Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jana Alexandra Nemravová

Pozorovaná a syntetická spektra dvojhvězd v optickém a ultrafialovém oboru

Astronomický ústav UK

Vedoucí diplomové práce:	prof. RNDr. Petr Harmanec DrSc.
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Astronomie a astrofyzika

Praha 2012

Děkuji svému školiteli prof. RNDr. Petru Harmancovi, DrSc. za laskavé, pečlivé a trpělivé vedení, cenné rady a pomoc při vypracovávání celé diplomové práce. Děkuji Mgr. Miroslavu Brožovi, Ph.D. za cenné rady a připomínky nejen k programu, jenž jsem v rámci práce vyvíjela. Děkuji RNDr. Pavlu Mayerovi, DrSc. za poskytnutí spekter V346 Cen a cenné rady ohledně vícenásobných hvězdných systémů a autorům spektroskopických a fotometrických pozorování za svolení k použití těchto měření v diplomové práci. Děkuji svým rodičům, bez jejichž podpory a trpělivosti by tato diplomová práce nikdy nevznikla.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Název práce: Pozorovaná a syntetická spektra dvojhvězd v optickém a ultrafialovém oboru

Autor: Jana Alexandra Nemravová

Katedra: Astronomický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Petr Harmanec, DrSc., Astronomický ústav UK

Abstrakt: Studium zákrytových dvojhvězd je dodnes nejspolehlivějším zdrojem přesných hmotností a poloměrů hvězd, protože nepotřebuje žádné kalibrace. Tyto hvězdné parametry nacházejí využití v řadě oblastí astrofyziky. První kapitola shrnuje teoretické znalosti o hvězdných spektrech a dvojhvězdách, které jsou nezbytné k vypracování praktické části práce. Tu představují druhá a třetí kapitola. V rámci praktické části diplomové práce se autorka věnovala sběru a redukci spektroskopických a fotometrických pozorování čtyřhvězdného systému ξ Tau a měření radiálních rychlostí jeho složek. Modelováním světelné křivky a křivky radiálních rychlostí odhadla hmoty a poloměry složek systému, tvar jejich drah a rozměry těchto drah. Nově byl nalezen apsidální pohyb vnější dráhy trojhvězdy. Dále autorka vyvinula program, který interpoluje v sítích syntetických hvězdných spekter, nainterpolovaná spektra srovnává s pozorovaným a metodou nejmenších čtverců hledá parametry popisující syntetické spektrum, jež se nejlépe shoduje s pozorovaným. Těmi parametry jsou: efektivní teplota $\mathrm{T_{eff}}$, logaritmus povrchového gravitační zrychlení $\log g$, promítnutá rotační rychlost $\mathrm{v_{rot}} \sin i$, relativní zářivý výkon L_r a radiální rychlost RV. Tento program autorka následně využila k měření radiálních rychlostí složek systému ξ Tau a k odhadu výše uvedených parametrů jednotlivých složek systému. Výsledky práce budou použity v plánované studii systému ξ Tau připravované mezinárodním týmem spolupracovníků.

Klíčová slova: vícenásobné soustavy – dráhové elementy – spektra

Title: Observed and synthetic spectra of binaries in the optical and ultraviolet region

Author: Jana Alexandra Nemravová

Department: Astronomical Institute CU

Supervisor: prof. RNDr. Petr Harmanec, DrSc., Astronomical Institute CU

Abstract: Eclipsing binaries are still the most reliable source of accurate stellar masses and radii, because there is no need to use any calibrations. These stellar parameters are needed in various fields of astrophysics. Theoretical background regarding stellar spectra and binaries needed for successful completion of the practical part of the thesis are summarized in the first chapter. Description of the practical part of the thesis is given in the second and third chapter. Author acquired and reduced spectroscopic and photometric observations of the quadruple-star system ξ Tau and measured radial velocities of its components. She estimated masses and radii of those components and shapes of their orbits by modelling the light curve and radial-velocity curves. Apsidal motion of the outer orbit was newly discovered. The author has also developed a program, which interpolates in the grids of synthetic spectra and fits interpolated spectra to the observed ones with the least-square method. Parameters describing the synthetic spectra, which are fitted by the program, are: the effective temperature $\mathrm{T_{eff}}$, logarithm of the surface gravitational acceleration $\log g$, projected rational velocity $\mathrm{v_{rot}} \sin i$, relative luminosity L_r and the radial velocity RV. The author used the program to measure radial velocities of the components of ξ Tau and to derive their parameters listed above. The results of the diploma thesis will become a part of the planned study of the ξ Tau system by an international team of collaborators.

Keywords: multiple systems – orbital elements – spectra

Obsah

Úvod **3**

1 Teoretická příprava **5**
1.1 Hvězdná spektra 5
1.1.1 Základní charakteristika 5
1.1.2 Tvar spektrálních čar 6
1.1.3 Rozšíření spektrálních čar vlivem rotace hvězdy 8
1.1.4 Spektrální klasifikace hvězd 9
1.2 Dvojhvězdy 10
1.2.1 Visuální dvojhvězdy 11
1.2.2 Nezákrytové spektroskopické dvojhvězdy 12
1.2.3 Zákrytové spektroskopické dvojhvězdy 13
1.2.4 Trojhvězdy a vícenásobné systémy 14
1.2.5 Měření radiálních rychlostí 15

2 Čtyřhvězda ξ Tau **19**
2.1 Úvod 19
2.2 Spektroskopie ξ Tau 21
2.2.1 Zpracovávaná data 21
2.2.2 Za spektroskopickými elementy 24
2.3 Fotometrie ξ Tau 33
2.3.1 Zpracovávaná data 33
2.3.2 Řešení světelné křivky programem PHOEBE 36
2.4 Obraz systému ξ Tau 39

3 Srovnávání syntetických spekter s pozorovanými spektry **48**
3.1 Sítě syntetických spekter 48
3.2 Program Interpol 49
3.3 První srovnání programem Interpol 51
3.4 Odhad nejistoty měřených toků ve spektru 52

Diskuse výsledků **56**
3.5 Spektroskopie ξ Tau 56
3.6 Řešení světelné křivky 58
3.7 Srovnávání syntetických a pozorovaných spekter 58

Závěr **60**

Seznam použité literatury **62**

Seznam tabulek **65**

Seznam použitých zkratek **66**

Přílohy **67**

Příloha A **68**
Redukce hvězdných spekter krok za krokem 68
Základy práce s IRAFem 69
Redukce elektronických spekter v IRAFu 70

Příloha B **76**
Brzdná síla 76
Záření harmonicky vázané částice 77

Příloha C **79**

Příloha D **81**

Úvod

Spektroskopie představuje jednu ze dvou nejdůležitějších metod zkoumání nebeských těles v astronomii. Pozorovaná spektra vícenásobných systémů hvězd v sobě nesou řadu informací nejen o pohybovém stavu jeho složek, ale také o jejich fyzikálních vlastnostech. Tato práce je především spektroskopickou studií vícenásobného hvězdného systému ξ Tau. V rámci práce se autorka seznámila s pozorováním, redukcí a interpretací spektroskopických měření. S rostoucí výpočetní silou roste i kvalita modelových hvězdných spekter a míra jejich shody se spektry pozorovanými. Autorka vyvinula program, který srovnáváním pozorovaných a syntetických spekter vícenásobných hvězdných systémů odhaduje základní fyzikální vlastnosti složek systému. V rámci práce se autorka také seznámila s pozorováním, redukcí a interpretací fotometrických pozorování. Tyto poznatky následně využila při studiu změn jasnosti systému ξ Tau.

První kapitola představuje teoretickou část práce a je rozčleněna do dvou oddílů. První oddíl je věnován především původu a tvaru spektrálních čar hvězd. Tyto znalosti jsou nezbytné především pro srovnávání syntetických a pozorovaných spekter hvězd. Tvar spektrálních čar je diskutován, protože má velký vliv na přesnost měření radiálních rychlostí hvězd. Druhý oddíl je věnován dvojhvězdám a vícenásobným systémům, přičemž je kladen důraz na informace o systému, jež jsme z fotometrických a spektroskopických pozorování schopni získat. Podrobněji se v této části autorka věnuje změnám radiálních rychlostí a jejich keplerovskému modelu. V příloze D je odvozena většina uvedených vztahů, které se tohoto modelu týkají. V závěru druhé části jsou diskutovány některé metody určené k měření radiálních rychlostí.

Druhá kapitola představuje praktickou část diplomové práce. V úvodu kapitoly jsou shrnuty dosavadní znalosti o uspořádání systému ξ Tau. V první části kapitoly jsou prezentována spektroskopická data použitá v této práci. Na sběru a redukci velké části těchto dat se autorka práce přímo podílela. Redukce elektronických hvězdných spekter krok za krokem je vyložena velmi detailně v příloze A. Měření radiálních rychlostí byla provedena dvěmi metodami. Druhá metoda měření je založena na srovnávání syntetických a pozorovaných hvězdných spekter programem, který autorka vyvíjí v rámci diplomové práce. Následují dráhová řešení těchto měření spočtená prokládáním měřených radiálních rychlostí keplerovskou křivkou a jednou z nejmodernějších metod, tzv. spektrálním disentanglingem. V druhé části jsou prezentována studovaná fotometrická měření. Na sběru a redukci části těchto dat se autorka přímo podílela. Dále jsou tato měření prokládána teoretickou závislostí. V závěru kapitoly je podán obrázek systému ξ Tau, jež nám dávají dráhová řešení spektroskopických pozorování, řešení světelné křivky a srovnávání syntetických a pozorovaných spekter.

Třetí kapitola představuje také praktickou část diplomové práce. V této kapitole je představen program na srovnávání syntetických a pozorovaných spekter hvězd, který autorka vyvinula. Ačkoliv je tento program nehotový, lze již pomocí něj odhadovat parametry efektivní teplota $\mathrm{T_{eff}}$, logaritmus gravitačního zrychlení $\log g$, promítnutá rotační rychlost $\mathrm{v_{rot}} \sin i$, relativní zářivý výkon L_r a radiální rychlost RV všech složek vícenásobných systémů. V druhé části kapitoly jsou ukázány první výsledky programu. Jsou ukázána srovnání syntetických spekter

se spektry ξ Tau a V346 Cen.

Ve čtvrté kapitole jsou shrnuty chyby, kterých jsem se při řešení práce vědomě dopustila. Jsou diskutovány možné způsoby jejich odstranění a míra vlivu těchto chyb na řešení.

1. Teoretická příprava

V této kapitole jsou uvedeny základní teoretické znalosti v oblastech hvězdných spekter a vícenásobných hvězdných systémů. Tyto znalosti jsou nezbytné pro vypracování praktické části diplomové práce.

1.1 Hvězdná spektra

1.1.1 Základní charakteristika

Spektrum hvězd se v prvním přiblížení podobá spektru absolutně černého tělesa. Absolutně černé těleso je název pro látku, která pohlcuje veškeré dopadající záření, žádné nepropouští. Intenzita vyzařování černého tělesa $B_\nu(T)$ má jediný parametr a to teplotu T. Rovnice přenosu záření je v jednorozměrném případě dána výrazem

$$\frac{dI_\nu}{dx} = j_\nu - \kappa_\nu \rho I_\nu, \tag{1.1}$$

kde I_ν je specifická intenzita záření, j_ν emisní koeficient, κ_ν absorpční koeficient a ρ hustota vyzařující/absorbující látky. V termodynamické rovnováze se intezita záření nemění ani v čase ani v prostoru a levá strana rovnice (1.1) se musí rovnat nule. Intenzita záření bude funkcí teploty T a frekvence ν. Dostaneme tak Kirchhoffův zákon

$$I_\nu(T) = B_\nu(T) = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}. \tag{1.2}$$

Tedy látka, která je ve stavu termodynamické rovnováhy, vyzařuje jako absolutně černé těleso. Z aplikace Bose-Einsteinovy statistiky na fotonový plyn plyne vztah pro specifickou intenzitu vyzařování absolutně černého tělesa, který se také nazývá Planckova funkce

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1}, \tag{1.3}$$

kde h je Planckova konstanta, k Boltzmannova konstanta a c rychlost světla. Záření černého tělesa nejvíce odpovídá spojité záření hvězdy, které k nám přichází z opticky tlustého dna fotosféry hvězdy. Ani to ovšem není v dokonalé termodynamické rovnováze, protože pokud by každá vrstva hvězdy měla být v termodynamické rovnováze, muselo by množství energie procházející tou vrstvou dovnitř hvězdy být stejné jako množství energie jdoucí danou vrstvou ven z hvězdy. Hvězda v dokonalé termodynamické rovnováze by tedy nezářila. Odchylka hvězdné látky od lokální termodynamické rovnováhy je na dnu fotosféry nejmenší a směrem k vnějšímu okraji hvězdné atmosféry narůstá. Největší odchylku hvězdného spektra od spektra černého tělesa představují spektrální čáry. Ty vznikají při vázaně-vázaných přechodech v atmosféře hvězdy. To zdali se bude jednat o čáry emisní nebo absorpční závisí především na hustotě atmosféry. V hustých částech atmosféry hvězdy obvykle převládá srážková deexcitace a čáry

jsou tedy absorpční. V řídkých vnějších vrstvách hvězdné atmosféry je střední volná dráha částice dostatečně velká, aby mohlo ve větší míře mezi srážkami částic docházet k zářivé deexcitaci.

Intenzita spektrálních čar je dána především teplotou. Obsazení energetických hladin atomů je dáno Boltzmannovou rovnicí

$$N_i = g_i \exp\left(-\frac{E_i - \mu}{kT}\right), \tag{1.4}$$

kde N je počet částic na i energetické hladině, g_i degenerace této hladiny, E_i energie stavu a μ chemický potenciál. Dle rovnice (1.4) počet atomů ve vyšších energetických stavech poroste s teplotou T. Se zvyšující se teplotou roste také počet ionizovaných atomů. Počet atomů v $i+1$ stupni ionizace N_{i+1} je dán Sahovou rovnicí

$$N_{i+1} = 2\frac{N_i}{N_\mathrm{e}}\left(\frac{2\pi m_\mathrm{e} kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Z_{i+1}}{Z_i} \exp\left(-\frac{\chi}{kT}\right), \tag{1.5}$$

kde N_e je počet volných elektronů v plasmatu, m_e hmotnost elektronu, N_i počet atomů v i stupni ionizace, Z_i a Z_{i+1} partiční sumy příslušných stupňů ionizace a χ je ionizační energie z i do $i+1$ stavu. Dále má na intenzitu spektrálních čar vliv i metalicita hvězdné atmosféry. Oproti teplotě a hustotě se ovšem jedná o vliv druhého řádu. Boltzmannova a Sahova rovnice popisují stav termodynamické rovnováhy. Hlavně řídké vnější části hvězdné atmosféry se v tomto stavu nemusejí nacházet.

1.1.2 Tvar spektrálních čar

Tvar spektrální čáry je ovlivněn mikroskopickými a makroskopickými vlivy. Přirozená (tj. žádným efektem neovlivněná) spektrální čára má Lorentzův profil (1.6) a její šířka je dána Heisenbergovou relací neurčitosti:

$$L(\lambda|\Gamma, a, \lambda_0) = \frac{a\Gamma}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \Gamma^2} \tag{1.6}$$

Odvození přirozeného tvaru spektrální čáry nástroji klasické fyziky je ukázáno v příloze B. Řada jevů způsobuje deformace spektrálních čar. Těmito jevy jsou:

1. Interakce atomu s okolními atomy vede k mírnému posunu jeho energetických hladin a rozšíření spektrální čáry. Platí, že čím větší je tlak na povrchu hvězdy, tím je hvězdná látka hustší a tento efekt výraznější a vede na Lorentzův profil spektrální čáry.

2. Atomy plasmatu jsou v neustálém tepelném pohybu. V klidové soustavě atomu se tedy jednotlivé fotony jeví dopplerovsky posunuté. Rozdělení rychlostí jednotlivých částic je dáno Maxwellovým-Boltzmannovým rozdělením, a proto efekt vede na Gaussův profil spektrální čáry (1.7).

$$G(\lambda|\lambda_0, \sigma, a) = a \exp\left(-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1.7}$$

3. Jevy, které se týkají celé hvězdy, jako jsou rotace a pulsace rovněž způsobují deformace spektrálních čar. Tyto deformace již není možné vystihnout jednoduchými funkcemi.

4. Elektrická pole vedou na štěpení spektrálních čar Starkovým efektem.

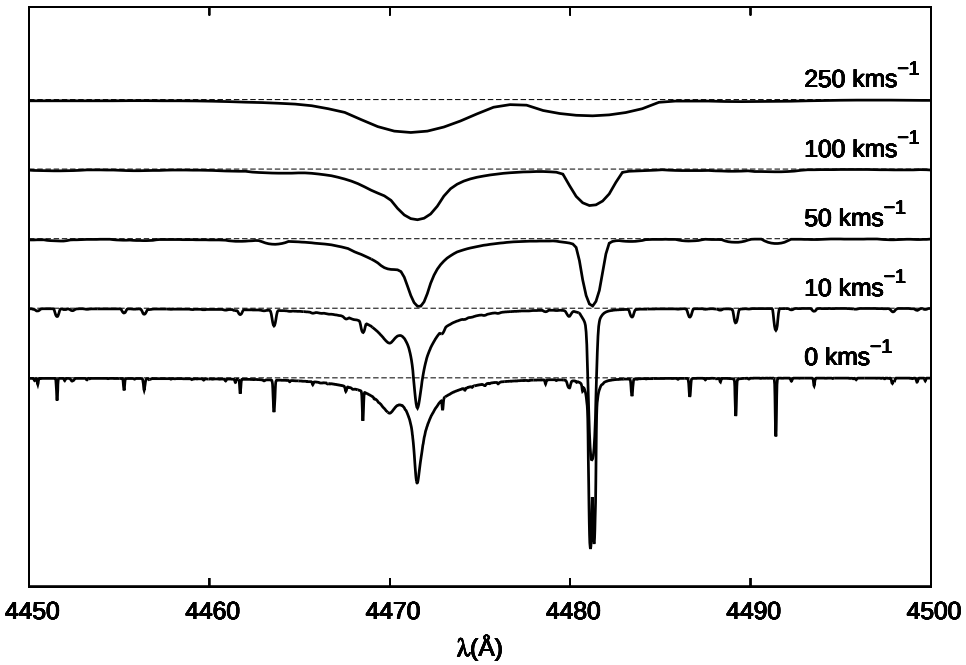
5. Magnetická pole vedou na štěpení spektrálních čar Zeemanovým efektem.

6. Fotony s vlnovými délkami odpovídajícími centru spektrální čáry budou absorbovány s větší pravděpodobností než ty, jejichž vlnová délka odpovídá křídlům spektrální čáry. Pravděpodobnost opakované absorpce fotonu v centru čáry je tak větší než v jejích křídlech.

Spektrální čáry hvězd jsou prvními dvěma efekty deformovány vždy, protože působí globálně a mají mikroskopický původ. Díky tomu se hvězdné spektrální čáry velmi často v prvním přiblížení modelují konvolucí Lorentzovy a Gaussovy funkce, jíž se říká Voigtova funkce

$$V(\lambda|a,b,\sigma,\Gamma,\lambda_0) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(\lambda' - \lambda_0)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{b\Gamma}{\Gamma^2 + (\lambda - \lambda' - \lambda_0)^2} d\lambda'. \quad (1.8)$$

V praxi ovšem největší deformaci spektrálních čar způsobuje to, že různé spektrální čáry mohou mít velmi podobné laboratorní vlnové délky a ve spektru se díky tomu navzájem překrývají (tzv. blendují).



Obrázek 1.1: Ukázka blendování spektrálních čar v okolí čar He I 4471 Å a Mg II 4481 Å. Spektra byla přepočítána pro několik hodnot promítnuté rotační rychlosti $v_{rot} \sin i$. Její hodnota je uvedena po pravé straně obrázku. Pro přehlednost jsou spektra posunuta v relativní intenzitě. Hladina spojitého záření hvězdy je vyznačena čárkovanou čarou.

1.1.3 Rozšíření spektrálních čar vlivem rotace hvězdy

Hvězdy rotují. U řady hvězd pozorujeme velmi rychlou rotaci. V případě některých Be hvězd se pozoruje rotační rychlost velmi blízká rychlosti kritické, tj. rychlosti při níž se na hvězdném rovníku vyrovnává velikost gravitačního a odstředivého zrychlení.

Vlivem Dopplerova efektu, který je daný vztahem (1.9), je spektrální čára se středem o vlnové délce λ_0 vznikající v elementu hvězdy, který se vůči pozorovateli pohybuje rychlostí RV, posunuta ve vlnových délkách o $\Delta\lambda$.

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{RV}{c} \tag{1.9}$$

Rozdělení radiální rychlosti po hvězdném disku je dáno: 1) rozdělením vektoru úhlové frekvence $\omega(\theta)$, kde θ hvězdná šířka, 2) sklonem rotační osy hvězdy i vůči pozorovateli. Vliv 1) se často zanedbává a uvažuje se, že hvězda rotuje jako tuhé těleso. Jednotlivé elementy hvězdného disku není možné pozorovat, výjimkami jsou Slunce a blízké hvězd, jejichž disky byly rozlišeny. Musíme zkoumat vliv celého hvězdného disku na profil spektrální čáry a tedy integrovat přes celý hvězdný disk. Abychom získali, co nejpřesnější výsledek je třeba vzít v potaz to, že hvězdný disk je nestejnoměrně jasný. To je způsobeno následujícími vlivy:

1. Záření přicházející z okraje hvězdného disku prochází vyšším sloupcem atmosféry, než záření přícházející z jeho centra. Díky tomu se okraje hvězdy zdají tmavší, než její střed. Proto také mluvíme o tzv. okrajovém ztemnění. Namísto přesného vystižení míry extinkce v závislosti na optické tloušťce řešením rovnice přenosu záření, se používají empirické vztahy. První takový vztah navrhl Milne (1921). Autor uvažoval, že jasnost disku klesá lineárně dle vztahu

$$I_\lambda(\theta) = I_\lambda(0)(1 - u_\lambda(1 - \cos(\theta)), \tag{1.10}$$

   kde I je intenzita záření, θ úhel, který svírá zorný paprsek pozorovatele a normála k povrchu hvězdy a u_λ koeficient okrajového ztemnění. V současné době se používají složitější, nelineární vztahy, které mohou obsahovat více koeficientů. Velikost těchto koeficientů se počítá pomocí modelů hvězdných atmosfér a tabelují se.

2. Rotace způsobuje, že velikost tíhového zrychlení g není po povrchu hvězdy konstantní. Mění se v závislosti na hvězdné šířce. Rotace vstupuje do rovnic hvězdné stavby skrze rovnici hydrostatické rovnováhy (1.11), působí proti gravitační síle a snižuje tak efektivní gravitaci v dané oblasti. Rovnice hydrostatické rovnováhy pro rotující hvězdu je dána:

$$\frac{GM_\mathrm{R}\rho}{R^2} = -\frac{dP}{dR} - \nabla\Psi_\mathrm{rot}, \tag{1.11}$$

   kde G je gravitační konstanta, P tlak, M_R hmotnost hvězdy o poloměru R a Ψ_rot odstředivý potenciál. V hrubém přiblížení můžeme hvězdnou látku považovat za ideální plyn, pro nějž má stavová rovnice tvar

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_\mathrm{u}}, \tag{1.12}$$

kde k je Boltzmannova konstanta, T teplota plynu, ρ hustota plynu, μ střední molekulová hmostnost a m_{u} atomová hmotnostní jednotka. Z rovnice (1.11) vyplývá, že v oblastech hvězdy, které rychle rotují, bude menší gradient tlaku. Z rovnice (1.12) vyplývá, že v těchto oblastech bude nutně i menší gradient hustoty. Z rovnice pro přenos zářivé energie (1.13) potom plyne, že v oblastech hvězdy, které rychle rotují, je menší gradient teploty T (v absolutní hodnotě větší). Teplota v těchto oblastech je tedy nižší. Rovnice pro přenos zářivé energie má tvar

$$\frac{dT}{dR} = -\frac{3\rho\kappa L_{\mathrm{R}}}{16\pi acR^2T^3}, \tag{1.13}$$

kde κ je opacita, L_{R} zářivý výkon hvězdy na daném poloměru R, a je konstanta hustoty záření, která má vztah k Stefanově-Boltzmannově konstantě $\sigma_{\mathrm{SB}} = ac/4$ a c rychlost světla. Zářivý výkon L_{S} černého tělesa o povrchu S a teplotě T je dán vztahem

$$L_{\mathrm{S}} = S\sigma_{SB}T^4 \tag{1.14}$$

Jestliže je v oblastech, které rychle rotují, nižší teplota, potom z rovnice pro zářivý výkon (1.14) plyne, že příspěvek k celkovému zářivému výkonu hvězdy od těchto oblastí je menší.

3. Existují další efekty, které ovlivňují jasnost povrchu hvězdy. Patří sem hvězdné pulsace, hvězdné skvrny, erupce, efekty vznikající interakcí s druhou složkou dvojhvězdy, případně přechodem planet přes hvězdný disk.

S prvníma dvěma efekty se setkáváme u všech hvězd. Zbylé závisí na vlastnostech jednotlivých soustav. V obrázku 1.1 je ukázáno okolí spektrální čar He I 4471 Å a Mg II 4481 Å modelových hvězdných spekter ze sítě BSTAR Lanz a Hubený (2007). Jedná se o modelové spektrum hvězdy o efektivní teplotě $T_{\mathrm{eff}} = 15000\,\mathrm{K}$, logaritmu gravitačního zrychlení $\log g = 4.5\,[\mathrm{cgs}]$ a sluneční metalicitě $Z = 0.02$. Spektrum je přepočítáno pro několik hodnot promítnuté rotační rychlosti $\mathrm{v}_{\mathrm{rot}} \sin i$ programem ROTINS (Hubený 2012c). Všechna spektra jsou normalizovaná vůči hladině spojitého záření hvězdy.

1.1.4 Spektrální klasifikace hvězd

Moderní spektrální klasifikace (tzv. harvardská klasifikace) je založena na identifikaci význačných čar v hvězdném spektru. V současné době rozlišujeme spektrální typy (od horkých po chladné typy) je OBAFGKMLT. Řazení v závislosti na efektivní teplotě není náhodné, protože efektivní teplotou je dán průběh spektra a výskyt spektrálních čar viz. vztahy (1.3), (1.4) a (1.5). Tyto spektrální typy dále dělíme na podtypy 0-9 (opět od horkých po chladné). Je zvykem nazývat horké podtypy „rané“ a chladné „pozdní“. Spektrální typ se poté doplní o luminositní třídu I-VII na základě tvaru spektrálních čar. Například K1.5 III je rudý obr (hvězda chladnější než Slunce). Tento spektrální typ má např. α Boo. V této práci se zabýváme studiem vícenásobného systému ξ Tau, přesněji jeho trojnásobným podsystémem, jehož dvě složky jsou hvězdy spektrální třídy A a jedna složka je hvězda spektrální třídy B. Tyto dvě spektrální třídy lze stručně charakterizovat:

- **Hvězdy spektrální třídy B:**
  Do spektrální třídy B spadají hvězdy o efektivních teplotách $T_{\mathrm{eff}} \epsilon$ [9500 : 30000]. V případě hvězd hlavní posloupnosti spadají do této třídy hvězdy o hmotnostech $m \epsilon$ [2.2 : 15] $M_{\odot}$. Typické jsou pro tuto třídu silné čáry vodíku a neutrálního helia He I. U těchto hvězd je často pozorovaná velmi rychlá rotace (Platí to i pro složku ξ Tau typu B.).

- **Hvězdy spektrální třídy A:**
  Do spektrální třídy A spadají hvězdy o efektivních teplotách $T_{\mathrm{eff}} \epsilon$ [7000 : 9500]. V případě hvězd hlavní posloupnost spadají do této třídy hvězdy o hmotnostech $m \epsilon$ [1.5 : 2.2] $M_{\odot}$. Ve spektru dominují velmi silné čáry vodíku. Čáry neutrálního helia He I zcela chybí. Sílí čáry ionizovaných kovů (Fe II, Cr II, Ti II, ...).

1.2 Dvojhvězdy

Vícenásobným hvězdným systémem rozumíme soustavu dvou a více gravitačně vázaných hvězd. Nejjednodušším případem takového systému jsou dvojhvězdy. Optickými dvojhvězdami tj. těmi, které mají v projekci na nebeskou sféru malou úhlovou vzdálenost, ale nacházejí se ve zcela různých vzdálenostech od nás a navzájem se gravitačně neovlivňují, se v této práci zabývat nebudeme. Studium dvojhvězd je významné z několika důvodů.

1. S užitím relativně jednoduchých fyzikálních principů (Keplerových zákonů a geometrie) je možné určit hmotnosti, poloměry a vzdálenosti složek dvojhvězdy.

2. Takto zvážený a změřený systém lze použít k testování modelů hvězdného vývoje, protože je velmi pravděpodobné, že obě hvězdy vznikly současně. Podmínkou je, aby byl systém oddělený, a aby v něm nedošlo k přetoku hmoty mezi složkami.

3. Statistika výskytu dvojhvězd je důležitá pro studium složitějších hvězdných soustav (hvězdokup), protože je třeba uvažovat vazebnou energii dvojhvězd.

4. Studium dvojhvězd s výstřednou drahou nám umožňuje nahlédnout do nitra složek dvojhvězdy a testovat modely hvězdné stavby.

5. Vzájemná interakce mezi složkami dvojhvězdy může zcela změnit jejich vývoj.

6. Hlubší studium neobvyklých hvězdných tříd nebo jejich vývojových stádií je umožněno v případě, že se nacházejí ve vícenásobném systému. Stává se, že tyto hvězdy maskují svůj pohyb v rámci vícenásobného systému. Často tomu tak je u Be hvězd, kde bývá dvojhvězdný charakter systému maskován pohybem cirkumstelární hmoty.

