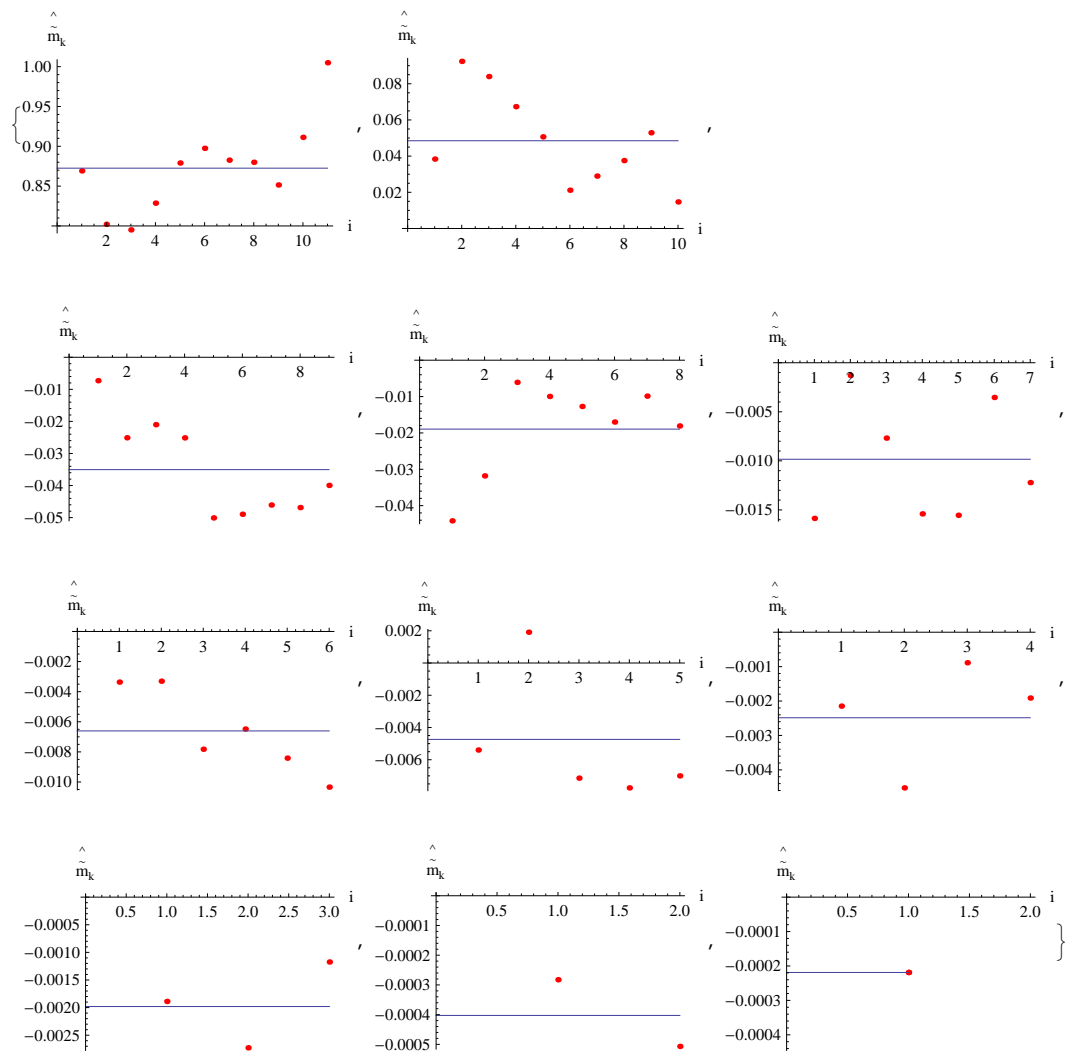
Obrázek 1: Vývojový trojúhelník vznik - výplata

rok i	v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2000	20 963	20 839	920	-175	-1059	-380	-81	-129	-52	-45	-7	-5
2001	23 678	22 153	2551	-693	-879	-36	-91	53	-125	-75	-14	
2002	21 296	18 166	1919	-480	-139	-176	-179	-163	-20	-27		
2003	21 021	16 871	1371	-512	-203	-314	-132	-158	-39			
2004	24 663	20 073	1157	-1144	-291	-355	-192	-160				
2005	28 895	24 621	580	-1343	-467	-97	-284					
2006	28 893	25 753	845	-1344	-288	-356						
2007	26 718	23 434	999	-1248	-482							
2008	22 286	17 073	1061	-801								
2009	22 934	18 600	300									
2010	27 344	22 807										

Obrázek 2: Vývojový trojúhelník vznik - účtování



Obrázek 3: Hodnoty \hat{m}_k a jednotlivé podíly $S_{i,k}/(v_i r_i^*)$ z dat vznik-výplata, kde každý graf odpovídá jednomu vývojovému roku $k = 1, \dots, 11$.



Obrázek 4: Hodnoty \hat{m}_k a jednotlivé podíly $S_{i,k}/(v_i r_i^*)$ z dat vznik-úctování, kde každý graf odpovídá jednomu vývojovému roku $k = 1, \dots, 11$.

i\k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	tail
2000	12 256	6351	741	312	89	33	15	9	-3	5	2	35
2001	14 766	6704	962	259	71	28	11	7	5	1	2	41
2002	12 156	5716	733	178	73	11	6	-1	5	2	1	34
2003	11 446	4558	583	165	35	26	4	5	3	2	1	30
2004	12 692	5203	678	130	42	28	3	5	3	2	1	34
2005	15 662	6172	549	175	34	13	9	6	4	2	1	40
2006	17 949	5224	646	181	77	28	10	6	4	2	2	43
2007	15 547	5619	600	170	64	25	9	6	4	2	1	39
2008	11 944	4149	407	157	48	19	7	4	3	2	1	29
2009	12 667	3964	545	159	49	19	7	4	3	2	1	30
2010	15 457	5046	606	177	55	22	7	5	3	2	1	33

Obrázek 5: Trojúhelník vznik - výplata doplněný na čtverec se sloupcem navíc pro tail

i\k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	tail
2000	20839	920	-175	-1059	-380	-81	-129	-52	-45	-7	-5	-12
2001	22153	2551	-693	-879	-36	-91	53	-125	-75	-14	-12	-14
2002	18166	1919	-480	-139	-176	-179	-163	-20	-27	-18	-10	-12
2003	16871	1371	-512	-203	-314	-132	-158	-39	-29	-16	-9	-10
2004	20073	1157	-1144	-291	-355	-192	-160	-57	-33	-18	-10	-12
2005	24621	580	-1343	-467	-97	-284	-130	-68	-39	-22	-12	-14
2006	25753	845	-1344	-288	-356	-193	-138	-73	-42	-23	-13	-15
2007	23434	999	-1248	-482	-262	-176	-126	-66	-38	-21	-11	-14
2008	17073	1061	-801	-380	-197	-132	-95	-50	-29	-16	-9	-10
2009	18600	300	-715	-387	-201	-135	-97	-51	-29	-16	-9	-10
2010	22807	1101	-795	-430	-223	-150	-108	-56	-32	-18	-10	-12

Obrázek 6: Trojúhelník vznik - účtování doplněný na čtverec se sloupcem navíc pro tail

i	r_i	r_i^*	\hat{Q}_i	\hat{U}_i	\hat{R}_i
1	1.13921	1.14382	0.961067	20 146.9	35.2243
2	1.16178	1.16645	0.980088	23 206.9	42.0822
3	1.06902	1.07292	0.9015	19 197.9	36.7584
4	0.965226	0.968574	0.813823	17 107.2	35.4601
5	0.918417	0.925892	0.777961	19 186.8	44.7022
6	0.944152	0.949405	0.797716	23 050.4	62.6748
7	1.007	1.00989	0.848537	24 516.4	94.5048
8	0.995088	0.996755	0.837501	22 376.3	150.589
9	0.906124	0.899778	0.756019	16 848.3	270.066
10	0.917896	0.89	0.747803	17 150.	819.855
11	0.995661	0.83	0.697389	19 069.3	5957.67