Dvojhvězdy rozlišujeme na základě toho, jak je můžeme pozorovat. Jestliže se nám pozorovací technikou (dalekohledem, interferometrem, ..) podaří rozlišit složky dvojhvězdy potom mluvíme o visuální dvojhvězdě. Většinu dvojhvězd není

možné pozorovací technikou rozlišit a jako dvojhvězdy je identifikujeme na základě spektroskopických (a v případě zákrytových a elipsoidálních proměnných i fotometrických) pozorování. Vlivem pohybu složek dvojhvězdy kolem společného těžiště u nich pozorujeme periodické změny radiálních rychlostí, které určujeme pomocí vztahu (1.9) z posunu spektrálních čar. V takovém případě mluvíme o spektroskopické dvojhvězdě. Jestliže oběžná rovina dvojhvězdy leží v oběžné rovině Země, pozorujeme u těchto systémů periodické změny jasnosti dané vzájemnými zákryty jedné složky dvojhvězdy druhou. V těchto případech mluvíme o zákrytové dvojhvězdě.

1.2.1 Visuální dvojhvězdy

O visuální dvojhvězdě mluvíme tehdy, je-li možné pozorovací technikou rozlišit její jednotlivé složky. Pro úhlové rozlišení dalekohledu $\Delta\Theta$ platí Rayleighovo kritérium

$$\Delta\Theta = 1.22\frac{\lambda}{D}, \tag{1.15}$$

kde λ je vlnová délka detekovaného záření a D průměr apertury dalekohledu. To odpovídá situaci, kdy maximum difrakčního obrazce první složky spadá do prvního minima difrakčního obrazce druhé složky dvojhvězdy. Tohoto rozlišení pozemské teleskopy nedosahují, protože obraz hvězd je rozmytý seeingem. Vlivem turbulencí zemské atmosféry se hvězda na nebeské sféře nezobrazí do jednoho bodu, ale rozmyje se do prostorového úhlu, jehož velikost je závislá na vlnové délce (ve viditelné oblasti elektromagnetického záření je tento úhel roven přibližně jedné úhlové vteřině). Ve viditelné oblasti elektromagnetického záření dochází k variaci sloupcové hustoty podél zorného paprsku s frekvencí $f \approx 20\,\mathrm{Hz}$. Vliv seeingu na obraz hvězdy je možné odstranit za pomocí adaptivní optiky nebo metodami skvrnkové interferometrie. Objektů, které je možné rozlišit přímo, je poměrně málo, protože úhlové rozlišení i těch největších pozemských dalekohledů bude $\geq 10\,\mathrm{mas}$.

Lepších výsledků dosahuje interferometrie. Rozlišení interferometru $\Delta\Theta$ je dáno výrazem

$$\Delta\Theta = \frac{\lambda}{2b}, \tag{1.16}$$

kde b je délka základny interferometru a λ vlnová délka pozorovaného záření. Rozlišení, které je dané vztahem (1.16), dosahujeme pouze podél průmětu základny interferometru na nebeskou sféru. Protože je většina astronomických zdrojů dvourozměrných, je nezbytné objekt pozorovat v několika uspořádáních interferometru, nebo použít více dalekohledů. Počet základen promítnutých na nebeskou sféru bude $N(N-1)/2$, kde N je počet dalekohledů zapojených v interferometru. Změny atmosféry způsobují fázové posuny příchozí vlnoplochy, které mohou zcela zničit interferenční obrazec. Tomu se lze vyhnout použitím aspoň tří dalekohledů a měřením tzv. closure phase.

Jestliže interferometrem, nebo dalekohledem rozlišíme složky dvojhvězdy, můžeme přímo změřit úhlovou velikost hlavní poloosy a [mas], výstřednost e, periodu P, sklon i a argument pericentra ω její oběžné dráhy. V případě interferometrických pozorování je dokonce možné rozlišit disky složek dvojhvězdy a změřit jejich

úhlové poloměry $R_{1,2}$[mas]. Pakliže měření doplníme o velikost paralaxy systému p, nebo velikost hlavní poloosy $a \sin i$ z řešení křivky radiálních rychlostí, můžeme určit velikost poloměrů jednotlivých složek dvojhvězdy $R_{1,2}[\mathrm{R}_\odot]$.

1.2.2 Nezákrytové spektroskopické dvojhvězdy

O spektroskopické dvojhvězdě mluvíme, jestliže u ní pozorujeme periodický dopplerovský posun jejích spektrálních čar dle vztahu (1.9), který je způsobený pohybem složek dvojhvězdy kolem společného těžiště. Dvojhvězdu označíme jako nezákrytovou, jestliže v žádné fázi jejího dráhového pohybu nedochází vůči pozorovateli k zákrytu jedné složky druhou. Pro řadu dvojhvězd to také znamená, že se nemění celkový zářivý tok od soustavy (není to ovšem pravidlem). Závislost radiální rychlosti $RV_j(t)$ na čase t (případně orbitální fázi) nazýváme křivkou radiálních rychlostí. U velkého množství dvojhvězd nám, k popsání velikosti průvodiče v těžišťové soustavě r_j (1.17) a radiální rychlosti (1.18) RV_j j složky dvojhvězdy stačí keplerovský model:

$$r_j = \frac{a_j\,(1 - e^2)}{1 + e\cos v}, \tag{1.17}$$

$$RV_j(t) = \gamma + (3 - 2j)K_j(\cos(\omega_j + v(t)) + e\cos\omega_j), \tag{1.18}$$

kde γ je radiální rychlost těžiště soustavy vůči pozorovateli, K_j je poloviční amplituda křivky radiálních rychlostí, ω_j argument pericentra dráhy, $v(t)$ pravá anomálie, e výstřednost a a velikost hlavní poloosy elipsy. Indexem j je určena složka dvojhvězdy ($j = 1$–primár, $j = 2$–sekundár). Vztah (1.18) je odvozen z Keplerových zákonů v příloze D. Vztah mezi pravou a excentrickou anomálií $E(t)$ je dán výrazem

$$\tan\frac{v(t)}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\tan\frac{E(t)}{2}, \tag{1.19}$$

Závislost excentrické anomálie na čase popisuje Keplerova rovnice

$$E(t) - e\sin(E) = \frac{2\pi}{P}\,(t - T_0)\,, \tag{1.20}$$

kde P je siderická oběžná doba dvojhvězdy a T_0 je okamžik průchodu hvězdy periastrem. Dráhové elementy γ, K_j, ω, e, P a T_0 určíme přímo z měřených radiálních rychlostí. Z nich je poté možné určit velikost hlavní poloosy a až na sinus sklonu dráhy i z druhého Keplerova zákona

$$a_j \sin i = \frac{P}{2\pi}K_j\sqrt{1 - e^2}, \tag{1.21}$$

Vztah (1.21) je odvozen z Keplerových zákonů v příloze D. Množství informací, které jsme schopni vytěžit z měření radiálních rychlostí závisí na tom, zdali ve spektru dvojhvězdy pozorujeme spektrální čáry pouze jedné, nebo obou jejích složek.

Pozorujeme spektrum pouze jedné složky

U řady systémů panuje značný nepoměr v jasnosti sekundáru (složka s menší hmotností) a primáru (složka s větší hmotností). Může se tedy stát, že primární složka svým jasem zcela přesvítí složku sekundární (existují ovšem i případy, kdy je hmotnější složka dvojhvězdy méně jasná) a my ve spektru nepozorujeme její spektrální čáry. Můžeme tedy měřit radiální rychlosti pouze primární složky systému. V takovém případě jsme schopni určit pouze funkci hmoty $f_j(M)$ danou vztahem

$$f_j(M) = \frac{q^3}{(1+q)^2} M_j \sin^3 i = \frac{1}{2\pi G} K_j^3 \left(1 - e^2\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{1.22}$$

kde q značí poměr hmot $q = M_{3-j}/M_j$. Pakliže nejsme schopni odhadnout hmotu pozorované složky, nejsme schopni určit ani hmotový poměr q. Vztah (1.22) je odvozen z Keplerových zákonů v příloze D.

Pozorujeme spektrum obou složek

V případě, že rozlišíme spektrum obou složek dvojhvězdy, je možné určit hmotový poměr q

$$q = \frac{K_1}{K_2} = \frac{M_2}{M_1}. \tag{1.23}$$

Díky tomu je možné určit velikost $M_j \sin^3 i$ danou vztahem

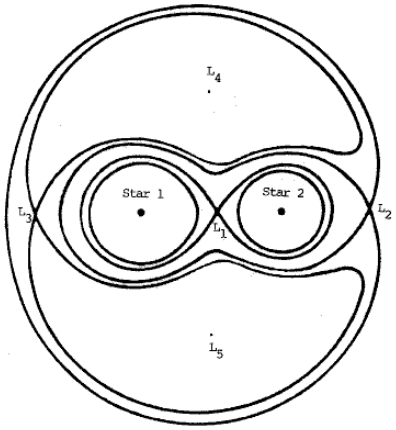
$$M_j \sin^3 i = \frac{1}{2\pi G} K_{3-j} \left(K_1 + K_2\right)^2 P \left(1 - e^2\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{1.24}$$

Odvození vztahu (1.24) je uvedeno v příloze D.

1.2.3 Zákrytové spektroskopické dvojhvězdy

O zákrytové dvojhvězdě mluvíme tehdy když z hlediska pozemského pozorovatele dochází v určitých fázích oběžné periody k zákrytu kotouče jedné hvězdy kotoučem hvězdy druhé. Při zákrytu dochází k poklesu jasnosti celého systému. Závislost $m = m(t)$, kde m je zdánlivá jasnost a t čas, nazýváme světelná křivka. Modelováním světelné křivky jsme schopni určit sklon dráhy i a relativní poloměry obou složek vzhledem k hlavní poloose a. Tvar světelné křivky je dán rozdělením jasu po povrchu a tvarem složek dvojhvězdy a měrou vzájemného zakrývání složek. Na základě míry vzájemného zakrývání rozlišujeme zákryty úplné, při kterých je v určité fázi oběžného pohybu jedna ze složek zcela zakryta složkou druhou, a zákryty částečné, při kterých nikdy nedochází k úplnému zákrytu ani jedné ze složek dvojhvězdy. Jevy způsobující nestejnoměrné rozdělení jasu po povrchu byly diskutovány v předchozí sekci. Zbývá diskutovat tvar složek dvojhvězdy. I nerotující složky dvojhvězdy nejsou dokonale sférické, mají tvar Rocheových ekvipotenciál. Jejich tvar lze odvodit z redukovaného kruhového problému tří těles.

Hvězdy jsou velmi centralizované. Jejich vnější vrstvy a především hvězdná atmosféra tvoří zanedbatelný zlomek celkové hmotnosti hvězdy. Díky tomu můžeme centra hvězd redukovat na hmotné body a hmotnost jejich vnějších vrstev



Obrázek 1.2: Tvar Rocheových ekvipotenciálních křivek v rovině oběhu dvojhvězdy. Extremální Lagrangeovy body jsou vyznačeny značkami $L_1 - L_5$. Obrázek převzat z URL: http://www.wallentinsen.com/binary/

zanedbat. Obě složky dvojhvězdy se pohybují po keplerovské dráze, protože třetí těleso tj. vnější hvězdné obálky mají v naší úvaze nulovou hmotnost a tedy pohyb obou složek dvojhvězdy nijak neovlivní. Redukovaný kruhový problém tří těles má právě jeden integrál pohybu tzv. Jacobiho integrál daný vztahem

$$C = n^2\left(x^2 + y^2\right) - U(x, y, z) - \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right), \tag{1.25}$$

kde (x, y, z) jsou souřadnice elementu obálky některé z hvězd v soustavě spojené s těžištěm dvojhvězdy, která se spoluotáčí s dvojhvězdou úhlovou rychlostí n, $U(x, y, z)$ je gravitační potenciál. Rocheovy ekvipotenciální křivky (nebo též Hillovy sféry nulové rychlosti) jsou dány vztahem (1.25) pro v korotující soustavě nepohybující se třetí těleso $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$. To je pro vnější vrstvy hvězd splněno (s výjimkou hvězdného větru). Tvar Rocheových ekvipotenciálních křivek je ukázán v obrázku 1.2. Ekvipotenciální křivce, u které se lalok kolem primární složky a lalok kolem sekundární křivky dotýkají právě v jednom bodě se nazývá mezní, též Rocheova, nebo kritická ekvipotenciála. Pakliže vnější obálky hvězdy svým poloměrem přesáhnou tuto mez, může hmota volně přetékat na druhou složku dvojhvězdy. Jestliže 1) ani jedna složka dvojhvězdy nevyplňuje svůj lalok mezní ekvipotenciály, mluvíme o oddělené soustavě, 2) právě jedna složka vyplňuje svůj lalok mezní ekvipotenciály, mluvíme o polodotykové soustavě, 3) obě složky dvojhvězdy vyplňují své laloky mezní ekvipotenciály, mluvíme o dotykové soustavě.

Pakliže řešení světelné křivky doplníme o řešení křivky radiálních rychlostí můžeme určit hmotnosti $M_{1,2}$ a poloměry $R_{1,2}$ složek dvojhvězdy. Pouze v případě, že je dvojhvězda zákrytová jsme schopni systém změřit a zvážit jen na základě jeho spektroskopických a fotometrických pozorování.

1.2.4 Trojhvězdy a vícenásobné systémy

Podívejme se, jak je třeba upravit předešlé rovnice tak, abychom mohli modelovat změny radiálních rychlostí hvězd v trojhvězdě (zobecnění na vícenásobné

systémy by bylo analogické). Nebudeme se věnovat zákrytovým trojhvězdám tj. takovým u nichž se v určité fázích oběžné dráhy zakrývají všechny tři složky. Takové systémy jsou vzácné a žádnému takovému systému se v této práci nevěnujeme. Na rozdíl od problému dvou těles neexistuje analytické řešení problému tří a více těles. Modelovat pohyb obecného systému by bylo mimořádně komplikované. Naštěstí jsou stabilní vícenásobné systémy uspořádány tzv. hierarchicky. Hierarchicky uspořádaná trojhvězda je tvořená těsnějším párem hvězd, které obíhájí kolem společného těžiště. Tato dvojhvězda obíhá kolem společného těžiště s dostatečně vzdálenou třetí složkou. O dostatečné vzdálenosti mluvíme tehdy, dá-li se na vnitřní pohyb dvojhvězdy dívat jako na problém dvou těles a stejně tak i na pohyb dvojhvězdy s vzdálenější třetí složkou kolem společného těžiště. Tedy „vnější těleso“ musí mít zanedbatelný vliv na „vnitřní“ pohyb podsoustav. V takovém případě je pohyb každé složky systému dán složením příslušného počtu pohybů po keplerovské dráze. Rovnice (1.18) přejde pro trojhvězdný systém do tvaru

$$\begin{aligned} RV_{1,2} &= K_{1,2}\left[\cos(v+\omega)+e\cos\omega\right]+ \\ &\quad K_{1+2}\left[\cos(v'+\omega')+e'\cos\omega'\right]+\gamma, \\ RV_3 &= K_3\left[\cos(v'+\omega')+e'\omega'\right]+\gamma. \end{aligned} \tag{1.26}$$

kde indexy jedna a dva označují složky těsné dvojhvězdy a tři vzdálenější složku trojhvězdy. Čárkované veličiny popisují pohyb dvojhvězdy a třetí složky, nečárkované popisují pohyb složek těsnější dvojhvězdy. K_{1+2} označuje poloviční amplitudu křivky radiálních rychlostí těžiště dvojhvězdy při pohybu s třetí složkou kolem společného těžiště. Musíme dávat pozor na efekt rozdílné dráhy světla tzv. light–time efekt, který může hrát roli především je-li oběžná perioda velmi dlouhá, nebo se změny, které chceme v systému pozorovat, odehrávají velmi rychle. Light–time efekt je možné popsat vztahem

$$\Delta t = \frac{P'K_{1+2}}{2\pi c}\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\sin\left(v'+\omega'\right)}{1+e\cos v'}. \tag{1.27}$$

Velikost light–time efektu je třeba zahrnout při řešení Keplerovy rovnice (1.20) do střední anomálie M dle vztahu

$$M = \frac{2\pi}{P}\left(t-T-\Delta t\right). \tag{1.28}$$

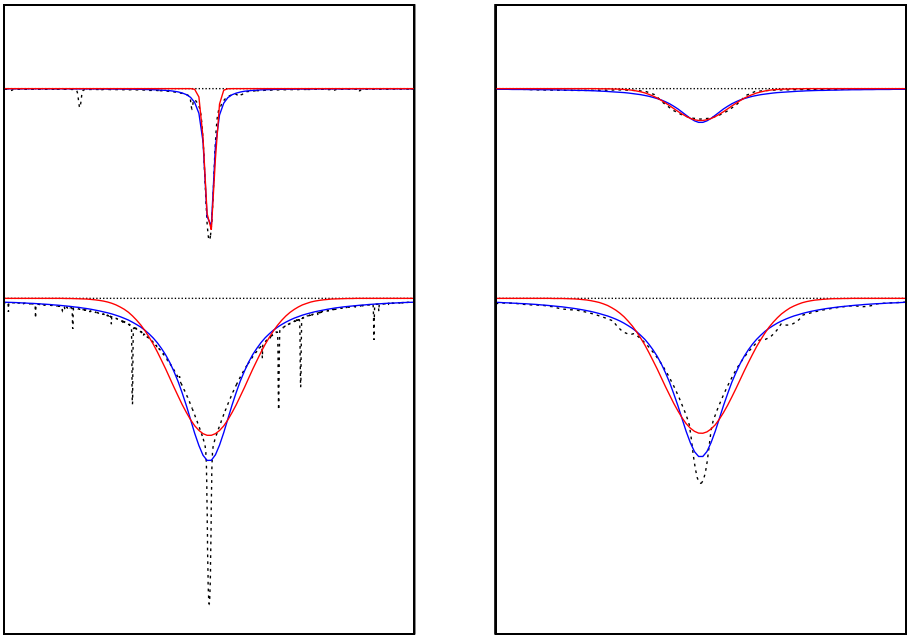
Je třeba si uvědomit, že interakce mezi složkami může způsobovat sekulární změny dráhových elementů. U dobře oddělených systémů takové změny probíhají velmi pomalu, často déle než je časové rozpětí veškerých pozorování systému.

1.2.5 Měření radiálních rychlostí

Pouze studiem křivky radiálních rychlostí není možné přesně zvážit a změřit studovaný systém. Stále ovšem její studium poskytuje nejvíce informací o dráhových elementech dvojhvězdy (viz vztahy 1.18, 1.19, 1.20, 1.21). Existuje řada metod, jak modelovat spektrální čáry a měřit na nich radiální rychlosti.

Modelování elementárními funkcemi

Spektrální čáru modelujeme vhodnou funkcí. Vhodnými funkcemi jsou, jak vyplývá z první sekce kapitoly, Lorenzova funkce (1.6), Gaussova funkce (1.7) a Voigtova funkce (1.8). V obrázku (1.3) je ukázáno proložení spektrálních čar Hα a He I 6678 Å syntetického spektra hvězdy o $T_{\rm eff} = 20000$ K, $\log g = 4.5$ [cgs] a dvojnásobku sluneční metalicity $Z = 2Z_\odot$ Gaussovou a Lorenzovou funkcí. Výhodou tohoto způsobu měření je jeho rychlost a zároveň dostupnost programového vybavení k jeho provedení. Hlavními nevýhodami způsobu měření jsou: 1) Spektrální čáry se tvarem od elementárních funkcí odchylují. 2) Spektrální čáry se blendují s jinými. Blendování spektrálních čar je umocněno pakliže hvězda rychle rotuje (viz obrázek 1.1).



Obrázek 1.3: Proložení syntetického hvězdného spektra (čárkovanou čarou) Gaussovou funkcí (červená čára) a Lorenzovou funkcí (modrá čára). Prokládané spektrální čáry jsou He I 6678 Å (horní panel) a Hα (spodní panel). Promítnutá rotační rychlost $\mathrm{v_{rot}} \sin i$ zobrazených profilů je $0.0\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ (levý panel) a $100.0\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ (pravý panel). Úroveň hvězdného kontinua je vyznačena tečkovanou čarou.

Srovnávání přímého a zrcadlově převráceného profilu spektrální čáry

Neblendované spektrální čáry jsou v případě, že rozdělení radiálních rychlostí v atmosféře hvězdy je dáno pouze její rotací (a zcela vyloučíme profily emisní), symetrické. Střed spektrální čáry bychom tedy měli naleznout s velkou přesností pakliže srovnáme přímý a převrácený profil spektrální čáry. Výhodou metody je, že naším „modelem“ je samotná spektrální čára. Problémem je, že takřka neexistují neblendované spektrální čáry. Metoda se manuálně používá v programu SPEFO. Program napsal J. Horn (viz Horn a kol 1996) a dále jej rozvíjeli P. Škoda

a J. Krpata (viz Škoda 1996). Program je velmi šikovným nástrojem pro analýzu a částečně i redukci hvězdných spekter. Velmi dobře je v programu řešena především normalizace spekter vůči jejich spojitému záření. Program umožňuje uživateli v grafickém režimu libovolně umisťovat body, jimiž následně program prokládá Hermitovy polynomy.

Srovnávání pozorovaného spektra se spektrem jiným

Jiným spektrem rozumíme spektrum syntetické, nebo spektrum pozorované (obojí analogického spektrálního typu). První pokusy v tomto směru provedl Griffin (1967). V dnešní době se nejčastěji k měření radiálních rychlostí používají dvě metody založené na srovnávání spekter:

1. **Metoda kroskorelační funkce:** Metodu navrhla Simkin (1974). Kroskorelační funkce je (až na znaménko) konvolucí spektra, jehož radiální rychlost chceme určit a spektra, s kterým jej srovnáváme. Maximum kroskorelační funkce odpovídá vzájemnému posunu spekter v radiální rychlosti.

2. **Metoda rozšiřovací funkce:** Metodu vyvinul a rozpracoval Rucinski (1992). Metoda předpokládá, že pozorované spektrum je dáno konvolucí spektra nerozšířeného a rozšiřovací funkce. Za pomoci přímé a inverzní Fourierovy transformace lze určit rozšiřovací funkci. Radiální rychlost složek dvojhvězdy odpovídá maximům rozšiřovací funkce.

Obě metody jsou tím úspěšnější, čím lépe si co do spektrálního typu odpovídají spektra pozorovaná a spektra srovnávací a čím delší úseky spektra porovnáváme. Výhodou těchto metod je, že tentokrát je nám modelem celé spektrum a tedy je velmi omezen negativní vliv blendování spektrálních čar. Srovnávání syntetických a pozorovaných spekter se věnujeme ve třetí kapitole.

Spectral disentangling

Jedná se o metodu rozkladu pozorovaných spekter vícenásobných systémů na jeho jednotlivé složky. Metodu vyvinuli Simon a Sturm (1994) a dále ji rozpracoval Hadrava (1995, 1997, 2009). Mějme pozorované spektrum vícenásobného systému $I(x,t)$ a uvažujme, že se skládá z n v čase neproměnných složek $I_j(x)$, které jsou vzájemně posunuté o radiální rychlost $v_j(t)$. Pakliže jsou spektra ekvidistatní v radiální rychlosti, pro složené spektrum platí

$$I(x,t) \;=\; \sum_{j=1}^{n} I_j(x) * \delta\left(x \,-\, v_j(t)\right). \tag{1.29}$$

Hadrava (1995) navrhl problém řešit ve Fourierově prostoru. Fourierovou transformací vztahu (1.29) dostaneme vztah

$$\widehat{I}(y,t) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \widehat{I}_j \exp\left(iyv_j(t)\right). \tag{1.30}$$

Namísto hledání jednotlivých radiálních rychlostí $v_j(t)$ hledá autor práce dráhové elementy $\mathbf{p}$ dvojhvězdy $v_j\left(t_l, \mathbf{p}\right)$. K nalezení složek dvojhvězdy a dráhových

elementů je třeba minimalizovat funkcionál S daný vztahem

$$S = \sum_{l=1}^{k} \int \omega_l(y) \left| \widehat{I}\left(y, t_l\right)) - \sum_{j=1}^{n} \widehat{I}_j \exp\left[iyv_j\left(t_l, \mathbf{p}\right)\right] \right|^2 dy, \tag{1.31}$$

kde t_l je čas pozorování a $\omega_l(y)$ statistická váha fourierovského módu y l spektra. V další práci Hadrava (1997) umožnil v modelu proměnnost příspěvků složek soustavy k celkovému zářivému toku (nikoliv ovšem jako funkci vlnové délky). Dosáhl toho přenásobením spektra každé složky parametrem $w_{jl} \neq w_{jl}(y)$ ve vztahu (1.31). Zavedení tohoto parametru je velmi důležité pro rozklad zákrytových dvojhvězd a pro oddělení spektra pozemských atmosferických čar. K vyřešení rovnice (1.31) vyvinul Dr. Hadrava program KOREL, který hledá minimum příslušné funkce pomocí Simplexu (Nelder a Mead 1965). Program umožňuje uživateli rozložit spektrum až pětinásobné hierarchicky uspořádané hvězdné soustavy. Oproti ostatním metodám má tato nespornou výhodu v tom, že uživateli poskytne odhad (při ideálním rozkladu velmi věrný odhad) tvaru spektra všech složek systému. Použití pokročilých numerických metod jako je Fast Fourier Transform (FFT) způsobuje, že spektrální rozklad není vždy ideální, je velmi citlivý na kvalitu rozkládaných spekter a kvalitu jejich normalizace vůči spojitému záření systému.

2. Čtyřhvězda ξ Tau

Uvedené spektroskopické a fotometrické rozbory systému ξ Tau budou součástí plánované mezinárodní studie věnované tomuto systému. Veškerá pozorovatelská data studovaná v této práci byla získána mezinárodním týmem spolupracovníků. V této práci jsou použita s jejich souhlasem a budou použita i v plánované studii. Výsledky uvedené v diplomové práci tak dávají prvotní obrázek ξ Tau, který bude v plánované studii doplněn především o pozorování interferometrem VEGA (Mourard 2009).

2.1 Úvod

ξ Tau (2 Tau, HDS 433, HIP 16083, HR 1038, HD 21364) je vícenásobný hvězdný systém ze souhvězdí Býka. Zdánlivá jasnost soustavy ve filtru V je v jejím maximu $m_{\mathrm{V}} \approx 3.72\,\mathrm{mag}$. Systém sestává ze čtyř hierarchicky uspořádaných složek, z nichž dvě jsou zákrytové. Díky tomu u systému pozorujeme jak spektrální změny, tak změny jeho jasnosti. Systém se skládá z trojhvězdy obíhající kolem společného těžiště spolu s hvězdou spektrálního typu F s periodou $P'' \approx 51.9\,\mathrm{roku}$. Trojhvězda se skládá z dvojhvězdy a hvězdy spektrálního typu B obíhající kolem společného těžiště s periodou $P' \approx 145.1317\,\mathrm{d}$. Velmi široké spektrální čáry složky spektrální třídy B napovídají, že tato hvězda velmi rychle rotuje. Dvojhvězda se skládá z hvězd spektrální třídy A nebo B, které obíhají kolem společného těžiště s periodou $P \approx 7.146644\,\mathrm{d}$. Složky těsné dvojhvězdy budeme označovat primár a sekundár. Složku trojhvězdy spektrálního typu B obíhající kolem společného těžiště společně s dvojhvězdou budeme označovat terciár. Dráhové parametry složek těsné dvojhvězdy značíme nečárkovaně, parametry popisující pohyb těžiště těsné dvojhvězdy a terciáru jednou čárkou a parametry popisující pohyb těžiště trojhvězdy a hvězdy spektrálního typu F dvěmi čárkami.

Proměnnost radiálních rychlostí u systému poprvé objevil Campbell (1909). Autor práce hvězdu zařadil jako spektrální typ A. Změny radiální rychlosti detekoval měřením Dopplerova posunu spektrální čáry Mg II 4481 Å. Cowley (1972) klasifikovala systém jako spektrální typ B9V s širokými spektrálními čarami. Fekel (1981) se věnoval studii formace těsných vícenásobných systémů. Mezi nimi je ξ Tau. V práci publikoval dráhové elementy (držíme se notace z předchozího odstavce) $P = 7.15\,\mathrm{d}$ a $P' = 145\,\mathrm{d}$ a výstřednosti příslušných drah $e = 0$ a $e' = 0.15$. Dráhové elementy neurčil autor práce. Byly spočteny C. T. Boltonem. Fekel (1981) publikoval hmotové poměry $q = 0.96$ a $q' = 0.91$, celkovou hmotnost systému $M_{\mathrm{tot}} = 11.2\,\mathrm{M}_{\odot}$ a sklony drah $i = 57 \pm 5°$ a $i' = 48 \pm 4°$. Autor práce také poukázal na poměrně velký poměr mezi dlouhou a krátkou periodou P'/P a diskutoval stabilitu systému. Koch (1990) měřil změny polarizace světla systému a žádné neobjevil. Tokovinin (1997) se věnoval studiu tří– a vícenásobných hvězdných systémů, podobně jako Fekel (1981). Autor ve svém katalogu udává oběžné periody pro všechny čtyři složky systému $P'' = 77\,\mathrm{yr}$, $P' = 144.5\,\mathrm{d}$, $P = 7.08\,\mathrm{d}$, hmotnosti složek (značení je dle spektrálního typu, viz předchozí odstavec) $M_{\mathrm{F}} = 1.24\,\mathrm{M}_{\odot}$, $M_{\mathrm{B}} = 5.5\,\mathrm{M}_{\odot}$, $M_{\mathrm{Aa}} = 3.2\,\mathrm{M}_{\odot}$, $M_{\mathrm{Ab}} = 3.1\,\mathrm{M}_{\odot}$, zdánlivou hvězdnou velikost vzdálené složky typu F $m_{\mathrm{V.F}} = 7.58\,\mathrm{mag}$ a zdánlivou jasnost zbylé trojhvězdy $m_{\mathrm{V.BAA}} = 3.77\,\mathrm{mag}$. Spektrál-

ní klasifikaci celého systému autor práce udává stejné jako Cowley (1972) B9V. Nejpřesněji určené oběžné periody a další parametry trojnásobného podsystému publikovali v předběžném sdělení Bolton a Grunhut (2007). Studiem spekter pořízených s 1.88 m teleskopem v David Dunlap Observatory a fotometrie pořízené družicí Hipparcos určili tyto dráhové elementy $P' = 145.1317 \pm 0.0040\,\mathrm{d}$, $P = 7.1466440 \pm 0.0000049\,\mathrm{d}$, $e = 0.0$, $e' = 0.149$, $i \approx 90°$ a $i' = 63 \pm 4°$. Autoři práce odhadli hmotu jednotlivých složek systému na $M_\mathrm{B} = 3.12 \pm 0.16\,\mathrm{M}_\odot$, $M_\mathrm{Aa} = 2.21 \pm 2\,\mathrm{M}_\odot$ a $M_\mathrm{Ab} = 2.12 \pm 2\,\mathrm{M}_\odot$. Autoři práce také odhadli spektrální typy složek trojhvězdy na typ B v případě terciáru a na typ A v případě primáru a sekundáru. Výsledky práce autoři publikovali pouze ve formě abstraktu. Úplná sada dráhových elementů trojhvězdy nikdy publikována nebyla. Dráhové elementy popisující pohyb nejvzdálenější čtvrté složky systému spektrálního typu F kolem společného těžiště společně s trojhvězdou publikoval Rica Romero (2010) na základě osmi pozorování skvrnkovou interferometrií. Vzdálenou čtvrtou složku se podařilo poprvé rozlišit výše uvedenou technikou v roce 1983. Měření publikoval Mason a. kol (1999). Dráhové elementy odhadnuté autorem práce Rica Romero (2010) jsou $P'' = 51.9 \pm 15.1\,\mathrm{let}$, $e'' = 0.586 \pm 0.077$, $a'' = 0.441 \pm 0.027$, $i'' = 22.7 \pm 5.1°$, $\omega'' = 3.0 \pm 6.3°$, $\Omega'' = 112.1 \pm 4.4°$. Protože paralaxa systému $p = 15.6 \pm 1.04\,\mathrm{mas}$ (práce van Leeuwen 2007, 2008) je známa, odhadli autoři práce celkovou hmotnost soustavy $M_\mathrm{tot} = 10.1(64)\,\mathrm{M}_\odot$. Ta je v rozporu s hodnotou udanou Tokovininem (1997) ($M_\mathrm{tot} = 13.04\,\mathrm{M}_\odot$) i Boltonem a Grunhutem (2007) (pakliže přijmeme hmotu vzdálené složky spektrálního typu F udanou Tokovininem 1997 $M_\mathrm{tot} = 8.73\,\mathrm{M}_\odot$).

Současná úroveň popisu drah systému a charakteru jednotlivých jeho složek je stále překvapivě nízká, uvážíme-li, že objekt je snadno dostupný i pro nevýkonnou pozorovací techniku a díky své nízké deklinaci je pozorovatelný z obou polokoulí Země. Systém je zajímavým cílem zkoumání hned z několika důvodů.

- Svítivosti jednotlivých složek systému jsou srovnatelné. Díky tomu je možné pozorovat spektrální čáry všech tří složek. Pouze vzdálená složka spektrálního typu F je příliš málo zářivá a její spektrální čáry nepozorujeme. Objekt je tak vhodnou zatěžkávací zkouškou pro moderní nástroje určené k analýze spekter vícenásobných systémů, jakým je např. spektrální disentangling.

- Díky tomu, že systém není příliš vzdálený, je možné jej pozorovat moderními interferometry a srovnávat výsledky měření s výsledky spektrometrie a fotometrie.

- Vhodným kombinováním metod zkoumání je možné dosáhnout mimořádně přesného popisu geometrického uspořádání systému a fyzikálních vlastností jeho složek.

- Malý poměr mezi dlouhou P' a krátkou P periodou je dle prací Fekel (1981) a Tokovinin (1997) neobvyklý. Pakliže získáme dostatečně přesný odhad rozměru vnější a vnitřní dráhy trojhvězdy a hmotností jejích složek, je možné studovat dynamickou stabilitu systému.

V následujících dvou sekcích se podíváme, co nám spektroskopická a fotometrická měření prozrazují o ξ Tau zvlášť. V závěru kapitoly se podíváme, jaký obrázek ξ Tau dostaneme, jestliže výsledky spektroskopie a fotometrie ξ Tau

zkombinujeme. Spektrum vzdálené složky spektrálního typu F nepozorujeme ani nedochází k jejím zákrytům některou ze zbylých složek systému. V této práci se proto omezíme pouze na studium trojnásobného podsystému.

2.2 Spektroskopie ξ Tau

V této sekci je uveden popis a analýza spektroskopických pozorování studovaných v této práci.

2.2.1 Zpracovávaná data

Podařilo se nám nashromáždit poměrně bohatý spektroskopický materiál. V tabulce 2.1 je uvedena základní charakteristika studovaných spekter tj. jaké oblasti vlnových délek $\Delta\lambda$ pokrývají, jaké časové intervaly ΔT pokrývají, jejich počet N a rozlišení R. Seznam autorů studovaných spekter je uveden v Appendixu C. Ve všech případech se jedná o spektra obsahující právě jeden difrakční řád. Proto také pro každou studovanou oblast uvádíme právě jednu hodnotu rozlišení R, protože jeho hodnota se v rámci jedné studované oblasti výrazně nemění. Obecný postup redukce elektronických hvězdných spekter je vyložený v příloze A. Všechna v této práci studovaná spektra obsahují právě jeden řád, je tedy možné je redukovat v programu IRAF postupem uvedeným v příloze A. Kromě elektronických spekter jsem měla k dispozici radiální rychlosti měřené C. T. Boltonem na fotografických spektrech pořízených na David Dunlap Observatory. Jedná se o měření na spektrálních čarách He I 4471 Å a He I 4026 Å. Primární a sekundární složka (tj. složky těsné dvojhvězdy) ve svých spektrech neobsahují čáry neutrálního helia, a tak tato měření popisují pouze pohyb terciáru (složka spektrálního typu B). Časové rozložení a fázové pokrytí oběžné periody těsné dvojhvězdy P a oběžné periody vnější dráhy P' studovanými daty je ukázáno v obrázku 2.1.

Redukci elektronických hvězdných snímků provedli:

- **Ondřejovská observatoř:** Veškeré elektronické snímky byly pořízeny v coudé ohnisku ondřejovského 2 – m dalekohledu pomocí SITe – 5 800 × 2000 CCD detektoru. Odstranění biasu, podělení rovnoměrným polem, extrakci jednorozměrného snímku a kalibraci snímků ve vlnových délkách provedl M. Šlechta v programu IRAF. Normalizaci spekter vůči spojitému záření jsem provedla v programu SPEFO.

- **David Dunlap Observatory:** Odstranění biasu, podělení rovnoměrným polem, extrakci jednorozměrného snímku a kalibraci snímků ve vlnových délkách jsem provedla v programu IRAF[1], normalizaci snímků vůči spojitému záření jsem provedla v programu SPEFO.

- **Observatório do Instituto Geográfico do Exército:** Snímky byly pořízeny 0.356 – m teleskopem v IGeoE pomocí Littrow LHIRES III detektoru. Odstranění biasu, podělení rovnoměrným polem, extrakci jednorozměrného snímku a kalibraci snímků ve vlnových délkách provedl J. Ribeiro programem IRAF. Normalizaci spekter vůči spojitému záření jsem provedla v programu SPEFO.

[1] Na základě postupu, který je vyložený v příloze A.

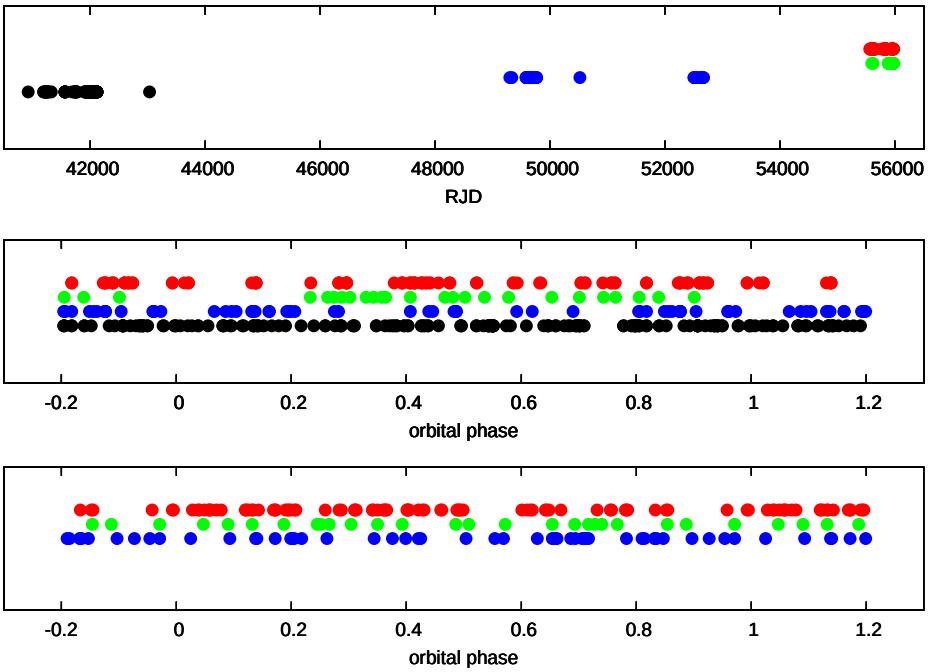
Tabulka 2.1: Základní charakteristika elektronických spekter ξ Tau použitých v diplomové práci. $\Delta\lambda$ – interval vlnových délek pokrytý jedním spektrem dané podmnožiny, ΔT (RJD = HJD – 2400000) časový interval pokrytý spektry dané podmnožiny, N počet spekter v podmnožině a R typické rozlišení spekter v podmnožině. Zkratky observatoří: OND = Observatoř Ondřejov, Česká Republika, DDO = David Dunlap Observatory, Kanada a IGE = Observatório do Instituto Geográfico do Exército, Portugalsko.

Observatoř	$\Delta\lambda$ (Å)	ΔT (RJD)	N	R
OND	4270–4523	55579–55968	21	17000
OND	4381–4635	55579–55645	2	17500
OND	4753–5005	55579–55831	11	19300
OND	6255–6767	55561–55968	37	12700
DDO	4210–4415	52638–52638	3	10800
DDO	4370–4575	49300–52670	37	10800
IGE	6425–6612	55966–55971	2	37500
IGE	6505–6688	55597–55960	18	37500
Celkem			130	

V obrázcích 2.2 – 2.4 jsou ukázky studovaných spektrálních oblastí, v nich jsou vyznačeny silnější spektrální čáry, jejichž studiu jsem se věnovala především. Ani v jedné z těchto oblastí jsem nepozorovala spektrální čáry čtvrté složky systému spektrálního typu F. Zde je stručný popis studovaných spektrálních oblastí:

- **Oblast 4300 – 4600 Å, obrázek 2.2:** Dominantní čarou této oblasti je čára Balmerovy série Hγ (H I 4340.471 Å). V ní zcela dominuje terciár spektrálního typu B nad ostatními, ani v elongacích těsné dvojhvězdy nepozorujeme výraznější minima intenzity odpovídající složkám těsné dvojhvězdy. Čára je rotačně rozšířená. Další silnou spektrální čarou je He I 4387.929 Å. Tato spektrální čára má svůj původ v terciáru spektrálního typu B. Spektrální čára je rotačně rozšířená a blenduje se s řadou spektrálních čar ionizovaných kovů, které pochází od obou složek těsné dvojhvězdy. Další výraznou spektrální čarou je He I 4471.508 Å. Tato spektrální čára je silně rotačně rozšířená a blenduje se s čarami ionizovaných kovů, ale méně než předchozí zmíněná heliová čára. Ani v jedné z heliových čar není patrný příspěvek od složek těsné dvojhvězdy. Nejzajímavější spektrální čarou celé oblasti je Mg II 4481.228 Å. V této spektrální čáře je velmi dobře patrný příspěvek od všech tří složek trojhvězdy. Skládá se z široké, rotačně rozšířené komponenty od terciáru spektrálního typu B a dvou ostrých a hlubokých komponent od obou složek těsné dvojhvězdy. V celé oblasti se nalézá řada čar kovů. Ty, jež přísluší oběma složkám těsné dvojhvězdy, jsou tenké a ostré, zatímco ty, jež přísluší hvězdě typu B, jsou rotačně rozšířené a blendují se natolik, že vytvářejí jakési „snížené kontinuum“.

- **Oblast 4750 – 5000 Å, obrázek 2.3:** Dominantní čarou oblasti je čára Balmerovy série Hβ(H I 4861.332 Å). V této čáře dominuje svým příspěvkem terciár spektrálního typu B, díky tomu se čára jeví silně rotačně



Obrázek 2.1: Časové rozložení (horní panel) a fázové pokrytí period $P' = 145.1317\,\mathrm{d}$ (střední panel) a $P = 7.146644\,\mathrm{d}$ (spodní panel) studovanými daty. Barevné značení: černá = fotografická spektra z David Dunlap Observatory, modrá = elektronická spektra z David Dunlap Observatory, červená = elektronická ondřejovská spektra, zelená = elektronická spektra z Observatório do Instituto Geográfico do Exército. Oba fázové diagramy jsou kresleny pro epochu $T_0 = \mathrm{RJD}\ 48302.635$.

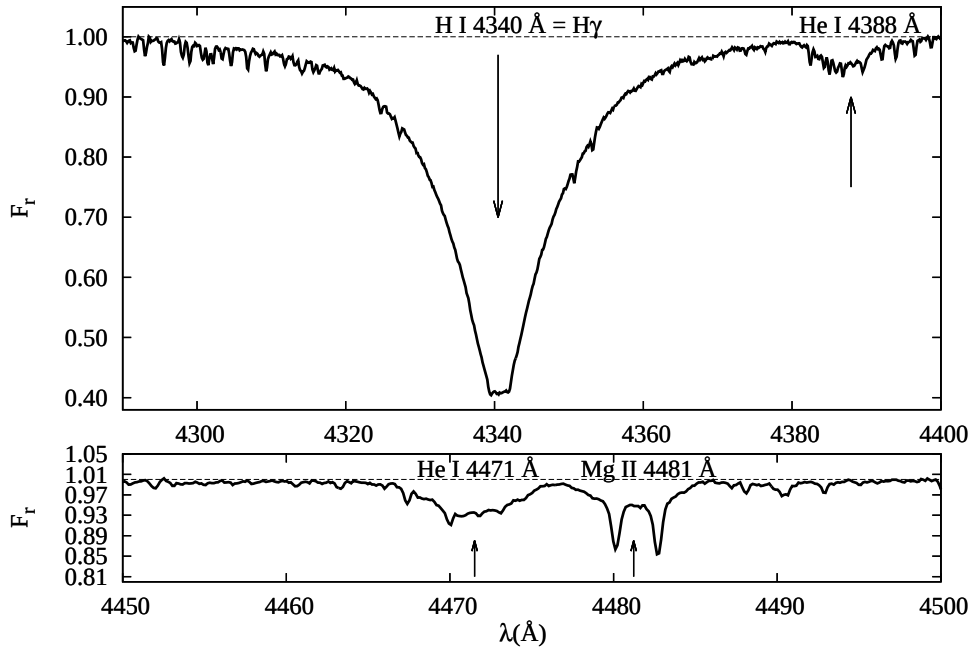
rozšířená. Oproti čáře Hγ je znatelnější příspěvek od obou složek těsné dvojhvězdy. V elongacích jsou dobře viditelná, byť velmi slabá, sekundární minima odpovídající právě těmto složkám. Další silnou spektrální čarou je He I 4921.931 Å. Čára je široká a je nejspíš tvořena takřka výhradně rychle rotujícím terciárem spektrálního typu B. Spektrální čára se blenduje s řadou slabších čar kovů. V daném úseku spektra je několik slabých čar ionizovaných kovů. Jsou-li tyto čáry úzké, potom mají původ v chladnějších dvou složkách těsné dvojhvězdy spektrálního typu A. Stejné spektrální čáry se vyskytují i ve spektru terciáru spektrálního typu B, ale vlivem rotace jsou velmi mělké a takřka neznatelné.

- **Oblast 6270 – 6750 Å, obrázek 2.4:** Zajímavá je dvojice křemíkových čar Si II 6347.091 Å a Si II 6371.359 Å. Ačkoliv jsou obě čáry relativně slabé, jsou v nich dobře pozorovatelné příspěvky od všech složek trojhvězdy. Čáry mají dvě tenké hlubší složky, které pocházejí od složek těsné dvojhvězdy. Tyto úzké spektrální čáry jsou posazeny na mělčí, ale podstatně širší komponentě, jejíž původ je v terciáru spektrálního typu B. Dominantní čárou oblasti je Hα (H I 6562.819 Å). Čára je dominovaná zářením terciáru spektrálního typu B. V elongacích jsou velmi dobře patrná sekundární minima odpovídající chladnějším složkám těsné dvojhvězdy spektrálního typu A. Poslední silnější spektrální čarou je He I 6678.151 Å. Spektrální čára je velmi široká a nejspíše je tvořena výhradně terciárem. V oblasti vlnových délek $\lambda \leq 6600$ Å je spektrum pokryto zemskými atmosferickými čarami (především vody a molekulárního kyslíku). Atmosferické čáry molekulárního kyslíku se soustřeďují do oblasti $\Delta\lambda_{O_2} \in (6250, 6350)$ Å zatímco spektrální čáry vody do oblasti $\Delta\lambda_{H_2O} \in (6450, 6600)$ Å. Fakt, že spektrální čáry molekulárního kyslíku a vody jsou ve spektru takto odděleny, je významný především pro spektrální disentangling.

2.2.2 Za spektroskopickými elementy

Měření radiálních rychlostí programem SPEFO

V prvním kroku jsem měřila radiální rychlosti porovnáváním přímého a převráceného profilu spektrální čáry v programu SPEFO. Za tím účelem je nutné vybrat v ideálním případě neblendované spektrální čáry. Úkol je to snadný v případě složek těsné dvojhvězdy, protože jejich čáry nejsou příliš rotačně rozšířené, a tak je šance, že budou blendované, relativně malá. Díky tomu, že jsou tyto čáry ostré, je měření radiálních rychlostí na těchto čarách velmi přesné. Situace je komplikovanější v případě spektrálních čar terciáru spektrálního typu B. Jeho spektrální čáry jsou rozšířené rotací, a tak je pravděpodobnost, že najdeme neblendovanou spektrální čáru, malá. Pakliže k dané spektrální čáře přispívají všechny tři složky, budou se blendovat navzájem (případ takřka všech studovaných spektrálních čar). S blendováním spektrálních čar v rámci spektra jedné složky se lze vypořádat. Blendování způsobí konstantní posun v radiální rychlosti měřené na dané spektrální čáře. Problém odstraníme tím, že neprůměrujeme radiální rychlosti měřené na různých spektrálních čarách. Při prokládání křivky radiálních rychlostí měřenými daty hledáme γ rychlosti pro měření na každé spektrální čáře zvlášť. Tímto



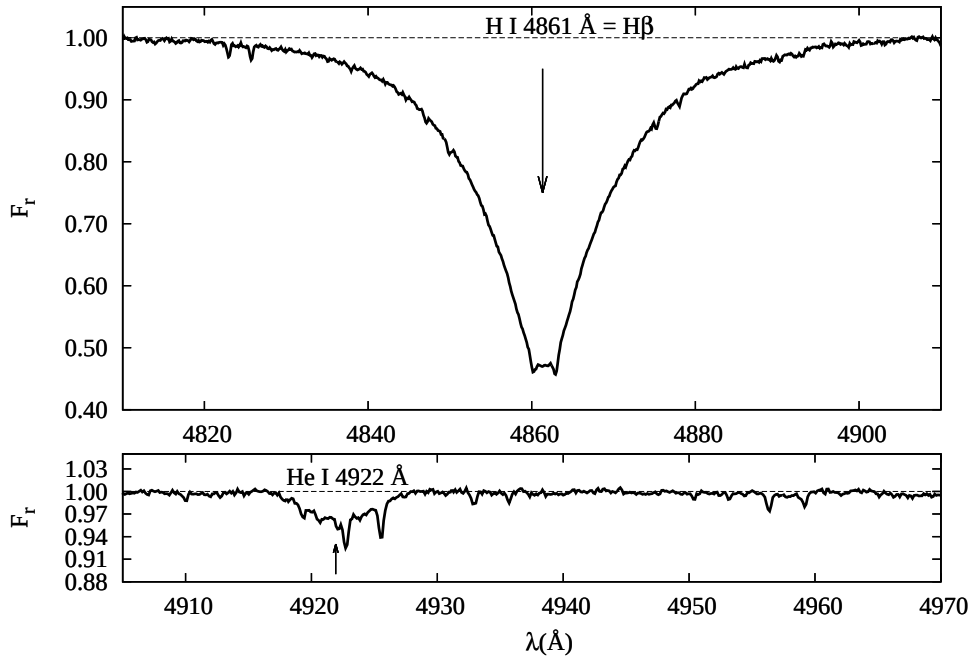
Obrázek 2.2: Studovaná spektrální oblast v okolí čáry Hγ. Popisky os: F_{r} relativní zářivý tok, λ vlnová délka. Významější spektrální čáry jsou vyznačeny šipkou a jsou udány jejich laboratorní vlnové délky. Panely nemají stejně škálované osy.

způsobem také odstraníme vzájemný posun nulového bodu škály radiálních rychlostí mezi různými spektrografy. S blendováním spektrálních čar různých složek se bohužel snadno vypořádat nelze. Z toho důvodu jsem ve SPEFU měřila radiální rychlosti složek těsné dvojhvězdy pouze tehdy, byly-li spektrální čáry obou složek dobře rozlišené. V tabulce 2.2 jsou uvedeny spektrální čáry, na nichž jsem měřila radiální rychlosti a počty těchto měření.

Z důvodů uvedených v předchozím odstavci jsou radiální rychlosti měřené na spektrálních čarách terciáru spektrálního typu B poměrně nepřesné (s chybou $\geq$ 10km s^{-1}), zatímco radiální rychlosti měřené na spektrálních čarách složek těsné dvojhvězdy spektrálního typu A jsou velmi přesné (s chybou nejvýše několika km s^{-1}). Program SPEFO nedává uživateli odhad nejistoty měřených radiálních rychlostí. Formálně je možné odhadnout nejistoty měřených radiálních rychlostí z rozptylu měřených radiálních rychlostí vůči nalezenému dráhovému řešení. V takových odhadech není zohledněna ani kvalita spekter, na nichž byly radiální rychlosti měřeny, ani vliv vzájemného blendování spektrálních čar složek dvojhvězdy.

Měření radiálních rychlostí srovnáváním se syntetickými spektry

Program (s pracovním názvem Interpol – program není zcela hotový a jeho stručný popis je v následující kapitole), který vyvíjím v rámci diplomové práce slouží k srovnávání pozorovaných a syntetických spekter vícenásobných hvězdných systémů. Pakliže zafixujeme hodnoty parametrů $\mathrm{T_{eff}}$, $\log g$, $\mathrm{v_{rot}} \sin i$ a L_{r} pro všechny složky trojhvězdy, můžeme následně srovnávat syntetické spektrum (určené fixovanými parametry) s pozorovaným s tím, že měníme pouze radiální rychlosti

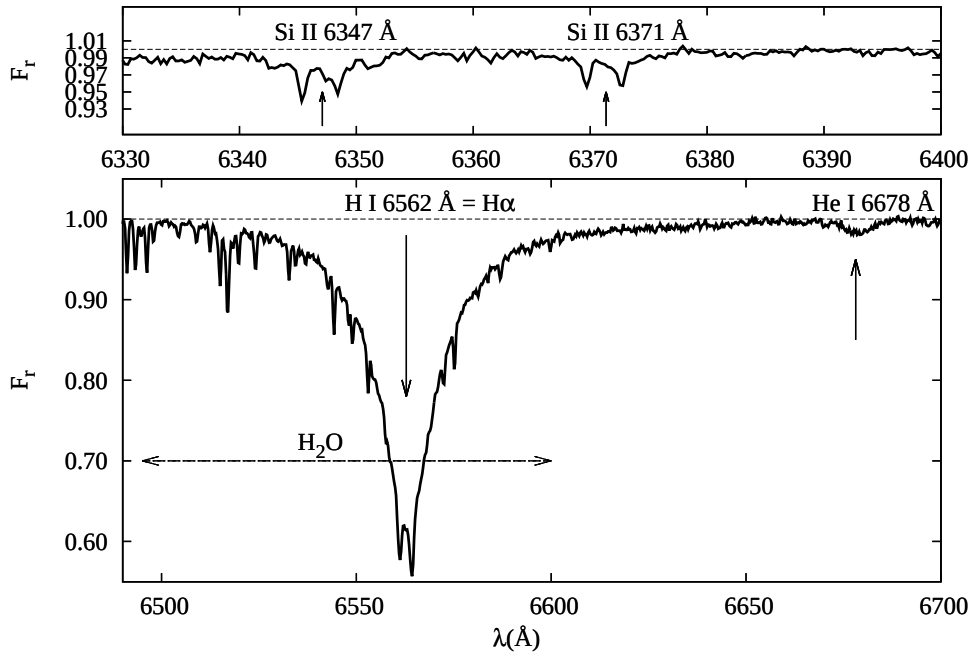


Obrázek 2.3: Studovaná spektrální oblast v okolí čáry Hβ. Popisky os: F_{r} relativní zářivý tok, λ vlnová délka. Významější spektrální čáry jsou vyznačeny šipkou a jsou udány jejich laboratorní vlnové délky. Panely nemají stejně škálované osy.

RV složek trojhvězdy. Radiální rychlosti hledáme minimalizací χ^2, který je dán vztahem

$$\chi^2 = \left(\frac{I_{\mathrm{obs}}(\lambda) - \sum_{j=0}^{n} I_j(\lambda \,|\, RV_j)}{\sigma} \right)^2 , \tag{2.1}$$

kde I_{obs} je pozorované spektrum, λ vlnová délka I_j je spektrum a RV_j radiální rychlost j složky systému a σ je typická standartní odchylka bodů jednoho spektra. Přesnost radiálních rychlostí měřených tímto způsobem ovlivňuje: 1) Přesnost parametrů popisující jednotlivé složky systému, 2) přesnost modelových spekter, 3) poměr signálu ku šumu měřených spekter, 4) přesnost normalizace pozorovaných spekter vůči hvězdnému kontinuu a 5) orbitální fáze ve které se systém nachází. Přesnost měření radiálních rychlostí v elongaci systému je větší než v konjukci. Protože program pracuje automaticky, měřila jsem jím radiální rychlosti i v konjukci složek těsné dvojhvězdy. Ani tento program neposkytuje odhad chyb (ta je odhadem několik km s^{-1}). Vypisuje ovšem velikost χ^2 daného vztahem (2.1), jehož hodnota dobře popisuje kvalitu proložení, jsou-li správně odhadnuty chyby jednotlivých bodů pozorovaných spekter. Měřené spektrální oblasti a počty měření radiálních rychlostí jsou uvedeny v tabulce 2.2. Formální velikost nejistoty určených radiálních rychlostí lze, jako v případě radiálních rychostí měřených programem SPEFO, odhadnout z rozptylu bodů okolo nalezeného dráhového řešení. Parametry určující modelová spektra složek trojhvězdy, jež jsem použila k srovnání s pozorovanými spektry, jsou uvedena v tabulce 2.3.



Obrázek 2.4: Studovaná spektrální oblast v okolí čáry Hα. Popisky os: $F_{\rm r}$ relativní zářivý tok, λ vlnová délka. Významější spektrální čáry jsou vyznačeny šipkou a jsou udány jejich laboratorní vlnové délky. Označena oblast pokrytá ostrými čarami vodních par majících původ v zemské atmosféře. Panely nemají stejně škálované osy.

Dráhová řešení vypočtená z měřených radiálních rychlostí

K prokládání měřených radiálních rychlostí křivkou radiálních rychlostí jsem použila program FOTEL (Hadrava 1990, Hadrava 2004) ve verzi z 5.2.2006. Dráhová řešení jsem hledala na radiálních rychlostech měřených oběmi výše uvedenými metodami. Radiální rychlosti měřené programem SPEFO označíme jako ručně měřené, radiální rychlosti měřené programem Interpol označíme jako automaticky měřené. Zprůměrovat automaticky a ručně měřené radiální rychlosti není možné, protože nemáme k dispozici odhady nejistot měření jednotlivých radiálních rychlostí.

Z obrázku 2.1 je vidět, že data, která jsem měla k dispozici pokrývají dlouhý časový interval, ale nepokrývají jej rovnoměrně. Naopak se shlukují kolem RJD$\approx$ 41500, 51000, 55500. Každá podmnožina pokrývá velmi dobře všechny fáze 7.146644 d i 145.1317 d periody. Nejprve jsem dráhová řešení hledala na podmnožinách pokrývajících relativně krátké časové úseky, abych podchytila případné sekulární změny probíhající v soustavě. Radiální rychlosti měřené na ondřejovských a lisabonských spektrech (všechna tato spektra jsou součástí jedné podsezóny) jsem rozdělila na základě původu a pokryté spektrální oblasti do podsouborů, pro případ že by jednotlivé oblasti (respektive spektrografy) měly vzájemně posunuté nulové body škály radiálních rychlostí.

I nadále používám značení, že elementy popisující vnější dráhu (tj. pohyb těžiště dvojhvězdy a složky spektrálního typu B kolem společného těžiště) jsou značeny jednou čárkou. Elementy popisující vnitřní dráhu (tj. pohyb složek spek-

Tabulka 2.2: Seznam spektrálních čar na nichž byly měřeny radiální rychlosti programem SPEFO a počet příslušných měření N_{SPEFO}, seznam spektrálních oblastí na nichž byly radiální rychlosti měřeny srováváním se syntetickými spektry a počet příslušných měření $N_{\mathrm{comparison}}$. *Byly měřeny pouze radiální rychlosti terciáru spektrálního typu B. **Byly měřeny pouze radiální rychlosti složek těsné dvojhvězdy spektrálního typu A. ***Byly měřeny všechny složky trojhvězdy.