Obrázek 7: Výsledné parametry pro data z trojúhelníku vznik - výplata

i	r_i	r_i^*	\hat{Q}_i	\hat{U}_i	\hat{R}_i
1	1.14844	1.14382	0.961067	20 146.9	-12.1683
2	1.17115	1.16645	0.980088	23 206.9	-25.8865
3	1.07684	1.07292	0.9015	19 197.9	-39.3242
4	0.971934	0.968574	0.813823	17 107.2	-64.1487
5	0.933428	0.925892	0.777961	19 186.8	-128.709
6	0.954687	0.949405	0.797716	23 050.4	-284.619
7	1.01279	1.00989	0.848537	24 516.4	-495.515
8	0.998425	0.996755	0.837501	22 376.3	-714.215
9	0.893477	0.899778	0.756019	16 848.3	-917.796
10	0.909642	0.89	0.747803	17 150.	-1649.41
11	0.972725	0.83	0.697389	19 069.3	-733.448

Obrázek 8: Výsledné parametry pro data z trojúhelníku vznik - účtování

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	tail
\hat{m}_k	0.5677	0.2223	0.027	0.008	0.0025	0.001	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
\hat{m}_k	0.5777	0.2223	0.0267	0.0078	0.0024	0.001	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
\hat{m}_k^*	0.5777	0.2223	0.0267	0.0078	0.0024	0.001	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0015
\hat{b}_k^*	0.6876	0.9522	0.984	0.9933	0.9961	0.9973	0.9977	0.9979	0.9981	0.9982	0.9983	1.

Obrázek 9: Hodnoty vývojových parametrů pro data z trojúhelníku vznik - výplata

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	tail
\hat{m}_k	0.8575	0.0485	-0.0354	-0.0194	-0.0101	-0.0068	-0.005	-0.0027	-0.0022	-0.0005	-0.0003	
\hat{m}_k	0.8725	0.0485	-0.035	-0.019	-0.0098	-0.0066	-0.0047	-0.0025	-0.002	-0.0004	-0.0002	
\hat{m}_k^*	0.8725	0.0485	-0.035	-0.019	-0.0098	-0.0066	-0.0047	-0.0025	-0.0014	-0.0008	-0.0004	-0.0005
\hat{b}_k^*	1.0385	1.0962	1.0545	1.0319	1.0202	1.0123	1.0067	1.0037	1.002	1.0011	1.0006	1.

Obrázek 10: Hodnoty vývojových parametrů pro data z trojúhelníku vznik - účtování

i\k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	tail
2000	12.256.2	6350.51	740.873	312.46	88.5257	32.933	14.5736	9.11379	-3.34095	4.75732	1.57343	52.979
2001	14.766.4	6704.06	962.13	258.597	71.2757	28.3865	11.1214	6.72393	4.83488	1.4665	4.45112	61.0256
2002	12.156.5	5716.43	733.209	177.931	72.6607	10.6546	6.1569	-0.520872	4.67721	2.71235	3.68219	50.4834
2003	11.446.4	4557.99	583.104	165.155	35.4146	25.7441	3.95509	5.15735	1.78037	2.41696	3.28118	44.9856
2004	12.691.9	5202.9	677.743	129.79	42.2162	28.0452	2.66254	4.93098	1.9968	2.71078	3.68006	50.4542
2005	15.661.9	6172.26	548.938	174.688	33.8725	12.6776	8.97034	5.92392	2.39889	3.25664	4.4211	60.614
2006	17.949.2	5224.28	646.066	181.246	76.9854	27.8415	9.54084	6.30067	2.55145	3.46376	4.70228	64.469
2007	15.546.9	5619.26	600.177	169.773	64.3257	25.4112	8.70798	5.70566	2.32873	3.1614	4.2918	58.8413
2008	11.944.4	4148.7	406.501	156.637	48.4343	19.1334	6.55671	4.32999	1.75342	2.38039	3.23153	44.3048
2009	12.667.2	3964.47	544.737	159.442	49.3017	19.4761	6.67412	4.40753	1.78482	2.42301	3.2894	45.0982
2010	15.456.6	5041.36	605.701	177.286	54.8192	21.6557	7.42105	4.90079	1.98457	2.69418	3.65753	50.1453

Obrázek 11: Trojúhelník vznik - výplata doplněný na čtverec BF metodou se sloupcem navíc pro tail

i\k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	tail
2000	12.256.2	6350.51	740.873	312.46	88.5257	32.933	14.5736	9.11379	-3.34095	4.75732	1.57343	52.2256
2001	14.766.4	6704.06	962.13	258.597	71.2757	28.3865	11.1214	6.72393	4.83488	1.4665	1.81241	60.158
2002	12.156.5	5716.43	733.209	177.931	72.6607	10.6546	6.1569	-0.520872	4.67721	2.75702	1.49985	49.7834
2003	11.446.4	4557.99	583.104	165.155	35.4146	25.7441	3.95509	5.15735	1.68843	2.45717	1.33673	44.3691
2004	12.691.9	5202.9	677.743	129.79	42.2162	28.0452	2.66254	4.91009	1.88487	2.74304	1.49225	49.5311
2005	15.661.9	6172.26	548.938	174.688	33.8725	12.6776	8.96231	5.91382	2.27018	3.30378	1.7973	59.6564
2006	17.949.2	5224.28	646.066	181.246	76.9854	27.896	9.55757	6.3066	2.42096	3.52321	1.91667	63.6186
2007	15.546.9	5619.26	600.177	169.773	64.5066	25.4895	8.73307	5.76255	2.21211	3.21928	1.75133	58.1305
2008	11.944.4	4148.7	406.501	158.386	48.9855	19.3564	6.63178	4.37601	1.67985	2.44468	1.32993	44.1435
2009	12.667.2	3964.47	563.452	165.062	51.0503	20.1723	6.91133	4.56047	1.75066	2.54773	1.38599	46.0043
2010	15.456.6	6050.28	728.615	213.446	66.0146	26.0854	8.93723	5.89727	2.26382	3.29454	1.79227	59.4894

Obrázek 12: Trojúhelník vznik - výplata doplněný na čtverec CL metodou se sloupcem navíc pro tail

i	\hat{R}_i^{BF}	$\text{s.e.} [\hat{U}_i]$	$\text{s.e.} [\hat{R}_i^{\text{BF}}]$	$\text{s.e.} [R_i]$	$\text{e.p.} [\hat{R}_i^{\text{BF}}]$
1	52.979	402.939	26.516	16.1122	31.0274
2	65.4767	464.138	30.8933	17.8184	35.6635
3	56.878	383.959	25.6125	16.3965	30.4112
4	52.4641	342.144	22.9318	16.046	27.9883
5	63.7728	383.736	25.7953	17.435	31.1349
6	85.5849	461.008	31.0891	19.727	36.8197
7	118.87	490.328	33.4566	23.0503	40.6283
8	172.819	447.525	31.8435	31.1616	44.554
9	286.761	336.966	29.84	60.2454	67.2305
10	836.634	343.	51.558	140.76	149.905
11	5971.63	381.386	231.039	637.625	678.193
celkem	7763.87		327.475	658.261	735.219

Obrázek 13: Odhad rezervy a odhad chyb pro výpočet BF metodou

i	\hat{R}_i^{CL}	$\text{s.e.} [\hat{R}_i^{\text{CL}}]$	$\text{s.e.} [R_i]$	$\text{e.p.} [\hat{R}_i^{\text{CL}}]$
1	52.2256	26.6457	23.2553	35.3667
2	61.9704	30.7364	25.0055	39.6232
3	54.0403	25.4899	22.8839	34.2551
4	49.8515	22.8259	22.0164	31.7135
5	60.5614	25.5531	23.5871	34.7752
6	81.9038	30.8676	26.3464	40.5825
7	115.24	33.2794	29.3097	44.3462
8	169.805	31.6272	35.7533	47.7345
9	287.333	29.763	63.5062	70.1347
10	862.897	52.7719	152.596	161.464
11	7166.12	373.999	1108.78	1170.15
celkem	8961.95			1225.99