Spektrální čára	N_{SPEFO}	Spektrální oblast(Å)	$N_{\mathrm{comparison}}$
He I 4471 Å	59*	4275–4520	38***
Mg II 4481 Å	53**	4390–4550	21***
Si II 6347 Å	31**	4760–5000	11***
Si II 6371 Å	31**	6330–6720	37***
He I 6678 Å	37*	6445–6620	21***

Tabulka 2.3: Parametry popisující modelové spektrum ξ Tau , které bylo použito při měření radiálních rychlostí minimalizací funkcionálu (2.1). $\mathrm{T_{eff}}$ efektivní teplota, $\log g$ gravitační zrychlení, $\mathrm{v_{rot}} \sin i$ promítnutá rotační rychlost a L_{r} relativní zářivý výkon příslušné složky trojhvězdy.

Složka systému	B	Aa	Ab
$\mathrm{T_{eff}}$ (K)	14500	9220	10300
$\log g$ [cgs]	4.22	4.61	4.06
$\mathrm{v_{rot}} \sin i$ (km s^{-1})	228	17.6	8.7
L_{r}	0.691	0.154	0.155

trálního typu A kolem společného těžiště) jsou značeny nečárkovaně. Nejprve jsem křivku radiálních rychlostí prokládala radiálními rychlostmi terciáru. V tabulce 2.4 jsou uvedeny nalezené spektroskopické elementy. Fitovala jsem pouze automaticky měřené radiální rychlosti terciáru a měření na fotografických deskách. Ruční měření radiálních rychlostí na čáře He I 6678 Å jsou značně nepřesná. Je to dáno tím, že tato spektrální čára je velmi slabá a je velmi zašumělá (viz obrázek 2.4). Radiální rychlosti měřené na fotografických spektrech jsou v případě čáry He I 4026 Å také velmi nepřesné. Dráhová řešení jsem proto hledala zvlášť na každé spektrální čáře měřené na fotografických deskách (viz tabulka 2.4, čára He I 4026 Å) – řešení 1, čára He I 4471 Å – řešení 2).

V druhém kroku jsem hledala spektroskopické elementy na radiálních rychlostech složek těsné dvojhvězdy. Dráhové elementy popisující pohyb složky spektrálního typu B jsou uvedeny v tabulce 2.5. V tomto případě je již nezbytné řešit i pohyb primáru a sekundáru kolem společného těžiště. Tato měření v sobě nesou informaci o pohybu těžiště dvojhvězdy. Argument pericentra těžiště dvojhvězdy je vůči argumentu pericentra terciáru ω' posunutý o 180°. Hodnoty argumentu pericentra uvedené v tabulce 2.5 jsou o tento posun opraveny. Řešení jsem spočetla jak pro ručně měřené, tak pro automaticky měřené radiální rychlosti. V tabulce 2.6 jsou uvedeny dráhové elementy těsné dvojhvězdy, které jsem rovněž hledala při výpočtu dráhových řešení 5 – 8 uvedených v tabulce 2.5. Protože

Tabulka 2.4: Dráhová řešení vypočítaná z podmnožin radiálních rychlostí, které jsou velmi dobře oddělené v čase (viz obrázek 2.1). Radiální rychlosti popisující pohyb třetí složky spektrálního typu B byly použity. Uvedené parametry jsou: ΔT časový interval pokrytý daty z dané podmnožiny, $T'_{\mathrm{min.RV}}$ epocha minima křivky radiálních rychlostí, e' výstřednost, ω' argument periastra, K'_3, poloviční amplituda křivky radiálních rychlostí, γ_i rychlost těžiště trojhvězdy napočtená z i souboru dat dané podmnožiny radiálních rychlostí, rms_i střední kvadratická odchylka bodů i souboru podmnožiny okolo dráhového řešení a N počet měření v rámci dané podmnožiny. Při hledání dráhového řešení byla oběžná perioda vnější dráhy fixována na hodnotu $P' = 145.1317$ dne.

Drahové řešení	1	2
ΔT(RJD)	40921-42120	41988-42120
$T'_{\mathrm{min.RV}}$(RJD)	42061.04 ± 6.27	42005.2 ± 10.3
e'	0.37 ± 0.10	0.30 ± 0.10
$\omega'(^\circ)$	60 ± 19	82 ± 29
$K'_3(\mathrm{km\,s^{-1}})$	55.2 ± 7.6	28.5 ± 7.2
$\gamma_1(\mathrm{km\,s^{-1}})$	-3.2 ± 4.1	-21.3 ± 2.1
$\mathrm{rms}_1(\mathrm{km\,s^{-1}})$	40.5	11.5
N	97	40
Drahové řešení	3	4
ΔT(RJD)	49301-52670	55597-55980
$T'_{\mathrm{min.RV}}$(RJD)	52112.75 ± 4.66	55755.28 ± 1.62
e'	0.289 ± 0.043	0.233 ± 0.020
$\omega'(^\circ)$	157 ± 13	191.0 ± 4.8
$K'_3(\mathrm{km\,s^{-1}})$	36.8 ± 4.2	38.9 ± 0.7
$\gamma_1(\mathrm{km\,s^{-1}})$	-20.5 ± 1.3	-1.43 ± 0.78
$\gamma_2(\mathrm{km\,s^{-1}})$	–	3.85 ± 0.83
$\gamma_3(\mathrm{km\,s^{-1}})$	–	12.4 ± 1.2
$\gamma_4(\mathrm{km\,s^{-1}})$	–	0.59 ± 1.10
$\mathrm{rms}_1(\mathrm{km\,s^{-1}})$	7.09	4.58
$\mathrm{rms}_2(\mathrm{km\,s^{-1}})$	–	2.08
$\mathrm{rms}_3(\mathrm{km\,s^{-1}})$	–	5.22
$\mathrm{rms}_4(\mathrm{km\,s^{-1}})$	–	4.67
N	37	90

je přesnost měření radiálních rychlostí terciáru poměrně nízká, není vhodné je smíchat s měřeními radiálních rychlostí složek spektrálního typu A.

Z tabulek 2.4, 2.5 a 2.6 je vidět, že velikost argumentu pericentra se mění v čase. Proměnnost ostatních dráhových elementů jsem nezaznamenala. Dráhová řešení 5 – 8 prokázala, že dráha složek těsné dvojhvězdy je kruhová. V obrázku 2.5 jsou ukázány křivky radiálních rychlostí třetí složky pro dráhová řešení 2 – 4 z tabulky 2.4. V obrázku 2.6 jsou ukázány křivky radiálních rychlostí těžiště dvojhvězdy tvořené hvězdami spektrálního typu A pro dráhová řešení 5 – 8 z tabulek 2.5 a 2.6. V obrázku 2.7 je ukázán vývoj parametru ω v čase, tak jak jsem jej našla dráhovými řešeními 1 – 8. V posledním kroku jsem odhadla velikost

Tabulka 2.5: Dráhová řešení vypočítaná z podmnožin radiálních rychlostí, které jsou velmi dobře oddělené v čase (viz obrázek 2.1). K výpočtu byly použity radiální rychlosti obou složek těsné dvojhvězdy. Uvedené parametry jsou: ΔT časový interval pokrytý daty z dané podmnožiny, $T'_{\mathrm{min.RV}}$ epocha minima křivky radiálních rychlostí, e' výstřednost, ω' argument periastra, K'_{1+2} poloviční amplituda křivky radiálních rychlostí těžiště dvojhvězdy, γ_i rychlost těžiště trojhvězdy napočtená z i souboru dat dané podmnožiny radiálních rychlostí, rms_i střední kvadratická odchylka bodů i souboru podmnožiny okolo dráhového řešení a N počet měření v rámci dané podmnožiny. Při hledání dráhového řešení byly oběžné periody fixovány na hodnoty $P' = 145.1317$ dne a $P = 7.146644$ dne.

Způsob měření	ruční	automatický
Drahové řešení	5	6
ΔT(RJD)	49300-52670	49300-52670
$T'_{\mathrm{min.RV}}$(RJD)	51528.95 ± 3.07	51533.87 ± 3.22
e'	0.188 ± 0.020	0.215 ± 0.024
$\omega'(^\circ)$	144.8 ± 8.3	141.8 ± 8.9
$K'_{1+2}(\mathrm{km\,s^{-1}})$	37.29 ± 1.79	39.32 ± 2.23
$\gamma_1(\mathrm{km\,s^{-1}})$	8.16 ± 0.60	8.22 ± 0.74
$\mathrm{rms}_1(\mathrm{km\,s^{-1}})$	4.07	5.66
N	33	37
Způsob měření	ruční	automatický
Drahové řešení	7	8
ΔT(RJD)	55579-55978	55579-55980
$T'_{\mathrm{min.RV}}$(RJD)	55754.32 ± 0.68	55756.53 ± 0.94
e'	0.202 ± 0.007	0.246 ± 0.013
$\omega'(^\circ)$	188.1 ± 1.8	193.9 ± 2.8
$K'_{1+2}(\mathrm{km\,s^{-1}})$	37.76 ± 0.26	38.23 ± 0.63
$\gamma_1(\mathrm{km\,s^{-1}})$	8.67 ± 0.33	7.69 ± 0.42
$\gamma_2(\mathrm{km\,s^{-1}})$	8.07 ± 0.28	7.86 ± 0.52
$\gamma_3(\mathrm{km\,s^{-1}})$	7.64 ± 0.30	8.89 ± 0.70
$\gamma_4(\mathrm{km\,s^{-1}})$	–	5.55 ± 0.98
$\mathrm{rms}_1(\mathrm{km\,s^{-1}})$	1.99	3.19
$\mathrm{rms}_2(\mathrm{km\,s^{-1}})$	2.04	1.68
$\mathrm{rms}_3(\mathrm{km\,s^{-1}})$	2.26	4.21
$\mathrm{rms}_4(\mathrm{km\,s^{-1}})$	–	5.66
N	82	91

hmotového poměru dvojhvězdy a terciáru spektrálního typu B. Přímým dosazením do vztahu (1.23) dostaneme, že $q' = K'_{1+2}/K'_3 = 1.030(0.019)$. V používané verzi programu FOTEL není možné modelovat dráhu trojhvězdy, u které dochází k stáčení přímky apsid vnější dráhy. Nelze jej tedy použít k modelování veškerých měření radiálních rychlostí.

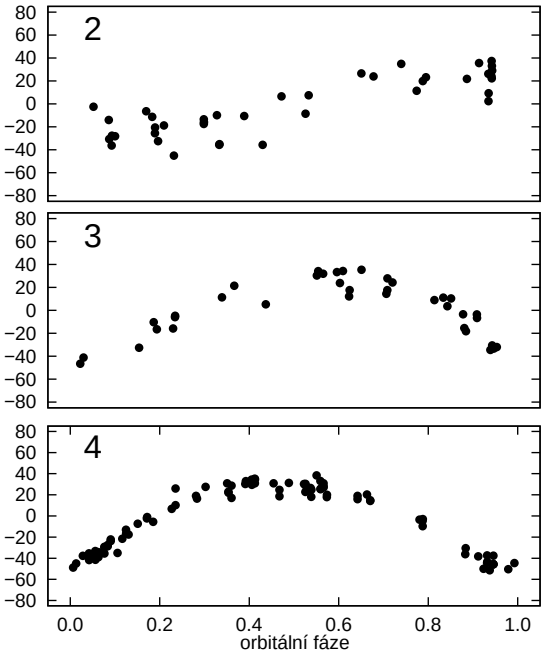
Tabulka 2.6: Dráhová řešení vypočítaná z podmnožin radiálních rychlostí, které jsou velmi dobře oddělené v čase (viz obrázek 2.1). K výpočtu byly použity radiální rychlosti obou složek těsné dvojhvězdy. Uvedené veličiny jsou: ΔT časový interval pokrytý daty z dané podmnožiny, $T_{\mathrm{min.RV}}$ epocha minima křivky radiálních rychlostí, e výstřednost, ω argument periastra, K_1 poloviční amplituda křivky radiálních rychlostí primáru, γ_i rychlost těžiště trojhvězdy napočtená z i souboru dat dané podmnožiny radiálních rychlostí, rms_i, střední kvadratická odchylka bodů i souboru podmnožiny okolo dráhového řešení a N počet měření v rámci dané podmnožiny. Při hledání dráhového řešení byly periody oběhu fixovány na hodnoty $P' = 145.1317$ dne a $P = 7.146644$ dne.

Způsob měření	ruční	automatický
Drahové řešení	5	6
ΔT(RJD)	49300-52670	49300-52670
$T_{\mathrm{min.RV}}$(RJD)	48302.655 ± 0.010	48302.651 ± 0.013
K_1(km s^{-1})	85.41 ± 0.89	84.26 ± 1.28
$q = K_1/K_2$	0.922 ± 0.014	0.909 ± 0.020
γ_1(km s^{-1})	8.16 ± 0.60	8.22 ± 0.74
rms_1(km s^{-1})	4.07	5.66
N	33	37
Způsob měření	ruční	automatický
Drahové řešení	7	8
ΔT(RJD)	55579-55978	55579-55980
$T_{\mathrm{min.RV}}$(RJD)	48302.651 ± 0.003	48302.655 ± 0.006
K_1(km s^{-1})	86.94 ± 0.32	86.89 ± 0.62
$q = K_1/K_2$	0.937 ± 0.005	0.956 ± 0.010
γ_1(km s^{-1})	8.67 ± 0.33	7.69 ± 0.42
γ_2(km s^{-1})	8.07 ± 0.28	7.86 ± 0.52
γ_3(km s^{-1})	7.64 ± 0.30	8.89 ± 0.70
γ_4(km s^{-1})	–	5.55 ± 0.98
rms_1(km s^{-1})	1.99	3.19
rms_2(km s^{-1})	2.04	1.68
rms_3(km s^{-1})	2.26	4.21
rms_4(km s^{-1})	–	5.66
N	82	91

Dráhová řešení a spektrální rozklad programem KOREL

Program KOREL (Hadrava 1995, 1997, 2009) umožňuje hledání, jak dráhových elementů, tak spekter až pětinásobného systému. Tento program jsem měla k dispozici ve verzi 2.12.04. V tabulce 2.7 jsou uvedeny rozkládané oblasti a počty k tomu použitých spekter.

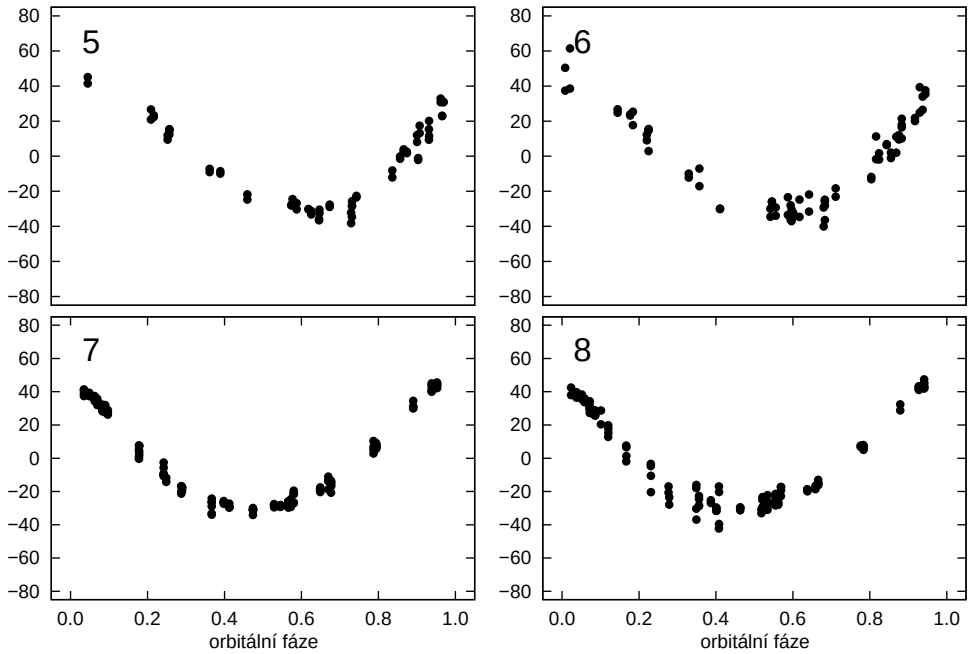
Před vstupem do programu KOREL je třeba spektra upravit tak, aby byla ekvidistantní v radiální rychlosti. K tomu jsem použila program HEC35 napsaný P. Harmancem, který k interpolaci mezi body používá Hermitovy polynomy. K váhování jednotlivých spekter jsem použila program SN2 napsaný P. Harmancem. Uživatel zadá spektrální oblast, kde se nachází hvězdné kontinuum a program



Obrázek 2.5: Křivky radiálních rychlostí terciáru spektrálního typu B. Číslování jednotlivých panelů odpovídá číslování dráhových řešení v tabulce 2.4. Hodnoty na svislých osách panelů jsou udány v $\mathrm{km\,s^{-1}}$.

v ní určí rozptyl bodů. Další možnost váhování spekter odhadem poissonovského šumu je uvedena v další kapitole. Program KOREL umožňuje modelovat křivku radiálních rychlostí trojhvězdy systému s proměnným argumentem pericentra vnější dráhy. Za vstup do programu jsem mohla použít veškerá dostupná elektronická spektra. Rozkládané spektrální oblasti jsou vybrány na základě vzájemného překryvu (nebo nepřekryvu) spektrálních oblastí pokrytých dostupnými spektry (viz tabulka 2.1). V oblastech, které jsou v tabulce 2.7 označeny jedničkou jsem rozkládala tři spektra odpovídající třem složkám trojhvězdy. Všechny tyto oblasti bylo možné rozkládat dohromady, protože neobsahují atmosferické spektrální čáry (toto tvrzení sice neplatí pro oblast 6330 – 6445 Å, ale atmosferické čáry jsou v této oblasti naštěstí velmi slabé, takřka neznatelné). V oblastech, které jsou v tabulce 2.7 označeny dvojkou bylo nezbytné krom tří hvězdných spekter rozkládat ještě spektrum zemských atmosferických čar. Tuto oblast jsem rozkládala nezávisle na ostatních. V tabulce 2.8 jsou uvedena dráhová řešení nalezená programem KOREL. I nadále platí, že čárkovaně značíme elementy vnější dráhy a nečárkovaně elementy vnitřní dráhy. Řešení KOR1 odpovídá rozkladu oblastí značených v tabulce 2.7 jedničkou, řešení KOR2 rozkladu oblasti značené dvojkou ve stejné tabulce. Rozmotaná spektra jednotlivých složek trojhvězdy jsou ukázána v obrázcích 2.8 – 2.12. Značení jednotlivých složek trojhvězdy v obrázcích je: Aa primár spektrálního typu A, Ab sekundár spektrálního typu A, B terciár spektrálního typu B. Rozmotaná spektra jednotlivých složek trojhvězdy nebyla nijak upravována.

Program KOREL bohužel neposkytuje odhady chyb jednotlivých parametrů. K minimalizaci sumy čtverců dané vztahem (1.31) používá Simplex (Nelder



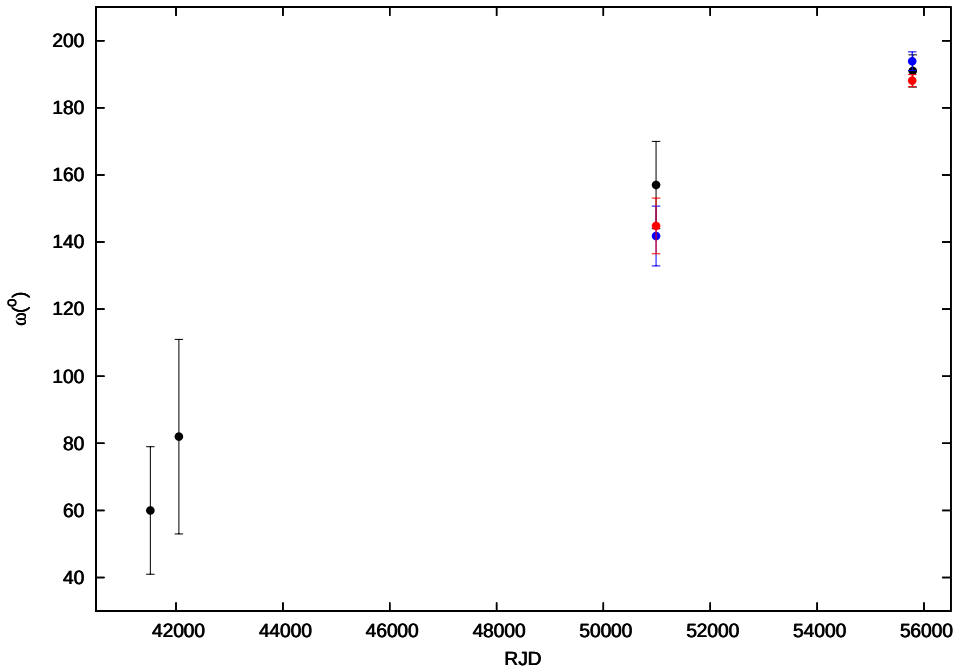
Obrázek 2.6: Křivky radiálních rychlostí těžiště dvojhvězdy tvořené primárem a sekundárem spektrálního typu A. Číslování panelů odpovídá číslování dráhových řešení v tabulkách 2.5 a 2.6. Hodnoty na svislých osách panelů jsou udány v $\mathrm{km\,s^{-1}}$.

a Mead 1965), u něhož není zaručena konvergence ke globálnímu minimu funkce. Dráhová řešení uvedená v tabulce 2.8 jsou tak do určité míry pouze formální (v blízkém okolí tohoto řešení existují další s ekvivaletní sumou čtverců). Abych určila robustnost nalezených hodnot patrametrů, pouštěla jsem program KOREL opakovaně z bodu v parametrickém prostoru, který odpovídal minimu nalezenému v předešlém běhu. V tabulce 2.8 je uvedené řešení s nejnižší sumou čtverců. Takto jsem zjistila, že značná nejistota panuje především v parametrech K_1, q, K_3', q' a e'. Ačkoliv váhovanou sumu čtverců, kterou program vypisuje a danou vztahem (1.31), nelze interpretovat jako χ^2, zkoumala jsem řezy parametrickým prostorem tak, abych získala aspoň základní představu o nejistotě parametrů K_1, q, K_3', q' a e'. Za tím účelem jsem napsala aplikaci, která vygeneruje sady parametrů, jež chceme vyšetřit, a následně zavolá program KOREL, který pro danou sadu spočte sumu čtverců. Mapy řezů parametrickým prostorem jsou uvedeny v obrázcích 2.13 – 2.15. Na základě těchto map jsem odhadla nejistotu mapovaných parametrů a uvedla ji v tabulce 2.8.

2.3 Fotometrie ξ Tau

2.3.1 Zpracovávaná data

Podařilo se nám nashromáždit řadu fotometrických pozorování kalibrovaných v Johnosonově UBV systému. Základní charakteristika shromážděných dat je uvedena v tabulce 2.9. tj. časový interval pokrytý daty ΔT, filtry ve kterých



Obrázek 2.7: Vývoj argumentu pericentra dráhy terciáru spektrálního typu B v čase, daný dráhovými řešeními z tabulek 2.4, 2.5 a 2.6. Barevné značení: černá – řešení spočtená na radiálních rychlostech terciáru (dráhová řešení 1 – 4), červená – řešení spočtená na radiálních rychlostech měřených srovnáním se syntetickými profily (dráhová řešení 6 a 8), modrá – řešení spočtená na radiálních rychlostech měřených programem SPEFO (dráhová řešení 5 a 7).

se pozorovalo a jejich původ. Seznam astronomů, kteří získali studovaná data, je uveden v příloze C. Veškerá používaná fotometrie byla pořízena fotometry s fotonásobičem (tj. nejedná se o CCD fotometrii).

Popis jednotlivých souborů pozorování:

- **Hvarská fotometrie:** Veškerá pozorování byla pořízena 0.65 m reflektorem observatoře Hvar. Redukci pozorování a jejich transformaci do Johnsonova systému provedli dr. Harmanec a dr. Božić programem HEC22 (Harmanec 2011). Na redukci a transformaci do Johnsonova systému pozorování sesbíraných v roce 2011 jsem se podílela. Jako srovnávací hvězda byla použita 4 Tau (HD 21686, HIP 16322, HR 1061) a kontrolní 6 Tau (HD 21933, HIP 16511, HR 1079).

- **Měření družice Hipparcos:** Původní magnitudy měřené družicí Hipparcos v širokopásmovém filtru H_p převedl dr. Harmanec do Johnsonova systému pomocí převodního vztahu (2.2) odvozeného Harmancem (1998)

$$\begin{aligned} V = \quad & H_p - 0.2964(B - V) + 0.005(U - B) + \\ & 0.1110(B - V)^2 + 0.0157(B - V)^3 + 0.0072, \end{aligned} \tag{2.2}$$

  kde U, B, V jsou zdánlivé jasnosti hvězdy v příslušných filtrech Johnsonova systému. Převodem tak získáme jasnosti ve filtru V. Za barevné indexy bylo dosazeno do vztahu (2.2) z redukované a transformované hvarské fotometrie.

Tabulka 2.7: Seznam rozkládaných spektrálních oblastí programem KOREL a počty N rozkládaných spekter. [1] Spektra neobsahují atmosferické čáry, a tak je možné je rozkládat dohromady. [2] Spektra obsahují silné čáry atmosferických vodních par, a tak je nezbytné je rozkládat zvlášť.

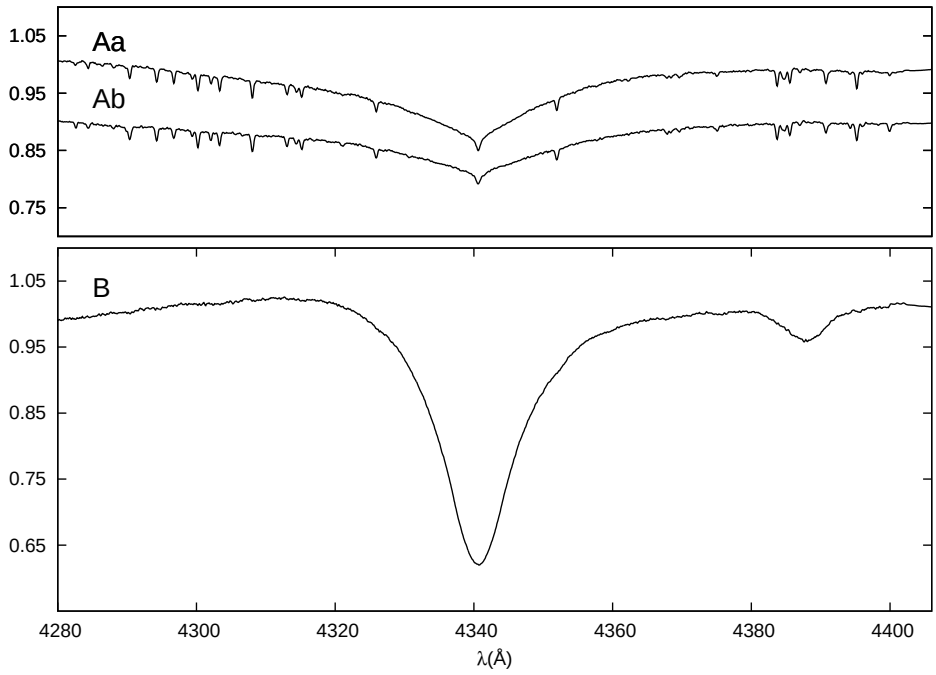
Spektrální oblast(Å)	N
4280 – 4400[1]	23
4400 – 4518[1]	59
4770 – 4985[1]	11
6330 – 6445[1]	37
6506 – 6620[2]	58
6620 – 6750[1]	37

Tabulka 2.8: Nejlepší dráhové řešení nalezené programem KOREL. Uvedené dráhové elementy jsou: P' anomalistická oběžná perioda vnější dráhy, P'_{sid} siderická oběžná perioda, T'_{peri} epocha periastra, e' výstřednost, ω' argument pericentra, $d\omega'/dt$ rychlost stáčení periastra, K'_3 poloviční amplituda křivky radiálních rychlostí terciáru, q' hmotový poměr, P siderická perida vnitřní dráhy, $T_{\mathrm{min.RV}}$ epocha minima křivky radiálních rychlostí těsné dvojhvězdy, K_1 poloviční amplituda křivky radiálních rychlostí primáru, q hmotový poměr.

Dráhové řešení Dráhový element	KOR1	KOR2
P'(d)	145.6030	145.5928
P'_{sid}(d)	145.1378	145.1394
T'_{peri}(RJD)	55755.0418	55755.1815
e'	0.202 ± 0.04	0.203
$\omega'(^\circ)$	368.5 ± 2.0	368.3
$d\omega'/dt(^\circ d^{-1})$	0.0079	0.0077
$K'_3(\mathrm{km\,s^{-1}})$	34.91 ± 1.0	34.76
$q' = K'_{1+2}/K'_3$	1.087 ± 0.20	1.087
P(d)	7.146644	7.146644
$T_{\mathrm{min.RV}}$(RJD)	48299.0758	48299.0787
$K_1(\mathrm{km\,s^{-1}})$	89.12 ± 2.0	88.73
$q = K_1/K_2$	0.959 ± 0.05	0.958

- **Měření z Villanova APT:** Veškerá pozorování byla pořízena 0.8 m reflektorem. Redukci měření a jejich transformaci do Johnsonova systému provedli pracovníci tamější observatoře. Jako kontrolní hvězda byla pozorována 6 Tau (HD 21933, HIP 16511, HR 1079).

- **Měření z South African Astronomical Observatory:** Veškerá použitá měření byla pořízena 0.5 m reflektorem SAAO. Redukci měření a jejich transformaci do Johnsonova systému provedli dr. Zasche a dr. Harmanec programem HEC22.



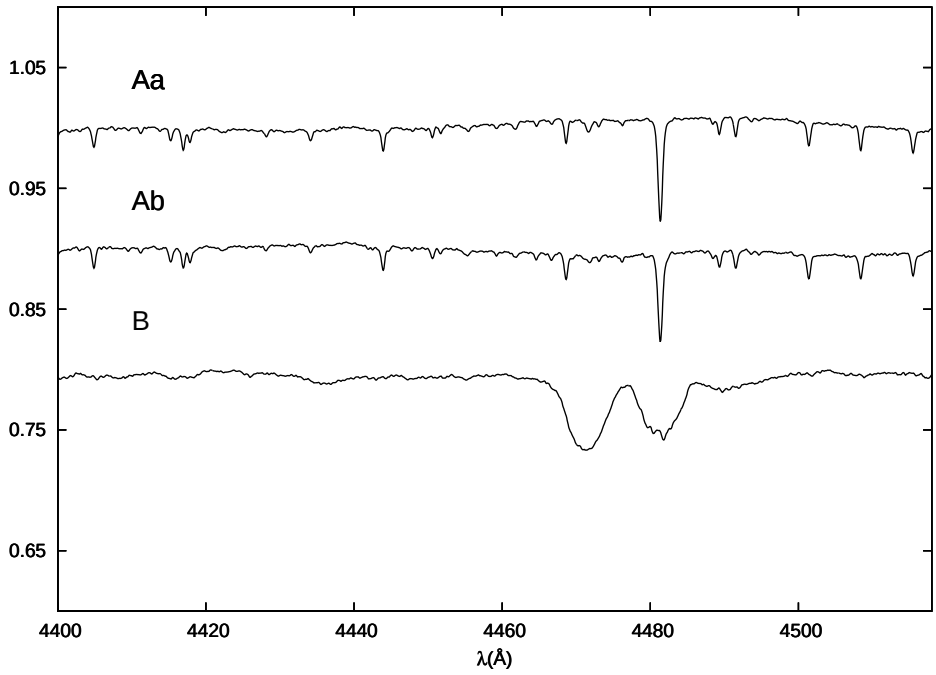
Obrázek 2.8: Individuální spektra trojhvězdy rozmotaná programem KOREL. Horní panel – složky těsné dvojhvězdy spektrálního typu A, spodní panel – vzdálenější složka spektrálního typu B, λ vlnová délka. Hodnoty na svislé ose jsou udány v relativním zářivém toku. Spektrum označené Ab je posunuté v relativním zářivém toku o -0.1. Význačnou spektrální čarou v oblasti je Hγ.

Na observatořích v SAAO a Villanově se používají zeslabovací filtry (tzv. šedé filtry), které slouží k zeslabení zářivého toku od jasných hvězd tak, aby nedošlo k saturaci nebo až poškození detektoru. Ačkoliv by zeslabovací filtry měly pohlcovat záření ve všech vlnových délkách stejně, není tomu tak. Díky tomu není transformace do Johnsonova systému ideální. Ve filtrech U a B jsou veškerá měření posunuta v magnitudě. Pakliže je tento posun pro všechna měření stejný, nepředstavuje problém pro řešení světelné křivky.

Světelné křivky kreslené pro dále zpracovávaná data jsou ukázány: v obrázku 2.16 pro měření ve filtru U, 2.17 pro měření ve filtru B a 2.18 pro měření ve filtru V. Jednotlivé zdroje jsou odděleny barevně.

2.3.2 Řešení světelné křivky programem PHOEBE

Program PHOEBE Prša a Zwitter (2005, 2011) je komplexní program určený k modelování zákrytových dvojhvězd. Program uživateli umožňuje řešit zároveň světelnou křivku i křivku radiálních rychlostí (kontrolovat parametry, které definují křivku radiálních rychlostí lze ovšem pouze nepřímo). Program je nadstavbou na známého programu WD Wilson a Devinney (1971). K minimalizaci váhovaných kvadrátů odchylek pozorované a modelové křivky (χ^2) používá program dvě metody: 1) diferenciální korekce, 2) Simplex (Nelder a Mead 1965). První uvedená metoda je obdobou Gaussovy – Newtonovy metody minimalizace funkce, která hledá minimum funkce tak, že ji v blízkém okolí prvotního odhadu $\beta^{\mathbf{0}}$ přibližuje

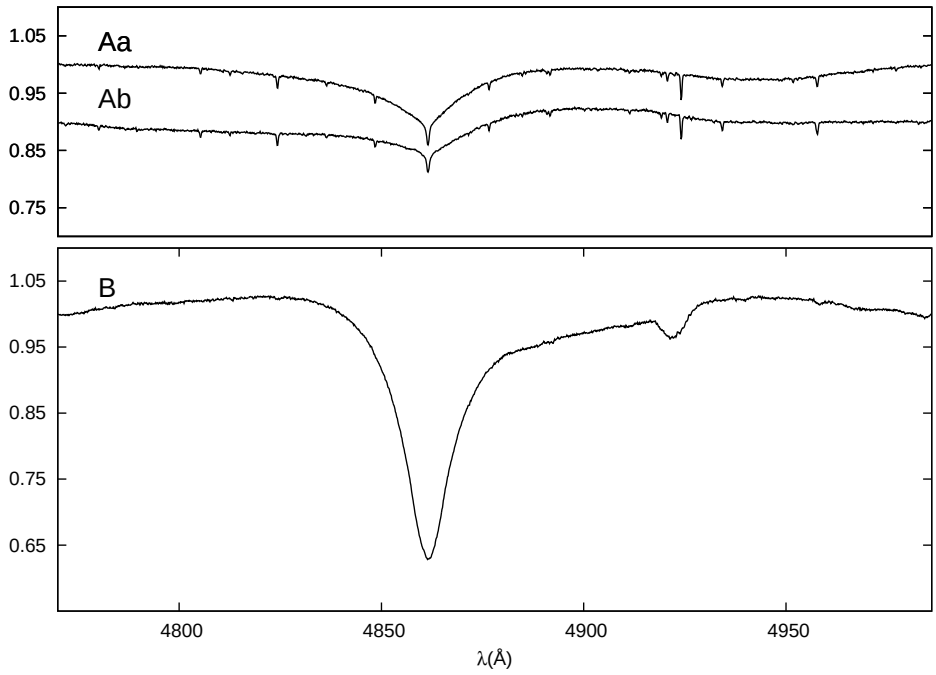


Obrázek 2.9: Individuální spektra trojhvězdy rozmotaná programem KOREL. Složky trojhvězdy (shora): primár a sekundár spektrálního typu A, terciár spektrálního typu B, λ vlnová délka. Hodnoty na svislé ose jsou udány v relativním zářivém toku. Spektrum označené Ab je posunuté v relativním zářivém toku o -0.1, spektrum označené B o -0.2. Význačnými spektrálními čarami v oblasti jsou He I 4471 Å a Mg II 4481 Å.

kvadratickou formou

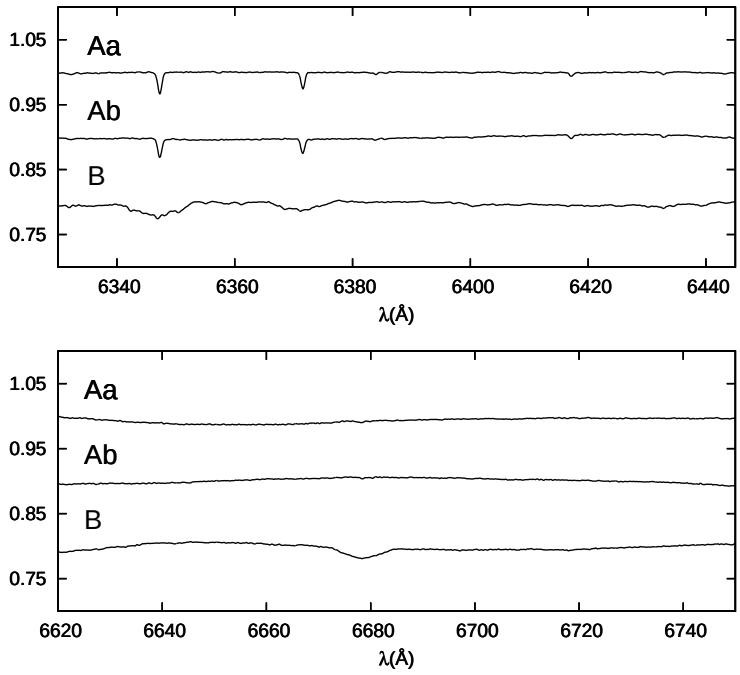
$$\beta^1 = \beta^0 - H^{-1}\mathbf{g}, \tag{2.3}$$

kde β^1 je nový odhad minima, H hessián a $\mathbf{g}$ gradient funkce. Mininalizovaná funkce není kvadratická forma, a tak je nezbytné výpočet vztahu (2.3) opakovat dokud uspokojivě nezkonverguje. Formální odhad chyb lze provést výpočtem kovarianční matice v okolí nalezeného minima. Metoda diferenciálních korekcí není schopna opustit lokální minimum a chyby odhadnuté z příslušné kovarianční matice charakterizují pouze lokální minimum (proto také říkáme, že odhad chyb je pouze formální). Program bohužel neumožňuje řešení křivky radiálních rychlostí vícenásobných systému, a tak jsem fitovala pouze světelnou křivku. Hmotový poměr složek těsné dvojhvězdy $q = K_1/K_2$ jsem dosadila z řešení KOR1 (viz tabulka 2.8). Velikost hlavní poloosy a těsné dvojhvězdy jsem odhadla na základě řešení křivky radiálních rychlostí a následně tuto hodnotu zpřesňovala na základě řešením světelné křivky nalezeného sklonu dráhy i. K jednotlivým fotometrickým měřením jsem neměla odhad jejich nejistoty. S výjimkou hvarských měření by určení chyby jednotlivých bodů bylo velmi komplikované, jelikož z ostatních observatoří nemám k dispozici původní neredukovaná měření. Jednou z možností, jak odhadnout nejistotu souboru měření, je zkoumat rozptyl měřených bodů v plochých částech světelné křivky. Tím ale předpokládáme, že v oblasti, kde zkoumáme rozptyl bodů, opravdu nedochází k žádné fyzikální změně. Zároveň je



Obrázek 2.10: Individuální spektra trojhvězdy rozmotaná programem KOREL. Horní panel – složky těsné dvojhvězdy spektrálního typu A, spodní panel – vzdálenější složka spektrálního typu B, λ vlnová délka. Hodnoty na svislé ose jsou udány v relativním zářivém toku. Spektrum označené Ab je posunuté v relativním zářivém toku o -0.1. Význačnou spektrální čarou v oblasti je Hβ.

takový odhad ovlivněn tím, kolik je v zkoumané oblasti měřených bodů. V tabulce 2.10 jsou vyneseny parametry popisující složky těsné dvojhvězdy, které jsem získala modelováním světelné křivky. Parametry, které jsem hledala, při modelování světelné křivky jsou: perioda vnitřní dráhy P, epocha primárního minima světelné křivky $T_{\mathrm{min.m}}$, sklon dráhy i, poloměry obou složek $R1$ a R_2 a efektivní teplota sekundární složky $T_{\mathrm{eff}}^{(2)}$. Abych mohla odhadnout nejistotu konvergovaných parametrů, zkoušela jsem hledat řešení světelné křivky pro různé výchozí hodnoty hledaných parametrů. Na základě toho jsem odhadla chyby těchto parametrů. Nejedná se ovšem o výsledek systematického mapování parametrického prostoru χ^2, a tak jsou uvedené nejistoty pouze orientační. Následující parametry jsem držela zafixované: hmotový poměr q, efektivní teplota primární složky $T_{\mathrm{eff}}^{(1)}$, relativní příspěvek záření třetí složky k celkovému zářivému toku od soustavy ve filtrech UBV L_3^{U}, L_3^{B}, L_3^{V} a velikost hlavní poloosy a. K popisu okrajového ztemnění jsem použila lineární zákon. Koeficienty lineárního zákona jsem dosadila z tabulek napočtených Claretem (2000). Velikost efektivní teploty primáru $T_{\mathrm{eff}}^{(1)}$ jsem odhadla na základě porovnání KORELem rozložených spektrálních profilů se syntetickými spektry (viz další kapitola). Relativní příspěvky třetí složky k celkové jasnosti jsem odhadla pomocí vztahu (1.3). Dále jsou uvedeny relativní jasnosti primáru a sekundáru $L_{1,2}^{\mathrm{U,B,V}}$. Tyto parametry program PHOEBE nehledá a je třeba je dopočíst pro dané řešení světelné křivky. Nalezené řešení jsem využila k spočítání relativních poloměrů složek těsné dvojhvězdy vzhledem k velikosti její hlavní poloosy $r_{1,2} = R_{1,2}/a$ a zdánlivé hvězdné velikosti všech složek trojhvězdy ve fil-

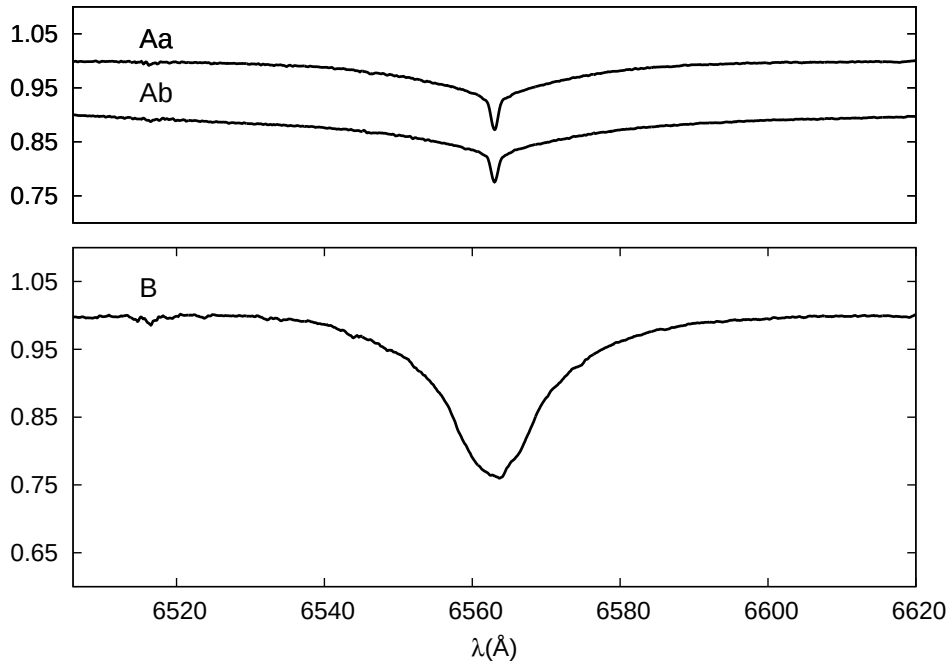


Obrázek 2.11: Individuální spektra trojhvězdy rozmotaná programem KOREL. Horní panel – význačné spektrální čáry v oblasti jsou Si II 6347 Å a Si II 6371 Å, spodní panel – význačná spektrální čára je He I 6678 Å, oba panely – složky trojhvězdy (shora): primár a sekundár spektrálního typu A, terciár spektrálního typu B, λ značí vlnovou délku. Hodnoty na svislé ose jsou udány v relativním zářivém toku.

trech Johnsonova systému $m_{1,2,3}^{\mathrm{U,B,V}}$. Ze souboru studovaných dat jsem se rozhodla vyloučit měření ve filtru U získaná ve Villanově a v SAAO. Oba soubory nejsou příliš bohaté a jsou vůči hvarským měřením posunuty v magnitudě. To, zdali je tento posun stejný ve všech fázích světelné křivky stejný, není zřejmé. Z parametrů uvedených v tabulce 2.10, ale i z spektroskopických pozorování, je zjevné, že zákryty obou složek nemohou být úplné, protože obě složky těsné dvojhvězdy jsou takřka identické a pokles jasnosti systému velmi malý.

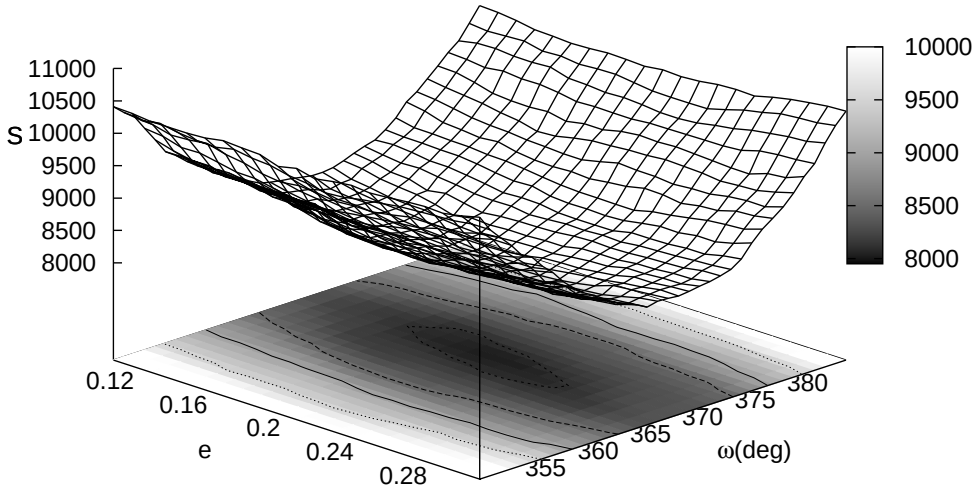
2.4 Obraz systému ξ Tau

V této chvíli bych se měla vrátit na začátek a zpřesnit parametry, které jsem při výpočtu dráhových řešení držela fixované (např. oběžná perioda složek těsné dvojhvězdy P.) Každopádně nyní mám již dostatek informací, abych odhadla vlastnosti složek ξ Tau. Dosazením do vztahu (1.24) určím hmotnosti obou složek těsné dvojhvězdy $M_{\mathrm{Aa}} = 2.29 \pm 0.19\,\mathrm{M}_\odot$, $M_{\mathrm{Ab}} = 2.20 \pm 0.15\,\mathrm{M}_\odot$. Dosazením do vztahu (1.23) určím hmotnost terciáru $M_{\mathrm{B}} = 4.88 \pm 0.94\,\mathrm{M}_\odot$ a opětovným dosazením do vztahu (1.24) velikost sklonu vnější dráhy $i' = 57 \pm 6\,\mathrm{deg}$. Dosazením do vztahu (1.21) můžeme nyní určit velikost hlavní poloosy vnitřní $a = 25.79 \pm 0.80\,\mathrm{R}_\odot$ i vnější $a' = 245 \pm 30\,\mathrm{R}_\odot$ dráhy. Schéma systému je ukázáno v obrázku 3.3. Nejistoty parametrů uvedených v tomto odstavci jsem odhadla na základě hodnot uvedených v tabulkách 2.8 a 2.10. Díky tomu, že nemám



Obrázek 2.12: Individuální spektra trojhvězdy rozmotaná programem KOREL. Horní panel – složky těsné dvojhvězdy spektrálního typu A, spodní panel – vzdálenější složka spektrálního typu B, λ vlnová délka. Hodnoty na svislé ose jsou udány v relativním zářivém toku. Spektrum označené Ab je posunuté v relativním zářivém toku o -0.1. Význačnou spektrální čarou v oblasti je Hα.

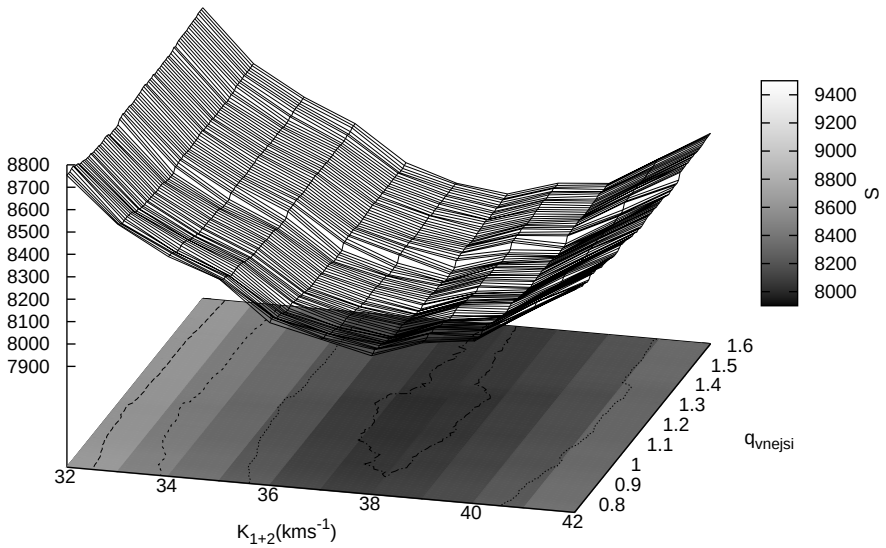
odhadnuty nejistoty všech dráhových elementů, představují nejistoty parametrů uvedených v tomto odstavci spíše spodní odhady skutečné nejistoty.



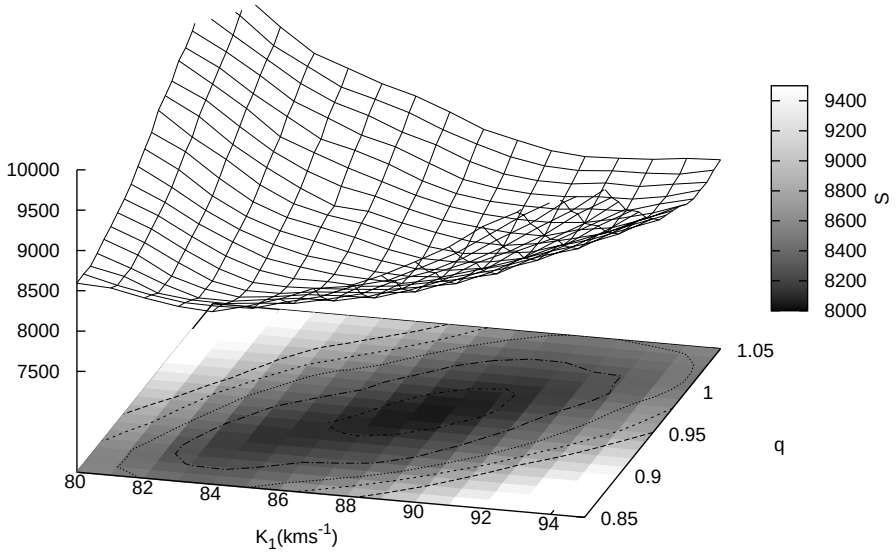
Obrázek 2.13: Výsledek mapování funkce (1.31) v okolí dráhového řešení KOR1 z tabulky 2.8. Mapování bylo provedeno ve výstřednosti vnější dráhy e' a argumentu pericentra vnější dráhy ω'. S označuje velikost funkce (1.31). Ostatní dráhové parametry byly při mapování zafixované na hodnotách dráhového řešení KOR1 uvedeného v tabulce 2.8.

Tabulka 2.9: Základní charakteristika fotometrických pozorování použitých v práci. ΔT(RJD) je časový interval pokrytý pozorováními z daného souboru, N počet měření v daném souboru. [1] Pouze pozorování ve filtrech V a B byla použita v této práci. Zdroje: hvar = Observatoř Hvar, Chorvatsko, hip = družice Hipparcos, saao = South African Astronomical Observatory, Jihoafrická Republika, vill = Villanova APT, USA

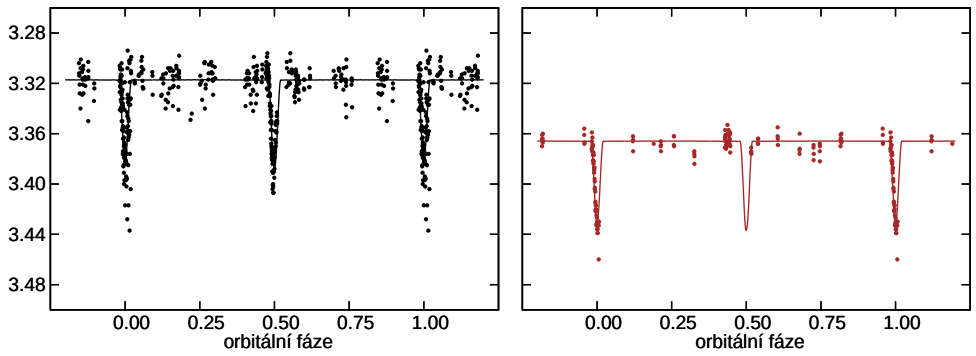
Soubor č.	ΔT(RJD)	filtry	N	zdroj
1	54116–55945	UBV	1308	hvar
2	47909–48695	HIP	69	hip
3	55569–55579	UBV[1]	76	saao
4	55883–55956	UBV	401	vill



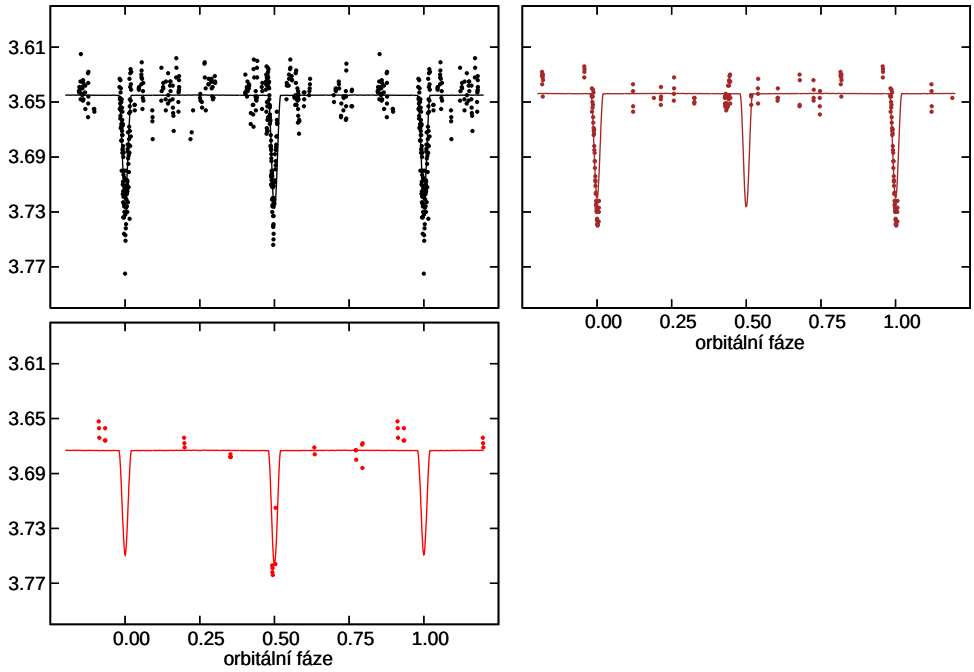
Obrázek 2.14: Výsledek mapování funkce (1.31) v okolí dráhového řešení KOR1 z tabulky 2.8. Mapování bylo provedeno ve hmotovém poměru q' obou složek těsné dvojhvězdy a terciáru spektrálního typu B a poloviční amplitudě křivky radiálních rychlostí těžiště těsné dvojhvězdy K_{1+2}. S označuje velikost funkce (1.31). Ostatní dráhové parametry byly při mapování zafixované na hodnotách dráhového řešení KOR1 uvedeného v tabulce 2.8.



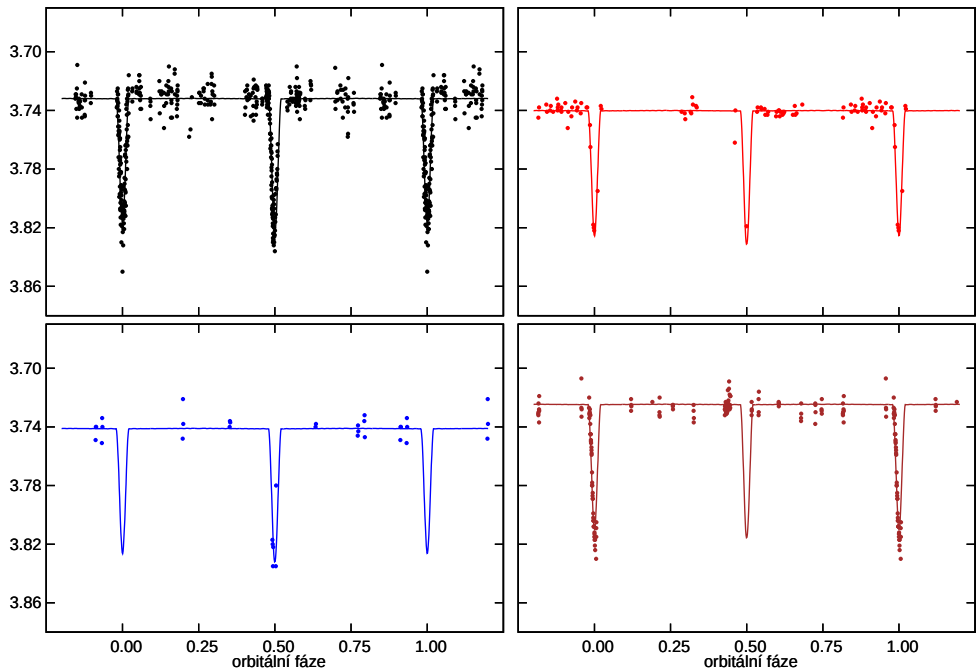
Obrázek 2.15: Výsledek mapování funkce (1.31) v okolí dráhového řešení KOR1 z tabulky 2.8. Mapování bylo provedeno ve hmotovém poměru q složek těsné dvojhvězdy a poloviční amplitudě křivky radiálních rychlostí primární složky těsné dvojhvězdy K_1. S označuje velikost funkce (1.31). Ostatní dráhové parametry byly při mapování zafixované na hodnotách dráhového řešení KOR1 uvedeného v tabulce 2.8.



Obrázek 2.16: Studovaná fotometrická pozorování ξ Tau v Johnsonově filtru U. Fázový diagram je kreslený pro periodu vnitřní dráhy P = 7.146656 dne a epochu minima T_{min} = RJD 48302.637. Plná čára znázorňuje model světelné křivky daný parametry uvedenými v tabulce 2.10. Zdroje měření: černá Observatoř Hvar, a hnědá Villanova APT. Modelové primární minimum (fáze 0.0) je mělčí než minimum sekundární (fáze 0.5).