Obrázek 14: Odhad rezervy a odhad chyb pro výpočet CL metodou

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	tail
\hat{y}_k	0.687578	0.264617	0.031776	0.009299	0.002875	0.001136	0.000389	0.000257	0.000099	0.000144	0.000078	
\hat{s}_k^2	65.5224	20.1638	0.939869	0.172026	0.021724	0.004789	0.00104	0.000793	0.001046	0.000323		
\hat{y}_k	0.687578	0.264617	0.031776	0.009299	0.002875	0.001136	0.000389	0.000257	0.000162	0.000111	0.000076	0.000139
\hat{s}_k^2	65.5224	20.1638	0.939869	0.172026	0.021724	0.004789	0.00104	0.000793	0.00117	0.000369	0.000772	
\hat{y}_k	0.686846	0.26437	0.031763	0.009297	0.002875	0.001136	0.000389	0.000257	0.000104	0.000141	0.000192	0.00263
\hat{s}_k^2	65.5343	20.1651	0.939873	0.172026	0.021724	0.004789	0.00104	0.000793	0.001047	0.000323	0.000796	0.012885
\hat{b}_k	0.686846	0.951217	0.98298	0.992277	0.995151	0.996287	0.996676	0.996933	0.997037	0.997179	0.99737	1
s.e. $[\hat{y}_k]$	0.017187	0.009972	0.00225	0.00101	0.000385	0.000198	0.000103	0.0001	0.000129	0.000086	0.000199	0.001315
s.e. $[\hat{y}_k]$	0.017185	0.009972	0.00225	0.00101	0.000385	0.000198	0.000103	0.0001	0.000137	0.000092	0.000196	0.00007
s.e. $[\hat{b}_k]$	0.010369	0.002843	0.001738	0.001414	0.001361	0.001346	0.001343	0.001339	0.001333	0.00133	0.001315	0

Obrázek 15: Hodnoty vývojových parametrů použité pro při výpočtech ve stochastickém modelu BF metody

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	tail
\hat{f}_k	1.39144	1.03388	1.0096	1.00294	1.00116	1.0004	1.00026	1.0001	1.00015	1.00008	1.00264
\hat{c}_k	70.1243	1.10842	0.182758	0.022276	0.0049	0.001057	0.000807	0.001064	0.000328	0.000101	0.027302
s.e. $[\hat{f}_k]$	0.15039	0.05023	0.032515	0.019862	0.01423	0.010217	0.010075	0.01147	0.009368	0.008456	0.036677