Obrázek 2.17: Studovaná fotometrická pozorování ξ Tau v Johnsonově filtru B. Fázový diagram je kreslený pro periodu vnitřní dráhy P = 7.146656 dne a epochu minima T_{min} = RJD 48302.637. Plná čára znázorňuje model světelné křivky daný parametry uvedenými v tabulce 2.10. Zdroje měření: černá Observatoř Hvar, červená SAAO a hnědá Villanova APT. Modelové primární minimum (fáze 0.0) je mělčí než minimum sekundární (fáze 0.5).



Obrázek 2.18: Studovaná fotometrická pozorování ξ Tau v Johnsonově filtru V. Fázový diagram je kreslený pro periodu vnitřní dráhy P = 7.146656 dne a epochu minima T_{min} = RJD 48302.637. Plná čára znázorňuje model světelné křivky daný parametry uvedenými v tabulce 2.10. Zdroje měření: černá Observatoř Hvar, červená SAAO, modrá družice Hipparcos a hnědá Villanova APT. Modelové primární minimum (fáze 0.0) je mělčí než minimum sekundární (fáze 0.5).

Tabulka 2.10: Výsledek modelování světelné křivky ξ Tau. Uvedené parametry jsou: P oběžná perioda, $T_{\mathrm{min.m}}$ epocha primárního minima světelné křivky, i sklon dráhy, $T_{\mathrm{eff}}^{(2)}$ efektivní teplota sekundáru, R_1 poloměr primáru, R_2 poloměr sekundáru, a velikost hlavní poloosy, q hmotový poměr, $T_{\mathrm{eff}}^{(1)}$ efektivní teplota primáru a L_3^{X} relativní jasnost terciáru v příslušném filtru $X \epsilon \{U, B, V\}$. Dále jsou uvedeny parametry: relativní poloměry primáru a sekundáru $r_{1,2} = R_{1,2}/a_{\mathrm{A}}$ vzhledem k velikosti hlavní poloosy těsné dvojhvězdy a, relativní jasnost primáru L_1^{X}, relativní jasnost sekundáru L_2^{X} a zdánlivé hvězdné velikosti m_i^{X} všech složek trojhvězdy ve filtrech Johnsonova systému, i = 1 primár, i = 2 sekundár, i = 3 terciár.

Hledané parametry	Hodnota		
P(d)	7.146656 ± 0.000020		
$T_{\mathrm{min.m}}$(RJD)	48302.6371 ± 0.0010		
$i(^\circ)$	86 ± 1		
$T_{\mathrm{eff}}^{(2)}$(K)	9450 ± 200		
$R_1(\mathrm{R}_\odot)$	2.1 ± 0.5		
$R_2(\mathrm{R}_\odot)$	1.7 ± 0.5		
$r_1 = R_1/a$	0.081 ± 0.02		
$r_2 = R_2/a$	0.066 ± 0.02		
Fixované parametry	**Hodnota**		
$a(\mathrm{R}_\odot)$	25.79		
$q = K_1/K_2$	0.959		
$T_{\mathrm{eff}}^{(1)}$(K)	9300		
L_3^{U}	0.69		
L_3^{B}	0.64		
L_3^{V}	0.60		
Dopočtené parametry	**Filtr**		
	U	B	V
L_1	0.18	0.21	0.23
L_2	0.13	0.15	0.17
m_1(mag)	5.19	5.34	5.32
m_2(mag)	5.49	5.66	5.65
m_3(mag)	3.71	4.12	4.28

3. Srovnávání syntetických spekter s pozorovanými spektry

V rámci diplomové práce jsem napsala program (s pracovním názvem Interpol) sloužící k porovnávání syntetických spekter vícenásobných hvězdných systémů se spektry pozorovanými. V současné době již existuje řada sítí syntetických spekter. Mojí snahou bylo vyvinout program, jež by interpoloval v těchto sítích a metodou nejmenších čtverců hledal nejlepší shodu mezi pozorovanými a synetickými spektry a tím jsem mohla odhadovat některé hvězdné parametry.

Tato kapitola je věnována především stručnému popisu programu, možnostem jeho využití a stupni vývoje programu. V závěru kapitoly je předvedena funkčnost programu na spektrech ξ Tau a V346 Cen. Program je psaný v jazyce C++ a je stále nehotový. Stupeň vývoje programu je ale dostatečný, takže jej již lze používat k analýze spekroskopických pozorování.

3.1 Sítě syntetických spekter

V současné době program interpoluje ve třech sítích syntetických spekter. Těmi sítěmi jsou:

1. OSTAR: Síť 690 syntetických spekter vytvořili Lanz a Hubený (2002). Modely hvězdných atmosfér napočítali programem TLUSTY Hubený (2012c) a z nich syntetická spektra programem SYNSPEC Hubený (2012a). Jedná se o modely planparalelních atmosfér v hydrostatické rovnováze. Započítané jsou i odchylky od lokální termodynamické rovnováhy. Rozsah sítě: v efektivní teplotě je $T_{\mathrm{eff}} \epsilon\ [27500 : 55000]\,\mathrm{K}$ s krokem $\Delta T_{\mathrm{eff}} = 2500\,\mathrm{K}$, v gravitačním zrychlení $\log g_{\mathrm{max}} \epsilon\ [3.0 : 4.75]\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$ s krokem $\Delta \log g = 0.25\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$. Maximální rozsah v $\log g$ nemají všechny efektivní teploty stejný. Spodní limit gravitačního zrychlení je dán teoretickou hodnotou Eddingtonovy meze. Rozsah v metalicitě Z je od dvojnásobku sluneční metalicity až po nulovou. Obsah helia Y je roven slunečnímu a mikroturbulentní rychlost je rovna $v_t = 10\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

2. BSTAR: Síť 1540 syntetických spekter vytvořili Lanz a Hubený (2007). Modely hvězdných atmosfér napočítali programem TLUSTY Hubený (2012c) a z nich syntetická spektra programem SYNSPEC Hubený (2012a). Jedná se o modely planparalelních atmosfér v hydrostatické rovnováze. Započítané jsou i odchylky od lokální termodynamické rovnováhy. Rozsah sítě: v efektivní teplotě je $T_{\mathrm{eff}} \epsilon\ [15000 : 30000]\,\mathrm{K}$ s krokem $\Delta T_{\mathrm{eff}} = 1000\,\mathrm{K}$, v gravitačním zrychlení $\log g_{\mathrm{max}} \epsilon\ [1.75 : 4.75]\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$ s krokem $\Delta \log g = 0.25\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$. Maximální rozsah v $\log g$ nemají všechny efektivní teploty. Spodní limit na gravitační zrychlení je dán teoretickou hodnotou Eddingtonovy meze. Rozsah v metalicitě Z je od dvojnásobku sluneční metalicity až po nulovou. Obsah helia Y je roven slunečnímu a mikroturbulentní rychlost je rovna $v_t = \{2, 10\}\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

3. POLLUX: Síť syntetických spekter napočítali Palacios a kol. (2011). K výpočtu modelů hvězdných atmosfér použili řadu dostupných kódů (jmenovitě CMFGEN – Hillier a Miller 1998, ATLAS12 – Kurucz 2005, MARCS – Gustafsson 1975) a pokryli tak obrovské množství parametrů. V této práci jsem používala pouze spektra napočtená z Kuruczových modelů. Jedná se o modely planparalelních atmosfér v hydrostatické rovnováze. Odchylky od lokální termodynamické rovnováhy nejsou v těchto modelech započteny. Spektra byla z modelů atmosfér napočtena programem SYNSPEC Hubený (2012a). Rozsah sítě: v efektivní teplotě je $T_{\rm eff}\,\epsilon\,[7000:15000]\,{\rm K}$ s krokem $\Delta T_{\rm eff} = 250\,{\rm K}$, v gravitačním zrychlení $\log g\,\varepsilon\,[3.50:5.00]\,{\rm cm\,s^{-2}}$ s krokem $\Delta \log g = 0.50\,{\rm cm\,s^{-2}}$, v metalicitě Z je od nulové až po sluneční. Obsah helia Y je roven slunečnímu a mikroturbulentní rychlost je rovna $v_t = 2\,{\rm km\,s^{-1}}$.

Síť, kterou používáme, je tedy do určité míry nekonzistentní. Tam kde se výše uvedené části překrývají se jednotlivá spektra zcela neshodují, je to dáno tím, že jednotlivé její části byly počítány „s jinou fyzikou“. Celkový rozsah používané sítě v efektivní teplotě je $T_{\rm eff}\,\epsilon\,[7000:55000]\,{\rm K}$. V gravitačním zrychlení je rozsah pokrytý všemi spektry „pouze“ $\log g\,\epsilon\,[3.50:4.75]$, ale v rámci některých podmnožin sítě je tento rozsah podstatně větší.

3.2 Program Interpol

Hlavní nevýhodou výše uvedených sítí syntetických spekter je to, že pokrývají pouze diskrétní množinu parametrů $\mathrm{T_{eff}}$, $\log g$ a Z. Program Interpol v této síti interpoluje, a tak v mezích sítě dostaneme spojitý parametrický prostor, čímž danou nevýhodu odstraňuje. Abychom mohli interpolované spektrum porovnávat s pozorovaným je třeba jej dále rotačně rozšířit na pozorovanou promítnutou rotační rychlost, přenásobit relativním zářivým $L_{\rm r}$ výkonem, pakliže se jedná o složku spektra vícenásobného systému a posunout spektrum o příslušnou radiální rychlost. Protože se absolutně kalibrovaná spektrometrie opravená o atmosferickou a přístrojovou extinkci takřka nepořizuje, pracuje program pouze se spektry normalizovanými vůči spojitému hvězdnému záření. Kroky vedoucí k napočítání syntetického spektra jsou:

1. Nejprve je nezbytné připravit síť spekter tj. interpolovat ji do požadovaného rozlišení. K tomu jsem napsala pomocný program PREPGRID. Síť spekter je možné připravit tak, že je ekvidistatní ve vlnové délce, nebo v radiální rychlosti. V druhém případě je i bod spektra λ_i volen dle vztahu

$$\lambda_{\rm i} = \lambda_1 \left(1 + \frac{RV}{c}\right)^{i-1} \tag{3.1}$$

kde λ_1 je první bod spektra, RV radiální rychlost a c je rychlost světla. K interpolaci v jednom rozměru používám kubické spline. Kód jsem převzala z Press a kol. (2007) a dále jej upravila pro potřeby programu. Jakmile je síť připravena je možné v ní interpolovat v parametrech $\mathrm{T_{eff}}$ a $\log g$. K interpolaci nikdy nepoužíváme všechna dostupná spektra, ale pouze n (kde velikost n je dána volbou uživatele, ale nedoporučuje se používat

$n \geq 6$) spekter, která leží v okolí parametru v němž interpolujeme. Jestliže tedy chceme nalézt spektrum, určené parametry: $\log g = 4.2\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$, $T_{\mathrm{eff}} = 18300\,\mathrm{K}$ a $n = 5$ tak program nejprve interpoluje v $\log g$ v rovinách o teplotách $T_{\mathrm{eff}} = \{16000, 17000, 18000, 19000, 20000\}\,\mathrm{K}$. V těchto spektrech poté interpoluje v efektivní teplotě.

2. Následně je třeba spektrální profil roztočit na příslušnou promítnutou rotační rychlost $\mathrm{v_{rot}} \sin i$. Za tím účelem Interpol volá program ROTINS (Hubený 2012b). Kromě rotačního rozšíření spektrálních čar je program ROTINS schopen vypočíst i přístrojové rozšíření profilu.

3. Spočtený profil je třeba posunou v radiální rychlosti o hodnotu danou vztahem (1.9). Je vhodné vždy srovnávat oblasti o několik Å kratší než, jak dlouhá jsme si připravili spektra sítě. Interval vlnových délek, ve kterém program srovnává syntetická a pozorovaná spektra, se během srovnávání nemění. Pakliže nainterpolované spektrum posuneme v radiální rychlosti, pak bude na jedné straně kousek spektra „chybět“ (program Interpol chybějící oblast doplní spojitým zářením). Abychom se vyhnuli potížím s chybějící oblastí, srovnáváme v intervalu vlnových délek kratším než je délka spekter sítě.

4. Pakliže pracujeme se spektrem vícenásobného systému, tak v libovolném bodě spektra pro relativní intenzitu I_{p} platí

$$I_{\mathrm{p}} = \sum_{j=0}^{k} L_{\mathrm{j}} I_{\mathrm{j}}, \tag{3.2}$$

kde I_{j} je intenzita spektra j složky systému v dané vlnové délce a L_{j} je relativní příspěvek j složky k celkové jasnosti systému. Díky tomu, že jsou spektra normalizovaná vůči spojitému záření, je normalizovaná i celková jasnost systému L

$$L = \sum_{j=0}^{k} L_j = 1. \tag{3.3}$$

Interpolované syntetické spektrum je tak třeba přenásobit hodnotou L_j. Obecně platí, že $L_j = L_j(\lambda)$. Na kratších úsecích spektra lze tuto závislost zanedbat a předpokládat, že $L_j = \mathrm{konst}$.

5. V posledním kroku jsou vysčítána spektra jednotlivých složek a spektrum vícenásobného systému je hotové.

V dalším kroku chceme takto nainterpolovaná spektra srovnávat s pozorovanými a objektivně vybírat taková, která se s pozorovanými nejlépe shodují. Snažíme se tedy minimalizovat χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{I_i^{\mathrm{obs}}(\lambda) - \left(\sum_{j=1}^{k} I_j^{\mathrm{synt}}\right)_i (\lambda \,|\, \mathbf{p})}{\sigma_i} \right)^2, \tag{3.4}$$

kde i indexuje body spekter, j indexuje složky systému, I^{obs} značí pozorované spektrum, I^{synt} označuje syntetické spektrum, vektor $\mathbf{p} = \{T_{\mathrm{eff}}, \log g, v_{\mathrm{rot}} \sin i, L_{\mathrm{r}}, RV\}$

hledané parametry a σ_i nejistotu i bodu pozorovaného spektra. K minimalizaci funkcionálu používám Simplex (Nelder a Mead 1965), simplexový kód jsem převzala z Press a kol. (2007) a dále jej upravila pro potřeby programu. Simplex je jednou z nejjednodušších (ale poměrně silných) metod určených k minimalizaci funkcí více proměnných. Jeho hlavní výhodou je to, že nevyžaduje znalost derivací funkce, které bych musela počítat numericky a tím riskovala, že se dostanu do problémů souvisejících s omezenou přesností reálných čísel v počítači. Krom Simplexu jsem dále zkoušela Powellovu metodu sdružených směrů Powell (1964). Vycházela jsem opět z kódu převzatého z Press a kol (2007). Simplex není schopen zmapovat celý prostor parametrů. Konvergenci k globálnímu minimu funkcionálu (3.4) metoda nezaručuje, a proto je vhodné program spustit několikrát z lokálního minima funkcionálu nalezeného v předchozím běhu programu. Pakliže je v dostatečné blízkosti významější minimum, je velmi pravděpodobné, že jej Simplex najde.

K datu (31.3.2012) je program schopen minimalizovat funkcionál (3.4) pro libovolně násobný systém v parametrech $\mathbf{p} = \{T_{\mathrm{eff}}, \log g, v_{\mathrm{rot}} \sin i, L_{\mathrm{r}}, RV\}$. Program je schopen pracovat se spektry ekvidistatními ve vlnové délce, nebo v radiální rychlosti. Je možné najednou srovnávat libovolný počet spektrálních oblastí. Program je uzpůsoben pro práci se spektry, která jsou ve formátu výstupu programu KOREL. Za vstup do programu Interpol je možné dát jak oddělená spektra jednotlivých složek vícenásobného systému (pomocí spektrálního disentanglingu), tak i přímo pozorovaná složená spektra. Interpolovat lze v celé síti, nebo si uživatel může rozsah $\mathrm{T_{eff}}$ a $\log g$ omezit a hledat řešení pouze na podprostoru parametrů. Pakliže máme dobře odhadnuté parametry $\mathbf{p} = \{T_{\mathrm{eff}}, \log g, v_{\mathrm{rot}} \sin i, L_{\mathrm{r}}\}$, lze program použít k měření radiálních rychlostí. V této práci jsem takto radiální rychlosti ξ Tau měřila. Dráhové řešení spočtená na takto měřených radiálních rychlostech jsou uvedena v tabulkách 2.4, 2.5 a 2.6.

3.3 První srovnání programem Interpol

Syntetické profily jsem srovnávala s profily jednotlivých složek rozložených programem KOREL. Rozmotané profily nemají vždy dokonale rovná hvězdná kontinua (viz obrázky 2.8 – 2.12, proto je nezbytná jejich opětovná rektifikace. Tu jsem provedla programem SPEFO. Abych se ujistila, že v okolí nalezeného minima nejsou podstatně významnější minima funkcionálu (3.4), spustila jsem program z v předchozím běhu nalezeného minima několikrát za sebou. Parametrický prostor v okolí robustních řešení je obvykle velmi komplikovaný a často má charakter údolí posetého řadou lokálních minim, která jsou ovšem takřka rovnocenná. Simplex najde vždy jedno z těchto minim. Testovací srovnávání jsem provedla na několika hvězdných systémech. Kromě ξ Tau je uveden výsledek srovnávání pro dvojhvězdný systém V346 Cen (program byl ovšem testován i na dalších hvězdných systémech).

Srovnávání syntetických spekter se spektry ξ Tau

Program jsem použila k odhadu výše uvedených parametrů všech složek ξ Tau. Srovnání jsem prováděla najednou v následujících spektrálních oblastech: 4280 – 4400 Å, 4400 – 4518 Å a 6506 – 6620 Å. Výsledek srovnávání je ukázán v obráz-

Tabulka 3.1: Výsledek srovnávání syntetických hvězdných spekter se spektry jednotlivých složek ξ Tau programem Interpol. Značení složek systému: Aa = primární složka těsné dvojhvězdy, Ab = sekundární složka těsné dvojhvězdy, B = vzdálenější třetí složka. Uvedené parametry: efektivní teplota $T_{\rm eff}$, gravitační zrychlení $\log g$, promítnutá rotační rychlost $v_{\rm rot} \sin i$, relativní jasnost $L_{\rm r}$ a rychlost těžiště trojhvězdy vůči pozorovateli γ.

Hvězdný systém		ξ Tau	
Složka trojhvězdy	B	Aa	Ab
$T_{\rm eff}$(K)	15100	9800	9300
$\log g$(cm s^{-2})	4.3	4.6	4.2
$v_{\rm rot} \sin i$(km s^{-1})	230	28	43
$L_{\rm r}$	0.68	0.14	0.18
γ(km s^{-1})	11	8	5

ku 3.1. Nalezené parametry popisující složky trojhvězdy jsou uvedeny v tabulce 3.1. Značení jednotlivých složek trojhvězdy odpovídá tomu v obrázcích 2.8 – 2.12. Krom výše uvedených spekter jsem měla k dispozici i dvě spektra ξ Tau z družice IUE (International Ultraviolet Explorer). Spektra pokrývají rozsah vlnových délek 1150 – 1750 Å a 1900 – 3120 Å. Vzhledem k tomu, že jsou tato spektra velmi zašumělá a jejich normalizace vůči spojitému záření hvězdy je velmi komplikovaná, tak jsem srovnání syntetických spekter s těmito spektry do práce nezařadila. Výsledky získané srovnáváním těchto spekter se syntetickými nejsou v rozporu s výsledky uvedenými v tabulce 3.1.

Srovnávání syntetických spekter se spektry V346 Cen

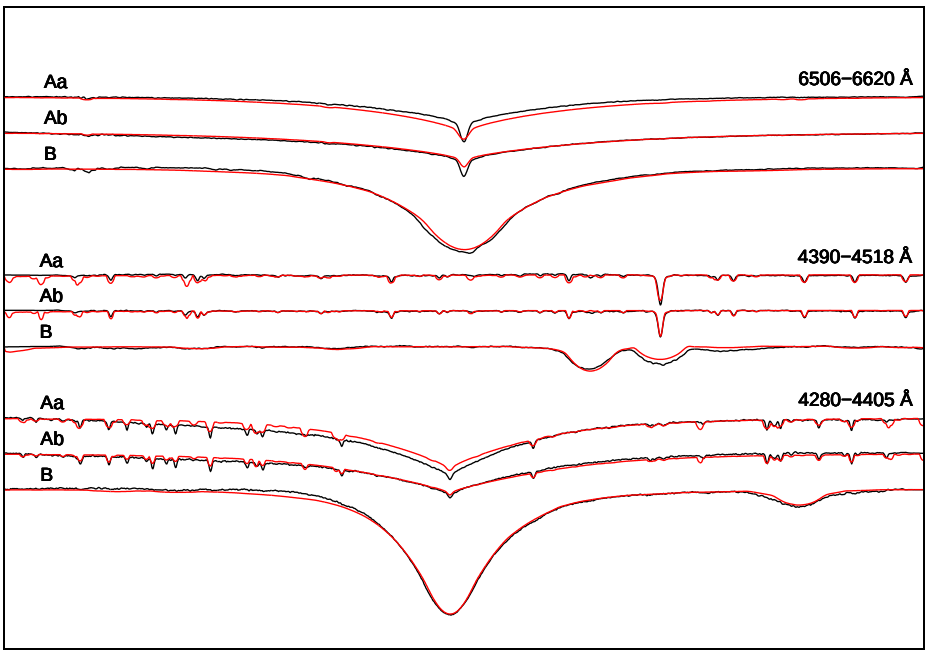
V346 Cen je spektrosopická dvojhvězda. Její KORELem rozložené profily laskavě poskytl dr. P. Mayer. V této práci se nevěnujeme studiu systému a profily nám slouží pouze k demostraci funkčnosti programu Interpol. Srovnání jsem prováděla najednou v následujících spektrálních oblastech: 4000 – 4589 Å a 4840 – 4886 Å. Výsledek srovnávání je ukázán v obrázku 3.2. Nalezené parametry popisující složky dvojhvězdy jsou uvedeny v tabulce 3.2. Primární složka je označena A, sekundární B.

3.4 Odhad nejistoty měřených toků ve spektru

Nejistotu parametrů odpovídající lokálnímu extrému určíme mapováním prostoru parametrů v okolí nalezeného lokálního minima. Abychom mohli χ^2 použít k odhadu nejistoty musí být náš model správně a musí být správně odhadnuty nejistoty σ_i bodů pozorovaného spektra. Jeden z vhodných způsobů popisuje je založen na odhadu poissonovského šumu dle vztahu

$$N = \sqrt{S} \tag{3.5}$$

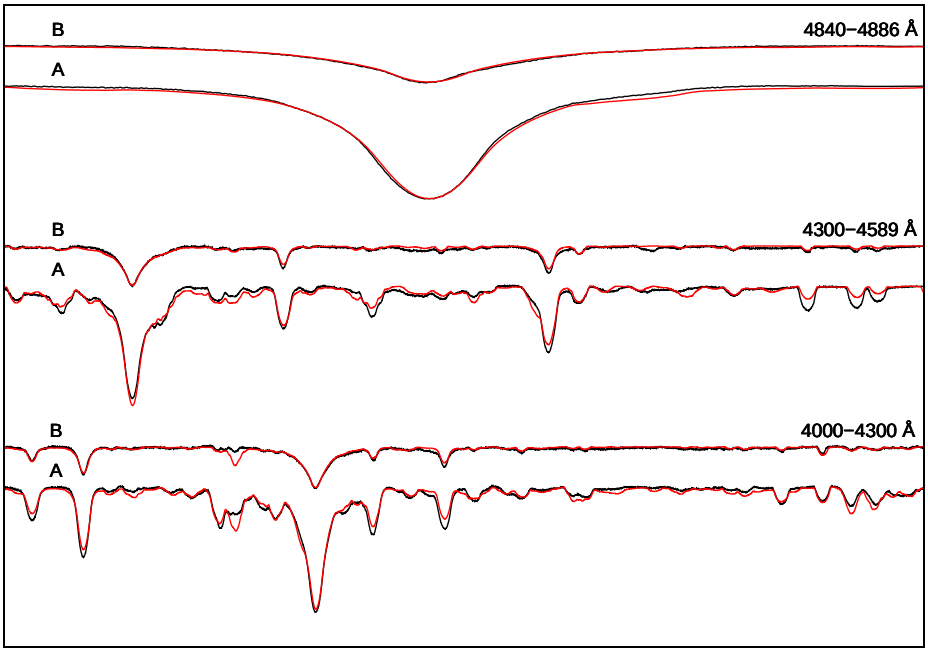
kde S je počet detekovaných fotonů a N je nejistota této hodnoty (nebo též šum). Chybu jednotlivých bodů spektra lze přímo odhadnout dosazením do vzta-



Obrázek 3.1: Výsledek srovnávání spekter složek ξ Tau získaných disentanglingem (černá barva) se spektry syntetickými (červená barva) programem Interpol. Značení složek systému: Aa = primární složka těsné dvojhvězdy, Ab = sekundární složka těsné dvojhvězdy, B = vzdálenější třetí složka. Na pravé straně obrázku jsou uvedeny rozsahy srovnávaných spektrálních oblastí ve vlnové délce.

Tabulka 3.2: Výsledek srovnávání syntetických hvězdných spekter se spektry jednotlivých složek V346 Cen programem Interpol. Značení složek systému: A = primární složka dvojhvězdy, B = sekundární složka dvojhvězdy. Uvedené parametry: efektivní teplota $T_{\rm eff}$, gravitační zrychlení $\log g$, promítnutá rotační rychlost $v_{\rm rot} \sin i$, relativní jasnost $L_{\rm r}$ a rychlost těžiště dvojhvězdy vůči pozorovateli γ.

Hvězdný systém	V346 Cen	
Složka trojhvězdy	A	B
$T_{\rm eff}$(K)	27800	20900
$\log g$(cm s^{-2})	3.7	3.8
$v_{\rm rot} \sin i$(km s^{-1})	180	130
L_r	0.79	0.21
γ(km s^{-1})	-2	-5



Obrázek 3.2: Výsledek srovnávání spekter složek V346 Cen získaných disentanglingem (černá barva) se spektry syntetickými (červená barva) programem Interpol. Značení složek systému: A = primární složka dvojhvězdy, B = sekundární složka dvojhvězdy. Na pravé straně obrázku jsou uvedeny rozsahy spekter ve vlnové délce.

hu (3.5). Pokud chceme být úplně přesní, musíme k šumu od hvězdy N_{star} přičíst šum od kalibračních snímků

$$N_{\text{all}} = \sqrt{N_{\text{star}}^2 + N_{\text{flat}}^2 + N_{\text{zero}}^2} \tag{3.6}$$

kde N_{all} je celkový šum, N_{flat} šum přidaný podělením snímku rovnoměrným polem a N_{zero} šum přidaný odečtením snímku s nulovou expozicí (význam snímků je vysvětlen v příloze A). Hodnota šumu N_{flat} a N_{zero} je zpravidla velmi malá, a tak je lze zanedbat. Při rektifikaci je třeba poté odhadnuté nejistoty podělit stejným modelem spojitého záření hvězdy jako body spektra.

Diskuse výsledků

V této kapitole jsou diskutovány chyby, kterých jsem se dopustila při měření a jejich interpretaci.

3.5 Spektroskopie ξ Tau

V této sekci jsou diskutovány chyby, jichž jsem se dopustila při měření radiálních rychlostí a při modelování křivky radiálních rychlostí.

Měření radiálních rychlostí

Ani jedna z použitých metod (manuální nebo automatická) nedává odhad nejistoty měřených radiálních rychlostí. Nejistotu měřených radiální rychlosti můžeme odhadnout na základě rozptylu měřených bodů okolo spočteného dráhového řešení. To můžeme udělat pouze v případě, že jsou nejistoty všech měřených radiálních rychlostí takřka identické. Nejistota měřených radiálních rychlostí je dána především blendováním spektrálních čar.

V případě radiálních rychlostí měřených manuálně jsem se rovnost nejistot měřených radiálních rychlostí snažila zajistit následujícím postupem: 1) Ačkoliv jsem měřila radiální rychlosti na čarách terciáru spektrálního typu B, nepoužila jsem tato měření k výpočtu dráhových řešení. Spektrální čáry terciáru jsou silně rozšířené vysokou rotační rychlostí této složky trojhvězdy. Jsou tedy velmi široké a takřka vždy blendované. 2) V okamžicích blízkých konjunkci těsné dvojhvězdy jsem neměřila radiální rychlosti na jejích spektrálních čarách. Radiální rychlosti jsem měřila pouze v případě, že čáry obou složek těsné dvojhvězdy byly velmi dobře oddělené.

V případě radiálních rychlostí měřených automaticky programem Interpol jsem měřila radiální rychlosti všech složek trojhvězdy ve všech fázích vnější i vnitřní dráhy a všechna měření použila k výpočtu dráhových řešení. Hlavní motivací pro tento postup bylo otestovat program Interpol k měření radiálních rychlostí. K měření radiálních rychlostí jsem nepoužila výsledný model systému, ale předběžný, který jsem napočítala ve chvíli, kdy jsem ještě neměla k dispozici všechna data studovaná v této práci (srovnej tabulky 2.3 a 3.1). Do jaké míry volba lepšího modelu ovlivní velikosti měřených radiálních rychlostí, by se mělo nyní otestovat tím, že pro v dané chvíli nejlepší model (viz tabulka 3.1) změřím opětovně radiální rychlosti. Nejjednodušší metodou k odhadu nejistoty měřených radiálních rychlostí je mapování χ^2.

Dráhová řešení

Dráhová řešení uvedená v tabulkách 2.4, 2.5 a 2.6 byla hledána iterativně, tj. program FOTEL jsem spouštěla vždy několikrát z v předešlém běhu nalezeného minima. Proces jsem několikrát opakovala a výsledky uvedené ve výše zmíněných tabulkách jsou velmi robustní. Program FOTEL hledá dráhové řešení minimalizací sumy kvadrátů rozdílů pozorovaných a modelových bodů. K minimalizaci této sumy používá Simplex (Nelder a Mead 1965). Počet hledaných dráhových elementů je poměrně malý, a tak je pravděpodobnější, že program nalezne globální

minimum (zaručeno to ovšem není). V okolí minima program spočte kovarianční matici a odhadne tím chyby nalezených parametrů. Jeden z hlavních problémů řešení uvedených v tabulkách 2.4, 2.5, 2.6 je, že vstupní radiální rychlosti nebyly váhovány. Další spočívá v tom, že vnější dráha trojhvězdy se stáčí v prostoru s periodou $P_E \approx 125$ let. Naštěstí radiální rychlosti z jedné podsezóny pokrývají nejvýše deset let (viz obrázek 2.1) a tedy nedojde k velmi výrazné změně argumentu pericentra ω během jedné podsezóny. Díky tomu, že program FOTEL není schopen modelovat stáčení přímky apsid vnější dráhy, není možné jej použít k modelování všech měřených radiálních rychlostí. Dráhové řešení číslo sedm spočtené s užitím radiálních rychlostí měřených na spektrálních čarách obou složek těsné dvojhvězdy v programu SPEFO (tj. manuálně) dávají křivku s nejmenším rozptylem měřených bodů okolo nalezeného dráhového řešení rms, a tak představují nejpřesnější řešení v případě, že se chyby jednotlivých radiálních rychlostí příliš neliší. Dráhová řešení spočtená na radiálních rychlostech měřených automaticky i manuálně se dobře shodují, velká řada dráhových elementů se shoduje dokonce i v rámci jejich odhadované nejistoty. To svědčí o tom, že radiální rychlosti měřené programem Interpol jsou ve shodě s těmi měřenými manuálně programem SPEFO.

Program KOREL modeluje stáčení vnější dráhy konstantní rychlostí

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega}(t - t_0 - \Delta t), \tag{3.7}$$

kde ω_0 je velikost argumentu pericentra pro referenční epochu t_0, $\dot{\omega}$ = konst. rychlost stáčení přímky apsid a Δt velikost light time efektu daná vztahem (1.27). Vzhledem k tomu, že program k minimalizaci funkce (1.31) používá Simplex, není zaručeno, že nalezené minimum je globální. Abych se ujistila, že v blízkém okolí nalezeného minima není žádné významější, spouštěla jsem program z v předchozím běhu programu nalezeného minima. Šířka tohoto okolí je určena nejistotou, kterou výchozím parametrům přisoudíme. Mapování funkce (1.31) v některých parametrech nám dává neúplný odhad nejistoty mapovaných parametrů. Důvody pro to jsou: 1) Mapování jsem prováděla, vždy pouze ve dvou dráhových elementech, zatímco ostatní jsem držela pevné. Pakliže změníme některý z pevných parametrů, může se charakter mapy zcela změnit. 2) Funkce (1.31) nepředstavuje χ^2, protože minimalizace této funkce probíhá ve Fourierově prostoru. Není zřejmé jak hluboká by byla tato minima v χ^2. Tento problém by bylo možné vyřešit tím, že napočítáme velikost χ^2 v přímém prostoru na základě modelu nalezeného programem KOREL. Navzdory tomu má smysl mapovat funkci (1.31), protože její plochy prohledává Simplex a tím určíme množinu řešení k nimž může Simplex konvergovat.

Stáčení přímky apsid

Vliv vnitřní těsné dvojhvězdy na vnější dráhu terciáru studoval metodami poruchového počtu Söderhjelm (1975). Autor práce odvodil vztah (36) pro stáčení přímky apsid vnější dráhy. Ten by měl být platný pro těsnou dvojhvězdu takřka kruhové dráhy, poměr period $P'/P \leq 100$ a dráhy blízké koplanárním. Všechny tyto požadavky jsou dle řešení uvedených v předchozí kapitole splněny. Do vztahu (36) v Söderhjelm (1975) jsem dosadila z tabulek 2.8 a 2.10 a z dráhových parametrů ξ Tau odvozených v závěru druhé kapitoly. Modelová velikost apsi-

dálního pohybu vyšla $P_{\mathrm{E}}'^{\mathrm{MODEL}} = 120\,\mathrm{let}$. Tato hodnota je ve velmi dobré shodě s hodnotou získanou spektrálním disentanglingem $P_{\mathrm{E}}' \approx 125\,\mathrm{let}$ (viz tabulka 2.8).

3.6 Řešení světelné křivky

Světelné křivky měřené především ve filtru U jsou vůči sobě posunuty v magnitudě. Tento vzájemný posuv je dán tím, že při pozorování na observatořích SAAO a Villanova APT byly použity zeslabovací filtry (tzv. šedé filtry), jejich transformace do Johnsonova UBV systému není dokonalá. S vzájemným posuvem světelných křivek si je program PHOEBE schopen poradit. Nemám k dispozici odhady chyb jednotlivých měření, a tak je nezbytné váhovat celé soubory měření (soubory jsou rozdělené na základě filtru a původu). Zvolené váhování souborů silně ovlivňuje velikost výsledného χ^2, který v dané chvíli vychází ≈ 1.5 násobek počtu stupňů volnosti. Zdali je tento nesoulad dán nevhodně zvoleným váhováním souborů dat, nebo špatně voleným modelem není v dané chvíli jasné.

Program PHOEBE dává odhady nejistot nalezených parametrů, pakliže uživatel použije k minimalizaci χ^2 metodu založenou na Gaussově – Newtonově metodě. Ta je schopna nalézt pouze lokální minimum χ^2 a tedy poskytnutý odhad chyb hledaných parametrů je do určité míry formální.

V dané chvíli nejsem schopna spolehlivě určit, které minimum světelné křivky je primární a které je sekundární. Je to dáno tím, že minimum, které v dané chvíli označujeme jako sekundární není pokryté ve všech fázích, dále tím, že zákryty obou složek nejsou úplné a v neposlední řadě i podobností obou složek těsné dvojhvězdy. Díky tomu je odhadovaná nejistota poloměrů obou složek těsné dvojhvězdy $R_{1,2}$ (viz tabulka 2.10) tak vysoká. To že v těchto parametrech panuje tak velká nejistota jsem si ověřila kvalitativně tak, že jsem zkoušela hledat řešení světelné křivky pro různé výchozí poloměry obou složek. Program obvykle našel lokální minimum v blízkosti výchozího nastavení poloměrů. Takto nalezená řešení byla z hlediska velikosti χ^2 rovnocenná. K řešení tohoto problému je třeba mapovat celý prostor parametrů $R_{1,2}$. Naopak poměrně robustně konvergovalo řešení světelné křivky v parametrech: perioda P, epocha primárního minima světelné křivky $T_{\mathrm{min.LC}}$ a sklon dráhy i. Abych otestovala výsledek řešení světelné křivky. Spočítala jsem vzdálenost systému pomocí vztahu (165) v [16] na základě řešení světelné křivky (viz tabulka 2.10). Velikost odčervenalé jasnosti jsem odhadla na základě postupu vyloženého v [16]. Bolometrické korekce jsem dosadila na základě tabulek napočtených Flowerem (1996). Paralaxa systému odhadnutá z řešení světelné křivky: 1) primár $p = 17.3 \pm 0.1\,\mathrm{mas}$ 2) sekundár $p = 17.5 \pm 0.1\,\mathrm{mas}$. Obě hodnoty se poměrně dobře shodují s paralaxou určenou triangulací z družice Hipparcos $p = 15.6 \pm 1.04\,\mathrm{mas}$ (van Leeuwen 2007, 2008). Nejistota paralaxy byla odhadnuta na základě nejistot parametrů T_{eff}^2 a $R_{1,2}$ uvedených v tabulce 2.10.

3.7 Srovnávání syntetických a pozorovaných spekter

Program Interpol i samotná metoda zkoumání pozorovaných spekter jejich srovnáváním se syntetickými spektry v sobě obsahují zanedbání představující systematické chyby. Těmi zanedbáními jsou:

- **Interpolace:** Program nemodeluje hvězdnou atmosféru, pouze interpoluje v rámci již napočítaných modelů hvězdných spekter. V případě, že by se intenzita bodu syntetického spektra I_i jako funkce $\mathrm{T_{eff}}$ a $\log g$ chovala velmi divoce (např. mezi body sítě oscilovala), dávala by použitá metoda zcela chybné výsledky. Použitá metoda interpolace předpokládá, že mezi dvěma body sítě je funkce $I_i\,(T_{\mathrm{eff}}, \log g)$ hladká a spojitá. K ověření předpokladu by stačilo spočítat model syntetického spektra (vyřešením rovnice přenosu záření) pro parametry nalezené programem Interpol a toto spektrum srovnat se spektrem získaným interpolací.

- **Chybějící interpolace v metalicitě:** Program v dané chvíli neinterpoluje v metalicitě Z. Vliv metalicity na výskyt a sílu spektrálních čar je ovšem až druhého řádu. Obojí je určeno především efektivní teplotou T_{eff} dle vztahů (1.5) a (1.4).

- **Chybějící model relativní jasnosti L_{r} složek systému:** V dané chvíli program hledá jednu hodnotu relativní jasnosti složky systému pro celou srovnávanou spektrální oblast. Relativní jasnost je funkcí vlnové délky. Pakliže je rozsah vlnových délek v němž srovnáváme krátký, nedopouštíme se příliš velké chyby.

- **Použití Simplexu:** Simplex vždy zkonverguje pouze do lokálního minima funkce (3.4). Existují metody minimalizace funkcí více proměnných, u nichž je větší pravděpodobnost, že naleznou globální minimum funkce (např. Markov Chain Monte Carlo nebo genetické algoritmy). Tyto metody ovšem vyžadují mnohem více výpočetního času, protože mapují takřka celý prostor parametrů.

- **Normalizace pozorovaných nebo disentanglingem získaných spekter:** Z důvodů, které jsou diskutovány v Příloze A je nezbytné pozorovaná spektra normalizovat vůči hladině spojitého záření celého systému. Syntetická spektra jsou normalizovaná dokonale. V případě spekter pozorovaných je nezbytné normalizaci spekter odhadnout, navíc se nejedná o proces, který by nebylo snadné automatizovat.

- **Použití syntetických spekter:** Samotná syntetická spektra představují pouze modely hvězdných spekter a jsou napočítany s řadou zjednodušení.

- **Váhování srovnávaných spekter:** Nemám odhadnuty nejistoty relativních intenzit spekter získaných spektrálním disentanglingem. Tu lze odhadnout na základě rozptylu bodů v těch částech spektra, kde nejsou spektrální čáry.

Největším nedostatkem programu je absence jakékoliv metody na odhad chyb hledaných parametrů. Nejjednodušší způsob, jak tyto odhady provést je mapování χ^2 (3.4) v okolí nalezeného minima, nebo některá z metod založených na Monte Carlo algoritmech. Nakolik odpovídají nalezené parametry $\mathrm{T_{eff}}$, $\log g$, $\mathrm{v_{rot}} \sin i$, L_{r} a RV skutečnosti představuje spíše test na kvalitu modelů hvězdných atmosfér. Věrohodnost nalezených parametrů (a tedy i hvězdných atmosfér) je nezbytné otestovat na zákrytových dvojhvězdách. Řešením světelné křivky lze nezávisle odhadnout $\mathrm{T_{eff}}$ a $\log g$ obou složek dvojhvězdy.

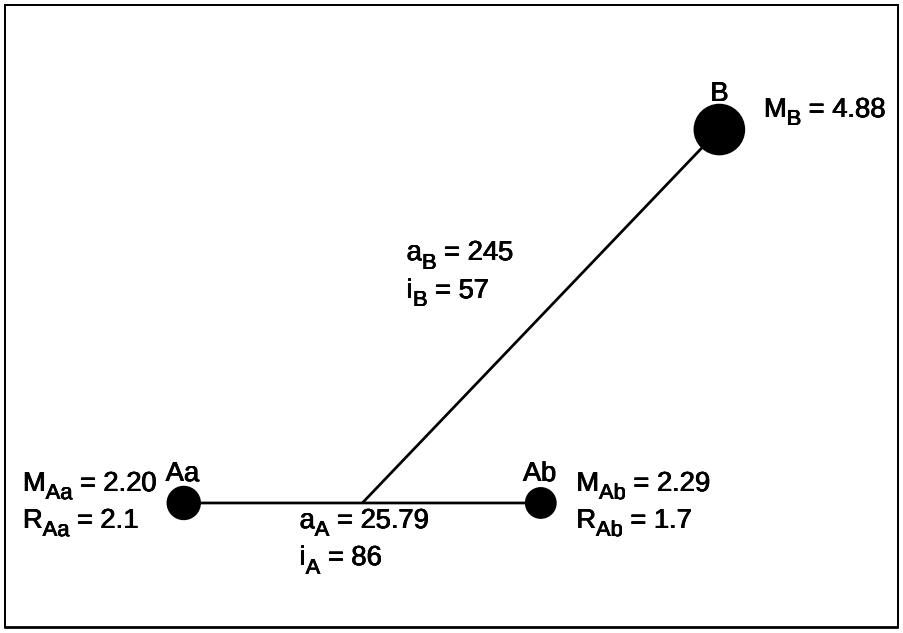
Závěr

V této kapitole jsou podány výsledky práce a je naznačen postup do budoucna.

Obraz ξ Tau

Dráhové řešení KOR1 v tabulce 2.8 nejlépe popisuje tvar vnější a vnitřní dráhy ξ Tau. Novým výsledkem je především nalezení stáčení přímky apsid vnější dráhy s periodou $P'_{\mathrm{E}} \approx 125$ let. Tato hodnota je ve shodě s modelovou hodnotou vypočtenou ze vztahu odvozeného Söderhjelmem (1975) ($P'^{\mathrm{MODEL}}_{\mathrm{E}} = 120$ let). Od výsledků práce Bolton a Grunhut (2007) se dráhové elementy nalezené v rámci diplomové práce liší především ve výstřednosti vnější dráhy $e' = 0.202$ (oproti hodnotě $e' = 0.145$ udané autory zmíněné práce). Na základě řešení světelné křivky (tabulka 2.10) a křivky radiálních rychlostí jsem změřila a zvážila trojhvězdný podsystém ξ Tau: Hmotnost primární složky těsné dvojhvězdy $M_{\mathrm{Aa}} = 2.29 \pm 0.19\,\mathrm{M}_{\odot}$, hmotnost sekundární složky těsné dvojhvězdy $M_{\mathrm{Ab}} = 2.20 \pm 0.15\,\mathrm{M}_{\odot}$, hmotnost vnější terciární složky $M_{\mathrm{B}} = 4.88 \pm 0.94\,\mathrm{M}_{\odot}$, hlavní poloosa vnitřní dráhy $a = 25.79 \pm 0.80\,\mathrm{R}_{\odot}$, hlavní poloosa vnější dráhy $a' = 245 \pm 30\,\mathrm{R}_{\odot}$, poloměr primární složky těsné dvojhvězdy $R_{\mathrm{Aa}} = 2.1 \pm 0.5\,\mathrm{R}_{\odot}$ a poloměr sekundární složky těsné dvojhvězdy $R_{\mathrm{Ab}} = 1.7 \pm 0.5\,\mathrm{R}_{\odot}$. Schéma systému je ukázáno v obrázku 3.3. Výsledky srovnávání spekter ξ Tau získaných spektrálním disentanglingem a syntetických spekter jsou uvedeny v tabulce 3.1. Ze srovnání vyplývá, že primární složka těsné dvojhvězdy je jasnější, chladnější a má menší povrchové zrychlení. Z toho nutně plyne, že musí mít větší poloměr než teplejší sekundár. Tento výsledek zatím nejsem schopna potvrdit ani vyvrátit řešením světelné křivky, protože poloměry obou složek dvojhvězdy jsou odhadnuty s příliš velkou nejistotou. Spektrální rozklady složek těsné dvojhvězdy ukázané v obrázcích 2.8 – 2.12 neobsahují spektrální čáry He I. S největší pravděpodobností jsou obě hvězdy spektrálního typu A. Tomuto typu odpovídají i hmoty vypočtené z dráhových elemntů a teploty odhadnuté srovnáním syntetických spekter s pozorovanými programem Interpol.

Uvedená řešení ovšem představují pouze první „superiteraci“. Systém je zkoumán pomocí tří metod (spektroskopie, fotometrie, srovnání se syntetickými spektry). Nyní je třeba si uvědomit přesnost použitých metod a využívat jich tak, aby se navzájem doplňovaly, tak abych získala co nejvěrnější popis uspořádání systému ξ Tau. Další možností je použití jiných metod. Systém byl již několikrát pozorován interferometrem VEGA (Mourard a kol. 2009). Pakliže se podaří rozlišit vnější a vnitřní dráhu, získáme tak nezávislý odhad jejich sklonů i a i', výstředností e a e', orientace v prostoru a úhlové velikosti jejich hlavních poloos a a a'. V ideálním případě se podaří rozlišit kotouče všech tří složek trojhvězdy a změřit jejich úhlové poloměry $R_{\mathrm{Aa,Ab,B}}$ [mas]. Plánuje se sledování systému družicí MOST, která slouží k velmi přesným fotometrickým pozorováním. Díky jejím pozorováním bude možné doplnit světelnou křivku systému a spolehlivěji ji modelovat.



Obrázek 3.3: Schéma systému ξ Tau. Značení složek trojhvězdy: Aa primární složka těsné dvojhvězdy, Ab sekundární složka dvojhvězdy, B terciár. Značení drah: A vnitřní dráha, B vnější dráha. Uvedené parametry: M_{X} hmotnost v $\mathrm{M}_{\odot}$, R_{X} poloměr v $\mathrm{R}_{\odot}$, a_{X} velikost hlavní poloosy v $\mathrm{R}_{\odot}$, i_{X} sklon dráhy ve stupních. Obrázek není kreslen proporciálně uvedeným hodnotám.

Srovnávání syntetických a pozorovaných spekter

Vyvinula jsem program určený k srovnávání syntetických a pozorovaných spekter vícenásobných hvězdných systémů metodou nejmenších čtverců. Jeho funkčnost byla otestována na spektrech několika systémů (příkladem uveďme ξ Tau, V346 Cen a DN UMa) a předvedena na spektrech systémů ξ Tau a V346 Cen.

Do budoucna jsou plánována následující rozšíření programu Interpol: 1) interpolace v metalicitě hvězdy Z , 2) lepší model relativní jasnosti L_{r} složek systému, 3) odhad nejistoty nalezených parametrů, 4) optimalizace programu pro měření radiálních rychlostí.

Seznam použité literatury

[1] Bolton, C. T., Grunhut, J. H. 2007, IAU Symp., 240, 66.

[2] Campbell, W. W. 1909, ApJ, 29, 224.

[3] Claret, A. 2000, A & A, 363, 1081.

[4] Cowley, A. 1972, AJ, 77, 750.

[5] Fekel, F. C., Jr. 1891, ApJ, 246, 879.

[6] Flower, P. J. 1996, ApJ, 469, 355.

[7] Griffin, R. F., 1967, ApJ, 148, 465.

[8] Gustafsson, B., Bell, R. A., Eriksson, K., Nordlund, A. 1975, A & A, 42, 407.

[9] Hadrava, P. 1990, Contributions of the Astronomical Observatory Skalnate Pleso, 20, 23.

[10] Hadrava, P. 1995, A & AS, 114, 393.

[11] Hadrava, P. 1997, A & AS, 122, 581.

[12] Hadrava, P. 2004, *FOTEL 4 – User's Guide* Public. of the Astr. Inst. of the Czech. Ac. of Sc., 92, 1.

[13] Hadrava, P. 2004, *KOREL – User's Guide* Public. of the Astr. Inst. of the Czech. Ac. of Sc., 92, 15.

[14] Hadrava, P. 2009, arXiv:0909.0172.

[15] Harmanec, P., 1998, A & A, 335, 173.

[16] Harmanec, P., *Základy astronomie a astrofyziky II*, URL: http://astro.troja.mff.cuni.cz/vyuka/AST007/ast007.pdf.

[17] Harmanec, P., Brož, M., *Stavba a vývoj hvězd*, Matfyzpress, 2011.

[18] Harmanec, P., Mayer, P. *Dvojhvězdy*, URL: http://astro.troja.mff.cuni.cz/vyuka/AST019/ast019.pdf.

[19] Harmanec, P, sada programů *HEC22/SORTARCH/ VYPAR*, release Feb 22, 2011, URL: http://astro.troja.mff.cuni.cz/ftp/hec/PHOT

[20] Hillier, D. J., Miller, D. L. 1998, ApJ, 496, 407.

[21] Horn, J., *Rotace Hvězd* 1967, diplomová práce, AsÚ ČSAV.

[22] Horn, J., Kubát, J., Harmanec, P. a kol. 1996, A & A, 309, 521.

[23] Hubený, I., 2012, SYNSPEC, URL: http://nova.astro.umd.edu/Synspec43/synspec.html

[24] Hubený, I., 2012, ROTINS, URL: http://nova.astro.umd.edu/Synspec43/synspec-frames-rotin.html

[25] Hubený, I., 2012, TLUSTY, URL: http://nova.astro.umd.edu/index.html

[26] Koch, R. H. 1990, Bull. d'Inf. du Centre Donnees Stell., 38, 175.

[27] Kurucz, R. L. 2005, Memorie della Societa Astronomica Italiana Supplementi, 8, 14.

[28] Lanz, T., Hubený, I., 2003, ApJS, 146, 417.

[29] Lanz, T., Hubený, I., 2007, ApJS, 169, 83.

[30] van Leeuwen, F. 2007, A & A, 474, 653.

[31] van Leeuewen, F., 2008, VizieR Online Data Catalog, 1311, 0.

[32] Mason, B. D., Martin, C., Hartkopf, W. I. a kol. 1999, AJ, 117, 1890.

[33] McAlister, H. A., ten Brummelaar, T. A., Gies, D. R., et al. 2005, ApJ, 628, 439.

[34] Milne, E. A. 1921, MNRAS, 81, 361.

[35] Mourard, D., Clausse, J. M., Marcotto, A., et al. 2009, A & , 508, 1073.

[36] Nelder, J. A. Mead, R., A simplex method for function minimization, Computer Journal 7, 308–313.

[37] Palacios A., Gebran M., Josselin E., Martins F., Plez B., Belmas M., Sanguillon M., Lèbre A., 2010, A & A 516, A13.

[38] Perryman, M. A. C., ESA, 1997, ESA SPecial Publication, 1200

[39] Powell, M. J. D., 1964 An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, Computer Journal, 7, 155.

[40] Prša, A., Zwitter, T., 2005, ApJ, 628, 426.

[41] Prša, A., 2011, *PHOEBE Scientific Reference*, URL: http://phoebe.fiz.uni-lj.si/.

[42] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., 2007, *Numerical recipes third ed.*, Cambridge University Press.

[43] Rica Romero, F. M. 2010, Revis. Mexic. de Astron. y Astrof., 46, 263.

[44] Rucinski, S. M. 1992, AJ, 104, 1968.

[45] Šidlichovský, M., Vokrouhlický, D., 2012, *Nebeská mechanika*, URL: http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/ davok/scripta-ND1.pdf.

[46] Simkin, S. M. 1974, A & A, 31, 129.

[47] Simon, K. P., Sturm, E., 1994, A & A, 281, 286.

[48] Škoda, P. 1996, Astronomical Data Analysis Software and Systems V, 101, 187.

[49] Söderhjelm, S., 1975, A & A, 42, 229.

[50] Tokovinin, A. A. 1997, A & AS, 125, 75.

[51] Wilson, R. E., Devinney, E. J., 1971, ApJ, 166, 605.

Seznam tabulek

- Tabulka 2.1 — Základní charakteristika hvězdných spekter studovaných v diplomové práci.
- Tabulka 2.2 — Základní charakteristika měření radiálních rychlostí srovnáváním přímého a převráceného profilu měřené spektrální čáry a srovnáváním pozorovaných a syntetických spekter.
- Tabulka 2.3 — Parametry popisující syntetické spektrum ξ Tau použité k měření radiálních rychlostí metodou srovnávání syntetických a pozorovaných spekter.
- Tabulka 2.4 — Dráhová elementy vnější dráhy trojhvězdy získané fitováním křivky radiálních rychlostí terciáru.
- Tabulka 2.5 — Dráhové elementy vnější dráhy trojhvězdy získané fitováním radiálních rychlostí primáru a sekundáru.
- Tabulka 2.6 — Dráhové elementy vnitřní dráhy trojhvězdy získané fitováním radiálních rychlostí primáru a sekundáru.
- Tabulka 2.7 — Seznam spektrálních oblastí rozkládaných metodou spektrálního disentanglingu.
- Tabulka 2.8 — Dráhové elementy vnitřní a vnější dráhy trojhvězdy získané spektrálním disentanglingem.
- Tabulka 2.9 — Základní charakteristika fotometrických měření použitých v diplomové práci.
- Tabulka 2.10 — Výsledky modelování světelné křivky ξ Tau.
- Tabulka 3.1 – Výsledek srovnávání syntetických spekter a rozložených spekter ξ Tau programem Interpol.
- Tabulka 3.2 – Výsledek srovnávání syntetických spekter a rozložených spekter V346 Cen programem Interpol.

Seznam použitých zkratek

- APT: — Automatic Photometry Telescope — Automatický dalekohled sloužící k fotometrickým pozorováním.
- IRAF: — Image Reduction and Analysis Facility — Program sloužící k redukci a analýze astronomických pozorování.
- IUE: – International Ultraviolet Explorer — Družice, která prováděla pozorování v ultrafialové oblasti elektromagnetického záření.
- NOAO: — National Optical Astronomy Observatories — Organizace sídlící v Tucsonu, USA pod kterou je vyvíjen IRAF.
- SAAO: — South African Astronomical Observatory — Jihoafrická astronomická observatoř.

Přílohy

- Příloha A – Redukce elektronických hvězdných spekter
- Příloha B – Odvození vztahu pro brzdnou sílu a tvar a šířku spektrální čáry
- Příloha C – Seznam autorů pozorování použitých v diplomové práci
- Příloha D – Odvození některých základních vztahů popisujících křivku radiálních rychlostí dvojhvězd.

Příloha A

V této kapitole je podán popis redukce elektronických snímků hvězdných spekter, a jak tento postup uplatnit v případě elektronických štěrbinových spekter v balíku programů IRAF.

Redukce hvězdných spekter krok za krokem

Po ukončení expozice objektu je snímek uložen na záznamové médium (nejčastěji ve formátu FITS). Snímek „v surovém stavu“ není možné použít k získání relevatní informace, protože je ovlivněn přístrojovými efekty, není kalibrován ve vlnových délkách a není normalizován vůči hvězdnému kontinuu. Posloupnost kroků vedoucích k odstranění těchto nedostatků nazýváme primární redukcí spekter. Těmi kroky jsou:

- **Odstranění biasu:** Bias je zkreslení signálu způsobené samotným CCD čipem a musí být proto odečteno. Za tím účelem se během noci exponují spektra (tzv. zera) s nulovou délkou expozice a zakrytou kamerou, která nesou pouze signál odpovídající tomuto zkreslení. Abychom dostali co nejpřesnější informaci o biasu (tj. co nejméně zašumělý snímek), pořizujeme během noci několik zero snímků a ty zprůměrujeme. Bias se může v čase měnit, a proto tyto snímky pořizujeme každou noc. Zprůměrovaný snímek odečteme od spekter srovnávacích, hvězdných a flatů.[1]

- **Redukce rozměru snímku:** Málokdy je při expozici osvícený celý čip. Je vhodné oblasti, kam nedopadalo záření, ze snímku odstranit, protože představují nepotřebnou informaci a jejím odstraněním zmenšíme velikost snímku. Takto se upravují flaty, srovnávací a hvězdná spektra.

- **Dělení rovnoměrně osvětleným snímkem:** CCD čip je takřka lineární detektor. Jednotlivé jeho pixely mají ale různě posunutý nulový bod škály intenzity. Abychom se této vady zbavili, exponujeme snímek, při kterém je detektor rovnoměrně osvětlen. Tímto snímkem (tzv. rovnoměrným polem nebo angl. flat) podělíme srovnávací a hvězdná spektra. Během noci pořizujeme několik flatů a ty průměrujeme, abychom dostali co nejméně zašumělý snímek. Tvar flatu se může v čase měnit, a proto pořizujeme flaty každou noc.

- **Extrakce 1D obrazu:** Dvourozměrné hvězdné a srovnávací snímky je třeba převést na jednorozměrné. Toho dosáhneme fitováním maxima signálu podél čipu vhodnými matematickými funkcemi a následnou extrakcí tohoto fitu. Fitování je nezbytné, protože spektrum se na čip neexponuje dokonale rovné.

- **Kalibrace ve vlnových délkách:** Extrahovaný 1D snímek je stále kalibrovaný v lineární detektorové škále. Abychom mohli hvězdné spektrum

[1] V případě, že CCD čip není dostatečně chlazen, pořizujeme namísto zero snímků, snímky tzv. temného proudu. Jejich název je dán tím, že se exponují při zakryté kameře. Délka expozice temného proudu je stejná jako délka expozice spektra od nějž chceme temný proud odečítat.

kalibrovat ve vlnových délkách, pořizujeme spektra srovnávací. Vlnové délky spektrálních čar srovnávacích spekter známe. To nám umožňuje měřit na těchto spektrech závislost vlnové délky na lineární poloze na detektoru. Tuto závislost fitujeme buď vhodnou modelovou funkcí nebo přímo disperzní relací mřížkového spektrografu (A.1).

$$\lambda = \frac{D}{k}(\sin\alpha + \sin(K\frac{s - s_0}{f} - \psi_0 - \alpha)), \tag{A.1}$$

kde λ je vlnová délka, s lineární poloha na detektoru, D značí mřížkovou konstantu, k řád spektra, α natočení mřížky, K a ψ_0 přístrojové konstanty. Protože se nulový bod škály s může v čase měnit, pořizujeme srovnávací spektrum před a po expozici spektra hvězdného. Disperzní relaci poté interpolujeme k okamžiku středu expozice spektra hvězdného.