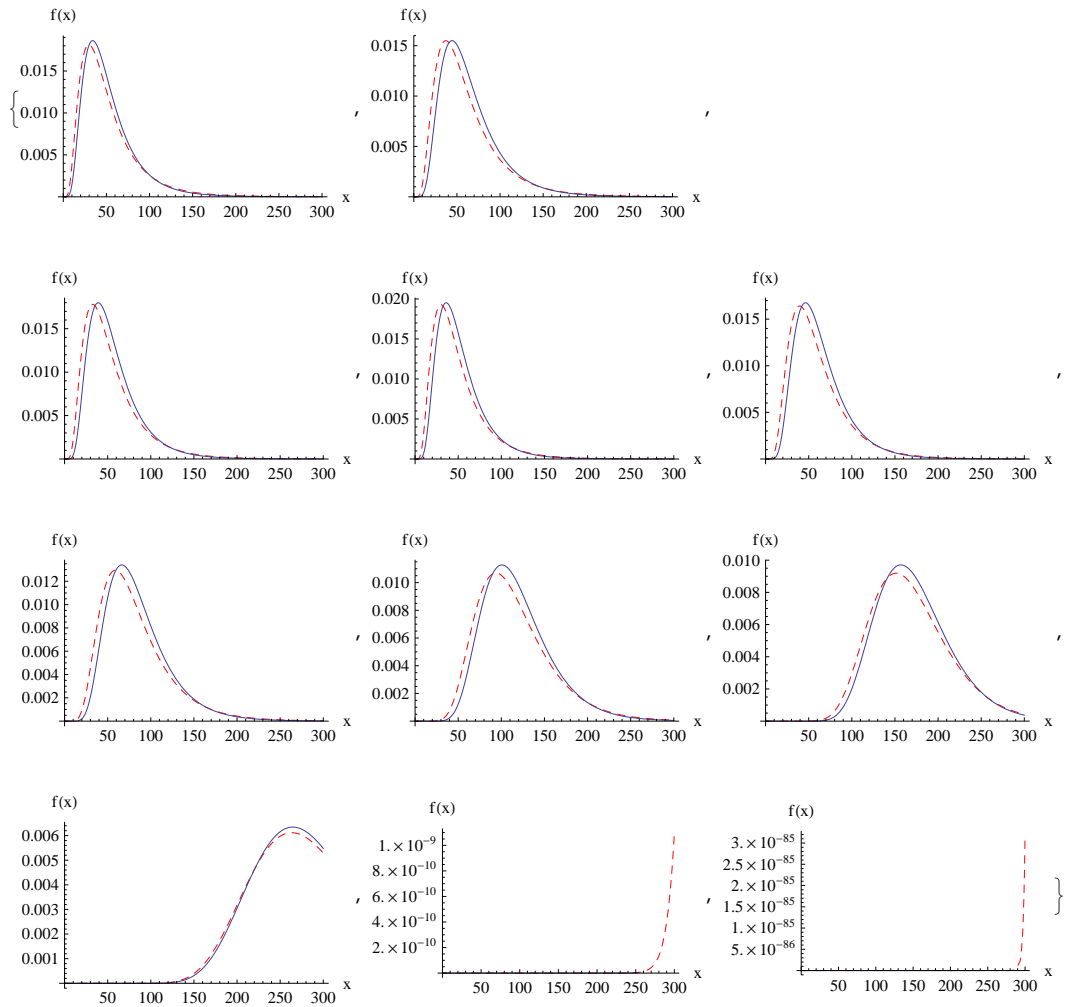
Obrázek 16: Hodnoty vývojových parametrů použité pro při výpočtech CL metodou

$i \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.51815	1.03982	1.01615	1.0045	1.00167	1.00074	1.00046	0.999831	1.00024	1.00008
2	1.45401	1.04481	1.01153	1.00314	1.00125	1.00049	1.00029	1.00021	1.00006	
3	1.47024	1.04102	1.00956	1.00387	1.00057	1.00033	0.999972	1.00025		
4	1.3982	1.03643	1.00996	1.00211	1.00153	1.00024	1.00031			
5	1.40994	1.03787	1.00699	1.00226	1.0015	1.00014				
6	1.39409	1.02514	1.0078	1.0015	1.00056					
7	1.29106	1.02788	1.00761	1.00321						
8	1.36144	1.02836	1.0078							
9	1.34733	1.02526								
10	1.31297									

Obrázek 17: Podíly $F_{i,k}$ pro CL metodu

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	celkem
$\det, \hat{R}_I^{\text{PF}}$	48.4543	57.6261	50.4272	46.6232	57.2223	77.716	110.503	165.19	281.06	831.046	5970.11	7695.98
\hat{R}_I^{PF}	48.4543	57.6261	50.4272	46.6232	57.2223	77.716	110.503	165.19	281.06	831.046	5970.11	7695.98
\hat{R}_I^{CL}	47.7232	56.7842	49.7485	46.0264	56.2913	76.7608	109.755	164.793	283.528	858.931	7160.99	8911.33
e.p. \hat{R}_I^{PF}	28.634	32.8055	28.0285	25.8798	28.8134	34.0912	37.8695	42.4398	66.3949	149.512	678.065	729.421
e.p. \hat{R}_I^{CL}	32.6501	36.5604	31.6621	29.3891	32.2455	37.6402	41.3552	45.3631	69.1102	160.962	1169.79	1219.36

Obrázek 18: Výsledky pro postup bez vyhlazení



Obrázek 19: Hustoty logaritmicko-normálního rozdělení se středními hodnotami \hat{R}_i a rozptyly $\hat{msep}(\hat{R}_i)$ plnou čarou pro BF metodu, čárkovaně pro CL metodu

Všimněme si, že v posledních dvou grafech jsou hodnoty hustoty logaritmicko-normálního rozdělení s parametry z BF metody natolik malé, že splývají s osou x .