- **Normalizace spektra vůči hvězdnému kontinuu:** Ačkoliv se nám úspěšně podařilo zbavit se vad vznikajících záznamem spektra na CCD čip, původní téměř planckovské spektrum je stále pokroucené mezihvězdnou, atmosferickou a přístrojovou extinkcí. Tyto vlivy odstraníme tím, že modelujeme pokroucené kontinuum vhodnými matematickými funkcemi a tímto modelem spektrum podělíme. Problémem může být výběr bodů spojitého záření hvězdy. Abychom správně vybrali oblasti, kde nejsou spektrální čáry, je vhodné nahlédnout do spektra hvězdy analogického spektrálního typu, které máme již spolehlivě normalizované nebo do syntetického spektra.

- **Odstranění kosmického záření:** Během expozice dopadá na detektor kosmické záření. Ve spektru se dopad částice kosmického záření projeví jako velmi úzká emisní čára, protože je většinou ovlivněn pouze jeden pixel detektoru. Takovouto emisi je třeba vymazat a v ovlivněném bodě interpolovat.

Základy práce s IRAFem

Postup redukce elektronických spekter v IRAFU je sepsán na základě pokynů dr. M. Šlechty a poznámek dr. D. Korčákové a je šitý na míru spektrům pořizovaným v coudé ohnisku ondřejovského 2-m dalekohledu. Týká se tedy pouze elektronických spekter, která obsahují právě jeden řád. Postup má do jisté míry obecnou platnost, protože jsem jej úspěšně použila při redukci spekter z David Dunlap Observatory. Není to ovšem pravidlem, a tak je vhodné po každém mezikroku při redukci zkontrolovat, zdali výsledek odpovídá naším očekáváním.

IRAF[2] (zkratka pro Image Reduction and Analysis Facility) je balík programů určený k redukci a analýze snímků. Program je vyvíjen skupinou při National Optical Astronomy Observatories (NOAO) v Tucsonu v Arizoně (USA).

Příkazy budeme značit kurzívou, jejich parametry budeme umisťovat do hranatých závorek. Základní uživatelská nastavení se ukládají do souboru *login.cl*. Aby tato nastavení fungovala je třeba program spouštět z adresáře, kde je tento

[2]Program, jeho popis a detailní návody k jeho používání je k dispozici na webové stránce: http://iraf.noao.edu/.

soubor uložen. Program je nezbytné spouštět ve vhodném terminálu např. *xgterm*. V souboru *login.cl* můžeme nastavit, které balíky programů se mají načítat rovnou po spuštění programu, zprovoznit některé linuxovské příkazy, nebo vybrat textový editor. IRAF spouštíme příkazem *cl* nebo *ecl*[3]. IRAF se skládá z různých balíků programů. Tyto balíky se buď sestávají z jednotlivých příkazů (tzv. tasků), nebo z dalších balíků. Uspořádání má strukturu stromu. Pro načtení balíku je nutné napsat jeho jméno do příkazové řádky. K zpracování snímků používáme tasky. Task můžeme zavolat tím, že napíšeme jeho jméno do příkazové řádky. To většinou není příliš šikovné, protože každý task je kontrolován řadou parametrů. Vhodnější je tedy zavolat task příkazem *epar [názevtasku]*. Tím se otevře tabulka ve které lze editovat jednotlivé parametry tasku. Editaci parametrů tasku lze opustit s uložením voleb stisknutím *ctrl+D*, nebo bez uložení voleb stisknutím *ctrl+C*. Případně můžeme task po nastavení parametrů okamžitě spustit příkazem *:go*. Uživatelská nastavení parametrů tasků se ukládají do adresáře *uparm*, který je umístěn ve stejném adresáři jako soubor *login.cl*. Dostupné volby parametru tasku zjistíme pokud do příslušného řádku napíšeme *?*. Nápovědu k celému tasku zobrazíme příkazem *help [názevtasku]* do příkazové řádky. Některé tasky mají grafické rozhraní (proto také není volba terminálu, ve kterém lze pracovat libovolná). Některé parametry tasku lze měnit přímo v tomto rozhraní příkazem *:názevparametru [hodnota]*.

Pro zobrazení dvoudimensionálního snímku je vhodný externí program ds9, který spustíme příkazem *!ds9* (vykřičník před příkazem umožní zavolat linuxovskou příkazovou řádku). Vybraný snímek zobrazíme příkazem *display [názevsnímku]*. Pro zobrazení jednorozměrného snímku jsou vhodné tasky *implot* (pro snímky kalibrované v detektorové škále) a *splot* (pro snímky kalibrované ve vlnových délkách). Pro zobrazení a úpravu hlavičky daného snímku je vhodný task *hfix*.

IRAF obsahuje velké množství balíků, z nichž pouze část je užitečná k redukci hvězdných spekter. Některé k tomu užitečné tasky (některé kroky redukce lze provést několika různými tasky) jsou vypsané v dalším oddíle.

Redukce elektronických spekter v IRAFu

V tabulkách je vždy uvedené nastavení pouze *klíčových* parametrů daného tasku. Nastavení parametrů, které nejsou uvedeny, lze ponechat původní. Do řady tasků lze za vstup a výstup použít celé seznamy spekter. Vzhled takového seznamu je uveden v tabulce 3.3. Pakliže není řečeno jinak, budou mít všechny vstupní a výstupní seznamy toto uspořádání.

Odstranění biasu: Zero snímky zprůměrujeme pomocí tasku *imcombine*. Klíčové parametry tasku nastavíme dle tabulky 3.4. Samotné odstranění biasu provedeme pomocí tasku *imarith*. Klíčové parametry tasku nastavíme dle tabulky 3.5.

Redukce rozměru snímku: Odstřižení nepotřebných oblastí snímku provedeme pomocí tasku *imcopy*. Nejprve je nutné zjistit, kam na snímek se objekt exponoval. Snímek si zobrazíme pomocí tasku *implot*. Zobrazí se řez snímkem

[3]Pokud je IRAF spuštěn příkazem ecl, chová se jeho příkazová řádka podobně té linuxovské.

Tabulka 3.3: Vzorové uspořádání vstupních a výstupních seznamů IRAFu.

spektrum01.fits
spektrum02.fits
spektrum03.fits
.
.
.
spektrum99.fits

Tabulka 3.4: Nastavení parametrů tasku *imcombine* pro zprůměrování zero snímků.

input	= @zero.lis	- vstupní seznam obsahující jména zero spekter
output	= Zero	- zprůměrovaný snímek
combine	= average	- chceme průměr všech snímků
reject	= sigclip	- do průměru se počítají jen body ležící uvnitř 3σ
outtype	= real	- průměr chceme spočítat v reálných číslech

s velikostí signálu na svislé ose a polohou na čipu v pixelech na ose vodorovné. Klávesou *c* zobrazíme sloupec spektra a klávesou *l* řádek spektra. Určitou oblast grafu zvětšíme stiknutím klávesy *w* a následným dvojím stiknutím klávesy *e* v levém dolním a pravém horním rohu zvětšované oblasti. Souřadnice a signál na určitém pixelu zobrazíme stisknutím klávesy *mezera*. Práci v grafickém prostředí ukončíme stiskem klávesy *q*. K odstřihnutí nepotřebných oblastí nastavíme task *imcopy* dle tabulky 3.6. Aby došlo kzkopírování jen požadovaných sloupců a řádků spektra je nezbytné za jednotlivé záznamy ve vstupním seznamu napsat příslušné rozsahy sloupců a řádků ve formátu „spektrum[sloupec:sloupec, řádek:řádek]“.

Dělení rovnoměrně osvětleným snímkem: Flat snímky zprůměrujeme pomocí tasku *imcombine* (stejně jako v případě zero snímků). Je vhodné zprůměrovaný snímek podělit maximální hodnotou na snímku pomocí tasku *imarith* a tím jej „normalizovat“. Výsledným snímkem podělíme srovnávací a hvězdná spektra pomocí tasku *imarith*.

Extrakce 1D obrazu: K extrakci 1D spekter slouží task *apall*. V ideálním případě task spektrum vyčistí od kosmického záření. Parametry tasku nastavíme dle tabulky 3.7.

Tabulka 3.5: Nastavení parametrů tasku *imarith* pro odečtení biasu.

operand1	= @seznam1	- vstupní seznam spekter u nichž chci odečíst bias
op	= -	- operace odčítání
operand2	= Zero	- bias
result	= @seznam2	- výstupní seznam upravených spekter
pixtype	= real	- chceme výsledek operace v reálných číslech
calctype	= real	- signál na snímku je v reálných číslech

Tabulka 3.6: Nastavení tasku *imcopy* pro redukci rozměru snímků.

input	= @seznam1	- vstupní seznam spekter
output	= @seznam2	- výstupní seznam spekter

Tabulka 3.7: Nastavení parametrů tasku *apall* pro extrakci hvězdného spektra.

input	= hvězda	- hvězdné spektrum, zbavené biasu, ostříhané a odflatované
output	= hvězda.e	- vyřezané 1D hvězdné spektrum
apertures	= 1	- spektrum obsahuje pouze 1 řád
reference	=	- nechci používat referenční spektrum
interac	= yes	- zapne interaktivní režim
resize	= no	- apertura je brána z pevného intervalu
extract	= yes	- chci extrahovat spektrum
extras	= no	- extrahuje se pouze spektrum
b_ funct	= legendre	- chci fitovat pozadí
b_ order	= 3	- řád funkce fitující pozadí
b_ naver	= 3	- pozadí se zprůměruje po třech pixelech
b_ low_ r	= 3	- cokoliv pod 3σ se zahodí
b_ high_ r	= 3	- cokoliv nad 3σ se zahodí
b_ grow	= 0	- nechci zahazovat okolní pixely
t_ step	= 10	- při vyhledávání řádu se sbinuje 10 pixelů
t_ func	= legendre	- funkce fitující polohu spektra na čipu
t_ order	= 3	- řád této funkce
backgro	= fit	- chceme fitovat pozadí
clean	= yes	- chceme odstranit kosmiky

Po spuštění se objeví grafické rozhraní. Klávesami *u*, *l* vybereme aperturu. Stiskem klávesy *b* přejdeme na fitování pozadí. Je třeba vybrat oblasti, které se použijí k fitování pozadí. Stiskem klávesy *z* smažeme špatně vybrané oblasti, dvojím stiskem klávesy *s* vybereme oblasti nové. Stiskem klávesy *f* fitujeme pozadí. Pokud jsme s průběhem fitu spokojeni ukončíme fitování pozadí stiskem klávesy *q*. Dalším stiskem *q* opustíme výběr apertury a začne proces extrakce snímku. Po jeho ukončení si můžeme extrahované spektrum prohlédnout pomocí tasku *implot*. Pro extrakci srovnávacího spektra nastavíme task *apall* dle tabulky 3.8.

Tabulka 3.8: Nastavení parametrů tasku *apall* pro extrakci srovnávacího spektra.

input	= srovna	- srovnávací spektrum, zbavené biasu, ostříhané a odflatované
output	= srovna.e	- vyřezané 1D srovnávací spektrum
apertures	= 1	- spektrum obsahuje pouze 1 řád
reference	= hvězda	- hvězdné spektrum před extrakcí nám slouží jako vzor
interac	= yes	
recente	= no	
resize	= no	
edit	= no	
trace	= no	
fittra	= no	
extract	= yes	
extras	= no	
backgro	= none	- nechceme fitovat pozadí

Díky tomu, že používáme hvězdné spektrum jako referenční proběhne celý proces automaticky.

Kalibrace ve vlnových délkách: Abychom mohli kalibrovat hvězdné spektrum ve vlnové délce, kalibrujeme nejprve spektra srovnávací. K tomu slouží task *identify*. Nastavení klíčových parametrů je uvedeno v tabulce 3.9. Po spuštění

Tabulka 3.9: Nastavení parametrů tasku *identify* pro kalibraci srovnávacích spekter ve vlnových délkách.

images	= srovna.e	- extrahovaná srovnávací spektra
coordli	= linelist$ fear.dat	- seznam spektrálních čar použité lampy distribuovaný společně s IRAFem, pro vlastní seznam třeba zadat cestu
ftype	= emission	- srovnávací spektrum je emisní
functio	= legendre	- polynom, kterým budeme fitovat disperzi
order	= 3	- řád polynomu

se objeví grafické rozhraní. Vybereme spektrální čáru. Po stisknutí klávesy *m* se zobrazí výzva k zadání vlnové délky spektrální čáry. Špatnou identifikaci smažeme klávesou *d*. Je vhodné identifikovat několik spektrálních čar napříč celým spektrem a následně spočítat zkusmý fit stiknutím klávesy *f*. Pokud jsme s fitem spokojeni, můžeme stiskem klávesy *l* nechat automaticky identifikovat zbylé spektrální čáry. Spočteme další fit. Smažeme body, které hodně uskakují. RMS výsledného fitu by mělo být ≤ 0.01 Å. Pakliže jsme s fitem spokojeni opustíme kalibraci stiskem klávesy *q*. Disperzní relaci ke středu expozice hvězdného spektra spočteme pomocí tasku *refspectra*. Klíčové parametry nastavíme dle tabulky. 3.10. Spočtenou disperzní relaci aplikujeme na hvězdné spektrum pomocí tasku *dispcor*. Klíčové parametry nastavíme dle tabulky 3.11.

Tabulka 3.10: Nastavení parametrů tasku *refspectra* pro výpočet disperzní relace.

input	= hvezda.e	- extrahované hvězdné spektrum
referen	= srov.e1, srov.e2	- extrahovaná srovnávací spektra
ignorea	= no	- spektra obsahují pouze 1 řád
sort	= UTMIDDLE	- klíč v hlavičce, podle kterého se vstupní spektra setřídí v čase
time	= yes	- v případě, že mám dvě srov. spektra
timewrap	= 17.	- počátek noci

Tabulka 3.11: Nastavení tasku *dispcor* pro kalibraci hvězdného spektra ve vlnových délkách.

input	= hvezda.e	- extrahované hvězdné spektrum
output	= hvezda.el	- výstupní hvězdné spektrum kalibrované ve vlnových délkách

Heliocentrická korekce: Heliocentrickou korekci spočteme pomocí tasku *rvcorrect*. Před samotným použitím procedury je třeba ujistit se, zdali je v hlavičce spektra zaznamenán čas středu expozice hvězdného spektra UTMIDDLE. Parametry tasku nastavíme dle tabulky 3.12. Task *rvcorrect* korekce pouze spočítá.

Tabulka 3.12: Nastavení tasku *rvcorrect* pro výpočet heliocentrické korekce.

images	= hvezda.el	- vstupní spektrum
header	= yes	- načte informace z hlavičky
input	= yes	
imupdat	= yes	- hodnota korekce se zapíše do hlavičky
observa	= ondrejov	- observatoř, jak je v seznamech distribuovaných s IRAFem
vobs	= 0.	pozorovaná rychlost
hjd	= 0.	heliocentrické juliánské datum
vhelio	= 0.	heliocentrická rychlost
vlsr	= 0.	rychlost Slunce

Posun spektra o spočtenou heliocentrickou rychlost provedeme pomocí tasku *dopcor*. Nastavení klíčových parametrů je v tabulce 3.13.

Normalizace spektra vůči hvězdnému kontinuu: Normalizaci spektra vůči hvězdnému kontinuu provedeme pomocí tasku *continuum*. Nastavení klíčových parametrů je uvedeno v tabulce 3.14. Po spuštění tasku se objeví grafické rozhraním, které nám umožní změnit parametry fitu, případně z něj vyloučit další body stiskem klávesy *d*. Nový fit spočteme stisknutím klávesy *f*. Pokud jsme s výsledkem spokojeni, ukončíme práci stisknutím klávesy *q*. Nyní již je spektrum hvězdy připravené k fyzikálním měřením.

Tabulka 3.13: Nastavení tasku *dopcor* pro posun spektra o heliocentrickou korekci *vel*.

input	= hvezda.el	- vstupní kalibrované spektrum
output	= hvezda.elh	- výstupní spektrum
redshift	= vel	- spočtená korekce v kms^{-1}
isveloc	= yes	- vel je rychlost
add	= no	- nechci přičíst *vel* k již spočtené disperzní relaci.

Tabulka 3.14: Nastavení tasku *continuum* pro normalizaci spektra vůči hvězdnému kontinuu.

input	= hvezda.elh	- vstupní kalibrované spektrum
output	= hvezda.elhn	- výstupní normalizované spektrum
functio	= legendre	- polynom k fitování kontinua
order	= 3	- řád polynomu
interact	= yes	- zapne interaktivní režim
sample	= @seznam	- seznam intervalů, kterými chci fitovat kontinuu.

Příloha B

Brzdná síla

Je-li nabitá částice urychlena, potom musí dle klasické fyziky vyzařovat s výkonem P daným Larmorovým vztahem

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}, \tag{B.1}$$

kde q je náboj vyzařující částice, a zrychlení částice, ε_0 permitivita vakua a c rychlost světla ve vakuu. Zbavuje-li se částice energie, musí na ni nutně působit brzdná síla. Celková práce vykonaná brzdnou silou $\mathbf{F}_{\mathrm{rad}}$ musí být rovna množství vyzářené energie. Musí tedy platit vztah

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\mathrm{rad}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) dt = 0. \tag{B.2}$$

Integrací druhého členu per partes dostaneme výraz

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\mathrm{rad}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right] - \int_{t_1}^{t_2} \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} dt = 0. \tag{B.3}$$

V případě, že platí některý z následujících dvou vztahů

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t_1) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t_2), \tag{B.4}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0, \tag{B.5}$$

je druhý člen nulový. První a třetí výraz můžeme sloučit do jednoho integrálu

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_{\mathrm{rad}} - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = 0. \tag{B.6}$$

Výraz na levé straně rovnice je nulový právě tehdy, když je integrand nulový. Dostáváme tak rovnici

$$\mathbf{F}_{\mathrm{rad}} = m\tau \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}, \tag{B.7}$$

kde τ je dáno vztahem

$$\tau = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}, \tag{B.8}$$

kde m je hmotnost vyzařující částice. Nejedná se o pohybovou rovnici, ale ukazuje se, že jedno z jejích řešení je nefyzikální. Rovnici je možné řešit v případě, že brzdná síla je mnohem menší než vnější síla působící na částici $\mathbf{F}_{\mathrm{rad}} \ll \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$. V takovém případě lze psát vztah

$$\mathbf{F}_{\mathrm{rad}} = m\tau \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = \tau \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2 m\mathbf{r}}{dt}\right) = \tau \frac{d}{dt}\left(\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} + m\tau \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right). \tag{B.9}$$

Uvážíme-li předpoklad, můžeme potom psát rovnici

$$\mathbf{F}_{\mathrm{rad}} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\right). \tag{B.10}$$

Výhodou toho způsobu řešení rovnice (B.7) je, že tím z množiny jejích řešení zmizí výše zmiňované nefyzikální řešení.

Záření harmonicky vázané částice

V rámci klasické fyziky lze vysvětlit spektrální čáry jakožto záření harmonického oscilátoru o vlastní frekvenci ω_0, která odpovídá frekvenci příslušného elektronového přechodu. Pracujme v jednom rozměru. Vnější síla $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$ působící na částici je dána vztahem

$$\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = -kx, \tag{B.11}$$

kde $k = m\omega_0^2$ a m je hmotnost částice. V takovém případě je brzdná síla $\mathbf{F}_{\mathrm{rad}}$ dána, dle vztahu (B.10), vztahem

$$\mathbf{F}_{\mathrm{rad}} = -k\tau\frac{dx}{dt}. \tag{B.12}$$

Pohybová rovnice mají tedy tvar

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\tau\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{B.13}$$

Řešení této pohybové rovnice mají tvar

$$x(t) = x_0\left[\exp\left(\frac{1}{2}\left[-\omega_0^2\tau + 2i\omega_0\right]t\right) + \exp\left(\frac{1}{2}\left[-\omega_0^2\tau - 2i\omega_0\right]t\right)\right]. \tag{B.14}$$

Zajímá nás především spektrum oscilátoru, tedy Fourierův obraz řešení (B.14) $x(\omega) = F(x(t))$, kde ω je frekvence. Ten je dán vztahem

$$x(\omega) = \frac{x_0}{4\pi}\left[\frac{1}{\omega_0^2\tau - i(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{\omega_0^2\tau - i(\omega - \omega_0)}\right]. \tag{B.15}$$

Vztah (B.15) dosadíme do vztahu pro výkon dipólového záření

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{2\omega^4}{3\varepsilon_0 c^3}|p(\omega)|^2, \tag{B.16}$$

a uvážíme-li, že k absorpci nebo emisi záření dojde v případě, že $\omega \approx \omega_0$, můžeme zanedbat první člen vůči druhému v rovnici (B.15). Dostaneme tak rovnici

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{2\omega^4 e^2}{3\varepsilon_0 c^3}\frac{x_0^2}{16\pi^2}\frac{1}{\frac{\omega_0^4\tau^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2}. \tag{B.17}$$

Dalšími algebraickými úpravami a označením $\Gamma = \omega_0^2\tau$ už dostáváme tzv. klasický tvar spektrální čáry daný vztahem

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2\frac{\frac{\Gamma}{2\pi}}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \tag{B.18}$$

Jedná se o Lorenzovu křivku. Klasická šířka spektrální čáry ve vlnových délkách λ je dána vztahem

$$\Delta\lambda \;=\; \Delta\frac{2\pi c}{\omega} = 2\pi c\frac{\Delta\omega}{\omega^2} \;\simeq\; 2\pi c\frac{\Gamma}{\omega_0^2} \;=\; 2\pi c\tau \;\doteq\; 10^{-14}\,\mathrm{m} \tag{B.19}$$

Ve spektrech hvězd takto úzké spektrální čáry nepozorujeme, protože jsou rozšířené vlivy vypsanými v první kapitole diplomové práce.

Příloha C

V této příloze jsou uvedeni autoři spektroskopických a fotometrických pozorování ξ Tau použitých v této práci.

Spektroskopická pozorování

V tabulce 3.15 jsou uvedeni autoři elektronických spekter použitých v této práci. Tabulka byla sestavena na základě údajů uvedených v hlavičkách studovaných spekter ξ Tau.

Tabulka 3.15: Seznam astronomů, kteří pořídili elektronická spektra použitá v této práci. Zkratky observatoří: OND = Observatoř Ondřejov, Česká Republika, DDO = David Dunlap Observatory, Kanada a IGE = Observatório do Instituto Geográfico do Exército, Portugalsko.

Astronom	Observatoř
Bolton, C. T.	DDO
Harmanec, P.	OND
Korčáková, D.	OND
Koubský, P.	OND
Mayer, P.	OND
Nemravová, J.	OND
Ribeiro, J.	IGE
Šlechta M.	OND
Votruba, V.	OND
Wolf, M.	OND
Zasche, P.	OND

Fotometrická pozorování

V tabulce 3.16 jsou uvedeni autoři fotometrických pozorování pořízených na hvarské observatoři, SAAO a Villanova APT. Fotometrie pořízená družicí Hipparcos byla převzata z katalogu HIPPARCOS (Perryman a ESA 1997).

Tabulka 3.16: Seznam autorů fotometrických pozorování použitých v této práci pořízených na observatořích: Hvar = Hvarská observatoř, Chorvatsko, SAAO = Jihoafrická astronomická observatoř, Jihoafrická Republika, Vill = Villanova APT, USA.

Astronom	Observatoř
Božić, H.	Hvar
Engle, S.	Vill
Harmanec, P.	Hvar
Nemravová, J.	Hvar
Zasche, P.	Hvar, SAAO

Příloha D

V následujících odstavcích si ukážeme odvození vztahů (1.18), (1.21), (1.22) a (1.24). Mějme dvojhvězdu, jejíž pohyb je popsán prvním Keplerovým zákonem (1.17). V soustavě spojené s ohniskem elipsy (x, y) bude pohyb hvězdy popsán vztahem

$$\begin{aligned} x &= r\cos v \\ y &= r\sin v, \end{aligned} \tag{D.1}$$

kde v je pravá anomálie. V soustavě spojené s pozorovatelem si zvolme za rovinu (x', y') nebeskou sféru. Potom bude radiální rychlost hvězdy dána pouze průmětem vektoru rychlosti hvězdy do směru z'. Transformace souřadnic ze soustavy spojené s ohniskem elipsy do soustavy pozorovatelovy jsou dány vztahem

$$\begin{aligned} x' &= (\cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\cos i\sin\omega)x - \\ &- (\cos\Omega\sin\omega + \sin\Omega\cos i\cos\omega)y, \\ y' &= (\sin\Omega\cos\omega - \cos\Omega\cos i\sin\omega)x + \\ &+ (-\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos i\cos\omega)y, \\ z' &= x\sin i\sin\omega + y\sin i\cos\omega = \\ &= r\sin(v + \omega)\sin i, \end{aligned} \tag{D.2}$$

pracujeme s Keplerovými dráhovými elementy a tedy i je sklon dráhy, Ω délka výstupného uzlu dráhy a ω je argument pericentra. V prvním kroku derivujeme souřadnici z'. Ta je dána vztahem

$$\dot{z}' = [r\cos(v + \omega)\dot{v} + \dot{r}\sin(v + \omega)]\sin i. \tag{D.3}$$

Zderivováním vztahu (1.17) dostaneme vztah

$$\dot{r} = \frac{a\,(1 - e^2)\,e\sin v\sin(v + \omega)}{(1 + e\cos v)^2}\dot{v}. \tag{D.4}$$

Označme si $\dot{z}' = RV$ a dosazením vztahu (D.4) do vztahu (D.3) dostaneme vztah

$$RV = \frac{r^2\dot{v}\sin i}{a\,(1 - e^2)}\left[e\cos v\cos(v + \omega) + e\sin v\sin(v + \omega) + \cos(v + \omega)\right]. \tag{D.5}$$

S využitím goniometrických vzorců je možné vztah (D.5) přepsat do tvaru

$$RV = \frac{r^2\dot{v}\sin i}{a\,(1 - e^2)}\left[\cos(v + \omega) + e\cos\omega\right] \tag{D.6}$$

Nyní využijeme druhého Keplerova zákona. Pro případ elips lze tento zákon zapsat ve tvaru

$$r^2\dot{v} = konst = \frac{M}{\mu} = \sqrt{Gma\,(1 - e^2)}, \tag{D.7}$$

kde M je celkový moment hybnosti, μ redukovaná hmostnost, m celková hmotnost soustavy. Dosazením vztahu (D.7) do vztahu (D.6) dostaneme vztah

$$RV = \sqrt{\frac{Gm}{a\,(1 - e^2)}}\sin i\,[\cos(v + \omega) + e\cos\omega]\,. \tag{D.8}$$

S pomocí třetího Keplerova zákona

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{Gm}{4\pi^2}, \tag{D.9}$$

kde P je oběžná perioda dvojhvězdy, je možné vztah (D.8) přepsat do tvaru

$$RV = \frac{2\pi a\sin i}{P\,(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}\,[\cos(v + \omega) + e\cos\omega]\,. \tag{D.10}$$

Nyní si už jen zavedeme značení

$$K = \frac{2\pi a\sin i}{P\,(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{D.11}$$

a můžeme psát vztah (D.10) ve tvaru

$$RV = K\,[\cos(v + \omega) + e\cos\omega]\,, \tag{D.12}$$

který je, přičteme-li k oběma stranám rovnice rychlost těžiště dvojhvězdy vůči pozorovateli γ, totožný se vztahem (1.18). Zároveň je vidět, že vztah (1.21) dostaneme jednoduchou úpravou vztahu (D.11). Modelováním křivky radiálních rychlostí jsme schopni určit velikost $a\sin i$. Funkce hmoty potom není nic jiného než třetí Keplerův zákon, kde ovšem dosazujeme velikost hlavní poloosy primární složky a_1 redukovanou o sinus sklonu dráhy

$$f_1(M) = \frac{4\pi^2 a_1^3\sin^3 i}{GP^2}. \tag{D.13}$$

Z třetího Keplerova zákona plyne vztah

$$\frac{a_2}{a} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}, \tag{D.14}$$

kde indexem jedna značíme primární složku dvojhvězdy a indexem dva sekundární složku dvojhvězdy. Dosazením ze vztahu (D.14) do vztahu (D.13) a opětovným využitím třetího Keplerova zákona (D.9) dostaneme vztah

$$f_1(M) = \frac{M_2^3\sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{q^3}{(1 + q^2)}M_1\sin^3 i, \tag{D.15}$$

který je totožným se vztahem (1.22). Zbývá se podívat, z čeho vyplývá zavedení hmotové funkce pomocí měřitelných veličin. Vyjdeme ze vztahu pro poloviční amplitudu křivky radiálních rychlostí K (D.11) a vyjádříme si velikost hlavní poloosy dráhy primáru až na sinus sklonu

$$a_1\sin i = \frac{K_1 P\,(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi}. \tag{D.16}$$

Dosazením do definice hmotové funkce primáru (D.13) a využitím třetího Keplerova zákona dostaneme vztah

$$f_1(M) = \frac{PK_1^3 (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi G}, \tag{D.17}$$

který je totožný s výrazem ze vztahu (1.22). K nalezení vztahu (1.24) dosadíme ze vztahu (D.16) do vztahu (D.14) a dostaneme

$$M_1 = \frac{P}{2\pi \sin i} K_2 \left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(M_1 + M_2)}{a}. \tag{D.18}$$

Dosazením z třetího Keplerova zákona (D.9) lze vztah (D.18) upravit do tvaru

$$M_1 = \frac{P}{2\pi \sin i} K_2 \left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4\pi^2 a^2}{GP^2}. \tag{D.19}$$

Opětovným dosazením ze vztahu (D.16) a jeho obdoby pro sekundární složku dvojhvězdy, dostaneme vztah

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{P}{2\pi \sin i} K_2 \left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4\pi^2}{GP^2} \frac{P^2}{4\pi^2 \sin^2 i} (K_1 + K_2)^2 \left(1 - e^2\right) \\ &= \frac{K_2 (K_1 + K_2)^2 P (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi G \sin^3 i}, \end{aligned} \tag{D.20}$$

který je shodný se vztahem (1.24).